



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Estudio experimental y numérico de la influencia de la
rigidez en un disipador pasivo tipo muelle

presentada por

Ing. Víctor Iván Rodríguez Reyes

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Director de tesis

Dr. Dariusz Slawomir Szwedowicz

Codirector de tesis

Dr. Quirino Estrada Barbosa

Cuernavaca, Morelos, México. Enero de 2020.



"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Morelos, **22/enero/2020**

OFICIO No. SAC/060/2020
Asunto: Autorización de impresión de tesis

ING. VÍCTOR IVÁN RODRÍGUEZ REYES
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
P R E S E N T E

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "*Estudio experimental y numérico de la influencia de la rigidez en un disipador pasivo tipo muelle*", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE
Excelencia en Educación Tecnológica®
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"

DR. GERARDO VICENTE CUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



SEP TecNM
CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

C.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera. Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente.

GVGR/chg



Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 4106, e-mail: dir_cenidet@tecnm.mx

www.tecnm.mx | www.cenidet.edu.mx





"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Mor., **22/enero/2020**

OFICIO No. DIM/017/2019
Asunto: Aceptación de documento de tesis
CENIDET-AC-004-M14-OFICIO

C. DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. Ing. Víctor Iván Rodríguez Reyes, con número de control M18CE030, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado Estudio experimental y numérico de la influencia de la rigidez en un disipador en un disipador pasivo tipo muelle, hemos encontrado que se han realizado todas las observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

Dr. Dariusz Slawomir Szwedowicz
Director de tesis

Dr. Quirino Estrada Barbosa
Codirector de Tesis

Dr. Eladio Martínez Rayón
Revisor 1

Dra. Claudia Cortés García
Revisor 2

Dr. Jorge Colín Ocampo
Revisor 3

C.p. Guadalupe Garrido Rivera Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Víctor Iván Rodríguez Reyes Estudiante
Expediente

ABO/mrs la r

Agradecimientos

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por todo el apoyo brindado y la formación académica otorgada a través de sus profesores.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante la realización de mis estudios de maestría.

A mis asesor de tesis el Dr. Dariusz Szwedowicz por la orientación y apoyo que me otorgó para la realización de este proyecto, paciencia, amistad, enseñanzas y aportaciones para mi formación profesional. Y de igual forma al Dr. Quirino Estrada.

A los miembros del comité revisor: Dr. Eladio Martínez Rayón, Dra. Claudia Cortés García y Dr. Jorge Colín Ocampo, por su apoyo y por sus valiosas aportaciones durante la revisión de este trabajo.

A todos los investigadores del área de diseño mecánico de este centro de investigación que contribuyeron en mi formación profesional.

A mis compañeros de generación: Arturo, Luis, Fernando, Agustín, Wendy, Benjamín, Julio y Danier, por todas las experiencias compartidas y por su apoyo a lo largo de toda la maestría.

Igualmente, a mis compañeros tesisistas del Dr. Dariusz: Julio, Miguel y Ulises, por el apoyo y las ideas generadas en las reuniones de trabajo.

Especialmente a mis padres y a toda mi familia, por su amor, su apoyo incondicional en las decisiones que he tomado para trazar mi propio camino en la vida y por estar siempre a mi lado. Sin ustedes esto no habría sido posible.

Contenido

Contenido	v
Índice de figuras	vii
Índice de tablas	ix
Resumen	x
Capítulo 1. Estado del arte	1
1.1 Amortiguamiento de impacto.....	1
1.2 Disipadores pasivos de energía	2
1.3 Muelles de fricción	4
1.4 Discusión.....	15
1.5 Objetivo general.....	16
1.5.1 Objetivos específicos.....	16
1.5.2 Alcances y limitaciones.....	16
Capítulo 2. Marco teórico.....	18
2.1 Consideración de un muelle como una viga elástica.....	18
2.2 Contacto y fricción entre hojas	23
2.3 Mecanismos de sujeción y alineación.....	25
2.4 Uniones con pernos	27
2.5 Características de las pruebas de muelles tipo ballesta	28
2.6 Discusión.....	32
Capítulo 3. Estudio experimental.....	34
3.1 Diseño de banco experimental.....	34
3.2 Sistema de precargas	37
3.3 Diseño experimental	38
3.4 Resultados de las pruebas experimentales.....	39
3.5 Discusión.....	45
Capítulo 4. Estudio numérico con elementos finitos.....	48

4.1 Consideraciones de contacto del paquete comercial.....	48
4.2 Características del muelle	48
4.3 Modelo discreto.....	49
4.4 Simulación de precargas.....	51
4.5 Discusión.....	54
Capítulo 5. Conclusiones	60
Anexo. Planos de banco.....	63
Referencias	66

Índice de figuras

Figura 1. 1 Métodos para minimizar efectos de impacto [2].	1
Figura 1. 2 Sistemas friccionantes: a) muelle de fricción, b) sistema Pall, c) tijeras de Truffault [3].	2
Figura 1. 3 Estructura general de un amortiguador viscoso [3].	3
Figura 1. 4 Amortiguador viscoelástico, a) estado sin deformar, b) estado deformado [3].	3
Figura 1. 5 Amortiguador tipo TADAS [3].	4
Figura 1. 6 Elementos de un muelle de ballesta [5].	5
Figura 1. 7 Bancos virtuales: a) con soportes con grilletes, b) con rodamientos lineales [13].	8
Figura 1. 8 Muelle para baja fricción entre hojas [16].	10
Figura 1. 9 Suspensión Hotchkiss completa analizada en [19].	11
Figura 1. 10 Modelo del muelle, uno regular de hojas graduadas y otro con una hoja completa extra.	12
Figura 1. 11 Aparato para controlar la fricción entre hojas [21].	13
Figura 1. 12 Simulación de medio muelle de materiales compuestos como viga en voladizo [24].	14
Figura 2. 1 Fuerzas actuando en el asiento del eje de una ballesta [23].	18
Figura 2. 2 Modelo aproximado de la mitad de un muelle como viga en voladizo [23].	20
Figura 2. 3 Muelle semielíptico simétrico donde $a=b$ [29].	21
Figura 2. 4 Diagrama típico de una ballesta probada a baja velocidad para mostrar la fricción entre hojas [29].	24
Figura 2. 5 Dos cuerpos B1 y B2 en contacto [30].	25
Figura 2. 6 Muelle: (a) vista general, (b) separación de hojas bajo carga [30].	25
Figura 2. 7 Grilletes para montaje de muelle [29].	26
Figura 2. 8 Broches de alineación de hojas [29].	27
Figura 2. 9 Unión empernada a tensión [31].	27
Figura 2. 10 Máquina de prueba de muelles [22].	29
Figura 2. 11 Esquema donde se indica posibles ubicaciones de galgas extensiométricas [7].	29
Figura 2. 12 Montaje de un indicador de cuadrante.	30
Figura 2. 13 Banco experimental de Kadziela <i>et al.</i> [13].	31
Figura 2. 14 Banco experimental de Bogusz <i>et al.</i> [33].	31

Figura 3. 1 Propuesta conceptual de banco experimental.....	34
Figura 3. 2 Muelle montado en soporte fabricado.	34
Figura 3. 3 Prueba del banco en máquina universal.	35
Figura 3. 4 Diagrama fuerza-desplazamiento de muelle de cuatro hojas.	36
Figura 3. 5 Broche que sujeta las hojas del muelle.	37
Figura 3. 6 Conceptualización de abrazaderas con elementos tipo solera.	37
Figura 3. 7 Abrazadera para precarga del muelle.	38
Figura 3. 8 Esquema de diferentes posiciones para la colocación de elementos de apriete en muelle.	38
Figura 3. 9 Prueba de muelle de cuatro hojas con varios elementos de apriete.	40
Figura 3. 10 Resultados experimentales de histéresis para muelle con cuatro hojas y diferentes abrazaderas.....	40
Figura 3. 11 Prueba de muelle con dos hojas con hasta cuatro abrazaderas.....	41
Figura 3. 12 Resultados experimentales de histéresis para muelle con dos hojas.....	42
Figura 3. 13 Disipación de energía para cada caso de estudio.....	43
Figura 3. 14 Energía elástica para cada caso de estudio.....	43
Figura 3. 15 Fuerza de amortiguamiento de Coulomb promedio y rigidez de los casos estudiados.....	44
Figura 3. 16 Gráfico de interacción entre abrazaderas y precargas para la disipación de energía.	46
Figura 3. 17 Superficie de respuesta de los resultados experimentales obtenidos.	47
Figura 4. 1 Características del muelle considerado para el estudio experimental.....	49
Figura 4. 2 Modelo discreto empleado para el estudio numérico.	51
Figura 4. 3 Modelado de elementos de apriete para precarga en muelle.....	52
Figura 4. 4 Resultados numéricos de histéresis para muelle con cuatro hojas y diferentes abrazaderas.....	53
Figura 4. 5 Resultados numéricos de histéresis para muelle con dos hojas y diferentes abrazaderas.....	54
Figura 4. 6 Área de contacto de la hoja inferior del muelle con dos hojas, a) dos hojas sin precarga y b) cuatro hojas con cuatro abrazaderas.	55
Figura 4. 7 Estado de contacto a) al inicio del ciclo de carga en un muelle de dos hojas sin precargas, b) al inicio del ciclo de carga en un muelle de cuatro hojas con cuatro abrazaderas,	

c) al final del ciclo de carga de un muelle de dos hojas sin abrazaderas, d) al final del ciclo de carga de un muelle de cuatro hojas con cuatro abrazaderas.....	56
Figura 4. 8 Área de contacto total para las diferentes configuraciones del muelle en un ciclo de carga.....	57
Figura 4. 9 Comparativo entre disipación de energía experimental y numérica.....	58
Figura 4. 10 Comparativo entre energía elástica experimental y numérica.....	58

Índice de tablas

Tabla 2. 1 Factores de par de torsión K para su empleo en la ecuación (2. 13) [32].....	28
Tabla 3. 1 Resultados de apretar un muelle de cuatro hojas con diferentes números de precargas.....	41
Tabla 3. 2 Resultados de apretar dos hojas con diferentes números de precargas.....	42
Tabla 3. 3 Fuerza de amortiguamiento de Coulomb promedio y rigidez de los casos experimentales estudiados.....	44
Tabla 4. 1 Valores de las energías del estudio experimental comparadas con el numérico.....	51
Tabla 4. 2 Resultados numéricos de energía al apretar cuatro hojas.....	53
Tabla 4. 3 Resultados numéricos de energía al apretar dos hojas.....	54
Tabla 4. 4 Frecuencias naturales de los diferentes casos obtenidas con el paquete de elementos finitos.....	59

Resumen

Los muelles o resortes de hojas, también conocidos como ballestas, son elementos mecánicos empleados en las suspensiones de diversos vehículos. Están conformados por una serie de láminas de diferente longitud, apiladas unas sobre otras y centradas con un perno. En este proyecto se estudió experimental y numéricamente la influencia de la rigidez y la fricción en este elemento, el cual tiene la función de disipador pasivo de energía por fricción seca.

En la literatura científica y técnica se ha encontrado que en el proceso de diseño de estos muelles no suele considerarse el fenómeno de la fricción entre las hojas, el cual en la práctica tiene un grado de disipación de energía y, por lo tanto, el muelle tiende a un comportamiento con amortiguamiento. Por lo tanto, al variar algunos parámetros del muelle como el número de hojas que lo conforman y la implementación de precargas que aplique un apriete en estas, se estudió cómo influye el cambio de la rigidez y la fricción en la disipación de energía del muelle. Se realizó un estudio experimental en una máquina de pruebas universal y se desarrolló y validó un modelo discreto en el paquete de elementos finitos *Abaqus CAE*.

Los resultados obtenidos de ambas pruebas muestran que se incrementó la disipación de energía del muelle con la aplicación de precargas. Al aplicar estas precargas, la disipación de energía se incrementó hasta 104% con respecto a la configuración original del muelle, mientras que, al reducir el número de hojas, el incremento de la disipación de energía llegó a ser de hasta 52%. Con esto, se plantea el uso de precargas en muelles para variar el nivel de disipación de energía y de esta forma aprovechar este fenómeno que se presenta de manera inherente en este tipo de elementos mecánicos.

Capítulo 1. Estado del arte

1.1 Amortiguamiento de impacto

El fenómeno de impacto consiste en un choque entre dos cuerpos que ocurre en un intervalo muy pequeño, durante el cual se sufre una modificación abrupta de una fuerza, posición, velocidad o aceleración, provocando un estado transitorio en el sistema. La energía generada durante el impacto puede provocar deformación permanente en los cuerpos involucrados. Es un problema que afecta fuertemente a la industria automotriz, especialmente porque se relaciona con la seguridad de los pasajeros. Igualmente, afecta la industria de los servicios y productos, así como a estructuras de edificios y a máquinas [1].

Para inhibir los efectos de las cargas de impacto y vibraciones existen diferentes métodos. Estos se clasifican en tres grupos: eliminación de la fuente de vibración, aislamiento del sistema, y reducción de la respuesta. En la Figura 1. 1 se muestran desglosados estos métodos. Entre estos, la reducción de la respuesta del sistema por medio de la disipación de energía se caracteriza por su efectividad, economía, y rapidez de implementación [1].

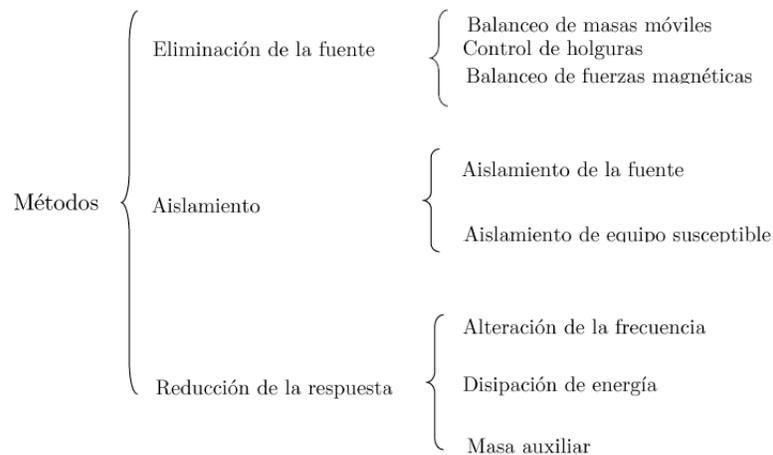


Figura 1. 1 Métodos para minimizar efectos de impacto [2].

El control de las cargas de impacto ocurre por medios activos, pasivos, o semiactivos. La característica de los sistemas activos es que requieren de energía de entrada para su funcionamiento porque requieren de actuadores, servomotores y sistemas de retroalimentación. En cambio, los sistemas pasivos no requieren de energía de entrada, ya que el amortiguamiento se da gracias a las propiedades intrínsecas de los materiales y del sistema

mecánico. El denominado control semiactivo es una combinación de ambos, el cual requiere un consumo menor de energía [1].

1.2 Disipadores pasivos de energía

Para el control de los efectos de impacto por medio de disipación de energía por medios pasivos, se utilizan medios friccionantes, viscosos, viscoelásticos, y de deformación plástica.

La disipación por fricción seca se caracteriza por su efectividad, disponibilidad y bajo costo. En este sistema, la disipación de energía se da debido al movimiento relativo entre dos cuerpos. En la Figura 1. 2 se aprecian tres sistemas comunes de disipación por fricción seca. El muelle de fricción consiste en un elemento en forma de arco conformado por láminas, unas sobre otras, las cuales trabajan a flexión. Este es usado para amortiguamiento de choques en vehículos como un resorte, además como un elemento estructural de la suspensión que une el chasis al eje de las ruedas. El segundo sistema, el tipo *Pall*, consiste en una serie de arrostramientos los cuales se conectan a estructuras en sus extremos. La tijera *Truffault* disipa energía mediante una serie de láminas las cuales se desplazan una sobre otras debido a la acción de un torque [1].

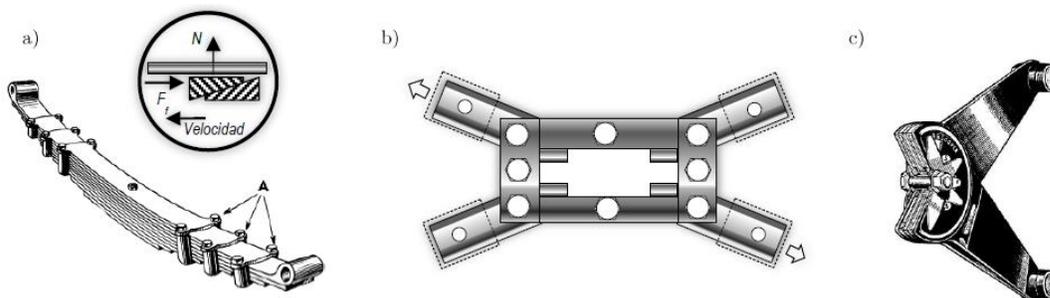


Figura 1. 2 Sistemas friccionantes: a) muelle de fricción, b) sistema Pall, c) tijeras de Truffault [3].

En un disipador pasivo de fricción viscosa, se tiene un cilindro hueco lleno de un fluido, un vástago y un pistón. Cuando el pistón se desplaza dentro del interior del cilindro, el fluido pasa por los orificios de este, generando fuerzas de fricción. La energía de entrada se transforma en calor y se disipa a la atmósfera. En la Figura 1. 3 se muestra la estructura general de un amortiguador viscoso.

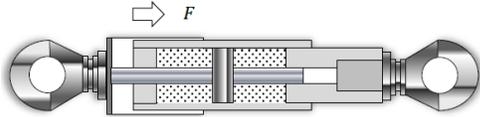


Figura 1. 3 Estructura general de un amortiguador viscoso [3].

El comportamiento viscoelástico presente en elastómeros y en materiales compuestos de estos también se aplica en ingeniería para el control de cargas dinámicas. En un amortiguador viscoelástico, placas de acero se unen mediante un material elastomérico, el cual se deforma debido a fuerzas de cizallamiento, que provocan la generación de calor en el sistema. Este sistema presenta un comportamiento elástico y viscoso. En la Figura 1. 4 se muestra su configuración. El material elastomérico se relaja, y se recupera después de que ha sido deformado, resultando en el amortiguamiento de la carga.

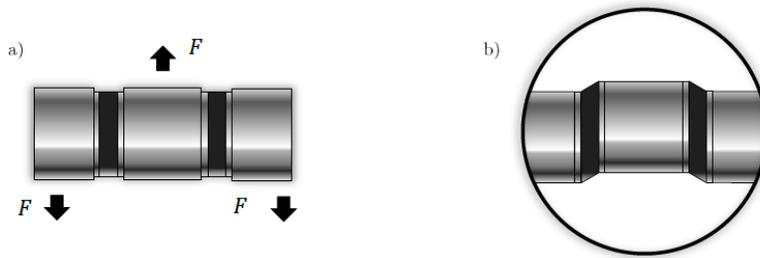


Figura 1. 4 Amortiguador viscoelástico, a) estado sin deformar, b) estado deformado [3].

En el amortiguamiento por deformación plástica, el sistema disipa la energía mediante una deformación permanente. En la Figura 1. 5 se muestra el principal sistema utilizado para amortiguamiento con deformación plástica, el tipo TADAS. Se trata de un sistema de placas conectadas de manera paralelas, las cuales deben su deformación a la flexión debida a aplicación de cargas perpendiculares a éstas. En la Figura 1. 5a) se puede observar la configuración inicial de este sistema. En la Figura 1. 5b) se observa la sección transversal de la placa sin deformación, y en la Figura 1. 5c) se observa la configuración deformada.

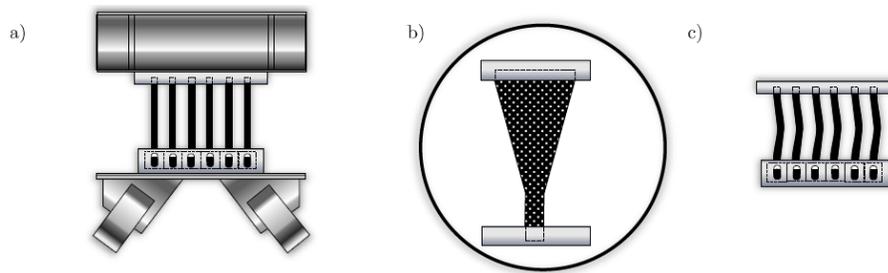


Figura 1. 5 Amortiguador tipo TADAS [3].

Otros sistemas de deformación plástica, los cuales tienen similitudes con el sistema TADAS, consisten en el sistema ADAS, el cual trabaja con placas ahusadas, y el sistema *honeycomb*, el cual trabaja con placas en el mismo plano.

1.3 Muelles de fricción

Los muelles de fricción, también conocidos como muelle de hojas, o simplemente ballestas, toman una forma larga que se asemeja a un arco, pero que permite una gran variedad de configuraciones para su instalación. Tienen la característica de retornar a su condición inicial una vez cesada la carga a la cual están sometidos. Esta fuerza o momento de recuperación es proporcional al desplazamiento lineal y angular presentado.

El muelle de tipo ballesta se manufactura generalmente empleando una serie de láminas de acero elástico, resistente y deformable. Colocadas una sobre otras, no todas estas láminas tienen las mismas dimensiones, siendo la de la parte superior de mayor longitud a las que se encuentran en la parte inferior. Las láminas se fabrican con acero de la misma composición del de los resortes helicoidales, es decir, aleado con silicio y manganeso [4]. En la Figura 1. 6 se aprecian las partes más importantes de este tipo de muelle [5]. La hoja superior (1) se trata de la *hoja maestra o principal*, siendo la más larga. Cuenta con dos *ojales* en sus terminaciones (2), con los cuales se articula al bastidor donde se instala. El resto de las hojas se conocen como hojas graduadas. Con un perno interior (3), las hojas se centran y se alinean, manteniéndose unidas por medio de abrazaderas (4).

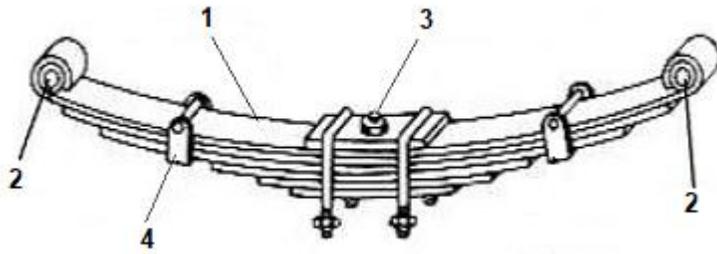


Figura 1. 6 Elementos de un muelle de ballesta [5].

Las suspensiones de ballesta presentan buenas características de costos, durabilidad, y fácil mantenimiento [6]. Por otra parte, entre sus desventajas se encuentran características dinámicas bajas y ruido [7].

El muelle de fricción surge cuando la humanidad, en su búsqueda por medios de transporte más veloces, desarrolla los carruajes jalados por caballos. En Inglaterra, Obadiah Elliot inventa en 1804 el primer muelle de fricción, compuesto por dos hojas con un perno central. Henry Ford también contribuye al desarrollo de este amortiguador, empleando acero al vanadio, y colocando uno en cada eje de sus vehículos, con el fin de aligerarlo sin tener que perder resistencia. Es después de la Segunda Guerra Mundial que el muelle helicoidal se generaliza como una solución en el eje delantero, quedando el muelle de ballesta para su uso en muelles traseros, o en su mayoría para vehículos de mayor capacidad de carga [6].

Los métodos para el diseño de ballestas son muy simplificados, e incluso en aquellos donde se emplea el método de elementos finitos, los modelos presentan carencias [6, 8]. Una de esas carencias es que no se considera la fricción por el contacto entre las hojas, ni el comportamiento no lineal de la ballesta. Esto hace que se modele el muelle como un resorte lineal y con la teoría de vigas lineales de la mecánica de materiales, cuando en realidad el comportamiento no es lineal, y la rigidez es variable, dependiendo de la deformación. Por ello, frecuentemente se recurre a la experimentación para determinar las características de las suspensiones. Esta serie de pruebas experimentales son caras y consumen tiempo, elevando los costos de desarrollo y retrasando significativamente el lanzamiento del producto al mercado [9].

Arora *et al.* [10] modelaron una ballesta y la analizaron mediante software de elementos finitos, siendo el material de la ballesta acero para muelle 65Si7. Se analizó la deflexión y el esfuerzo presentado bajo condiciones de carga definidas. Los resultados experimentales fueron

comparados con los obtenidos mediante el software de elementos finitos, para su validación. Observaron una buena correspondencia entre los valores de deflexión experimentales y los numéricos. Los esfuerzos obtenidos numéricamente presentaron una mayor variación respecto a los experimentales, de hasta 12%. Dieron como posible explicación el uso de acero estructural convencional para realizar la simulación de elementos finitos, en lugar del acero para muelle. Se determinó el tipo de contacto y del elemento de malla para el software de elementos finitos para que los resultados fueran lo más cercanos a los experimentales. En general concluyeron que, con el manejo correcto de las configuraciones del software de elementos finitos, sus resultados presentan buena correspondencia con los experimentales, sugiriendo continuar el uso del modelo para análisis de carga bajo condiciones de fatiga.

Saelem *et al.* [11] realizaron un modelo para predecir los parámetros del confort de conducción para poder usarlos en procesos de diseño con el fin de ahorrar tiempo, costos y descartar incertidumbres presentes en la experimentación. Su modelo fue validado con experimentación mediante la evaluación de la deflexión vertical con respecto a una carga bajo condiciones estáticas. Para esto fabricaron su propia máquina de pruebas, con un actuador hidráulico y una celda de carga. Sus resultados mostraron una no linealidad entre la carga aplicada y la deflexión, en la forma de una curva de histéresis. Compararon las curvas de histéresis obtenidas de la simulación con las de la experimentación, así como la de la rigidez nominal del muelle, observándose notables diferencias.

Rodríguez y Otero [6] realizaron el modelo de una ballesta empleando el método de elementos finitos que incluye el contacto y la fricción, el cual permitió obtener los parámetros que influyen en la modelación. Se modeló una ballesta de 11 láminas, de la cual se obtuvieron los esfuerzos máximos a carga estática, las frecuencias naturales y los modos de vibración. Se observó que, bajo un análisis dinámico, la fricción entre las hojas influye en las frecuencias naturales, aumentando el valor de éstas. Concluyeron que esta variación de la fricción influye en la rigidez del modelo, ya que se incrementa la resistencia a la deformación al no depender ésta solamente de las características elásticas del material.

Vidal Leso *et al.* [12] modelaron un muelle de tres hojas mediante software de elementos finitos, cuyo modelo considera el contacto existente entre las superficies de las hojas. Mostraron los efectos estructurales del sistema: esfuerzos, deformaciones, factor de seguridad y frecuencias naturales de cada hoja de la ballesta. Para ello, basaron su modelo en una suspensión comercial de un Dodge Dakota Sport modelo 2001. Observaron cómo afectan los

cambios bruscos de geometría (deformaciones) en la concentración de esfuerzos, y los modos de vibración en los que pudiera entrar en resonancia, lo cual afectaría al sistema, pudiendo llegar a provocar una fractura de cualquier material. Determinaron que los esfuerzos más grandes se dan en los extremos de la hoja maestra.

Yum [7] analizó las características de fricción en un muelle de forma numérica y experimental, realizando ensayos de compresión en muelles utilizados en camiones comerciales, y obteniendo relaciones fuerza-desplazamiento y fuerza-deformación. La relación fuerza-deformación obtenida no fue simétrica, debido a considerar un soporte del muelle de tipo pasador, mientras el otro como un pasador conectado a un eslabón tipo grillete. Él observó en la literatura que, si bien se había estudiado el comportamiento de la fricción en los muelles, muchos de los estudios habían descuidado los efectos del grillete. Con esta investigación encontró que los efectos del grillete no eran despreciables y que debería ser modelado para simular el comportamiento apropiadamente. Además de ello sugiere que el grillete debería ser analizado por separado para obtener la fuerza de fricción actuando en ella. La curva de histéresis fuerza-desplazamiento fue simulada exitosamente y el rango elástico de resorte concordó con los datos experimentales. En cambio, los valores de deformación calculados y los de la fuerza de fricción fueron diferentes de los medidos.

Kadziela *et al.* [13] investigaron dos configuraciones de montaje diferentes de los muelles de fricción. La primera reprodujo la configuración regular de la ballesta en un vehículo, incluyendo los elementos de sujeción entre el muelle y el chasis, llamados grilletes. En la segunda, los grilletes se eliminaron para sustituirlos por rodamientos lineales, capaces de moverse a través de una guía lineal. Esto permitió una mejor evaluación del muelle sin la influencia de la longitud y posición de los grilletes. Modelaron ambas configuraciones en el software comercial de simulación multicuerpo LMS Virtual.Lab Motion, como se observa en la Figura 1. 7, y fueron probadas experimentalmente. Para identificar las propiedades de los muelles, ambas configuraciones fueron sometidas a pruebas estáticas y dinámicas. Los resultados arrojados demostraron que los modelos desarrollados reproducen correctamente el comportamiento de las ballestas en simulaciones dinámicas, logrando mejor convergencia con la configuración sin grillete. El objetivo principal de esta investigación fue la validación de modelos construidos en un ambiente multicuerpo con el fin de afinar sus propiedades para conciliarlas con los resultados experimentales. En cuanto a pruebas estáticas, se observaron errores significativos entre el modelo numérico y el banco de pruebas. Para minimizar estas

diferencias, se utilizó un modelo de afinación iterativa por medio de optimización de un solo objetivo. Con esto, las características del muelle adquiridas mostraron una mejora en la evaluación de la rigidez y de la energía disipada.

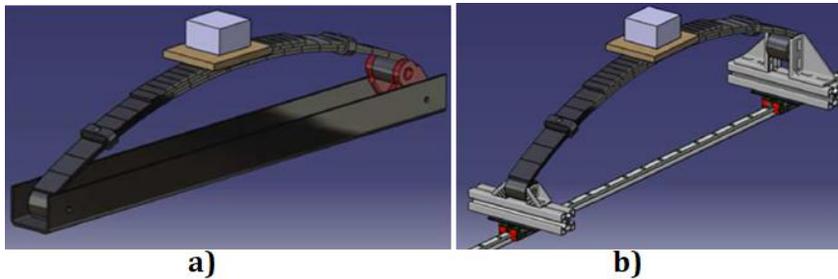


Figura 1. 7 Bancos virtuales: a) con soportes con grilletes, b) con rodamientos lineales [13].

Fan y Li [14] realizaron modelos mediante un paquete comercial de elementos finitos para conocer las características de amortiguamiento de muelles de fricción en condiciones reales de operación, considerando amplias deformaciones, contacto y fricción entre hojas. Estudiaron los efectos que tiene en las características histeréticas y de amortiguamiento con diferentes coeficientes de fricción, amplitudes y frecuencias de excitación. Por ser conveniente al cálculo, analizaron el modelo tomando medio muelle como una viga en cantiléver. Evaluaron el modelo con un coeficiente de fricción y una carga determinada para tener parámetros de referencia. En el primer caso variaron en tres medidas el coeficiente de fricción, encontrando que la magnitud del coeficiente de amortiguamiento se incrementa con el aumento del de la fricción y el valor del trabajo hecho por la fuerza de amortiguamiento disminuyó con el incremento de los coeficientes. En el segundo caso variaron en tres medidas la frecuencia de excitación y fijaron un coeficiente de fricción, encontrando que el valor del amortiguamiento disminuye con el incremento de la frecuencia, además de ser pequeña la variación de la curva de histéresis. Finalmente, en el tercer caso variaron tres diferentes amplitudes y fijaron un valor de coeficiente de fricción y de frecuencia, encontrando que el coeficiente de amortiguamiento incrementa con la amplitud.

Younesian y Fallahzadeh [15] estudiaron las vibraciones no lineales presentes en muelles parabólicos empleados en sistemas de suspensión de camiones de carga. Se estudió el comportamiento dinámico del muelle mediante elementos finitos para después usar estos resultados en estudio de vibraciones. El muelle parabólico fue sometido a un ciclo de excitación en un rango de frecuencia de 2 a 15 Hz y se obtuvieron experimentalmente valores de rigidez y amortiguamiento para comparar con los resultados teóricos. Además, se estudió la influencia

de la velocidad del vehículo y las irregularidades del camino en la aceleración vertical del camión. Se concluyó que la frecuencia tiene un efecto despreciable en la rigidez dinámica del muelle parabólico, pero el incremento de su valor resulta en un incremento en el amortiguamiento del muelle. También se encontró que los efectos de la amplitud en el muelle son más significativos que los de la frecuencia. De igual forma las variaciones de la rigidez y del amortiguamiento dependen de las propiedades geométricas del muelle.

Savaidis *et al.* [9] desarrollaron una modelación mediante elementos finitos para el diseño u optimización de muelles parabólicos de una y varias hojas, sometidos a condiciones extremas de carga uniaxial y multiaxial. Compararon el modelo con resultados de esfuerzos experimentales en un banco bajo carga tanto puramente vertical como combinada con condiciones de frenado, con el fin de verificar la precisión de los cálculos y la confiabilidad del procedimiento propuesto. Se encontró que la distribución de esfuerzos calculada a lo largo de las hojas individuales está en una concordancia satisfactoria con los resultados medidos correspondientes. Concluye que su procedimiento es bueno y eficiente, aplicable en etapas tempranas del diseño y provee datos precisos para ser usados para la aprobación de la durabilidad final de la experimentación. Recomiendan el modelado de las hojas con elementos sólidos de primer orden, y el uso de elementos tipo barras para modelar la conexión de los ojales.

Guernsey [16] inventó un mecanismo para baja fricción entre hojas. Esto debido al problema de que la fricción estática entre las hojas es mayor que la cinética. Por lo tanto, si una carga aplicada fuese demasiado pequeña, el muelle tiende a resistirse a la deflexión. Esto quiere decir que la fricción presentada en movimientos de pequeña amplitud, como los caminos urbanos, es mucho mayor que en caminos con irregularidades de mayor amplitud. Esto es exactamente lo contrario a la condición deseada para una operación del muelle exitosa y de confort. El muelle debe tener un amortiguamiento mínimo cuando opera bajo cargas excitadoras pequeñas y de bajas amplitudes, y amortiguamiento mayor bajo amplitudes mayores y grandes cargas excitadoras. Propuso implementar un elemento de elastómero entre las hojas, el cual se deforma al cortante bajo la aplicación de amplitudes pequeñas, como se observa en la Figura 1. 8. Manteniéndose en el margen de estas amplitudes, el movimiento es sin fricción. Sin embargo, si la amplitud es lo suficientemente grande, se presentará el deslizamiento entre hojas adyacentes, introduciendo valores de amortiguamiento.

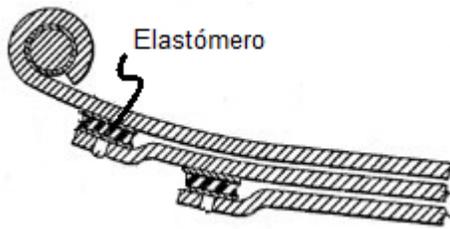


Figura 1. 8 Muelle para baja fricción entre hojas [16].

Xu *et al.* [17] compararon mediante experimentación y análisis por elementos finitos la distribución de esfuerzos y las características cinemáticas de un muelle con diseño parabólico tradicional antes y después de un cambio a una forma asimétrica. Simularon cargas verticales y de frenado, mientras que las posiciones de los ojales y del perno centrador se conservaron tras el cambio de forma. Los análisis muestran que, bajo las mismas condiciones, especialmente las de frenado, las características cinemáticas se pueden optimizar con el cambio de forma y la distribución de esfuerzos se ajusta a la de los principios de diseño de muelles parabólicos.

León y Cullquicondor [18] rediseñaron una suspensión de ballesta de un autobús de tipo Chevrolet FTR 32 M, con aplicación a transporte de pasajeros. Este sistema, al ser muy rígido debido a que se fabricó para su aplicación en transporte de carga y no de pasajeros, provoca golpes y movimientos bruscos al transitar sobre terreno rural irregular debido a su mal estado, lo que causa una destrucción prematura de la carrocería. Se determinaron las cargas sometidas al chasis, la rigidez del sistema original, las irregularidades de la carretera, y se fijaron requerimientos de esfuerzos a los cuales se encontró sometida la suspensión original. Buscando cumplir con el objetivo de disminuir la rigidez, se rediseñó el sistema de suspensión para que cumpliera con los requerimientos solicitados, consistente en esfuerzos, deformaciones y factor de seguridad, los cuales se comprueban mediante simulación numérica. Todo esto con el propósito de obtener un sistema de suspensión que ofrezca confort y seguridad. Esto se realizó mediante el cambio de ballestas semielípticas a parabólicas. El modelo fue diseñado mediante software CAD y analizado mediante software de elementos finitos, obteniéndose un buen desempeño del sistema de suspensión, sugiriendo la continuación del proyecto con pruebas en prototipos.

Qin *et al.* [19] estudiaron mediante un detallado modelado por un paquete comercial de elementos finitos tres configuraciones de una suspensión: un muelle de dos etapas sin bujes y con sujeciones simuladas, el muelle con todos sus elementos de sujeción incluidos, y la suspensión Hotchkiss completa (Figura 1. 9). Se incluyeron las no linealidades presentadas por

grandes deformaciones, contacto entre hojas y fricción. Para el caso del muelle sólo, se utilizaron elementos tipo sólidos para la modelación. Para el segundo caso, los elementos de sujeción fueron modelados como tipo *shell* (elementos planos), mientras que los de apriete como tipo viga y los bujes como elementos tipo resorte. Para la suspensión completa, el eje de las ruedas se modeló como tipo viga, y las estructuras sobre el muelle como tipo *shell*. Se obtuvieron curvas fuerza-desplazamiento, obteniéndose el rango del resorte. Se analizaron los esfuerzos y las deformaciones y los resultados correspondieron con valores de pruebas experimentales. Se propuso el método de simulación realizado para su uso en el desarrollo de muelles y de suspensiones Hotchkiss, prediciendo la durabilidad antes de realizar prototipos y así ayudar a reducir tiempos y costos significativos en el desarrollo del producto.

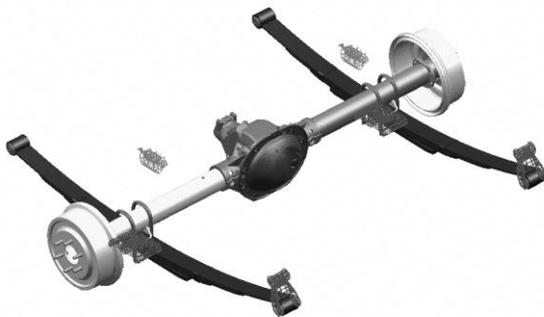


Figura 1. 9 Suspensión Hotchkiss completa analizada en [19].

Charde y Bhope [20] realizaron una investigación para determinar la distribución de esfuerzos a lo largo de la hoja maestra de un muelle, mediante elementos finitos y validada experimentalmente mediante medición con galgas extensiométricas. Consideraron un muelle con hojas graduadas como media viga en voladizo, lo compararon con uno con una hoja extra de longitud completa colocada debajo de la hoja maestra. Bajo esta consideración, se estimó que el máximo esfuerzo presente en la hoja maestra es en los puntos de apoyo. Sin embargo, debido a las no linealidades y a una deflexión grande, este valor podría presentarse en cualquier sección a lo largo del muelle. El análisis se realizó considerando al muelle bajo una carga con condición estática. Se modelaron ambos casos en un paquete comercial, como se ve en la Figura 1. 10, considerando una interacción de contacto para elementos en 3D. Encontraron que la mayoría de las mediciones de los esfuerzos estaba en concordancia con los arrojados por el paquete de elementos finitos, siendo las mediciones discrepantes atribuidas a una incorrecta adhesión de las galgas extensiométricas. Como se esperaba, la teoría de vigas arrojó que los

esfuerzos decrecen del soporte fijo al extremo libre del muelle. Sin embargo, el análisis de elementos finitos y el experimental revelaron que los esfuerzos máximos en la hoja maestra están presentes en varios lugares a lo largo de ésta. En el caso del muelle con una hoja completa extra, se encontró buena correspondencia entre los valores numéricos y experimentales, presentando un comportamiento similar al primer caso, donde la teoría predice un esfuerzo en el soporte fijo similar al del análisis numérico y experimental, además de que el aumento de una hoja completa reduce el valor de los esfuerzos. Concluyeron que la longitud de las hojas graduadas es determinante en el valor de los esfuerzos presentes en la hoja maestra, además de que la teoría de vigas es útil para conocer los esfuerzos en el apoyo fijo, pero no para conocerlos a lo largo de ésta. En ese caso debe analizarse numérica o experimentalmente.

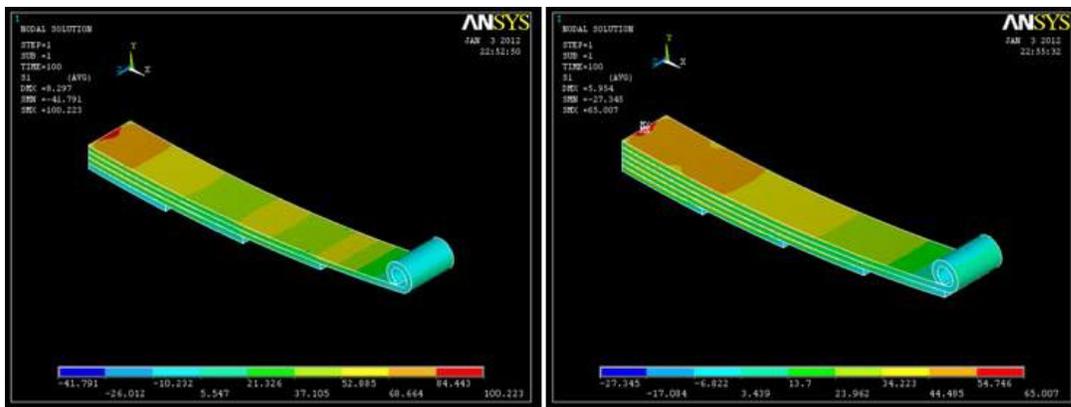


Figura 1. 10 Modelo del muelle, uno regular de hojas graduadas y otro con una hoja completa extra.

Usando medios semiactivos también se han desarrollado invenciones para muelles de fricción. Tal es el caso de la invención de Shinbori y Matsuoka [21], la cual consiste en un aparato para controlar la fricción entre hojas comprimiéndolas en uno de los extremos. Se trata de un soporte y un actuador hidráulico mediante el cual las hojas del ensamble se afianzan entre ellas, como se muestra en la Figura 1. 11. Esto debido a que en general, cuando el camino es suave, el confort se vuelve mejor entre menor sea el valor de la fricción entre hojas adyacentes. Por otra parte, se logra una mayor estabilidad de conducción cuando la fricción entre las hojas es grande. Por tanto, el confort es considerado más importante que la estabilidad para caminos suaves, dado que ésta se asegura simplemente si el volante no se gira bruscamente.

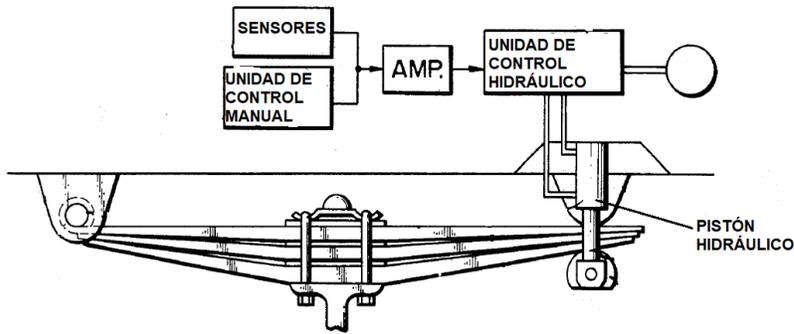


Figura 1. 11 Aparato para controlar la fricción entre hojas [21].

La fricción entre las hojas es el medio mediante el cual se disipa la energía. Sin embargo, esto puede ocasionar desgaste y oxidación en las láminas. Una tendencia actual en el uso de ballestas es el empleo de materiales compuestos [4]. Esto con el fin de reducir el número de hojas y de curvas en el sistema, con lo que se reduce en gran medida el peso de la suspensión, y también la fricción entre las hojas, sin modificar la capacidad de carga ni su rigidez [22]. Además, se obtienen frecuencias naturales más altas que las del acero, las cuales estén más alejadas de las frecuencias del camino con el fin de evitar la resonancia [23]. Los materiales compuestos tienen mayor capacidad de almacenamiento de energía de tensión elástica y una alta relación resistencia/peso, comparado con los de acero, por lo que los muelles multihojas de acero están siendo reemplazados por muelles de hojas fabricadas de materiales compuestos. Aunque esto genera inconvenientes del tipo constructivo y de altos costes [22].

Kumar *et al.* [24] fabricaron un muelle de hoja única con materiales compuestos con el objetivo de reducir peso, comparándolo con uno de hojas de acero. Esto debido a que el sector automotriz busca la reducción de peso y de consumo de combustible. En su caso emplean plástico reforzado con fibra de vidrio, siendo el arreglo de la fibra unidireccional. El tramo de la hoja se fabricó por moldeo y se le añaden en sus extremos piezas de acero para los ojales, los cuales se fijan con pernos, montándolo con un extremo fijo y el otro con libertad de movimiento longitudinal y se probó en una máquina universal de ensayos. Este modelo fue analizado con un paquete de elementos finitos, considerando medio muelle como una viga en voladizo, como se observa en la Figura 1. 12. Concluyen que para el mismo valor de deflexión mejora la rigidez y reduce el peso en un 77%. Igualmente plantean la posibilidad de realizar una combinación de fibras de carbono con fibras de vidrio.

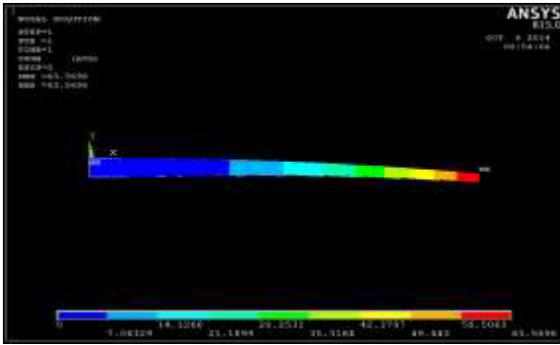


Figura 1. 12 Simulación de medio muelle de materiales compuestos como viga en voladizo [24].

Kumar y Aggarwal [25] analizaron mediante elementos finitos un muelle de una sola hoja de acero y una de materiales compuestos (plástico reforzado con vidrio). Este fue modelado con propiedades mecánicas y geométricas similares a las de un muelle multihojas convencional. El objetivo del trabajo fue comparar los efectos del cambio de material en los esfuerzos y peso del ensamble. El material usado para el análisis numérico fue acero estructural, el cual consideraron con propiedades isotrópicas similares a las del acero para muelle SUP9. El uso de materiales compuestos resultó en la disminución de la deflexión en 6.51%, así como de los esfuerzos en 83.64%. De igual forma lograron un 71.85% de ahorro de material

Kumar y Aggarwal [26] realizaron simulaciones mediante software de elementos finitos con el fin de optimizar un muelle de ballesta fabricado con acero para muelles EN45A. Para ello, se modificó el diseño convencional de perfil plano, y se cambió por uno de tipo parabólico, en el cual, el espesor de las hojas disminuye del centro a los extremos. A su vez, este modelo fue modificado para reemplazar el material de acero de muelles EN45A por materiales compuestos del tipo plástico reforzado con fibra de vidrio. Todo esto con el objetivo de producir un modelo óptimo de muelle de ballesta con peso reducido, esfuerzos, y una vida a la fatiga mejorada con respecto a condiciones similares aplicadas a una ballesta convencional. Con los resultados obtenidos, se observó que cuando se cambia el diseño de una ballesta convencional a una parabólica, este último experimenta una disminución de esfuerzos para las mismas condiciones de frontera y de carga, se incrementa la vida a la fatiga, y se disminuye el peso de todo el ensamble. Cuando una ballesta parabólica se reemplaza con plástico reforzado con fibra de vidrio, el nivel de esfuerzos se mantiene dentro de los niveles requeridos, y la variación observada se considera aceptable, la vida a la fatiga se incrementa con respecto a la ballesta parabólica de acero, y el peso del ensamble completo disminuye aún más, haciéndolo más

ligero. Con esto, concluyeron que una ballesta parabólica de materiales compuestos es mejor que la convencional de acero.

1.4 Discusión

Los muelles de fricción siguen siendo un medio efectivo de amortiguamiento de impactos o vibraciones, aunque han sido desplazados para su uso casi exclusivo en vehículos pesados como furgonetas, camiones, vehículos todoterreno y remolques. El diseño moderno de ballestas ha tenido un nuevo auge con el uso de materiales compuestos de alta tecnología, lo que resulta en una suspensión más pequeña, lisa y ligera que las ballestas tradicionales. Sin embargo, no es tarea fácil el cambio de materiales, debido a que se cambia de acero con propiedades relativamente isotrópicas y homogéneas, a plásticos reforzados con fibras de comportamiento anisotrópico y no homogéneo. Otra área de oportunidad es el diseño de las llamadas ballestas parabólicas. Trabajos realizados han encontrado una mejora en el funcionamiento de las ballestas cuando éstas se han modificado de perfiles convencionales a perfiles parabólicos. Estos diseños presentan una ventaja de flexibilidad, además de una rigidez menor al de las ballestas convencionales multihojas, lo que brinda un mejor confort durante el viaje. Se infiere que las investigaciones buscan la reducción de peso en el sector automotriz y la mejora del confort durante el manejo, de allí que para lograrlo se realicen proyectos en busca de mejores materiales o la optimización del diseño, dimensiones y procesos de manufactura. El muelle es uno de los elementos con potencial para esta reducción de peso y rigidez, donde se busca tener una suspensión más pequeña y ligera.

De igual forma, se ha estudiado el comportamiento de estos disipadores con simplificaciones en los modelos numéricos que los describen. Por lo tanto, el estudio de la variación de la rigidez y de la consideración de la fricción entre hojas que representa un comportamiento no lineal, más cercano a la realidad, se convierte en un área de oportunidad para estudios numéricos. Finalmente, el abordar los problemas de los muelles desde el enfoque del modelado por elementos finitos permite aprovechar una herramienta útil y valiosa. Sin embargo, un estudio es completo al estudiar de manera física el comportamiento de los sistemas. Actualmente se busca conciliar los modelos numéricos y sus resultados con aquellos arrojados por pruebas experimentales, con el fin de obtener modelos confiables que nos permitan reducir el trabajo experimental, el cual representa un gasto mayor de recursos materiales y monetarios, al igual que mejorar los procesos durante la etapa de diseño.

Por lo tanto, se propone un estudio donde se modifiquen parámetros de diseño, por ejemplo, el número de hojas que conforman el muelle y la variación de la fricción mediante la implementación de una precarga. La variación de la fricción mediante precargas puede rigidizar el sistema, debido a que la rigidez no solo dependerá de propiedades geométricas, sino también de interacciones de contacto. Estas son estrategias que pueden ser implementadas para estudiar cómo modifican la rigidez del sistema y, a su vez, cómo la modificación de este parámetro, junto con el de la fricción, mejora el desempeño de este elemento mecánico. Esto con el fin de funcionar como disipador pasivo de energía por fricción seca para amortiguamiento de impacto.

1.5 Objetivo general

Estudiar experimental y numéricamente la influencia de la rigidez y fricción en el proceso de disipación de energía de un muelle de fricción.

1.5.1 Objetivos específicos

- Modelar un muelle de fricción del tipo ballesta y analizar el mecanismo de disipación de energía de fricción seca.
- Estudiar numéricamente mediante software de elementos finitos el comportamiento de un muelle de fricción de tipo ballesta. Variar factores como el número de hojas que lo conforman y el número de precargas entre las hojas, al aplicar apriete mediante abrazaderas que las sujeten.
- Construir un banco experimental para la realización de pruebas cuasi estáticas a un muelle de fricción de tipo ballesta.
- Realizar pruebas experimentales de muelles de fricción de tipo ballesta para evaluar su comportamiento, y evaluar la correspondencia de los resultados con los arrojados por el estudio numérico.

1.5.2 Alcances y limitaciones

- Se limitará el estudio experimental de los muelles a pruebas cuasi estáticas, empleando una máquina universal.
- El estudio numérico se realizará mediante un modelo discreto, y comportamiento cuasi estático.
- El muelle evaluado estará construido con acero AISI 5160.
- La rugosidad entre hojas no se tomará en cuenta como parámetro variable.

La estructura de este documento comienza con una revisión de la literatura con el fin de conocer el estado en que se encuentra la investigación sobre muelles de fricción. Posteriormente, en la segunda parte, se presenta un marco teórico con los conceptos importantes para la comprensión y estudio de este tipo de muelles. En la tercera parte se propone la construcción de un banco experimental para la realización de pruebas cuasiestáticas al modelo del muelle, realizadas en una máquina de pruebas universal. Posteriormente, se realiza el número de pruebas necesarias determinadas por un diseño experimental. En la cuarta parte se realiza un modelo discreto para un estudio numérico por elementos finitos mediante el paquete comercial *Abaqus CAE*. Con los resultados obtenidos, se evalúa la correspondencia del comportamiento observado en el experimento con el observado con el modelo numérico. Finalmente se presentan las conclusiones del proyecto y las referencias empleadas para el mismo.

Capítulo 2. Marco teórico

2.1 Consideración de un muelle como una viga elástica

Los muelles son elementos de suspensión cruciales en los vehículos, necesarios para minimizar las vibraciones verticales, impactos y baches debidos a las irregularidades del terreno y crear un paseo cómodo. Un muelle de fricción es un elemento seguro y firme en los sistemas de suspensión de automóviles. La configuración consiste en hojas de acero apiladas, en longitudes progresivamente más largas hacia el punto superior, esto para que el muelle sea grueso en el medio para resistir la flexión, y delgado en los extremos, donde se sujeta al bastidor. Un muelle de ballesta soportará varios tipos de fuerzas externas, como las mostradas en Figura 2. 1: F_v representa una carga vertical, F_s una carga lateral, F_t una carga longitudinal, T_t un momento de torsión, y T_w un momento concentrado. Sin embargo, su labor más importante es resistir fuerzas verticales variables [23].

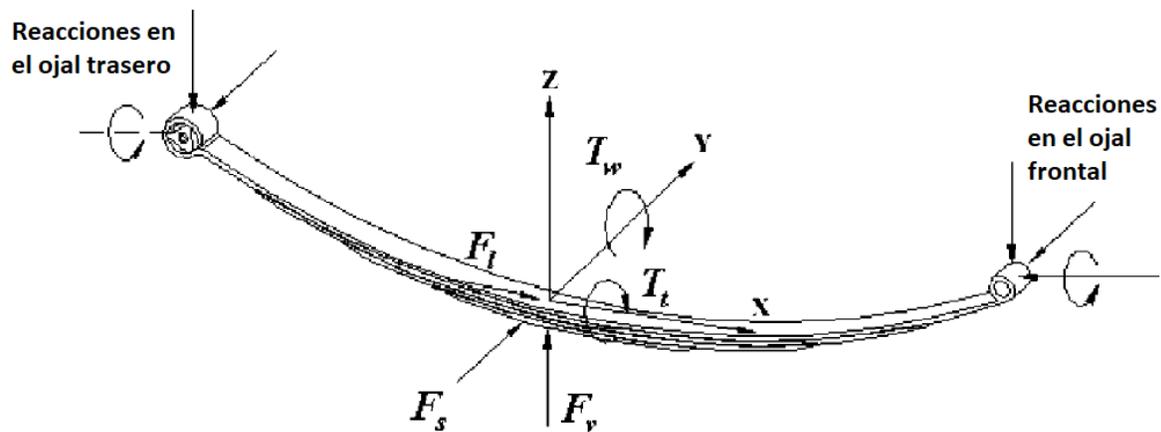


Figura 2. 1 Fuerzas actuando en el asiento del eje de una ballesta [23].

Las vibraciones e impactos verticales son amortiguados por variaciones en la deflexión del muelle, de forma que la energía potencial se almacena en el muelle como energía de deformación y posteriormente liberada lentamente. Por lo tanto, incrementar la capacidad de almacenamiento de energía de un muelle asegura un sistema de suspensión más complaciente.

En mecánica, la energía es la capacidad de un cuerpo para realizar un trabajo, la cual es igual al producto de una fuerza aplicada a un cuerpo y el desplazamiento realizado en la misma dirección. En mecánica de materiales, los esfuerzos multiplicados por sus respectivas áreas dan como resultado fuerzas, y la deformación de un cuerpo equivale a una distancia recorrida. Multiplicar estas dos cantidades por lo tanto nos da el trabajo interno realizado por un cuerpo

por fuerzas aplicadas exteriormente. Este trabajo se almacena en el cuerpo como energía interna de deformación o energía de deformación elástica.

La cantidad de energía elástica que puede almacenar una unidad de volumen de muelle [23, 27] está dada por la ecuación (2. 1):

$$S = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \quad (2. 1)$$

donde σ es el esfuerzo máximo admisible inducido en el muelle y E es el módulo de elasticidad, ambos en la dirección longitudinal. Considerando que la carga dominante en un muelle sea la carga vertical, la ecuación (2. 1) muestra que un material con resistencia máxima y módulo de elasticidad mínimo en la dirección longitudinal es el más adecuado para estos muelles [23]. La energía de deformación específica se muestra en la ecuación (2. 2):

$$S = \frac{1}{2} \frac{\sigma_t^2}{\rho E} \quad (2. 2)$$

donde σ_t es el esfuerzo permisible, E es el módulo de elasticidad y ρ es la densidad [23].

Con una solución analítica aproximada como la que se presenta a continuación se verifica la deflexión del muelle. En este método, de acuerdo con [23] la curvatura del muelle se ignora y se asume como una viga directamente en cantiléver como se muestra en la Figura 2. 2. La deflexión δ en el punto de aplicación de la carga P es [23]:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \int_0^l \frac{M_{(x)}^2}{2E_{(x)}I_{(x)}} dx = \frac{\partial}{\partial p} \int_0^l \frac{p^2(l-x)^2}{2E_{xx}I_{(x)}} dx = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{2E_{xx}} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{\frac{W_{(x)}t_{(x)}^3}{12}} dx \right] \\ &= \frac{12p}{E_{xx}} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{\frac{A^3}{W_{(x)}t_{(x)}^3}} dx = \frac{12p}{E_{xx}A^3} \int_0^l (l-x)^2 W_{(x)}^2 dx \end{aligned} \quad (2. 3)$$

donde U es la energía de deformación almacenada en la viga, l la longitud de la viga, $W_{(x)}$ y $t_{(x)}$ el ancho y espesor de la sección transversal respectivamente, P la carga aplicada, $E_{(x)}$ el módulo de elasticidad en la dirección longitudinal, $M(x)$ el momento flexionante en la sección transversal, A el área de la sección transversal y $I_{(x)}$ el segundo momento de área.

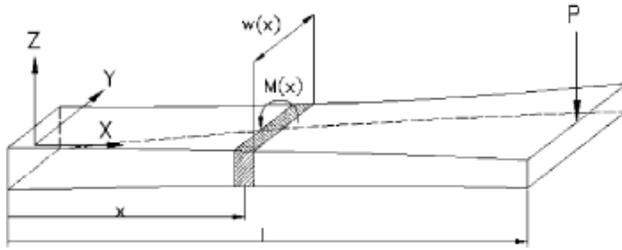


Figura 2. 2 Modelo aproximado de la mitad de un muelle como viga en voladizo [23].

El esfuerzo normal máximo inducido en el asiento del eje es [23]:

$$\sigma = \frac{plt/2}{wt^3/12} = \frac{6pl}{wt^2} \quad (2.4)$$

donde w y t son el ancho y el espesor del muelle en el asiento del eje.

La formulación de la literatura considera un muelle como una viga de sección transversal uniforme, sin fricción entre hojas. Por otra parte, Spotts [28] afirma que cuando la deformación es grande comparada con el espesor de las hojas ya no se puede usar el enfoque clásico de la mecánica de sólidos para deformaciones de vigas. Por lo tanto, si las deformaciones en el muelle son muy grandes con la carga aplicada, estas metodologías no reflejarán un comportamiento como lo es en realidad.

La teoría sobre muelles ha sido igualmente recogida y estandarizada por la *Society of Automotive Engineers (SAE)* en su documento HS788 [29]. Es posible considerar un muelle semielíptico como dos muelles cantiléver (Figura 2. 3), y la acción resultante del muelle puede determinarse considerándolo como un mecanismo de tres eslabones. Las formulaciones presentadas a continuación se dan aproximando el muelle como una viga de resistencia uniforme.

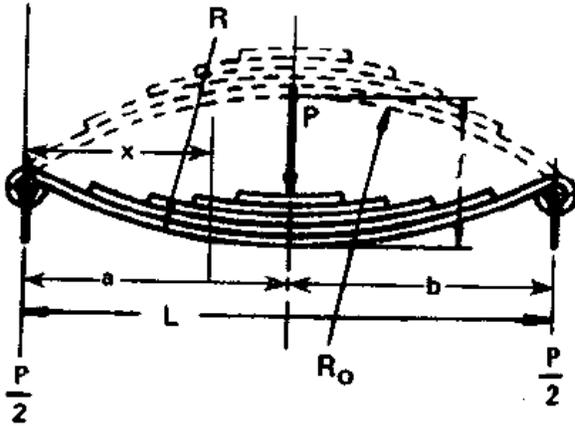


Figura 2. 3 Muelle semielíptico simétrico donde $a=b$ [29].

La ecuación (2. 5) describe la relación de longitud Y , en donde se observa que para un muelle semielíptico, la relación entre la longitud del lado móvil b y el lado fijo a es igual a 1.

$$Y = b/a = 1 \quad (2. 5)$$

La ecuación (2. 6) representa a la deflexión f en función del cambio de radio de curvatura entre la posición del muelle en flexión R y la posición sin carga R_0 .

$$f = \frac{L^2}{6} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \quad (2. 6)$$

La ecuación (2. 7) representa a los esfuerzos S que se pueden calcular conociendo el cambio de curvatura y el espesor de hoja t .

$$S = \frac{E}{2} t \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \quad (2. 7)$$

La ecuación (2. 8) describe el esfuerzo S en función de la deflexión f , el cual varia proporcionalmente con el espesor de la hoja t , e inversamente con el cuadrado de la longitud efectiva L .

$$S = \frac{4Et}{L^2} f \cdot SF \quad (2. 8)$$

La ecuación (2. 9) corresponde al esfuerzo S en función de la carga aplicada P . En este caso, el esfuerzo varía proporcionalmente con longitud efectiva L e inversamente con el momento total de inercia $\sum I$.

$$S = \frac{at}{4 \sum I} P = \frac{Lt}{8 \sum I} P \quad (2. 9)$$

La ecuación (2. 10) describe el rango k del cambio de carga por unidad de la deflexión del muelle.

$$k = \frac{P}{f} = \frac{4E \sum I}{a^3} \cdot SF = \frac{32E \sum I}{L^3} \cdot SF \quad (2. 10)$$

La ecuación (2. 11) corresponde al momento de inercia total $\sum I$, y la (2. 12) al máximo valor de espesor de hoja t_{max} .

$$\sum I = \frac{kL^3}{32 \cdot E \cdot SF} \quad (2. 11)$$

$$t_{max} = \frac{8 \sum I S}{L P} \quad (2. 12)$$

Como se observa en las ecuaciones anteriores, se ha introducido un parámetro SF , el cual se conoce como *factor de rigidez*. Esta constante se ha introducido con el fin de considerar la influencia de la longitud de las hojas y del tipo de terminación de estas, ya que en la práctica los muelles no son realmente vigas uniformes. El factor SF tiene un máximo valor de 1.50 cuando todas las hojas de un muelle son de longitud completa, o cuando solo hay una hoja con ancho y espesor constante. En otros casos, el valor correcto de SF escogido para el diseño se basa en la experiencia, siendo que este varía desde 1.10 hasta 1.50 [29].

Entre los valores que puede tomar este factor, las condiciones son como se describe a continuación: 1.10 para muelles de autos de pasajeros y camiones ligeros con terminaciones de hojas ahusadas y un diseño con esfuerzos más o menos uniformes, 1.15 para autos de pasajeros y camiones ligeros con terminaciones de hojas ahusadas y longitudes extendidas, 1.15 para muelles de camiones con terminaciones de hojas no ahusadas y un diseño con esfuerzos más o menos uniformes, 1.20 para camiones con terminaciones de hojas no ahusadas y dos hojas de

longitud completa, 1.25 para camiones con terminaciones de hojas no ahusadas y tres hojas de longitud completa [29].

Para muelles multietapa, el valor es 1.40 para la primera etapa del muelle, antes de que entre en contacto con la segunda etapa. Para la segunda etapa, cuando todas las hojas están en operación, el valor es de 1.10 con terminaciones de hojas ahusadas, y 1.40 con terminaciones de hojas no ahusadas [29].

2.2 Contacto y fricción entre hojas

El muelle de fricción es uno de los problemas de ingeniería que involucra el contacto entre dos o más componentes. En estos problemas, una fuerza aplicada de forma normal a las superficies en contacto actúa en los cuerpos cuando se tocan entre ellos. Si hay fricción entre las superficies, se crean fuerzas cortantes que resisten al movimiento tangencial (deslizamiento) de las superficies.

Cuando superficies entran en contacto, usualmente se transmiten tanto fuerzas cortantes como normales a lo largo de la interfaz. Así, un análisis puede requerir que se tomen en cuenta fuerzas friccionantes, las cuales se resisten al deslizamiento relativo entre las superficies. La *fricción de Coulomb* es el modelo de fricción más comúnmente usado para describir la interacción de superficies en contacto. El modelo caracteriza el comportamiento friccionante entre superficies usando un coeficiente de fricción μ . El coeficiente de fricción al comienzo del deslizamiento, desde la condición de adherencia, es diferente durante el deslizamiento establecido. La primera es típicamente referida como coeficiente de fricción estática, y la segunda como coeficiente de fricción cinética.

La fricción entre hojas es la fuerza que se opone al movimiento relativo de las mismas. La fuerza de fricción provee de amortiguamiento en el sistema de suspensión y disipación de energía. También se opone a la deflexión inicial del muelle, haciendo que el sistema de suspensión sea menos sensible a fuerzas dinámicas. La curva carga-desplazamiento de un muelle muestra una relación no lineal descrita mediante un bucle histerético debido a la fricción. La fricción debe ser bien estudiada para caracterizar el comportamiento del muelle [7].

Muchos camiones pesados que usan múltiples muelles se fían solamente en la fricción entre hojas para proveer amortiguamiento, por lo tanto, no se requiere de amortiguadores

adicionales. En las suspensiones que usan un muelle de una sola hoja, se debe usar amortiguadores para controlar las vibraciones.

La magnitud de la fuerza de fricción depende de la condición de la superficie de las hojas (coeficiente de fricción), de la carga soportada por dichas superficies de estas, y de la velocidad del deslizamiento entre ellas.

La Figura 2. 4 muestra un diagrama carga-deflexión como resultado de una prueba conducida a un bajo rango de deflexión. Se observa que, a cualquier deflexión dada, la fuerza será algún valor entre el límite superior e inferior, dependiendo de la dirección del movimiento y de la distancia de la última inversión del movimiento. Pruebas conducidas a un rango más rápido de carga y descarga mostrarán las mismas características básicas, pero la anchura y forma del diagrama serán diferentes [29].

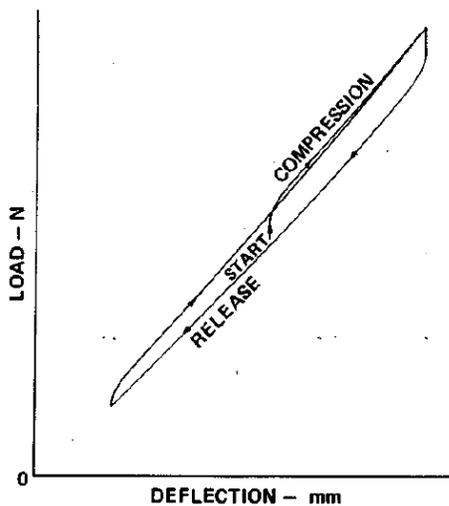


Figura 2. 4 Diagrama típico de una ballesta probada a baja velocidad para mostrar la fricción entre hojas [29].

Por otra parte, considerando dos cuerpos $B1$ y $B2$ (Figura 2. 5) para definir problemas de contacto en general, existe una zona de contacto la cual se encuentra entre $B1$ y $B2$, que sin carga es igual a C_0 . Si los cuerpos están bajo carga, C_0 cambia a C . Por lo tanto, se divide el problema de contacto en tres distintos grupos [30]:

- 1) Avance de contacto $C - C \cap C_0 > 0$
- 2) Contacto estacionario $C = C_0$
- 3) Retroceso de contacto $C < C_0$

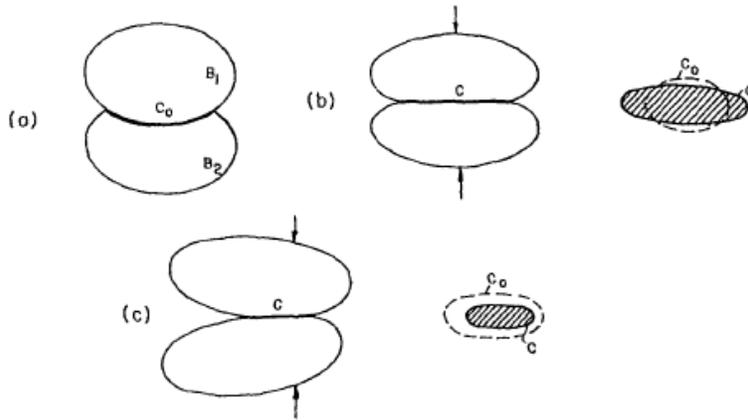


Figura 2. 5 Dos cuerpos B1 y B2 en contacto [30].

Al examinar las hojas de manera individual, se observa que estas se encuentran en contacto continuo a lo largo de su longitud cuando el muelle no está sometido a carga, mientras que cuando el muelle está cargado las hojas están parcialmente separadas (Figura 2. 6). Por lo tanto, un muelle bajo carga representa un problema de retroceso de contacto.

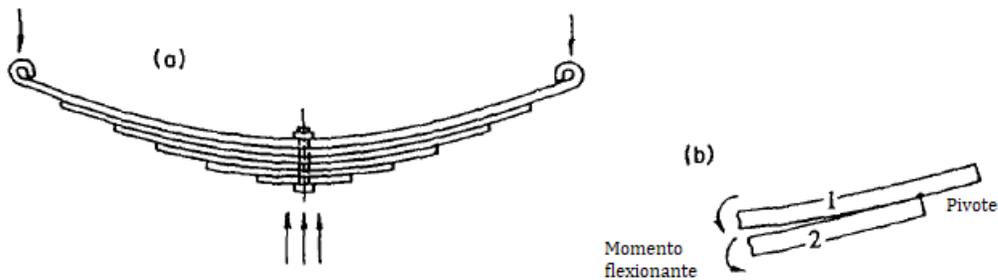


Figura 2. 6 Muelle: (a) vista general, (b) separación de hojas bajo carga [30].

2.3 Mecanismos de sujeción y alineación

Los tipos de grillete utilizados para el montaje de muelles en los sistemas de suspensión se muestran en la Figura 2. 7. El grillete C de una pieza es normalmente usado en camiones ligeros y autos de pasajeros. El grillete Y de una pieza tiene una mayor capacidad de carga que el grillete C. El grillete de pin consiste en dos mitades que se unen con una cuña céntrica y un perno cónico. El grillete doble atornillado es utilizado cuando se deben resistir fuerzas transversales al muelle (es decir, en dirección del ojal) y un diseño con ajustes cerrados para evitar el aflojamiento en servicio. El grillete remachado se adapta bien a bujes de caucho, lo que lo hace de uso general en autos de pasajeros y camiones ligeros.

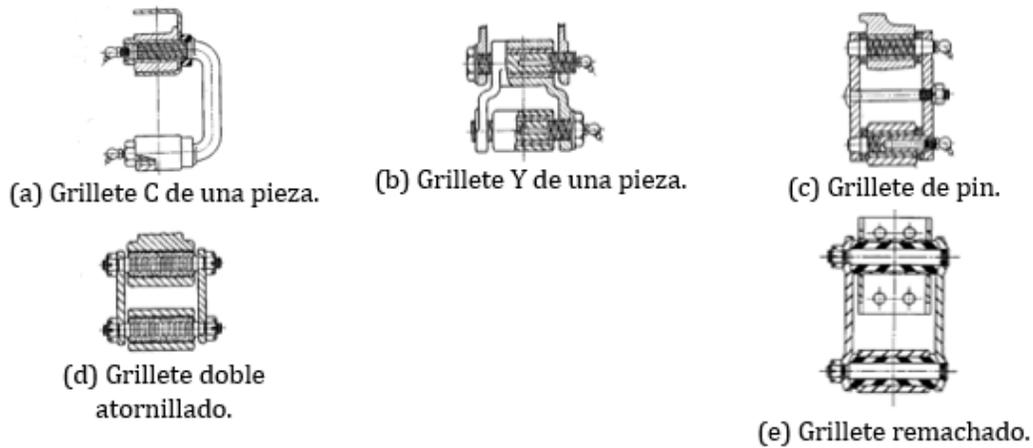


Figura 2. 7 Grilletes para montaje de muelle [29].

Los broches de alineación se encargan de proveer de una unión entre las hojas y limitar la separación vertical de estas, así como del movimiento lateral. Los más comunes son los mostrados en la Figura 2. 8. El broche de perno es el mayormente usado en muelles pesados, y se debe cuidar que el claro entre el tornillo y la hoja maestra sea suficiente para permitir que la torsión longitudinal no se concentre cerca de los ojales. El broche de remache es usado en muelles donde los claros son limitados. El broche de una sola pieza se puede usar con o sin revestimiento de goma. El broche de dos piezas tiene lados que son rectos y proveen un claro para todas las hojas. El broche de bloqueo de pestaña se usa con o sin revestimiento de goma solamente sobre la hoja maestra. El broche de bloqueo de pestaña con espiga localizada se vale de una espiga para retener el broche en la hoja del muelle. El broche invertido se usa en muelles pesados donde hay problemas de claros.

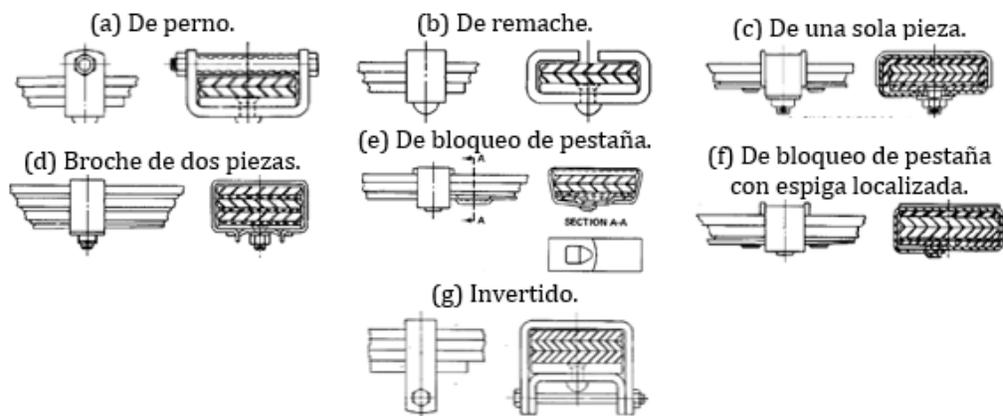


Figura 2. 8 Broches de alineación de hojas [29].

2.4 Uniones con pernos

Las uniones pueden ser de dos tipos dependiendo de la dirección de las cargas actuando sobre ellas. Si la línea de acción de las fuerzas es paralela al eje del perno, la unión está cargada a tensión. Si la línea de acción es perpendicular al eje del perno, está cargada al cortante y se llama unión a cortante o de traslape. Es necesario una unión a tensión para mantener juntas a las hojas y evitar que estas se separen.

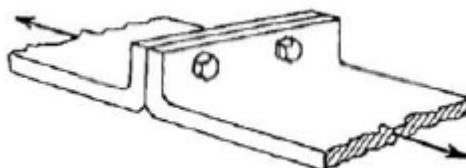


Figura 2. 9 Unión empernada a tensión [31].

Una relación general entre el torque aplicado T y la precarga F_i en el perno, puede ser descrita en términos del diámetro del perno d y un factor de par de torsión K , como se muestra en la ecuación (2. 13) [31, 32]:

$$T = K \cdot d \cdot F_i \quad (2. 13)$$

A valores bajos del factor K se obtienen altas precargas y fuerzas de sujeción, pero estas pueden llevar al perno cerca de su límite de fluencia. Altos valores de K provocan bajas precargas y fuerzas de sujeción y se reduce la capacidad de la unión de resistir cargas externas

de tensión. En la Tabla 2. 1 se presentan algunos factores de par de torsión K . El fabricante de pernos *Bowman Distribution* es quien recomienda la utilización de estos factores. De acuerdo con [32], se emplea un valor de $K = 0.20$ cuando la condición del perno no se puntualiza.

Tabla 2. 1 Factores de par de torsión K para su empleo en la ecuación (2. 13) [32].

Condición del perno	K
Sin recubrimiento, acabado negro	0.30
Galvanizado	0.20
Lubricado	0.28
Con recubrimiento de cadmio	0.16
Con Anti-Seize Bowman	0.12
Con tuercas Bowman-Grip	0.09

La rigidez de un perno normalmente se obtiene considerando la porción del perno dentro de la unión, como una barra a tensión. Esto es:

$$K_b = \frac{E_b A_0}{L} \quad (2. 14)$$

Para el cálculo de la rigidez de los miembros de una unión, el conjunto actúa como resortes en serie a compresión, por lo que la rigidez total de los elementos será:

$$\frac{1}{k_m} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_i} \quad (2. 15)$$

2.5 Características de las pruebas de muelles tipo ballesta

Una máquina de prueba de muelles se muestra en la Figura 2. 10. Durante las pruebas en estas máquinas se aplica una carga al muelle desde cero hasta una deflexión máxima preestablecida, y después se regresa a cero. La carga se aplica en el centro del muelle. El émbolo que aplica la carga debe posicionarse a una altura que permita colocar el muelle para la prueba. Una vez posicionado el muelle, se aplican cargas en pasos de manera gradual. Entonces se toman las lecturas de la deflexión con el fin de realizar estudios comparativos de aceros de ballestas [22].



Figura 2. 10 Máquina de prueba de muelles [22].

Experimentalmente, es posible realizar la lectura de esfuerzos mediante el uso de galgas extensiométricas, preferentemente ubicadas en las superficies exteriores de la primera y última hoja [7, 9], como se observa en la Figura 2. 11, donde dichas galgas se señalan con la letra *L*. Considerando un comportamiento principalmente elástico del acero para muelles de alta resistencia, los esfuerzos se aproximan a partir de las deformaciones medidas mediante la ecuación de la ley de Hooke (2. 16):

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (2. 16)$$

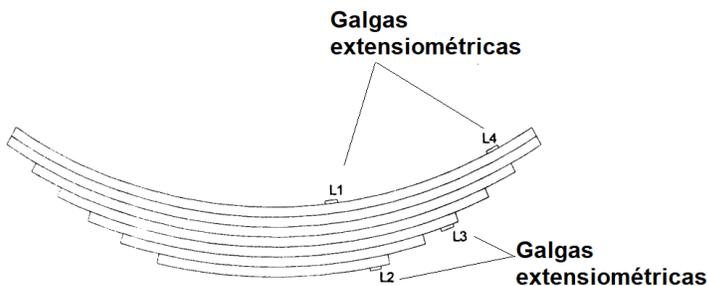


Figura 2. 11 Esquema donde se indica posibles ubicaciones de galgas extensiométricas [7].

Es posible realizar otras lecturas con el uso de indicadores de cuadrante, como el de la Figura 2. 12. Este instrumento puede brindar una lectura a simple vista, y se utiliza para la medición de desviaciones cuando se requiere precisión de milésimas. Este instrumento no entrega un valor como tal, sino una variación de mediciones. La aguja del indicador es capaz de moverse en dos direcciones, según la medida sea mayor o menor a la considerada como

nominal. Al ser un instrumento que compara medidas, debe estar sólidamente sujeto a una base de referencia durante su uso, por lo que se usan soportes especiales.



Figura 2. 12 Montaje de un indicador de cuadrante.

Como se ha descrito, existen máquinas para pruebas de muelles comerciales, las cuales cuentan con una bancada adecuada para montar el muelle. Estudios como los de Savaidis *et al.* [9], Arora *et al.* [10] o los de Dighe [22] hacen uso de máquinas de pruebas de muelles, las cuales ya tienen como fin el ensayo de estos elementos. En otros casos, como los de Kadziela *et al.* [13] y Kumar *et al.* [24], se construyeron bancos experimentales para realizar el estudio. En estos últimos ejemplos se observa que el banco se diseña de forma tal que pueda ser posicionado de manera diagonal a través del espacio en la máquina utilizado para montar la pieza, en caso de que el área de trabajo no sea lo suficientemente grande, como se muestra en la Figura 2. 13 y en la Figura 2. 14.

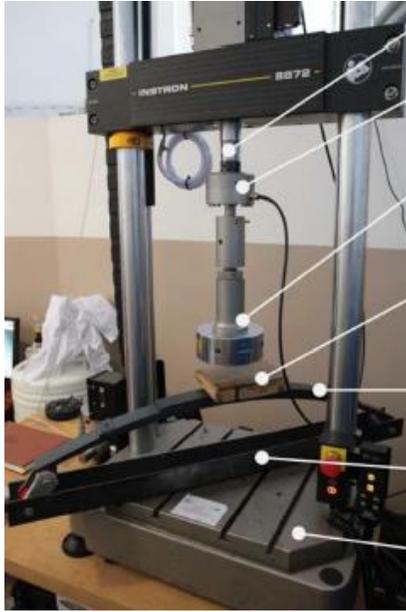


Figura 2. 13 Banco experimental de Kadziela *et al.* [13].



Figura 2. 14 Banco experimental de Bogusz *et al.* [33].

Krason *et al.* [34] presenta modelos numéricos para evaluar la curva fuerza-desplazamiento representando un ciclo de histéresis, siendo el área entre esta curva la disipación de energía obtenida por las fuerzas de fricción seca, denotada por E_r , la cual está dada por el producto de la fuerza aplicada P y el desplazamiento correspondiente a esta fuerza. Dicha energía se obtiene con la ecuación (2. 17) por integración numérica con respecto a la deflexión f , siendo f_{max} el valor máximo de la deflexión del muelle, f_0 el valor inicial y f_k el valor final. El valor numérico en esta segunda integral es negativo.

$$\begin{aligned}
 E_r &= \oint P dl = \int_{f_0}^{f_{max}} P dl + \int_{f_{max}}^{f_k} P dl & (2. 17) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} (P_{i+1} + P_i) (f_{i+1} - f_i) + \sum_{i=n}^{j-1} \frac{1}{2} (P_{i+1} + P_i) (f_{i+1} - f_i)
 \end{aligned}$$

La energía potencial o elástica E_o , debida a la deflexión del muelle al someterlo a la carga, se obtiene por la integración numérica de la ecuación (2. 18), donde igualmente P representa a la carga aplicada y f_{max} el valor máximo de la deflexión alcanzado por el muelle.

$$E_o = \int_0^{f_{max}} P dl = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} (P_{i+1} + P_i) (f_{i+1} - f_i) \quad (2.18)$$

Otro parámetro representativo del sistema es la *capacidad de amortiguamiento específico*, denotada por la letra griega ψ , que es la cualidad de un material para absorber vibraciones debido a la fricción, convirtiendo la energía mecánica en calor. Este se define de acuerdo con la ecuación (2.19) como la razón entre la disipación de energía entre la máxima energía potencial durante un periodo de histéresis completo. Este es un parámetro adimensional.

$$\psi = E_r / E_o \quad (2.19)$$

Fancher *et al.* [35] presenta un modelo mediante el cual se puede obtener la *fuerza de amortiguamiento de Coulomb promedio*, denotada por C_F , que se basa en la energía disipada en un ciclo de carga del muelle. La medida de esta fuerza se determina dividiendo la disipación de energía E_r obtenida de la integración del área del ciclo de histéresis entre cuatro veces la distancia total recorrida por el muelle durante el ciclo de compresión, como se observa en la ecuación (2.20):

$$C_F = \frac{E_r}{4\delta} \quad (2.20)$$

donde δ es la amplitud de la deflexión del muelle.

2.6 Discusión

En la literatura se ha hablado de la influencia que tienen los grilletes en los resultados que un estudio numérico pudiera arrojar. Mientras que el grillete deber ser tomado en cuenta cuando se quiere realizar un estudio completo del desempeño de un sistema de suspensión, es posible ignorar este elemento estructural cuando sólo se busca estudiar características más propias del muelle en sí.

Es de notar que en la revisión de la literatura no se ha encontrado que se estudie el efecto que tienen los broches de alineación sobre el muelle. La función de estos elementos es impedir el vaivén de las hojas, es decir, cumplen con una función de condición de frontera. Sin

embargo, existe un área de contacto entre este elemento y cierta región de las hojas. Si no se considera la fricción en esta zona, se puede decir que se trata de elementos que solo cumplen con una función de alineamiento. Por otra parte, al considerar el contacto entre las hojas y estos elementos, es de esperar fuerzas de fricción en estas regiones. Siendo la fricción dependiente de la carga normal, es de esperar que se incremente en cuanto se aplique una precarga mediante el apriete a los broches que emplean pernos. Como se ha encontrado en la literatura, la consideración de la fricción influye en la rigidez del sistema, debido a que la deformación del muelle no dependerá solamente de las propiedades elásticas del material, sino también de la capacidad de amortiguamiento debido a la fricción.

Esto, aunado al hecho de observar un fenómeno de retroceso de contacto, conlleva a plantear un estudio implementando sistemas de apriete que sean capaces también de generar una condición de precarga, con la cual se influye en el mecanismo de fricción, además de mantener un contacto continuo entre las hojas.

Capítulo 3. Estudio experimental

3.1 Diseño de banco experimental

El banco experimental para realizar este estudio se diseñó de forma pequeña y lo más compacto posible. Esto con el fin de que la geometría permita posicionarlo en una máquina universal. El muelle objeto de estudio tiene una longitud total de 668.338 mm, por lo que el banco debe construirse de forma que se ubique de forma transversal en la base de la máquina universal Shimadzu Autograph AG-X plus 100 kN, la cual es la que se encuentra disponible en los laboratorios del CENIDET.

Se propuso un banco que pueda cumplir con la característica de poder ser montado de manera diagonal en la máquina universal empleada para este estudio. El banco se construyó con canal C de acero. Se realizaron las perforaciones correspondientes a la ubicación de los ojales del muelle. Una de estas permite movimiento traslacional para ojal móvil. Finalmente, todos los elementos se unieron mediante el uso de tornillos y tuercas. El canal C usado corresponde a la designación estándar 3x4.1, nomenclatura que indica un tamaño de peralte de 3" (76.2 mm) y un peso de 4.1 libras/pie (6.10 kg/m).

El banco experimental se muestra en la Figura 3. 1. Se realizaron los planos técnicos de sus partes para su maquinado. Esto se realizó con las herramientas disponibles en el laboratorio del CENIDET, empleando una cortadora, un taladro y una fresadora. Se empleó canal C disponible en el laboratorio y el montaje del muelle sobre el banco se muestra en la Figura 3. 2.

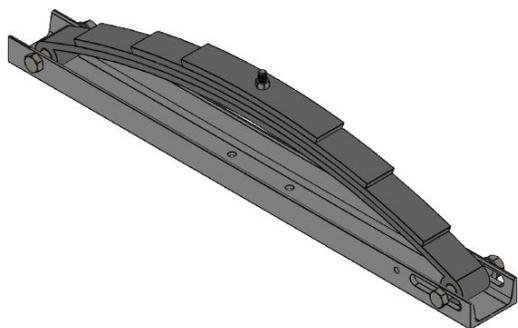


Figura 3. 1 Propuesta conceptual de banco experimental. **Figura 3. 2 Muelle montado en soporte fabricado.**

El banco se probó en la máquina universal disponible en las instalaciones del CENIDET. Se posiciona el banco y se utilizaron los platos para pruebas de compresión, como se muestra en la Figura 3. 3. La máquina se encuentra conectada a una PC donde se almacenan los datos de

las pruebas, por lo que se programa en el software TRAPEZIUM una prueba de compresión para la obtención de una curva fuerza-desplazamiento, parámetros medidos por dispositivos integrados en la máquina de pruebas.



Figura 3. 3 Prueba del banco en máquina universal.

Con esto se programó un aumento de carga gradual a una velocidad baja, con el fin de observar el comportamiento del banco y tomar las acciones pertinentes en caso de una falla. Se probó el muelle inicialmente con cuatro hojas, que es la configuración de fábrica. La prueba se realizó a una velocidad de 5 mm/min hasta alcanzar una carga aplicada máxima de 10 kN. Posteriormente, esta fuerza se retira gradualmente. De este experimento se obtiene mediante el software de la máquina, una curva de fuerza-desplazamiento, como la que se observa en la Figura 3. 4.

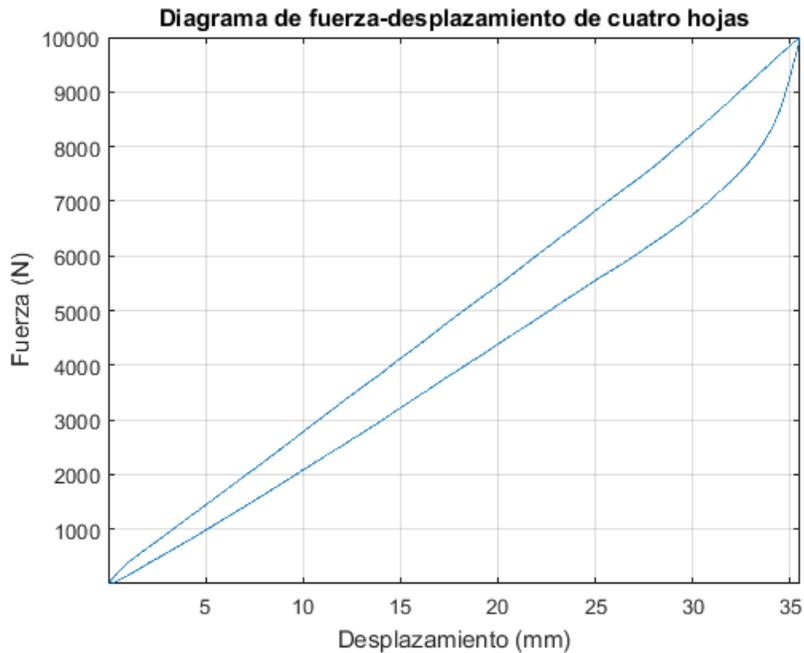


Figura 3. 4 Diagrama fuerza-desplazamiento de muelle de cuatro hojas.

Empleando la ecuación (2. 10) de la metodología de la SAE, se calculó una máxima deflexión. El momento de área se obtiene mediante las tablas proporcionadas por SAE en su documento [29], donde de acuerdo con dicha información, al muelle de cuatro hojas con las características disponibles le corresponde un momento de área de 10782.428 mm^4 . Posteriormente, empleando este valor y el de la carga aplicada, se despeja la deflexión de dicha ecuación. Como se describió en la sección 2.1, se debe emplear un *factor de rigidez SF* en la ecuación (2. 10), con el fin de considerar la influencia de la longitud de las hojas y el tipo de terminación de estas, ya que en la práctica los muelles no son vigas de geometría uniforme. Se considera un factor de rigidez *SF* con un valor de 1.15, de acuerdo con la documentación de SAE, debido a que las hojas del muelle no son ahusadas.

El valor obtenido por la ecuación (2. 10) es de 36.7 mm para una carga de 10 kN. Se observa que, al aplicar la carga de 10 kN de manera experimental, se obtiene una máxima deflexión de 35.5232 mm. Es decir, una diferencia de apenas 3.2%. Por lo tanto, se plantea que todas las pruebas se realicen a una deflexión máxima de 35 mm, de forma que se obtenga para todos los casos una deformación semejante a la que en teoría debe presentar el muelle completo con la capacidad de carga indicada por el fabricante.

3.2 Sistema de precargas

Es común tener algunos broches y abrazaderas en los muelles comerciales, algunos en mayor o menor cantidad que otros. Estos elementos se encargan de evitar el movimiento de vaivén entre las hojas, manteniéndolas alineadas. Como se presenta a continuación en la Figura 3. 5, un broche del tipo pestaña es el contemplado por el fabricante para el muelle de este estudio, siendo un elemento que se adapta a la geometría de la sección transversal.



Figura 3. 5 Broche que sujeta las hojas del muelle.

Se implementa un sistema de apriete por pernos, con los cuales se aplica una precarga al muelle. La colocación de estos elementos con una precarga cambia las condiciones de contacto en el sistema, alterando las superficies en contacto entre las hojas, al igual que se incrementa la fuerza normal entre estas, con lo que es posible aumentar la fricción. En la Figura 3. 6 se muestra el diseño conceptual de este sistema.

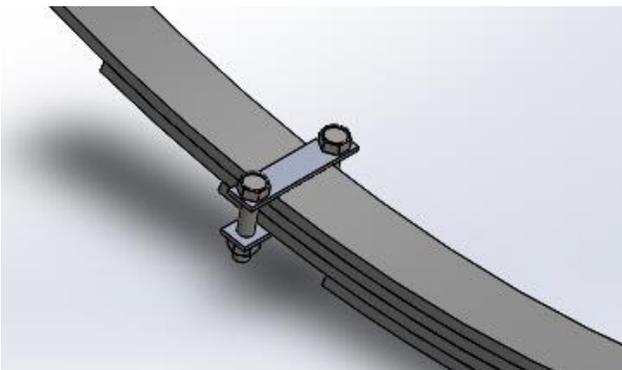


Figura 3. 6 Conceptualización de abrazaderas con elementos tipo solera.

Los elementos de apriete se fabrican con solera de acero de 25.4 mm de ancho (1") por 3.175 mm de espesor (1/8"). Estas se recortan con una longitud de 85 mm, distancia suficiente para que estos elementos entren en contacto con las hojas del muelle y sean apretados por dos tornillos M10 grado 5, como se observa en la Figura 3. 7.



Figura 3. 7 Abrazadera para precarga del muelle.

Estos tornillos, de acuerdo con la literatura [36], tienen un torque máximo de apriete de 55 N-m. Estos elementos de apriete se colocan a lo largo del muelle, como se observa en la Figura 3. 8, en diferentes cantidades y posiciones, con el fin de observar su influencia en la rigidez y disipación de energía. Debido a su corto tamaño y al poco espacio libre dejado por el plato de compresión de la máquina universal, la cuarta hoja se dejó libre de apriete.

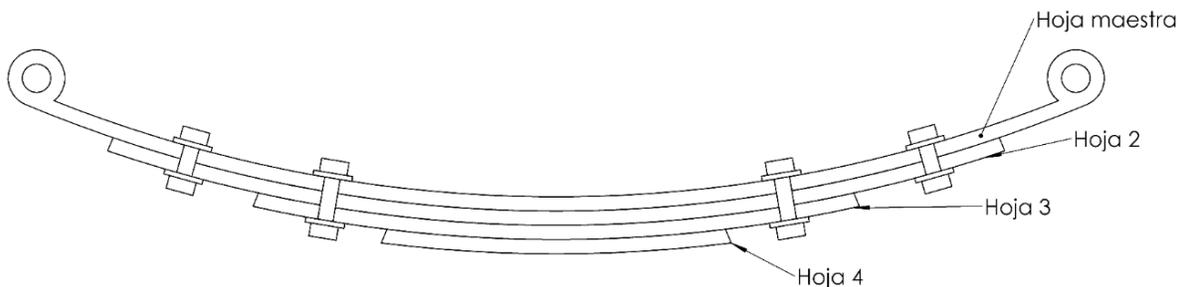


Figura 3. 8 Esquema de diferentes posiciones para la colocación de elementos de apriete en muelle.

3.3 Diseño experimental

El estudio experimental se considera como un diseño factorial. El objetivo de un diseño factorial es estudiar el efecto individual y de interacción de varios factores sobre una o varias respuestas cuando se tiene el mismo interés en todos los factores. Los factores pueden ser de tipo cualitativo o cuantitativo. Para estudiar la manera en que influye cada factor sobre la variable de respuesta es necesario elegir al menos dos niveles de prueba para cada uno de ellos. Con el diseño factorial completo se corren aleatoriamente todas las posibles combinaciones que

pueden formarse con los niveles de los factores a investigar. Se asume que el experimento se corrió en igualdad de circunstancias con respecto al resto de los factores no estudiados.

En el caso de este estudio, se plantea variar el número de hojas del muelle y el número de elementos de precarga a implementar. Si se considera un nivel bajo y alto para cada factor, se tiene un diseño factorial 2^k donde $k = 2$, por lo que se obtienen cuatro combinaciones para corridas experimentales.

Después de haber realizado las pruebas correspondientes, los datos obtenidos deben ser tratados mediante la estadística con el fin de validar los resultados y verificar la correcta ejecución del experimento. Existen paquetes estadísticos, como *Statgraphics Centurion XVI*, que permiten realizar diseño de experimentos, insertando el número de variables de respuesta y el número de factores experimentales. Se definen los factores nombrándolos y añadiendo los niveles de tratamiento y las unidades, así como el nombre y las unidades de las respuestas.

Las preguntas principales que se quieren responder con el experimento son: ¿el número de hojas y el número de abrazaderas afectan la disipación de energía? Si la afectan, ¿cómo es tal efecto y cuál es la combinación de hojas y abrazaderas que maximiza la disipación? ¿Cuál es la disipación esperada en las condiciones óptimas?

3.4 Resultados de las pruebas experimentales

Se fabricaron hasta cuatro abrazaderas con soleras, con el fin de colocarlos de forma tal que se aprieten hasta tres hojas del muelle, como se observa en la Figura 3. 9. Las configuraciones experimentales fueron: muelle de cuatro hojas con dos abrazaderas, muelle de cuatro hojas con cuatro abrazaderas, muelle de dos hojas con dos abrazaderas y muelle de cuatro hojas con cuatro abrazaderas. De esta forma, se estudia la influencia de la rigidez que aportan diferentes números de abrazaderas al apretar diferentes números de hojas y se observa dicha influencia en la disipación de energía del muelle. Se probó el caso de dos y cuatro hojas sin abrazaderas, con el fin de tenerlos como datos de referencia, principalmente el del muelle de cuatro hojas, el cual es como se ofrece en el mercado.

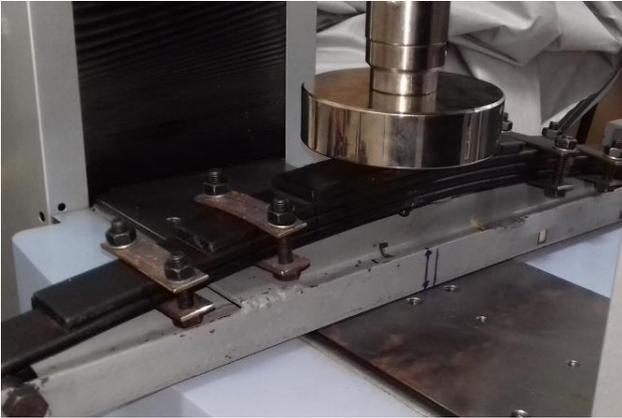


Figura 3. 9 Prueba de muelle de cuatro hojas con varios elementos de apriete.

En la Figura 3. 10 se presentan las curvas de fuerza-desplazamiento obtenidas para el muelle de cuatro hojas probado con diferente número de abrazaderas. Es apreciable, por inspección visual, el cambio del área entre la curva, la cual representa la disipación de energía. Es notable también que, a mayor número de abrazaderas, se requiere de una mayor fuerza para deformar el muelle, lo que indica que estas incrementan su rigidez.

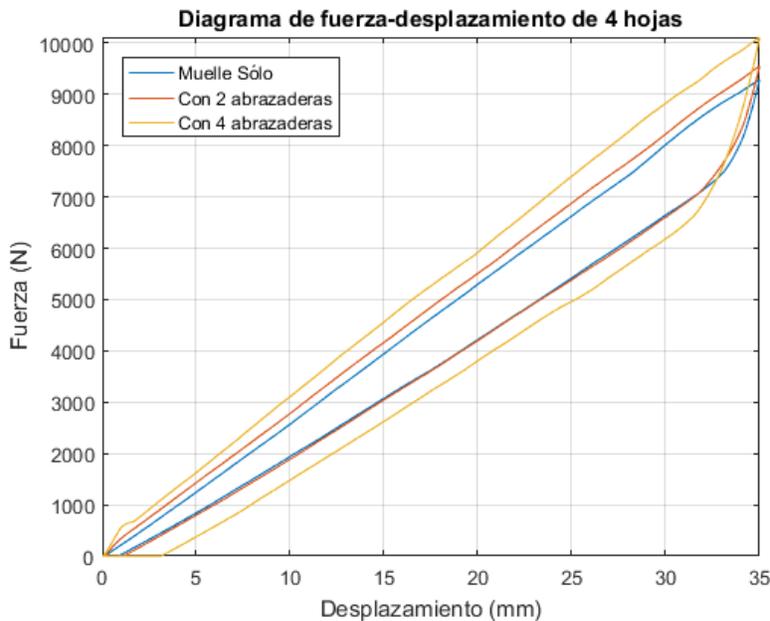


Figura 3. 10 Resultados experimentales de histéresis para muelle con cuatro hojas y diferentes abrazaderas.

En la Tabla 3. 1 se muestra el resultado de las pruebas los cálculos de la disipación de energía y la energía elástica para cada caso. Se observa que existe un incremento de ambas. La disipación de energía E_r con dos abrazaderas aumenta un 29% con respecto al muelle sin

precargas, mientras que cuando se implementan cuatro abrazaderas la disipación llega a aumentar hasta 104%. Por otra parte, la energía elástica E_o aumenta solo 2.5% con el uso de dos abrazaderas y 11% con cuatro. Debido al gran incremento de la disipación de energía con respecto a la energía elástica, la capacidad de amortiguamiento específico ψ también presenta un incremento notable.

Tabla 3. 1 Resultados de apretar un muelle de cuatro hojas con diferentes números de precargas.

Muelle 4 hojas	E_o (mJ)	$\Delta(\%)$	E_r (mJ)	$\Delta(\%)$	ψ
Sin precargas	164866.44		31294.63		0.19
Con 2 abrazaderas	169063.66	2.5	40547.97	29	0.24
Con 4 abrazaderas	184255.19	11	64052.93	104	0.35

Para el caso del muelle con dos hojas, se procede a deformarlo también con una deflexión máxima de 35 mm, como se observa en la Figura 3. 11, con el fin someterlo a una deformación semejante a la presentada por el muelle con el peine completo. Se decide también emplear para este caso un número máximo de cuatro abrazaderas.

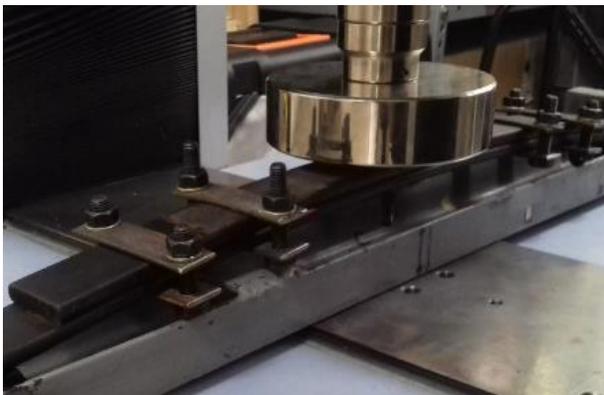


Figura 3. 11 Prueba de muelle con dos hojas con hasta cuatro abrazaderas.

Se evalúa aplicando la carga de compresión igualmente a una tasa de 5 mm/min y se obtienen las curvas de histéresis mostradas en la Figura 3. 12. Igualmente se observa con referencia al muelle de dos hojas, un incremento del área entre la curva conforme se aumenta el número de elementos de apriete.

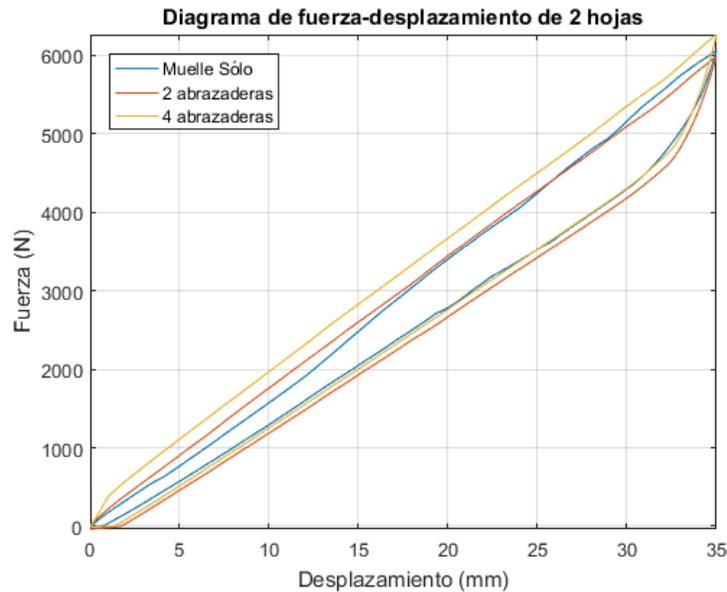


Figura 3. 12 Resultados experimentales de histéresis para muelle con dos hojas.

Como se observa en la Tabla 3. 2 existe en este caso también un aumento en la disipación de energía con respecto al muelle sin abrazaderas, mientras la energía elástica se incrementa ligeramente. La disipación de energía E_r aumenta 31% cuando se implementan dos abrazaderas a dos hojas, mientras que aumenta 53% cuando se implementan cuatro. La energía elástica E_o presenta incrementos menores, de 4.5% cuando se colocan dos abrazaderas en dos hojas y de 5.6% cuando se implementan cuatro.

Tabla 3. 2 Resultados de apretar dos hojas con diferentes números de precargas.

Muelle 2 hojas	E_o (mJ)	Δ (%)	E_r (mJ)	Δ (%)	ψ
Sin precargas	103367.20		16866.38		0.16
Con 2 abrazaderas	108084.95	4.5	22162.35	31	0.21
Con 4 abrazaderas	109224.33	5.6	25873.27	53	0.24

Se observa que el muelle de dos hojas apretado con diferente número de abrazaderas, con respecto al muelle sólo, también presenta un incremento tanto de energía elástica como energía de disipación. En este caso, se observa que los resultados de disipación de energía de la prueba del muelle de dos hojas con cuatro abrazaderas se aproximan más al del muelle de cuatro hojas sólo. La disipación de energía para cada caso obtenida con la ecuación (2. 17) se muestra en la Figura 3. 13, mientras que la energía elástica obtenida con la ecuación (2. 18) se muestra en la Figura 3. 14. De las gráficas se infiere que la disipación de energía crece conforme

se aumenta el número de hojas y de precargas de manera más significativa que la energía elástica, donde parece que el factor predominante es el número de hojas.



Figura 3. 13 Disipación de energía para cada caso de estudio.

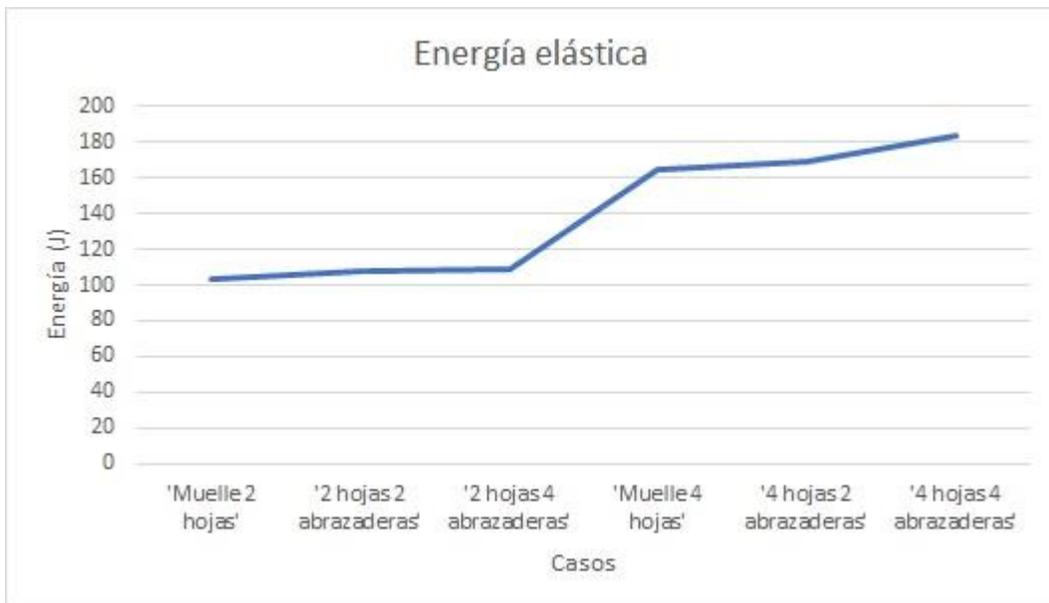


Figura 3. 14 Energía elástica para cada caso de estudio.

Los datos de fuerza de amortiguamiento de Coulomb obtenidos con la ecuación (2. 20), además de la rigidez obtenida con la ecuación (2. 10), se presentan en la Tabla 3. 3 y gráficamente en la Figura 3. 15.

Tabla 3. 3 Fuerza de amortiguamiento de Coulomb promedio y rigidez de los casos experimentales estudiados.

Casos		Fuerza (N)	Rigidez (N/mm)
Muelle de 2 hojas	Sin abrazaderas	120.474	173.077
	Con 2 abrazaderas	158.303	170.946
	Con 4 abrazaderas	184.804	178.806
Muelle de 4 hojas	Sin abrazaderas	223.533	265.469
	Con 2 abrazaderas	289.628	272.917
	Con 4 abrazaderas	457.521	289.00

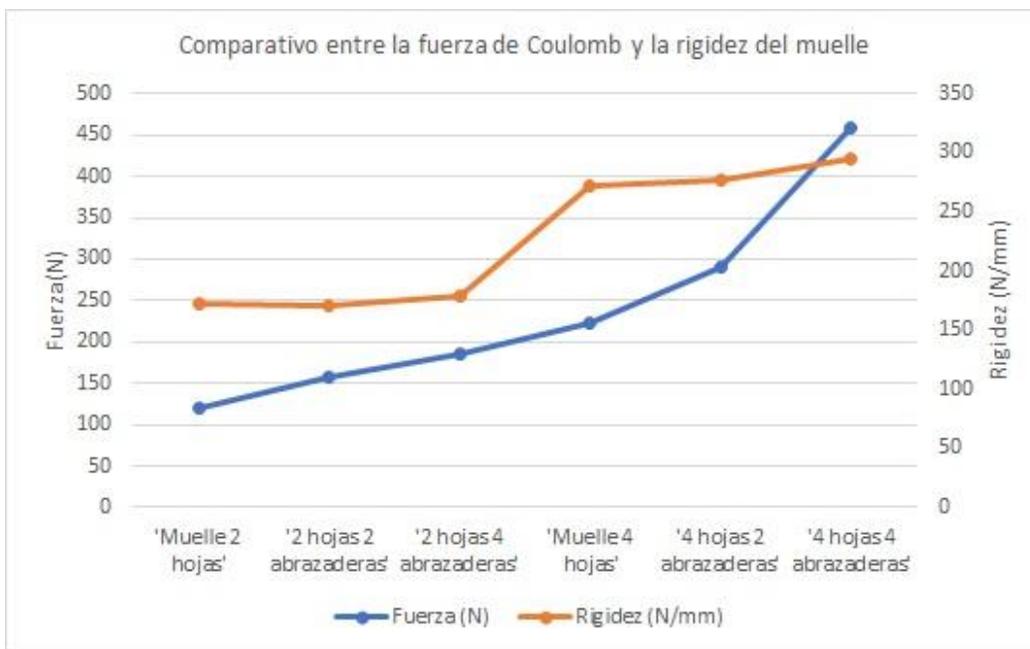


Figura 3. 15 Fuerza de amortiguamiento de Coulomb promedio y rigidez de los casos estudiados.

Se observa una analogía del comportamiento de la fuerza de amortiguamiento de Coulomb promedio y la rigidez con el de la disipación de energía y de la energía de deformación obtenidos previamente, ya que con el aumento del número de hojas y de elementos de apriete, la rigidez no crece tan progresivamente como la fuerza de amortiguamiento de Coulomb. El cambio más significativo de la rigidez ocurre ante un aumento de número de hojas, por lo que

se concluye que la implementación de precargas en el muelle no influye en el incremento de este parámetro. Por otra parte, la fuerza de amortiguamiento sí crece, tanto con el aumento de hojas como con el aumento de precargas.

3.5 Discusión

Se realizaron varias pruebas para cada uno de los casos, con el fin de obtener repetibilidad de los resultados, e igualmente estas se llevaron a cabo de manera aleatoria, con el fin de nulificar el efecto de las fuentes de variabilidad que actúan durante el transcurso del experimento (como las variables ambientales, errores de montaje, etc), al repartir su efecto equitativamente en cada caso. El orden aleatorio de las pruebas se obtuvo mediante el uso del software estadístico *Statgraphics*. Dicho software también nos permite obtener parámetros como el *coeficiente de determinación* R^2 y el *coeficiente de determinación ajustado* R_{aj}^2 . Para interpretar estos coeficientes se debe cumplir que $0 \leq R_{aj}^2 \leq R^2 \leq 100$, los cuales cuantifican el porcentaje de variabilidad de los datos y por ello son deseables valores próximos a 100. Si $R^2= 0$, no existe correlación; si $R^2= 100$, se tiene una correlación perfecta. En la literatura se plantea que para hablar de un modelo que tiene un ajuste satisfactorio es necesario que se tengan valores de al menos 70 [37].

Con el número de pruebas realizadas, se obtuvo un valor de R^2 de 99.7 y un valor R_{aj}^2 de 99.5. Esto significa que los factores estudiados junto con su interacción son responsables o explican un alto porcentaje de la variabilidad observada en disipación de energía. De esta manera, el efecto atribuible a factores no estudiados ya sea que se hayan mantenido en un nivel fijo o que hayan tenido pequeñas variaciones, más el efecto de errores experimentales, fueron pequeños en comparación con el efecto de los factores estudiados. Se puede entonces ajustar un modelo de regresión a los datos experimentales con la finalidad de predecir el valor de la disipación de energía en diferentes valores de los factores estudiados.

La información presentada en la Figura 3. 13 también se puede expresar mediante un gráfico de interacción, obtenido de los datos experimentales mediante el software *Statgraphics*. Este gráfico indica que dos factores interactúan de manera significativa sobre la variable de respuesta cuando el efecto de uno depende del nivel en que está el otro. Cuando existe interacción las líneas obtenidas tienen una pendiente muy diferente y si no hay interacción las líneas tienen pendientes similares, que son aproximadamente paralelas.

En la Figura 3. 16 se observa mediante un gráfico del efecto de interacción de los factores que, cuando se tiene un número reducido de hojas, el efecto del apriete en la disipación de energía del muelle es reducido. Sin embargo, cuando se aumenta el número de hojas, el número de elementos de apriete tiene una influencia significativa en la disipación de energía. Esto es debido a que con mayor número de hojas se tiene mayor número de interacciones de contacto, al haber más superficies deslizándose una sobre otra.

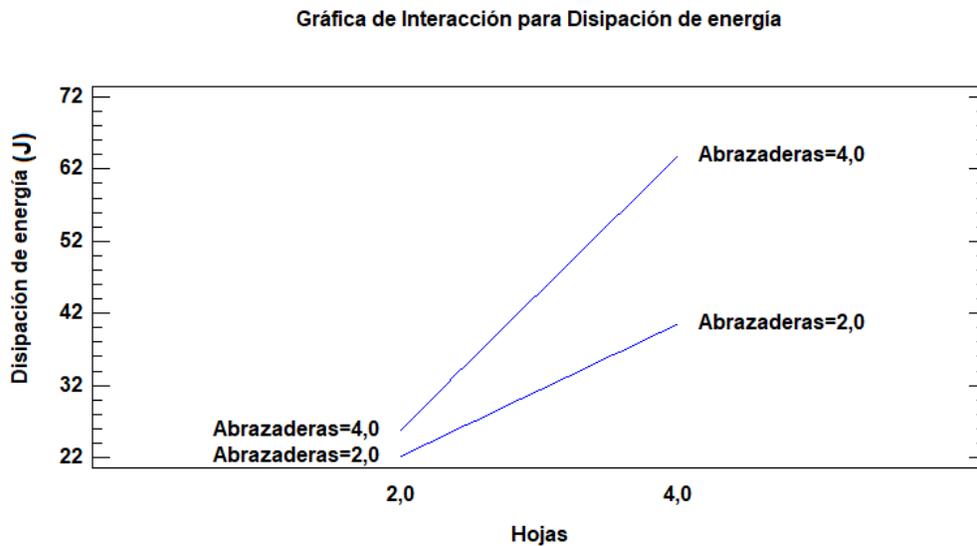


Figura 3. 16 Gráfico de interacción entre abrazaderas y precargas para la disipación de energía.

Es útil ajustar un modelo de regresión a los datos experimentales con la finalidad de predecir el valor de la disipación de energía en diferentes valores de los factores estudiados. El modelo de regresión ajustado que describe el comportamiento de la disipación de energía está dado por la ecuación (3. 1), donde E_r es la disipación de energía, x_1 el número de hojas y x_2 el número de abrazaderas.

$$E_r = 19697.3 - 622.949 * x_1 - 7960.3 * x_2 + 4907.88 * x_1 * x_2 \quad (3. 1)$$

La predicción del comportamiento de la disipación de energía sobre la combinación de niveles que se quiera dentro de la región experimental se puede realizar con el modelo ajustado dado por esta ecuación, evaluando el punto en la ecuación. La precisión de la predicción obtenida depende de la calidad del ajuste del modelo, que como se presentó en párrafos anteriores, los coeficientes de determinación son cercanos a 100. Es posible sustituir cualquier punto de la

región experimental en el modelo y obtener la respuesta predicha sobre el punto. Dicho valor es un estimador de la media de la disipación de energía en ese tratamiento.

En la Figura 3. 17 se presenta la superficie de respuesta, que resulta de representar gráficamente el modelo ajustado dado en la ecuación (3. 1). Éste modela el comportamiento de la disipación de energía sobre la región experimental. Se observa que los puntos donde la superficie toma los valores más grandes son precisamente con el tratamiento con cuatro hojas y cuatro abrazaderas. Se ve que la clave de una disipación de energía alta es el número de hojas.

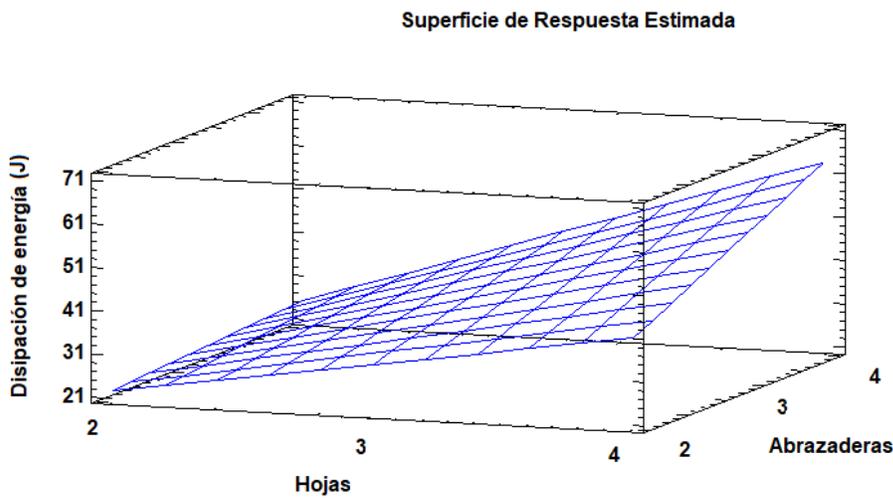


Figura 3. 17 Superficie de respuesta de los resultados experimentales obtenidos.

Capítulo 4. Estudio numérico con elementos finitos

4.1 Consideraciones de contacto del paquete comercial

En la interacción entre dos superficies en contacto actúan dos componentes: una normal a las superficies y una tangencial. La componente tangencial consiste en el movimiento relativo (deslizamiento) de las superficies y, posiblemente, de esfuerzos cortantes por fricción. Hay diversos modelos de interacción de contacto disponibles en *Abaqus CAE*, el modelo por defecto es el contacto sin fricción sin unión [38].

La distancia que separa a dos superficies se llama *claro*. Abaqus aplica una restricción de contacto cuando el claro entre dos superficies se vuelve cero. No hay un límite en la magnitud de la presión de contacto que puede ser transmitida entre las superficies. Las superficies en contacto se separan cuando la presión de contacto entre ellas se vuelve cero o negativa, y la restricción es removida. Este comportamiento es referido como contacto *duro*. En Abaqus/Standard el contacto duro es el método por defecto usado para aplicar las restricciones de contacto [38].

Abaqus/Standard usa por defecto un algoritmo de contacto de tipo maestro-esclavo: nodos en una de las superficies (esclava) no pueden penetrar los segmentos que componen la otra superficie (maestra). El algoritmo no coloca restricciones en la superficie maestra, la cual puede penetrar la superficie esclava entre los nodos de esta última. Como consecuencia de esta formulación, se debe ser muy cuidadoso al seleccionar las superficies esclava y maestra correctamente para lograr la mejor simulación de contacto posible. Una simple regla para esto es que la superficie esclava debe ser la que tendrá el mallado más fino. Otra regla es que, si la densidad de las mallas es similar, la superficie esclava debería ser aquella con el material menos rígido o aquellas de los cuerpos deformables [38].

4.2 Características del muelle

El modelo que se utilizará para este estudio es un muelle SW-4. Este consiste en un muelle semielíptico simétrico, fabricado con acero AISI 5160, de cuatro hojas de sección plana con terminaciones cuadradas, con una hoja maestra y 3 graduadas. Los ojales del muelle son del tipo de terminación hacia arriba. Con respecto al apriete entre hojas, además del perno central, este muelle cuenta con un único broche de alineación tipo pestaña en una sola pieza. Las hojas tienen un ancho de 44.45 mm (1.75") y un espesor de 9.144 mm (0.360"). La longitud total del

muelle entre los centros de los ojales (línea *datum*) es de 668.338 mm (26.3125") y la altura libre (distancia entre la línea *datum* y el centro de la hoja maestra) es de 76.2 mm (3"). El esquema de la pieza se muestra en la Figura 4. 1.

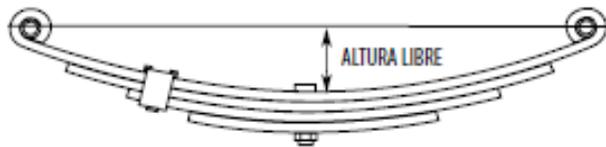


Figura 4. 1 Características del muelle considerado para el estudio experimental.

La capacidad de carga de este muelle es de 2 400 lb y esto es equivalente a 10675.73 N. Dentro de este límite, el muelle tendrá un comportamiento elástico como resorte, sin llegar a presentar fluencia. Con estos datos, tenemos un rango de cargas como las encontradas en operación.

4.3 Modelo discreto

Los estudios empleando paquetes de elementos finitos generalmente se dividen en tres partes: el preprocesamiento, etapa donde se crea el modelo a estudiar, se especifican propiedades de material, cargas y condiciones de frontera y tipo de mallado; análisis, donde el paquete se encarga de realizar los cálculos numéricos de los parámetros buscados; y finalmente el posprocesamiento, donde el usuario se encarga de interpretar los datos arrojados por el sistema.

El modelado del muelle puede realizarse empleado un software de diseño mecánico, o bien puede aprovecharse el espacio destinado para esto en el paquete de elementos finitos. En este caso, el modelo se realizó en el paquete de diseño mecánico *SolidWorks*, usando milímetros como unidad de longitud para el dibujo. Las piezas empleadas para estas simulaciones fueron la hoja maestra la cual cuenta con dos ojales y tres hojas graduadas, de terminación cuadrada. Primeramente, se modelaron las piezas sin elementos de apriete, ya que esta configuración sirve como referencia. Todas estas piezas se modelaron como partes sólidas deformables.

En el módulo de Propiedades se introdujeron las especificaciones del material. Las hojas están fabricadas con acero especial para resorte AISI 5160. Este tiene una densidad de 7850 kg/m³, un módulo de elasticidad de 205 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.29, además de un esfuerzo de fluencia de 1005 MPa y un esfuerzo a la rotura de 1145 MPa. La sección empleada

fue de tipo sólida homogénea. Posteriormente las instancias fueron llamadas al área de ensamble, y se realizó el arreglo estructural.

En *step*, módulo donde se configuran los procedimientos que definen el tipo de análisis a realizar, se empleó uno del tipo estático general. Posteriormente se crearon interacciones de tipo contacto para aplicarlas entre las hojas y en los sistemas de apriete, las cuales cuentan con comportamiento tangencial y normal. Se asignó un coeficiente de fricción de 0.42, de acuerdo con la literatura [34, 39], y se indicó un contacto *duro*, con el método configurado por defecto. Con esto se crea una interacción entre las superficies de las hojas.

La carga aplicada para este estudio corresponde a un movimiento de 35 mm, valor cercano al que presenta físicamente con la capacidad de carga del muelle sugerida por el fabricante. Esta se aplica en el centro de la hoja más corta. Se creó un *step* para aplicar la carga de compresión al muelle, y uno para retirarla. Las condiciones de frontera se configuran en los ojales. El ojal fijo, que corresponde al ojal frontal, presenta una condición del tipo perno, en la que sólo se permita un giro alrededor del eje z. El ojal trasero se configuró con una condición tal que solo permita la traslación a lo largo del eje x. Se aplicaron cargas puntuales tanto en el punto medio superior como en el inferior del muelle de 23097 N, correspondientes al perno central de 3/8" (9.525 mm) de diámetro de grado 5, fuerza equivalente para un torque de 44 N-m.

El mallado aplicado a las piezas corresponde a un elemento C3D8R, que es un bloque hexaedro de 8 nodos, de la librería *standard* y de orden lineal. Todos los elementos tienen un tamaño global aproximado de 6.35 mm, tamaño que se obtuvo tras un análisis de convergencia de malla en el que se compararon las fuerzas y desplazamientos arrojados por el paquete contra los observados experimentalmente.

Se configuraron las variables de salida en el gestor de *step*, tales como el área de contacto, la presión de contacto y el estatus de contacto y los desplazamientos, además de las reacciones, esfuerzos y deformaciones.

El modelo en 3D empleado para el estudio numérico, con las condiciones de frontera y carga empleadas para simular el muelle con la configuración de fábrica se muestra en la Figura 4. 2. En la Tabla 4. 1 se encuentra un comparativo con las energías obtenidas experimentalmente contra las arrojadas por el paquete de elementos finitos, esto para el muelle de cuatro hojas sin elementos de apriete. La disipación de energía E_r , tiene una diferencia entre

ambos estudios de 6%, mientras que la energía elástica E_o de 5.4%. Es decir, los valores son muy cercanos y las diferencias se pueden deber, de acuerdo con la literatura, al coeficiente de fricción en los elementos en contacto y a un incorrecto espesor de las hojas, ya que en el muelle real este espesor es estocástico y no se distribuye uniformemente a lo largo de las hojas.

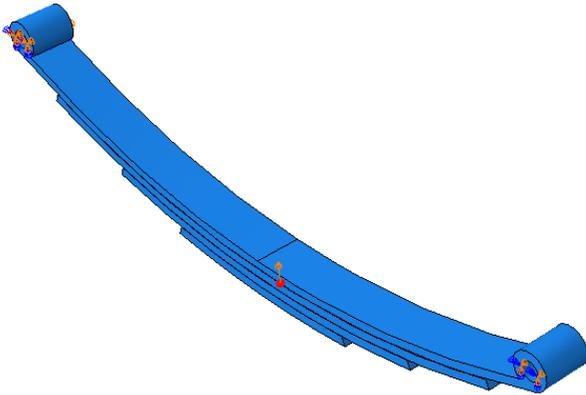


Figura 4. 2 Modelo discreto empleado para el estudio numérico.

Tabla 4. 1 Valores de las energías del estudio experimental comparadas con el numérico.

Muelle de 4 hojas	E_o (mJ)	E_r (mJ)
Modelo experimental	164866.44	31294.63
Modelo discreto.	174280.80	29473.86

4.4 Simulación de precargas

Los sistemas de apriete montados experimentalmente están conformados por ocho piezas cada uno: dos piezas planas con perforaciones para dos tornillos M10, y sus correspondientes tuercas y arandelas. Para el estudio numérico, cada elemento de apriete se modeló como una sola pieza. La configuración de las precargas se realiza con una partición sobre las áreas correspondientes a la cabeza del perno y de la tuerca. En esta área se aplica una fuerza de presión equivalente a la fuerza aplicada por los pernos. De acuerdo con datos disponibles en la literatura proporcionados por fabricantes de tornillería [36], el máximo torque permisible en un tornillo de M10 grado 5 es de 55 N-m. Aplicando la ecuación (2. 13) y un valor $K = 0.20$ de la Tabla 2. 1, se obtuvo una carga interna en el perno de 27500 N. Esta fuerza aplicada en forma de presión sobre las áreas mencionadas equivale a 110 N/mm². De esta forma se aplica la precarga en un *step*, y esta se propaga durante los siguientes, en los cuales se aplica la carga encargada de la deformación del muelle. De esta forma se procedió a simular

los mismos casos que los evaluados experimentalmente, con el fin de verificar su funcionalidad. Para ello se modelaron los elementos de precarga a diferentes longitudes, de forma que pudieran abarcar apriete a dos y tres hojas. Estos elementos se colocaron en el modelo en las mismas posiciones que en las pruebas experimentales. Todo esto se puede observar en la Figura 4. 3.

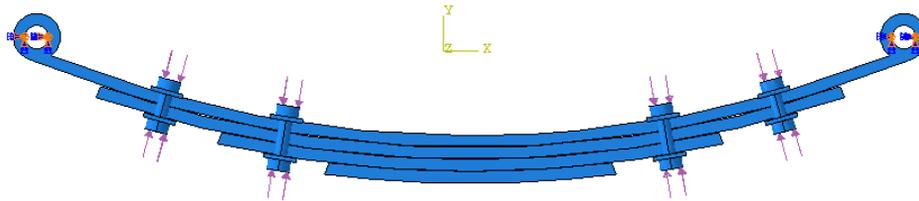


Figura 4. 3 Modelado de elementos de apriete para precarga en muelle.

De esta forma se simularon diferentes cantidades de elementos de apriete para diferentes números de hojas.

En la Figura 4. 4 se observan las curvas de fuerza-desplazamiento obtenidas para las configuraciones numéricas del muelle de cuatro hojas, probado con diferente número de abrazaderas. Al igual que en el caso de estudio experimental, se observa el cambio del área entre la curva, la cual representa la disipación de energía. Es notable también que, a mayor número de abrazaderas, se presenta un pequeño aumento de la fuerza necesaria para deformar el muelle, lo que indica que estas incrementan su rigidez.

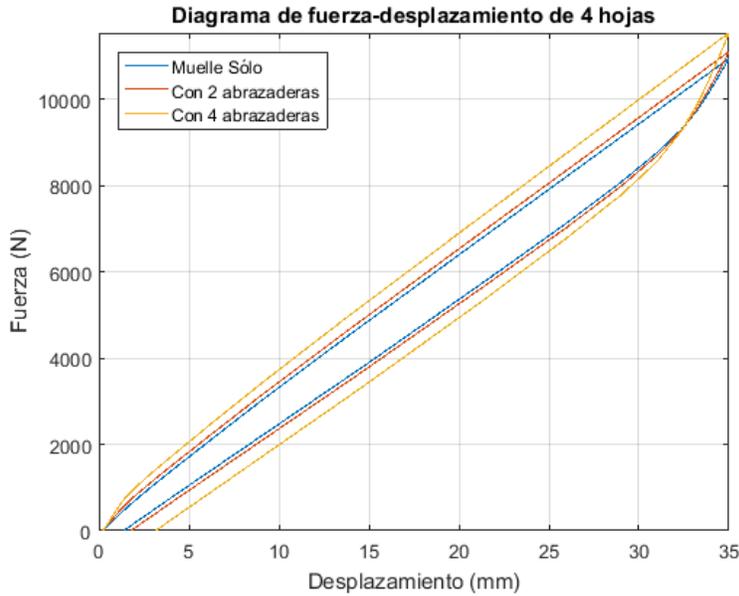


Figura 4. 4 Resultados numéricos de histéresis para muelle con cuatro hojas y diferentes abrazaderas.

En la Tabla 4. 2 se muestra el resultado de estudios numéricos de la disipación de energía y la energía elástica para cada caso. Se observa que existe un incremento de ambas y existiendo una correspondencia con los valores experimentales, aún con sus variaciones, de las cuales se ha comentado su posible causa. La disipación de energía E_r con dos abrazaderas aumenta 26% con respecto al muelle de cuatro hojas sin precargas, mientras que la energía elástica E_o aumenta 1.6%. Cuando se implementan cuatro abrazaderas, la disipación de energía se incrementa 96% con respecto al muelle sin precargas, mientras que la energía elástica aumenta en 4.6%.

Tabla 4. 2 Resultados numéricos de energía al apretar cuatro hojas.

Muelle 4 hojas	E_o (mJ)	Δ (%)	E_r (mJ)	Δ (%)	ψ
Sin abrazaderas	174280.80		29473.86		0.17
Con 2 abrazaderas	177134.73	1.6	37233.77	26	0.21
Con 4 abrazaderas	182301.38	4.6	57870.65	96	0.32

Para el caso del muelle con dos hojas, se procede a deformarlo también con una deflexión máxima de 35 mm, con el fin someterlo a una deformación semejante a la presentada por el muelle con el peine completo. También se aplicaron para este caso un número máximo de cuatro elementos de apriete. Se obtienen las curvas de histéresis y se muestran en la Figura

4. 5. Igualmente se observa, con referencia al muelle de dos hojas sin precargas, un incremento del área entre la curva conforme se aumenta el número de elementos de apriete.

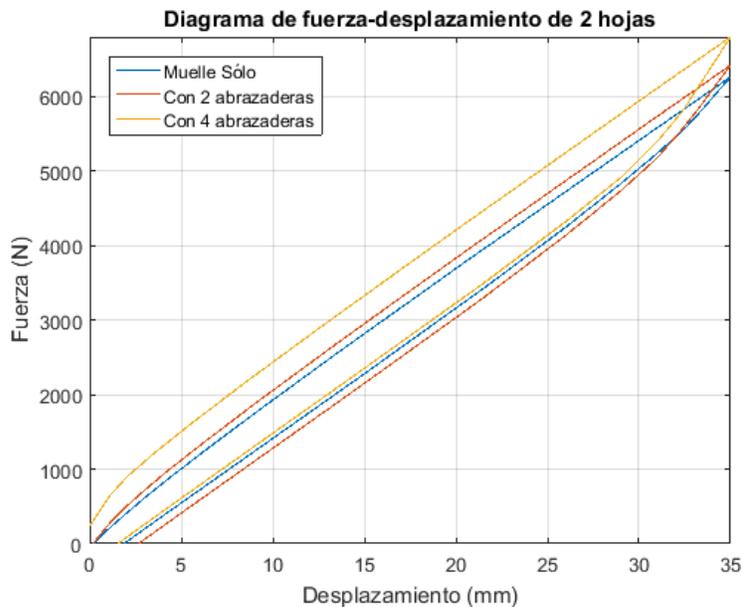


Figura 4. 5 Resultados numéricos de histéresis para muelle con dos hojas y diferentes abrazaderas.

Como se observa en la Tabla 4. 3, también existe en este caso un aumento en la disipación de energía con respecto al muelle sin abrazaderas. Igualmente, la energía elástica se incrementa ligeramente. Con respecto al muelle de dos hojas sin precargas, cuando se colocan dos abrazaderas la disipación de energía E_r aumenta 45% y la energía elástica E_o un 2.5%. Cuando se implementan cuatro abrazaderas, la disipación de energía E_r se incrementa 62%, mientras que la energía elástica E_o aumenta 4.7%.

Tabla 4. 3 Resultados numéricos de energía al apretar dos hojas.

Muelle con 2 hojas	E_o (mJ)	Δ (%)	E_r (mJ)	Δ (%)	ψ
Sin abrazaderas	105364.95		15022.85		0.14
Con 2 abrazaderas	108049.42	2.5	21774.93	45	0.20
Con 4 abrazaderas	110312.64	4.7	24415.84	62	0.22

4.5 Discusión

Estas simulaciones muestran resultados que confirman suposiciones de capítulos anteriores. Primero, se observa cómo el incremento de la fricción y rigidez al aumentar el número de hojas

que conforma el muelle disminuye la deflexión. Debido a la aplicación de la carga para impacto de forma cíclica, la energía de deformación llega a un punto máximo cuando el valor de la carga y la deformación es máximo, y es cero tanto al inicio como al final de la aplicación de esta. En cambio la disipación por fricción mantiene un incremento durante todo el periodo de aplicación de la carga. Esto debido al contacto entre las hojas y a que estas se encuentran en deslizamiento relativo, tanto en la aplicación como durante el retiro de la carga.

En los modelos discretos realizados en el paquete, el estado de contacto se define por los colores que muestra en la superficie. El color rojo define un contacto permanente, del tipo adhesión (*stick*), mientras que el verde indica uno de deslizamiento (*slip*). El color azul indica que el contacto se ha abierto. Si se toma el caso de un muelle con dos hojas y uno de cuatro hojas con cuatro abrazaderas, se observa en la Figura 4. 6 que la distribución del área de contacto aumenta cuando se implementan precargas.

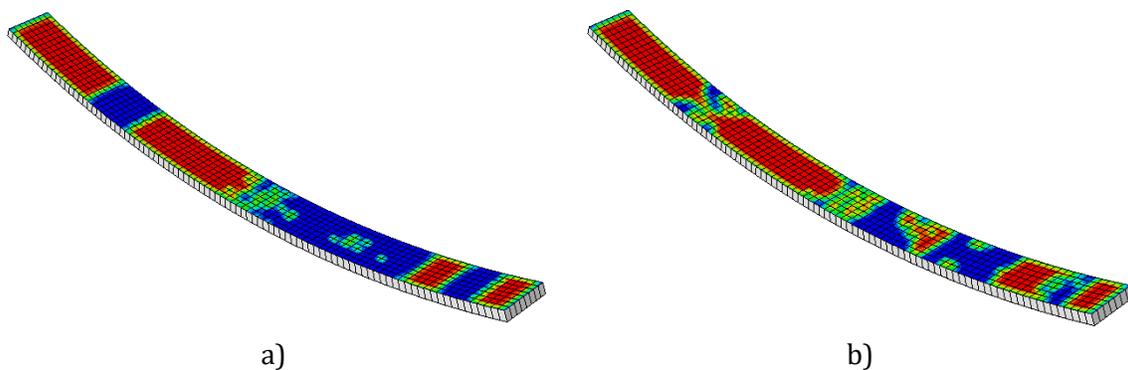


Figura 4. 6 Área de contacto de la hoja inferior del muelle con dos hojas, a) dos hojas sin precarga y b) cuatro hojas con cuatro abrazaderas.

En la Figura 4. 7 se observa que, al inicio de la aplicación de la carga aplicada para su deformación, el muelle de dos hojas presenta un estado de contacto del tipo abierto en la mayoría del área cuando no hay precargas, mientras que al añadirles a uno de cuatro hojas se observa un aumento en la región del contacto de tipo cerrado, en estado de adhesión. Se observa que, al finalizar el ciclo de la carga, el área de contacto presenta un estado cerrado del tipo deslizamiento, siendo esta región cerrada mayor en el caso del muelle de cuatro hojas con precargas. Se observa que efectivamente es en el momento inicial cuando el contacto es cerrado, mientras que cuando el muelle se flexiona, el contacto pasa a ser de tipo abierto, es decir, que las superficies de las hojas se separan en un muelle con carga, esto debido al deslizamiento.

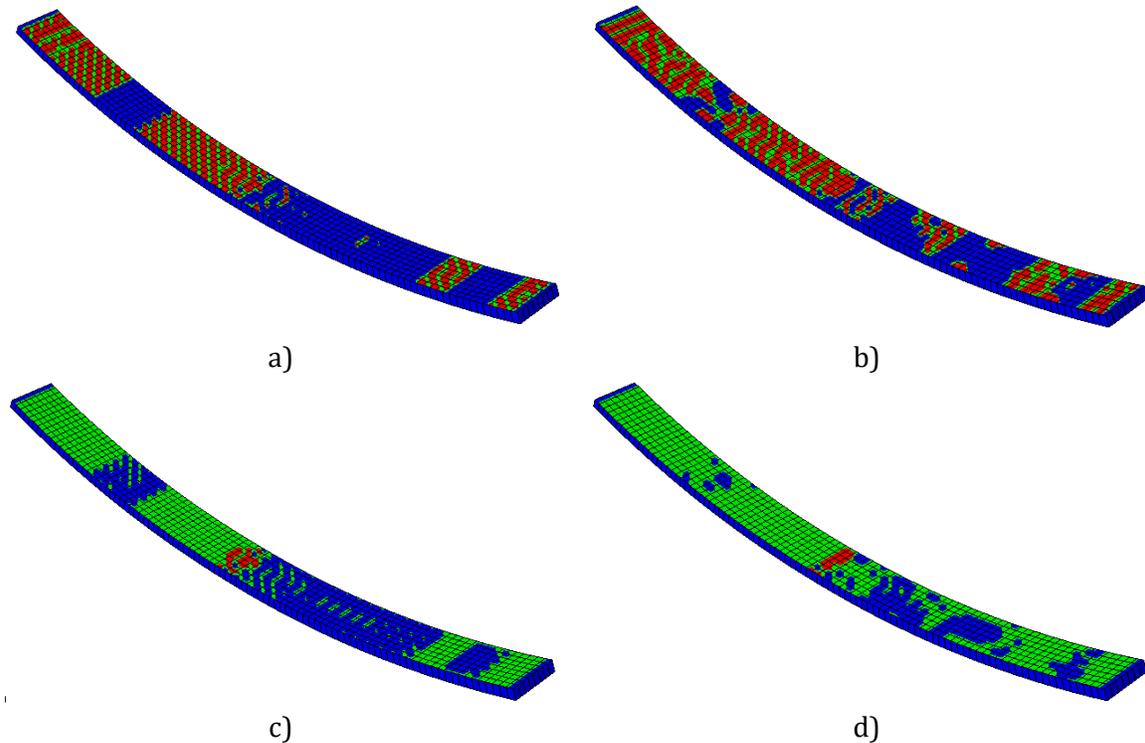


Figura 4. 7 Estado de contacto a) al inicio del ciclo de carga en un muelle de dos hojas sin precargas, b) al inicio del ciclo de carga en un muelle de cuatro hojas con cuatro abrazaderas, c) al final del ciclo de carga de un muelle de dos hojas sin abrazaderas, d) al final del ciclo de carga de un muelle de cuatro hojas con cuatro abrazaderas.

Además de los colores, del paquete de elementos finitos se obtiene el valor numérico de cada una de las áreas de contacto. En la Figura 4. 8 se muestra la relación entre el área de contacto total de los modelos del muelle y el desplazamiento en un ciclo de carga. Cada color representa uno de los casos. Se observa como cada color empieza en la abscisa, que representa el estado del muelle sin carga de compresión, hasta alcanzar un pico máximo, que es cuando el muelle alcanza su deflexión máxima, para posteriormente regresar al eje horizontal en dirección hacia la derecha. Esto quiere decir que el área de contacto se incrementa conforme el muelle es sometido a compresión y sigue en aumento durante el retiro de la carga. También se infiere que el área de contacto incrementa conforme a un mayor número de hojas. Se observa cómo las precargas implementadas incrementan en menor medida esta área de contacto. En suma, el color y el valor numérico arrojados por el paquete numérico permite analizar de manera rápida el contacto mecánico. De esta forma, se pueden realizar estudios de contacto en función de otros parámetros diversos.

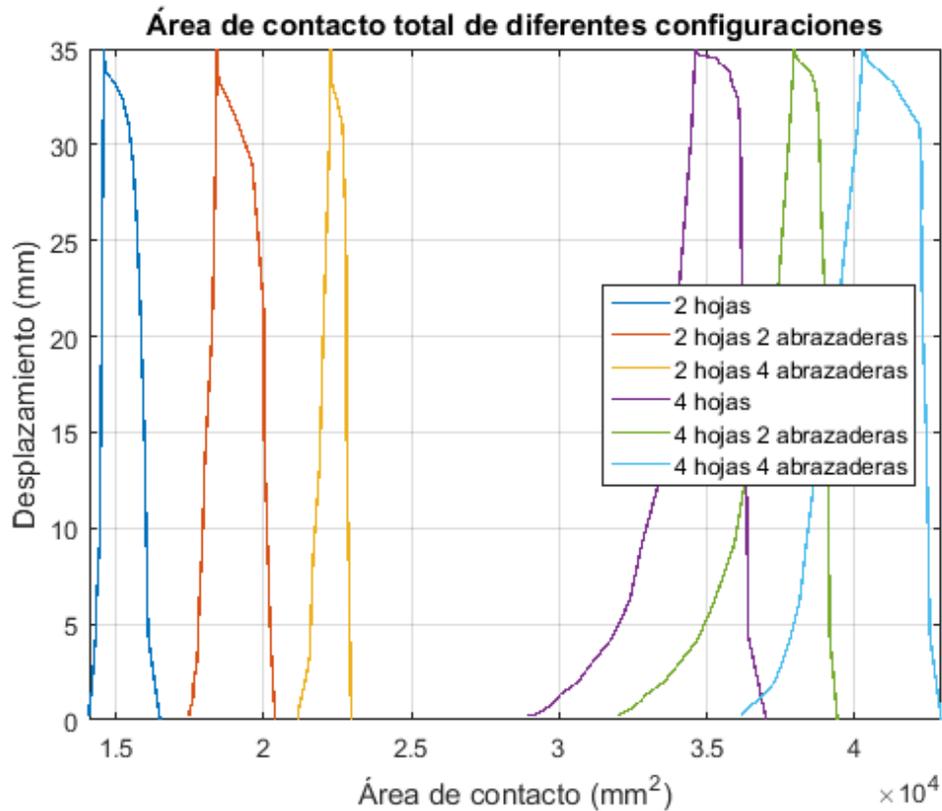


Figura 4. 8 Área de contacto total para las diferentes configuraciones del muelle en un ciclo de carga.

En la Figura 4. 9 se muestran los valores comparativos de disipación de energía entre los obtenidos experimental y numéricamente. En ambos casos el valor de disipación se incrementa con el aumento del número de hojas y abrazaderas. Se observa que los valores obtenidos en ambos estudios se aproximan entre sí, siendo mayores los resultados experimentales. Esto tiene como posible explicación el que el montaje experimental presenta algunas cantidades adicionales de disipación de energía, debido a circunstancias que no se toman en cuenta para el modelo numérico, tales como la fricción entre el muelle y el plato de compresión, la fricción entre los pernos y el canal del muelle, el contacto entre el banco y la máquina universal, entre otros. Es por esto por lo que el valor de la disipación obtenida experimentalmente sea mayor al valor obtenido numéricamente, donde la realizan algunas idealizaciones en torno al montaje del muelle en el chasis del vehículo.

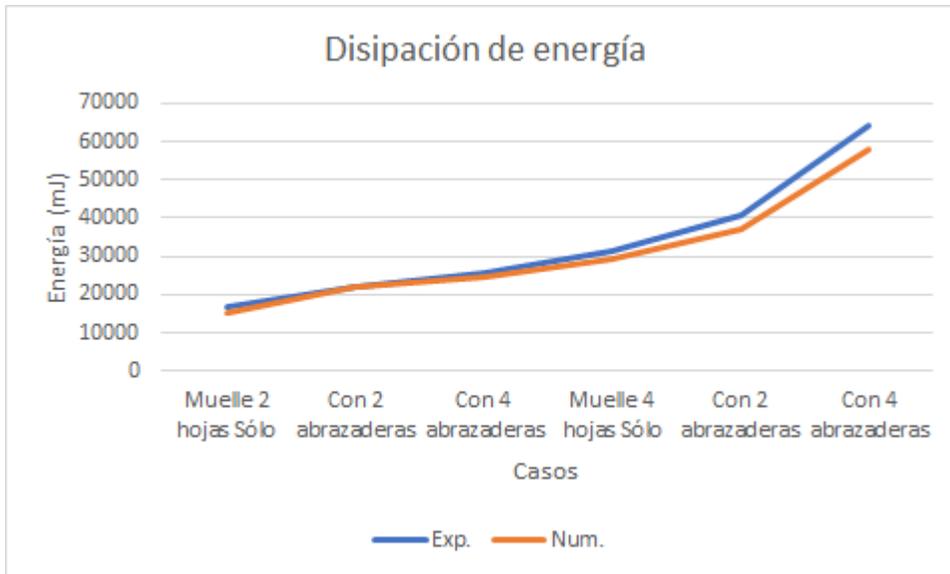


Figura 4. 9 Comparativo entre disipación de energía experimental y numérica.

En la Figura 4. 10 se muestran los valores comparativos de energía elástica para los casos experimental y numérico. En este caso se observa que la energía elástica es ligeramente mayor en el estudio experimental. Esto puede deberse debido a la geometría no uniforme que presenta el muelle físico, siendo muy ideal en el modelo numérico.

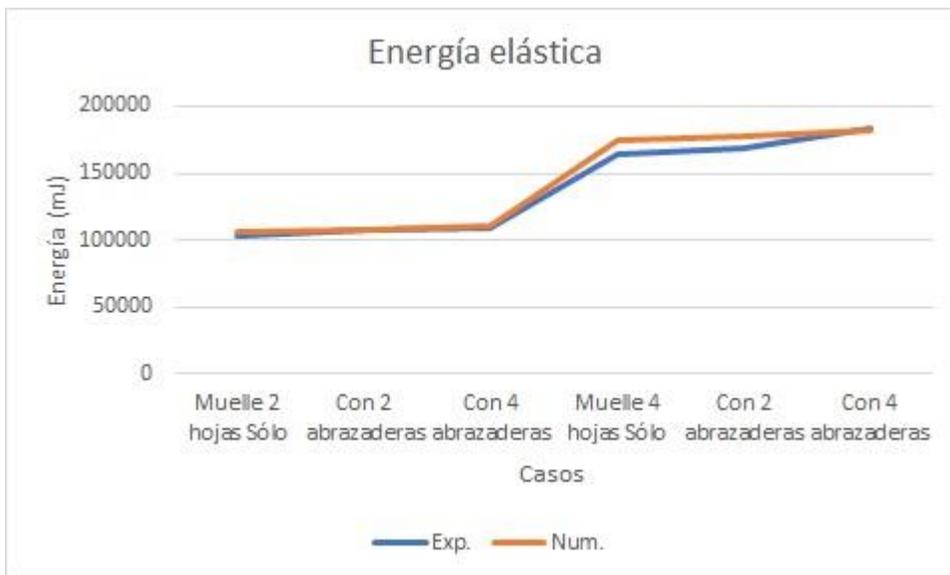


Figura 4. 10 Comparativo entre energía elástica experimental y numérica.

En la Tabla 4. 4 se muestran los resultados obtenidos con el paquete *Abaqus* de frecuencias naturales para los distintos casos estudiados. Se observa como la primera

frecuencia natural parece mantener un valor constante en todos los casos estudiados, habiendo muy poca variación entre el primer caso, el de dos hojas sin precargas, y el de cuatro hojas con cuatro abrazaderas. La segunda frecuencia natural parece disminuir en una mayor proporción cuando se pasa de dos a cuatro hojas, mientras que la implementación de abrazaderas no parece afectar mucho en su magnitud. La tercera frecuencia natural parece conservar una magnitud similar para todos los casos. La cuarta frecuencia natural, en cambio, parece incrementar su valor conforme e incrementa el número de abrazaderas y el de hojas. El valor de la quinta frecuencia natural disminuye conforme se aumenta el número de abrazaderas y el de hojas, excepto para el último caso, el de cuatro hojas con cuatro abrazaderas, donde se observa que la tendencia cambia y el valor de la frecuencia va en ascenso.

De acuerdo con la literatura las frecuencias a las que suelen encontrarse los vehículos van de 0 a 15 Hz, siendo las frecuencias de 0 a 5 Hz las que afectan el confort para los pasajeros y las de 8 a 15 a la estabilidad del vehículo [40]. Como se puede observar, todas las frecuencias obtenidas se encuentran por encima del límite deseado del vehículo, por lo que se espera que el rango de trabajo no repercuta negativamente en el desempeño del muelle, no estando sometido a deformaciones debidas a resonancias.

Tabla 4. 4 Frecuencias naturales de los diferentes casos obtenidas con el paquete de elementos finitos.

Casos	Frecuencias naturales (Hz)				
	1	2	3	4	5
2 hojas	112.55	328.92	377.88	717.36	935.42
2 hojas 2 abrazaderas	111.23	328.27	369.75	718.74	895.51
2 hojas 4 abrazaderas	104.92	312.85	346.85	739.07	838.56
4 hojas	126.29	244.53	358.73	780.15	821.60
4 hojas 2 abrazaderas	125.50	244.46	351.31	749.66	790.00
4 hojas 4 abrazaderas	133.49	237.16	373.77	789.84	891.99

Capítulo 5. Conclusiones

Se realizó un estudio experimental y numérico sobre la influencia de la rigidez y fricción para un disipador pasivo de energía, en este caso, un muelle de fricción. Para obtener diferentes niveles de rigidez y fricción se varió el número de hojas que conforman el muelle. Además, se implementó un sistema de precargas que permitiera variar el apriete entre las hojas de este. Mediante un estudio experimental en una máquina universal Shimadzu Autograph AG-X plus 100 kN se obtuvo la disipación de energía por integración numérica de las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas. Los datos obtenidos del experimento se emplearon para el modelado discreto del muelle en el paquete de elementos finitos *Abaqus*. Se corroboró la congruencia del paquete para modelar el fenómeno de disipación de energía presente en estos muelles, primeramente, con un muelle sin precargas, y posteriormente con una modelación de las precargas. De esta forma se obtuvo la disipación de energía mediante el aprovechamiento de una herramienta numérica, mediante la cual se omiten los gastos de materiales y operación de equipo normalmente presentes en estudios experimentales. Se planteó el modelo como una opción para su uso en etapas del diseño del producto, anticipadas a la producción.

Tras los resultados experimentales, los cuales se verificaron posteriormente con los numéricos, se observó que efectivamente, la variación de la cantidad de hojas y de precargas de apriete entre estas influye en la disipación de energía del muelle. Dado que un muelle está conformado por cierto número de hojas que están en contacto unas con las otras, se observó que a mayor número de hojas se tienen más interacciones en contacto, lo cual implica más superficies deslizantes y, por lo tanto, más fuerzas de fricción. Éstas se ven reflejadas en las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas mediante ciclos de compresión aplicados al muelle. El solo hecho de cambiar la configuración del muelle, al aumentar las hojas que lo conforman de dos a cuatro, presenta un incremento en la disipación de energía de 16.866 a 31.294 J, es decir, un incremento del 85%.

Por otra parte, se observó que efectivamente la implementación de precargas influye en la disipación de energía del muelle. Estas fueron aplicadas mediante soleras que aprietan las hojas mediante un par de pernos. Dado que las fuerzas de fricción en superficies deslizantes están en función de la fuerza normal entre estas, la aplicación de un apriete varia la fuerza de fricción en las interfaces, lo que finalmente influye en la disipación de energía. Al posicionar más fuerzas de apriete a lo largo del muelle, se incrementó más el valor de la disipación. Se probó el muelle con un mínimo de dos hojas para que existiera al menos una interacción de

contacto y que de esta forma existiera disipación gracias al deslizamiento de las hojas. Al incrementar las precargas en este caso, se observó un aumento de disipación de energía, habiendo con respecto al muelle de dos hojas sin precargas un incremento de 31% con la implementación de dos abrazaderas y de 56% con la implementación de cuatro. Sin embargo, el aumento más significativo se observó cuando las precargas se implementaron en el muelle de cuatro hojas, en el cual hay tres interacciones de contacto. Con el solo hecho de incrementar las interacciones de contacto de una a tres se incrementó en 85% la disipación de energía. En este caso, al probar el mayor número de precargas fijadas en este estudio, se observó un incremento de la disipación de energía, con respecto al muelle de cuatro hojas sin precarga, de 29% con la implementación de dos abrazaderas y de casi el doble con la implementación de cuatro, alcanzando un incremento de 104%.

En cuanto a la energía elástica, la cual es debida a la deformación del muelle y a su rigidez, se observó que no está influenciada en gran medida por la aplicación de precargas. Los sistemas de apriete implementados en este estudio son pequeños en comparación con el tamaño del muelle, o con el de una sola hoja, por lo que no se observó un incremento significativo de la rigidez global del sistema ni de la energía elástica cuando se implementaron en el mismo número de hojas. Sin embargo, la cantidad de hojas que conforman el muelle sí influyen significativamente el valor de la rigidez y de su energía elástica, siendo para la misma deformación, para el muelle de dos hojas sin precargas de 103.367 J y para el de cuatro hojas sin precargas de 164.866 J, es decir, una variación de 59%. mucho mayor cuando se aumentó el número de hojas.

Para los niveles de tratamiento abordados en este estudio, se concluye que es posible aumentar la disipación de energía en los muelles con la aplicación de algún tipo de precarga que incremente el apriete entre las hojas. Sin embargo, este incremento será aún más significativo entre más hojas conformen el muelle. Se concluye también que la rigidez se ve principalmente afectada por el número de hojas y en muy poca proporción con las precargas con abrazaderas implementadas. En cambio, la disipación de energía sí se verá influenciada, tanto por el número de hojas como por el número de precargas con abrazaderas implementadas. Para los niveles de tratamiento usados en este estudio, se comprobó que disipación de energía óptima se da en el caso de cuatro hojas con cuatro abrazaderas, llegándose a un valor de 64.052 J, 104% más que el muelle de cuatro hojas sin precargas como se ofrece en el mercado. Por lo tanto, es posible implementar una reducción o aumento del

número de hojas o de precargas para variar la disipación de energía de un muelle, de acuerdo con la función que se necesite, siendo una medida efectiva y de bajo costo.

Esto puede dar pauta para la aplicación de algún otro sistema, pero automático o semiactivo como el de Shinbori y Matsuoka [21], ya que se busca que en caminos suaves haya una menor fricción para un mejor confort de los pasajeros. En cambio, una mejor estabilidad del vehículo se obtiene cuando se incrementa la fricción. En otras palabras, se busca un amortiguamiento mínimo cuando se opera bajo cargas pequeñas y de bajas amplitudes y amortiguamiento mayor bajo amplitudes mayores y cargas grandes.

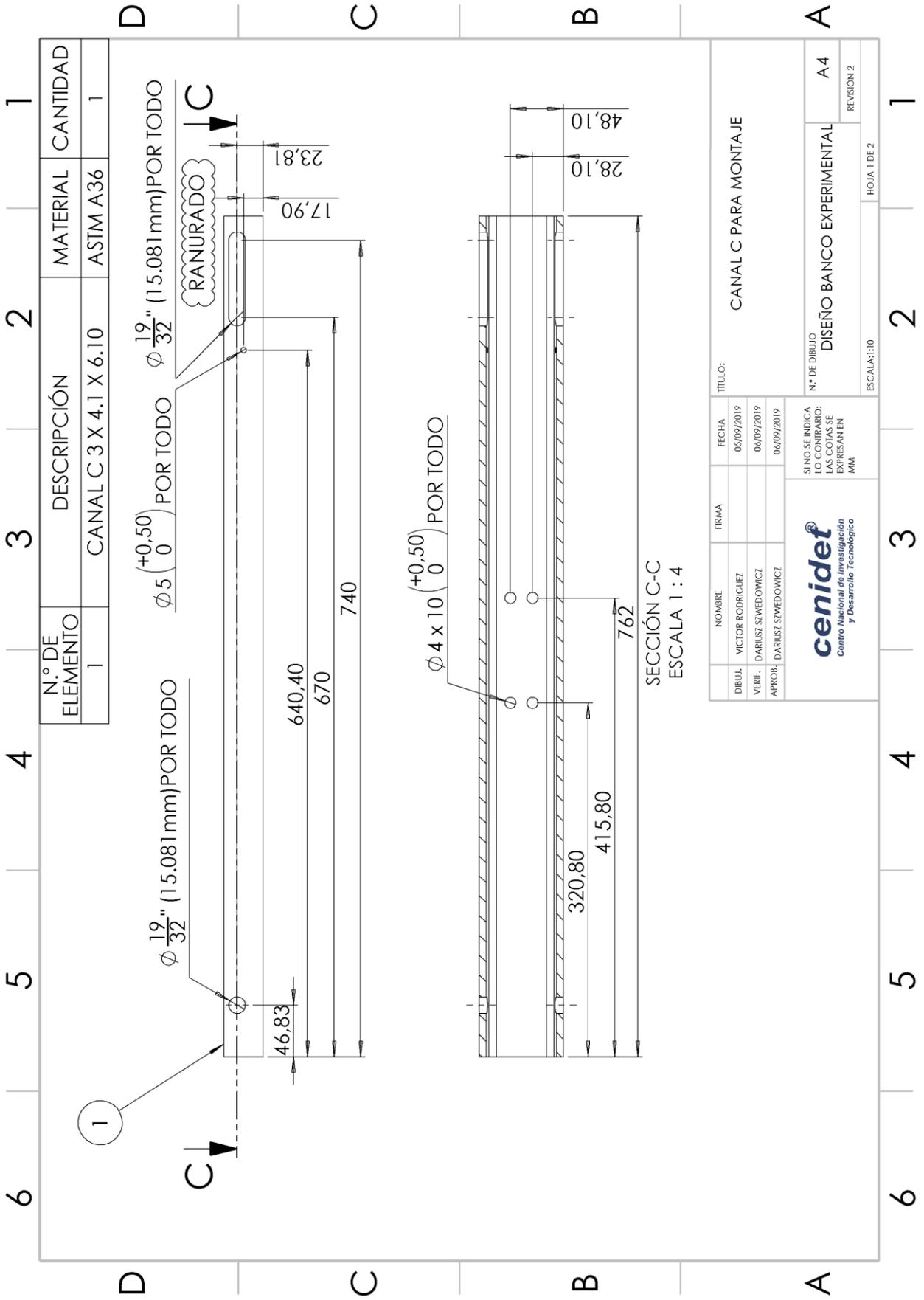
Como recomendaciones se plantean estudiar el muelle variando otros factores con los cuales se pueda obtener una variación en la disipación de energía, tales como la longitud de las hojas. También se sugiere variar las condiciones de las superficies en contacto, ya sea por medio del cambio de la rugosidad de las superficies o bien la implementación de un tercer cuerpo entre las hojas, como alguna película de un material del tipo elastómero.

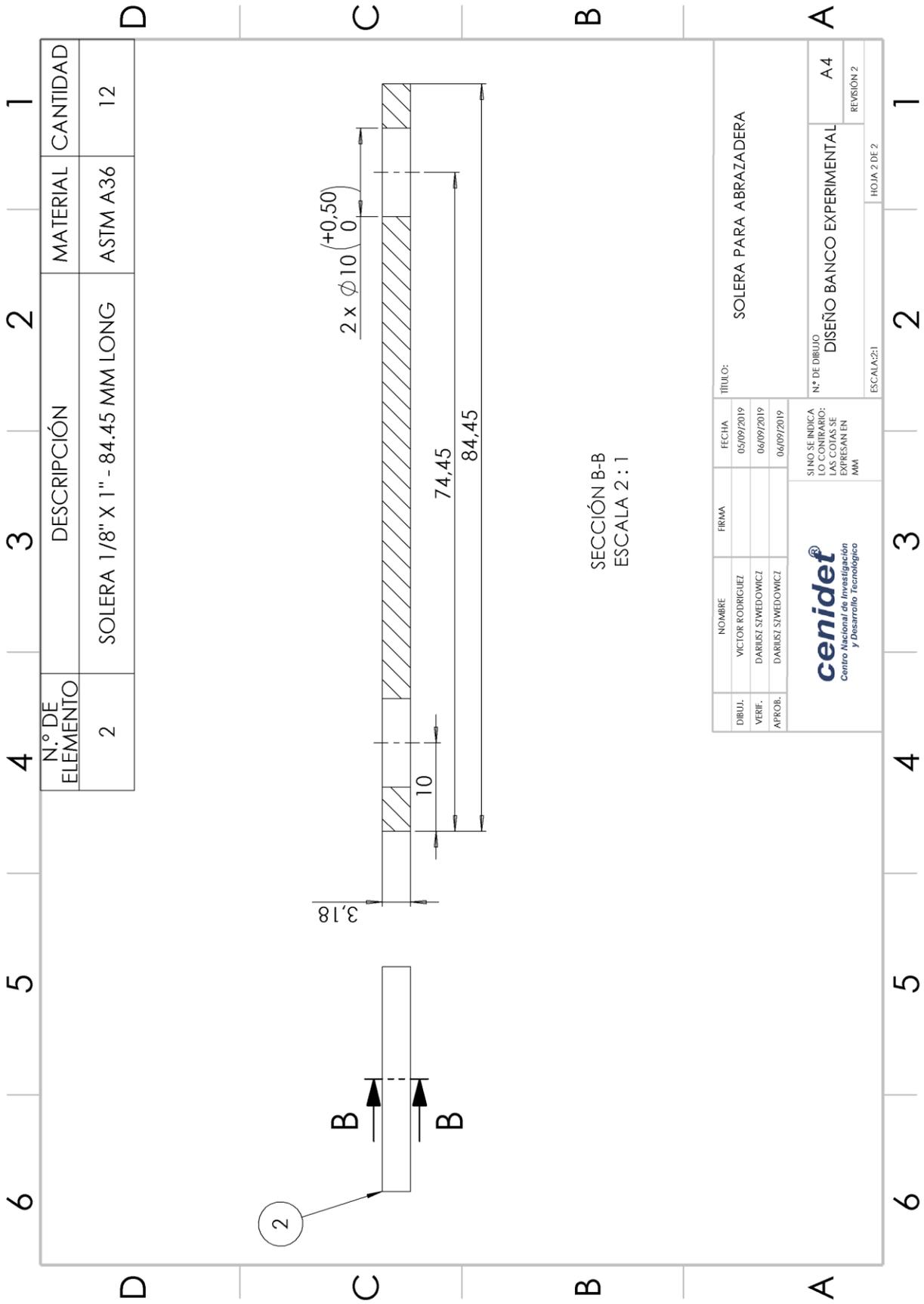
De igual modo se sugiere variar el tipo de contacto que hay entre el muelle y las abrazaderas, pudiéndose implementar algunas precargas con abrazaderas que presenten un tipo de contacto del tipo redondo, con lo que se cambiaría la región de contacto.

Se sugiere realizar pruebas experimentales para caracterizar las frecuencias naturales del muelle con los diferentes factores estudiados, y de esta forma validar el modelo discreto que permita obtener frecuencias de manera computacional mediante el paquete comercial. Para ello se pueden realizar pruebas de análisis modal con martillo de impacto. Se sugiere también probar el muelle bajo condiciones de fatiga.

Finalmente, se sugiere modelar el comportamiento de la variación de la disipación de la energía mediante un diseño experimental del tipo 3^k o mixto, ya que estos permiten un mayor número de niveles de tratamiento de los factores que el diseño factorial 2^2 empleado en este estudio. Sin embargo, este tipo de diseños experimentales requieren de una mayor cantidad de pruebas. Su ventaja es que permiten estudiar efectos de curvatura, ya que el diseño factorial 2^2 asume una variable de respuesta lineal o aproximadamente lineal.

Anexo. Planos de banco.





4	3	2	1
N.º DE ELEMENTO	DESCRIPCIÓN	MATERIAL	CANTIDAD
2	SOLERA 1/8" X 1" - 84.45 MM LONG	ASTM A36	12

SECCIÓN B-B
ESCALA 2 : 1

DIBUJ. VERIF. APROB.	NOMBRE	FIRMA	FECHA	TÍTULO:
	VICTOR RODRIGUEZ		05/09/2019	SOLERA PARA ABRAZADERA
	DARIUSZ SWEDOWICZ		06/09/2019	
	DARIUSZ SWEDOWICZ		06/09/2019	

N.º DE DIBUJO	REVISIÓN 2
DISEÑO BANCO EXPERIMENTAL	A4

ESCALA:2:1 HOJA 2 DE 2



SINO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM

Referencias

- [1] Q. Estrada Barbosa, «Evaluación Numérico-Experimental de Desempeño de un Sistema Pasivo de Disipación de Energía por Fricción y Propiedades Estructurales de los Componentes,» Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, 2015.
- [2] C. Harris y A. Piersol, *Harris' shock and vibration handbook*, New York, NY, United States: McGraw-Hill, 2002.
- [3] J. C. Dixon, *The Shock Absorber Handbook*, West Sussex, England: John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- [4] D. C. Pulido Laparra, «Diseño del sistema de suspensión para un vehículo de formula student,» Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, España, 2014.
- [5] E. Ovando Cruz, «Estudio experimental del desgaste por adhesión en un dispositivo de sujeción para la industria automotriz,» Instituto Politécnico Nacional, México, D.F., 2010.
- [6] J. Rodríguez Matienzo y L. Otero Pereiro, «Modelo de un muelle de ballestas considerando la fricción entre hojas,» *Ingeniería Mecánica*, vol. 1, pp. 15-28, 2006.
- [7] Y.-J. Yum, «Frictional behavior of automotive leaf spring,» de *Proceedings KORUS 2000. The 4th Korea-Russia International Symposium On Science and Technology*, Ulsan, South Korea, South Korea, 2002.
- [8] H. Zhang, «Analysis on the Stiffness of Leaf Spring Based on ABAQUS,» *Applied Mechanics and Materials*, vol. 273, pp. 225-229, 2013.
- [9] G. Savaidis, M. Malikoutsakis y A. Savaidis, «FE simulation of vehicle leaf spring behavior under driving manoeuvres,» *International Journal of Structural Integrity*, vol. 4, n° 1, pp. 23-32, 2013.
- [10] V. Arora, M. L. Aggarwal y G. Bhushan, «A comparative study of CAE and experimental results of leaf springs in automotive vehicles,» *International Journal of Engineering Science and Technology*, vol. 3, n° 9, pp. 6856-6866, 2011.

- [11] S. Saelem, S. Chantranuwathana, K. Panichanun, P. Prempreeda, P. Wichienprakarn y P. Kruo-ongarjnukool, «Experimental Verification of Leaf Spring Model by Using a Leaf Spring Test Rig,» de *The 23rd Conference of the Mechanical Engineering Network of Thailand*, Chiang Mai, 2009.
- [12] A. Vidal Leso, D. Pérez Figueroa, G. Rodríguez Mancera y J. J. Martínez Nolasco, «Modelado y simulación de muelle de ballestas,» de *II Conferencia de Desarrollo Profesional en Ingeniería Mecatrónica*, Celaya, Guanajuato, México, 2012.
- [13] B. Kadziela, M. Manka, T. Uhl y A. Toso, «Validation and optimization of the leaf spring multibody numerical model,» *Archive of Applied Mechanics*, vol. 85, n° 12, pp. 1899-1914, 2015.
- [14] C. Fan y S. Li, «Analysis of Leaf Spring's Damping Characteristics Based on Nonlinear Finite Element,» *Advanced Materials Research*, vol. 314, pp. 1628-1632, 2011.
- [15] D. Younesian y M. S. Fallahzadeh, «Numerical and Experimental Analysis of Nonlinear Parabolic Springs Employed in Suspension System of freight cars,» *International Journal of Automotive Engineering*, vol. 4, n° 3, pp. 812-826, 2014.
- [16] C. O. Guernsey, «Leaf spring for low interleaf friction». United States Patente 2,476,367, 19 July 1949.
- [17] Z. Xu, L. Hong, X. L. Wang y C. S. Ding, «Study on the Influence of the Shape of Leaf Spring on the Stress and the Kinematic Characteristics,» *Zhuo Xu Journal of Engineering Research and Application*, vol. 8, n° 6, pp. 13-21, 2018.
- [18] C. H. León Cruz y J. V. Cullquicondor Cumbe, «Resideño de un sistema de suspensión mecánica para un bus de servicio micro-regional equipado con chasis "Chevrolet FTR 32M",» Universidad del Azuay, Cuenca, Ecuador, 2007.
- [19] P. Qin, G. Dentel y M. Mesh, «Multi-Leaf Spring and Hotchkiss Suspension CAE Simulation,» de *2002 ABAQUS Users' Conference*, 2002.

- [20] R. B. Charde y D. V. Bhope, «Investigation of stresses in master leaf of leaf spring by FEM and its experimental verification,» *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST)*, vol. 4, n° 2, pp. 633-640, 2012.
- [21] T. Shinbori y S. Matsuoka, «Apparatus for controlling friction between leaf springs of a laminated leaf spring assembly». United States Patente 4,456,232, 26 June 1984.
- [22] A. D. Dighe, «A review of testing of steel leaf spring,» *International Research Journal of Enginnering and Technology*, vol. 3, n° 5, pp. 492-496, 2016.
- [23] M. M. Shokrieh y D. Rezaei, «Analysis and optimization of a composite leaf spring,» *Composite Structures*, vol. 60, n° 3, pp. 317-325, 2003.
- [24] A. Kumar, V. J. Shinde y S. S. Chavan, «Design, Analysis, Manufacturing and Testing of Mono Composite Leaf Spring Using UD E-Glass Fiber/Epoxy,» *International Journal of Advanced Technology in Engineering and Science*, vol. 2, n° 12, pp. 112-121, 2014.
- [25] K. Kumar y M. L. Aggarwal, «Computer aided FEA comparison of mono steel and mono GRP leaf spring,» *International Journal of Advanced Engineering Research and Studies*, vol. 1, n° 2, pp. 155-158, 2012.
- [26] K. Kumar y M. L. Aggarwal, «Simulation for optimized modelling on EN45A leaf spring,» *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*, vol. 4, n° 3, pp. 129-142, 2015.
- [27] E. P. Popov, *Introducción a la Mecánica de Sólidos*, México, D.F.: Editorial Limusa, S.A., 1981.
- [28] M. F. Spotts, *Proyecto de Elementos de Máquinas*, Barcelona, España: Editorial Reverté, S. A., 1966.
- [29] SAE Spring Committee, «Spring Design Manual AE-11,» Society of Automotive Engineers, Inc, Warrendale, PA.
- [30] E. Zahavi, «Analysis of a contact problem in leaf springs,» *Mechanics Research Communications*, vol. 19, n° 1, pp. 21-27, 1992.

- [31] Á. R. Aguirre Villareal, «Modelado por Elemento Finito de la Unión Perno Agujero,» Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, 2017.
- [32] R. G. Budynas y J. K. Nisbett, Diseño en ingeniería mecánica de Shigley, México, D.F.: McGraw-Hill, 2012.
- [33] P. Bogusz, W. Krasoń y J. Wysocki, «Experimental investigations of double multi-leaf spring subjected to impact load,» *Journal of KONES Powertrain and Transport*, vol. 19, n^o 2, pp. 45-51, 2012.
- [34] W. Krason, J. Wysocki y Z. Hryciow, «Dynamics stand tests and numerical research of multi-leaf springs with regard to clearances and friction,» *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 1, n^o 5, pp. 1-13, 2019.
- [35] P. S. Fancher, R. D. Ervin, C. C. MacAdam y C. B. Winkler, «Measurement and Representation of the Mechanical Properties of Truck Leaf Springs,» Society of Automotive Engineers, Inc, Los Angeles, California, 1980.
- [36] Impulsora de Tornillos SA de CV, «Tabla de Torques,» Impulsora de Tornillos SA de CV, [En línea]. Available: <http://imtor.com.mx/torques.pdf>. [Último acceso: 19 3 2019].
- [37] H. Gutiérrez Pulido y R. De la Vara Salazar, Análisis y diseño de experimentos, México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana, 2008.
- [38] Dassault Systèmes Simulia Corp, «Getting Started with Abaqus Interactive Edition Version 6.8,» Dassault Systèmes, Providence, RI, USA, 2008.
- [39] E. A. Avallone y T. Baumeister III, «Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers,» McGraw-Hill Education, New York, 2007.
- [40] L. C. F. Herrán, «Control de una suspensión semi-activa con un amortiguador magnetorreológico,» Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, N. L. México., 2006.