

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Detección de Grietas en Sistemas Rotodinámicos (Análisis
Experimental)

presentada por

Ing. Joel del Angel Morales Perez

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Director de tesis

Dr. Jorge Colín Ocampo

Codirector de tesis

Dr. José Gabriel Mendoza Larios

Cuernavaca, Morelos, México. Mayo de 2019.



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor., 13/mayo/2019

OFICIO No. DIM/135/2019

Asunto: Aceptación de documento de tesis

C. DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del estudiante Ing. Joel del Ángel Morales Pérez, con número de control M17CE024 de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Detección de grietas en sistemas rotodinámicos (Análisis experimental)" hemos encontrado que se han atendido todas las observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

DR. JORGE COLÍN OCAMPO
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
Cédula 4694783

REVISOR 1

DR. ANDRÉS BLANCO ORTEGA
Doctor en Ciencias en Ingeniería Eléctrica
Cédula 6559298

REVISOR 2

DR. DARIUSZ SLAWOMIR SZWEDOWICZ
WASIK
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
Cédula 11477439

REVISOR 3

DR. WILBERTH MELCHOR ALCOCER R.
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Mecatrónica
Cédula 10458247

C.p. María Elena Gómez Torres Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Joel del Ángel Morales Pérez Estudiante
Expediente

AAP/MRSR



SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor. 13 de mayo de 2019
OFICIO No. SAC/200/2019

Asunto: Autorización de impresión de tesis

ING. JOEL DEL ÁNGEL MORALES PÉREZ
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
P R E S E N T E

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Detección de grietas en sistemas rotodinámicos (Análisis experimental)", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



SEP TecNM
CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

A mis padres, Ruth y Joel, quienes siempre me han alentado a seguir adelante,
a cumplir mis metas y han hecho de mí una mejor persona.

A mi hermana, Mariana, quien siempre ha tenido palabras
de aliento para mí y ha brindado su apoyo
e infinito amor.

A mi abuela, Minerva (Q.E.P.D.), quien hizo la labor
de segunda madre y siempre cuidó de mí.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, por darme la vida, por los sacrificios realizados para brindarnos una mejor vida, por ser mi inspiración, mi guía, modelo a seguir y sobre todo por su apoyo incondicional e infinito amor.

A mi asesor el Dr. Jorge Colín Ocampo por brindarme su amistad, conocimientos, guía, apoyo y por el tiempo invertido en el desarrollo del presente trabajo.

A mis revisores el Dr. Andrés Blanco Ortega, al Dr. Dariusz Swedowicz Wasik y al Dr. Wilberth Alcocer Rosado por sus observaciones, críticas, revisiones y contribuciones dadas para el desarrollo de este trabajo.

A mis profesores de las materias Dr. Wilberth Melchor, Dr. Arturo Abúndez, Dr. Eladio Martínez, Dra. Claudia Cortés, Dr. Dariusz Swedowicz, Dr. Andrés Blanco y Dr. Jorge Colín por brindarme sus conocimientos y por su contribución en mi formación académica.

A mis compañeros de generación Eric Sauvain, Yael González, Cuauhtémoc Mazón y Rodolfo Reyes por brindarme por los buenos momentos, apoyo y sobre todo por brindarme su amistad.

A mis compañeros del laboratorio de Rotodinámica Saulo Landa, Luis Tadeo, Agustín Juárez y Cuauhtémoc Mazón por brindarme su amistad, apoyo, consejos para el desarrollo del presente trabajo y sobre todo por los buenos momentos.

A mis compañeros del laboratorio de Mecánica de Materiales Yael González, Enrique Alcudia y Eric Cruz por su apoyo en el desarrollo de las pruebas experimentales.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico por abrirme las puertas para poder continuar con mi formación académica.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de posgrado.

A todos aquellos que de alguna u otra manera me apoyaron y brindaron su amistad durante mi estancia en el CENIDET y la hicieron más amena.

A todos ustedes, muchas gracias...

Resumen

Los sistemas rotodinámicos han tenido un papel importante en los últimos años. Las turbinas de gas y vapor, compresores centrífugos y turbogeneradores son ejemplos de éstos. Su principal característica, es que poseen elementos rotatorios conocidos como rotores, los cuales están soportados por rodamientos. Con el paso de los años la demanda industrial ha ido en aumento, y a consecuencia de esto se ha hecho indispensable agilizar los procesos industriales, en consecuencia, se han incrementado las velocidades de operación de las máquinas. El uso exhaustivo de estas máquinas ha hecho que las cargas dinámicas de operación puedan llevar a un fallo impredecible del rotor, lo cual puede resultar en pérdidas humanas y económicas. Estas fallas casi siempre ocurren debido a la presencia de grietas en el rotor, cuya principal causa es la fatiga del material. La detección de grietas en rotores es un tema que ha sido investigado exhaustivamente desde la década de los 70, lo que ha llevado a una amplia variedad de metodologías de detección.

Hasta ahora existen diversos métodos enfocados a la identificación y estimación de parámetros desconocidos los cuales son poco precisos y complejos y por tanto conducen a implementaciones poco realistas. En la actualidad existe un método de identificación conocido como método de identificación algebraica, cuyo enfoque es diferente a los métodos de identificación convencionales conocidos y se basa en el álgebra diferencial y cálculo operacional lo que permite el desarrollo de modelos de identificación a partir de su modelo matemático, siendo éste, completamente independiente de las condiciones iniciales del sistema.

En este trabajo se presenta el desarrollo de una metodología para identificar de forma experimental grietas en sistemas rotodinámicos *in situ*, mediante la técnica de identificación algebraica en línea, donde para la identificación de la grieta, se toma como dato de entrada la respuesta de vibración del sistema a velocidad constante. Para el desarrollo del identificador, se tomó como base el modelo matemático de un rotor tipo Jeffcott agrietado desarrollado por Gasch que emula el comportamiento dinámico de un rotor real. Se evaluó y analizó el comportamiento del identificador propuesto de forma numérica y experimental en función del tiempo, para diferentes velocidades del rotor. Los resultados numéricos obtenidos del identificador propuesto, se validaron con los resultados obtenidos de un rotor experimental. De los resultados obtenidos se demostró que el identificador detecta la presencia de la grieta transversal en un tiempo menor a un segundo.

Abstract

Rotordynamic systems have had an important role in recent years. Gas and steam turbines, centrifugal compressors and turbo generators are examples of these machines. The rotating elements known as rotors which are supported by bearings is the main characteristic of this kind of machinery. Over the years, the industrial sector has been growing, as a result of this, the speed increase of the industrial processes has been required, and consequently the operation speed of industrial turbomachinery. The operating dynamic loads can lead the rotor to an unpredictable failure, which can result in human and economic losses. These failures are mainly provoked due to the presence of rotor cracks, which are caused mostly by fatigue. Rotor crack detection is a topic that has been well researched since the 70s, which has led to a large variety of rotor crack diagnostic techniques.

Until now, there are many methods focused on identification and estimation of unknown parameters, which are inaccurate and complex, therefore they lead to unrealistic implementations. At the present time, there is an identification method, known as algebraic identification method, whose approach is different from the conventional identification methods. This method is based on differential algebra and operational calculus which allows the development of identification models from a mathematical model, being this, entirely independent for the system initial conditions.

The development of a methodology for the experimental identification of rotor cracks *in situ* through the online algebraic identification method, where for the identification, the system vibration response at constant speed is taken as input data is presented in this work. In order to develop the online identifier, the Gasch's mathematical model of a cracked Jeffcott rotor was taken as a base, which emulates the dynamic behavior of a real rotor. The behavior of the proposed identifier was numerically and experimentally analyzed and evaluated in function of time by considering different rotor speeds. The numerical results of the proposed identifier were validated using an experimental rotor. The results show that the identifier is capable of detecting the presence of a transversal crack in less than a second.

Tabla de contenido

Resumen	i
Abstract.....	ii
Tabla de contenido.....	iii
Nomenclatura.....	v
Lista de figuras	vii
Lista de tablas	xiv
Capítulo 1: Introducción.....	1
1.1 Introducción	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Alcances y limitaciones.....	3
Capítulo 2: Estado del arte.....	4
2.1 Dinámica de los rotores agrietados	4
2.2 Métodos de identificación de parámetros	15
2.3 Conclusiones del estado del arte	17
Capítulo 3: Marco teórico.....	19
3.1 Descripción del modelo matemático del rotor agrietado	19
3.1.1 Matriz de rigidez del rotor agrietado: modelo de bisagra	19
3.1.2 Modelo del rotor Jeffcott agrietado	25
3.2 Solución a la ecuación de movimiento del rotor.....	29
3.2.1 Solución en estado estable: Método directo	30
3.2.2 Solución en estado transitorio: Método de Newmark	31
Capítulo 4: Respuesta vibratoria del rotor agrietado	34
4.1 Validación del modelo matemático de un rotor con grieta utilizando el algoritmo de Newmark	34
4.2 Análisis numérico del comportamiento dinámico de un rotor agrietado	38
Capítulo 5: Identificador algebraico	44
5.1 Identificador algebraico a velocidad constante	44
5.1.1 Simulación de identificador algebraico a velocidad constante	47
5.2 Identificador algebraico a velocidad variable (aceleración constante)	51
5.2.1 Simulación de identificador algebraico con aceleración constante.....	54
5.3 Robustez del identificador algebraico a velocidad constante.....	58

5.3.1 Robustez ante la fuerza de excitación del desbalance	58
5.3.2 Robustez ante perturbaciones en la respuesta vibratoria del rotor	60
Capítulo 6: Pruebas experimentales	67
6.1 Pruebas experimentales en un rotor Jeffcott con grieta abierta.....	67
6.1.1 Banco de pruebas experimentales	67
6.2 Pruebas experimentales: Caso 1	68
6.2.1 Parámetros del rotor	69
6.2.2 Filtrado de la señal experimental	71
6.2.3 Identificación de la profundidad de la grieta en el rotor experimental	73
6.2.4 Diagramas de Bode del rotor agrietado experimentales V_s numéricos.....	86
6.3 Pruebas experimentales: Caso 2.....	92
6.3.1 Parámetros del rotor	92
6.3.2 Identificación de la pérdida de rigidez de la grieta en el rotor experimental	93
6.3.3 Diagramas de Bode del rotor agrietado experimentales V_s numéricos.....	102
6.4 Comportamiento de Δk_{ξ} en función de la profundidad h/D	108
Conclusiones y trabajos futuros.....	109
Referencias	112
Apéndice A: Implementación del banco de pruebas con grieta inducida por fatiga	115

Nomenclatura

ξ	Coordenada rotatoria vertical	
η	Coordenada rotatoria horizontal	
h_0	Flexibilidad del sistema	
Δh_ξ	Incremento de la flexibilidad del sistema	
f_ξ	Fuerza en dirección vertical en coordenadas rotatorias	
f_η	Fuerza en dirección horizontal en coordenadas rotatorias	
$\psi(t)$	Función de respiro de la grieta	
Δk_ξ	Pérdida o cambio de rigidez del sistema a causa de la grieta	N/m
φ	Posición angular del rotor	rad
ω	Velocidad angular del rotor	rad/s
α	Aceleración angular del rotor (rampa de excitación)	rad/s^2
t	Tiempo	s
$[K]$	Matriz de rigidez que incluye los efectos de la grieta	
$[K(y,t)]$	Matriz de rigidez dependiente de desplazamientos verticales	
$[K_0]$	Matriz de rigidez sin grieta	
$[\Delta K(y,t)]$	Matriz de cambio de rigidez a causa de la grieta	
ω_ξ	Frecuencia natural del sistema con grieta	rad/s
ω_0	Frecuencia natural del sistema sin grieta	rad/s
x	Desplazamiento lineal horizontal	m
\dot{x}	Velocidad lineal horizontal	m/s
\ddot{x}	Aceleración lineal horizontal	m/s^2
y_0	Deflexión estática	m
y	Desplazamiento lineal vertical	m
\dot{y}	Velocidad lineal vertical	m/s
\ddot{y}	Aceleración lineal vertical	m/s^2
m	Masa del sistema	kg
c	Amortiguamiento viscoso del sistema	$N \cdot s/m$
k_0	Rigidez del sistema	N/m
m_d	Masa de desbalance	kg
e	Excentricidad de la masa de desbalance	m
l_d	Distancia del soporte a la posición del disco inercial	m
L_e	Longitud del eje	m
β	Posición angular del desbalance respecto a la dirección de la grieta	rad
g	Aceleración gravitacional	m/s^2

$[M]$	Matriz de masa	
$[\hat{C}]$	Matriz de amortiguamiento que incluye los efectos giroscópicos	
W	Vector de fuerza debido al peso del rotor	
f_d	Vector de fuerzas de excitación del desbalance	
f_d^*	Vector de fuerzas de excitación del desbalance con aceleración constante	
f_a	Vector de fuerzas asíncronas	
F	Fuerza asíncrona	N
s	Componente armónica	
δ_0	Vector de desplazamientos inicial	m
δ	Vector de desplazamientos	m
$\dot{\delta}$	Vector de velocidades	m/s
$\ddot{\delta}$	Vector de aceleraciones	m/s^2
Δt	Incremento del tiempo	s
k_p	Parámetro de profundidad de la grieta	*
h	Profundidad de la grieta	mm
D	Diámetro del eje del rotor	mm
ζ_x	Factor de amortiguamiento dirección x del rotor	*
ζ_y	Factor de amortiguamiento dirección y del rotor	*

* Parámetro adimensional

Lista de figuras

Figura 2.1 a) grieta transversal, b) grieta inclinada, c) grieta longitudinal.....	4
Figura 2.2 Comportamiento típico de respiro de una grieta transversal, de 125°-180° la grieta permanece totalmente abierta (Bachschnid <i>et al.</i> [3]).....	5
Figura 3.1 Flexibilidad de un rotor agrietado Bachschnid <i>et al.</i> [3].....	19
Figura 3.2 Sistema de referencia rotatorio y no rotatorio del rotor, Bachschnid <i>et al.</i> [3]..	20
Figura 3.3 Determinación experimental del parámetro de profundidad de la grieta normalizada, Bachschnid <i>et al.</i> [3].....	23
Figura 3.4 Función de apertura y cierre de la grieta debido al peso del rotor, (I) modelo de bisagra propuesto por Gasch [10], (II) función modificada de Mayes y Davies [6]	24
Figura 3.5 Comportamiento respiratorio de la grieta en función de la posición del eje alrededor de su órbita, Sawicki <i>et al.</i> [41].....	24
Figura 3.6 a) Esquema de un rotor Jeffcott con una grieta transversal, b) Sección transversal del rotor agrietado (modificado de [41]).....	25
Figura 3.7 a) Método de aceleración lineal, b) esquema RT, Bathe [44].....	32
Figura 4.1 Respuesta vibratoria componente eje y del rotor con $\alpha = 100 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 1$ (sin grieta), a) Sekhar [45], b) plataforma computacional	35
Figura 4.2 Respuesta vibratoria componente eje y del rotor con $\alpha = 30 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 0.95$ a) Sekhar [45], b) plataforma computacional	35
Figura 4.3 Respuesta vibratoria componente eje y del rotor con $\alpha = 75 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 0.95$ a) Sekhar [45], b) Plataforma computacional	36
Figura 4.4 Respuesta vibratoria componente eje y del rotor con $\alpha = 100 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 0.95$ a) Sekhar [45], b) Plataforma computacional	36
Figura 4.5 Respuesta resultante del rotor pasando la velocidad crítica con $\alpha = 25 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 1$ (sin grieta), a) Sekhar [20], b) Plataforma computacional.....	37
Figura 4.6 Respuesta resultante del rotor pasando la velocidad crítica con $\alpha = 25 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 0.90$, a) Sekhar [20], b) Plataforma computacional.....	37
Figura 4.7 Efecto de la grieta respiratoria y abierta en la respuesta vibratoria del rotor, componente eje y a $\omega = 1300 \text{ rpm}$	38
Figura 4.8 Transformada de Fourier de la figura 4.7, a) espectro de la señal completa, b) armónica 1X, 21.66 Hz, c) armónica 2X, 43.33 Hz, d) armónica 3X, 65 Hz.....	39
Figura 4.9 Efecto de la grieta en la respuesta vibratoria del rotor, componente eje x a $\omega = 1300 \text{ rpm}$	40
Figura 4.10 Respuesta vibratoria del rotor con grieta respiratoria con $k_p = 0.98$ y $\alpha = 15 \text{ rad/s}^2$ a) componente eje y , b) componente eje x	40
Figura 4.11 Respuesta vibratoria del rotor con grieta abierta con $k_p = 0.98$ y $\alpha = 15 \text{ rad/s}^2$, a) componente eje y , b) componente eje x	41
Figura 4.12 Diagrama de Bode del rotor con $k_p = 0.98$ y $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$	41

Figura 4.13 Diagrama de Bode componente eje y del rotor con $k_p = 0.98$ y rampa de excitación de tipo lineal $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$ a) grieta respiratoria, b) grieta abierta	42
Figura 4.14 Diagrama de Bode, rotor con grieta respiratoria vs k_p , a) componente eje y , b) componente eje x	43
Figura 4.15 Diagrama de Bode, rotor con grieta abierta vs k_p , a) componente eje y , b) componente eje x	43
Figura 5.1 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 500 \text{ rpm}$, $\beta = 0^\circ$ y $k_p = 0.95$, b) estimación de la profundidad k_p	48
Figura 5.2 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 900 \text{ rpm}$, $\beta = 0^\circ$ y $k_p = 0.96$, b) estimación de la profundidad k_p	48
Figura 5.3 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 1600 \text{ rpm}$, $\beta = 45^\circ$ y $k_p = 0.97$, b) estimación de la profundidad k_p	49
Figura 5.4 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 2000 \text{ rpm}$, $\beta = 90^\circ$ y $k_p = 0.98$, b) estimación de la profundidad k_p	49
Figura 5.5 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 4000 \text{ rpm}$, $\beta = 180^\circ$ y $k_p = 0.99$, b) estimación de la profundidad k_p	50
Figura 5.6 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 6000 \text{ rpm}$, $\beta = 0^\circ$ y $k_p = 0.9999$, b) estimación de la profundidad k_p	50
Figura 5.7 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\alpha = 10 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 0^\circ$ y $k_p = 0.95$, b) estimación de la profundidad k_p	54
Figura 5.8 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\alpha = 15 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 90^\circ$ y $k_p = 0.96$, b) estimación de la profundidad k_p	55
Figura 5.9 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\alpha = 25 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 120^\circ$ y $k_p = 0.97$, b) estimación de la profundidad k_p	55
Figura 5.10 a) Respuesta vibratoria del rotor $\alpha = 30 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 0^\circ$ y $k_p = 0.98$, b) estimación de la profundidad k_p	56
Figura 5.11 a) Respuesta vibratoria del rotor $\alpha = 50 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 45^\circ$ y $k_p = 0.99$, b) estimación de la profundidad k_p	56
Figura 5.12 a) Respuesta vibratoria del rotor $\alpha = 70 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 225^\circ$ y $k_p = 0.999$, b) estimación de la profundidad k_p	57
Figura 5.13 a) Respuesta vibratoria del rotor $\alpha = 100 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 315^\circ$ y $k_p = 0.9999$, b) estimación de la profundidad k_p	57

Figura 5.14 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 700$ rpm, $k_p = 0.999$	58
Figura 5.15 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 1200$ rpm, $k_p = 0.999$	59
Figura 5.16 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 2200$ rpm, $k_p = 0.9999$	59
Figura 5.17 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 4000$ rpm, $k_p = 0.9999$	59
Figura 5.18 Periodo de oscilación del identificador a) figura 5.14, $\omega = 500$ rpm, $k_p = 0.999$, b) figura 5.17, $\omega = 4000$ rpm, $k_p = 0.9999$	60
Figura 5.19 Respuesta vibratoria del rotor con y sin fuerzas asíncronas, eje y, a $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 1$	62
Figura 5.20 Transformada de Fourier de la señal 5.19, armónicas 1X, 2X, 3X, 4X y 5X en la respuesta vibratoria del rotor, 1X=21.66 Hz.....	62
Figura 5.21 Respuesta vibratoria del rotor con y sin fuerzas asíncronas, eje x, a $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 1$	63
Figura 5.22 Transformada de Fourier de la señal 5.21, armónicas 1X, 2X, 3X, 4X y 5X en la respuesta vibratoria del rotor, 1x=21.66 Hz.....	63
Figura 5.23 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 1$	64
Figura 5.24 Respuesta vibratoria del rotor con y sin fuerzas asíncronas, eje y, a $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 0.999$	64
Figura 5.25 Respuesta vibratoria del rotor con y sin fuerzas asíncronas, eje x, a $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 0.999$	65
Figura 5.26 Transformada de Fourier de la señal 5.24, armónicas 1X, 2X, 3X, 4X y 5X en la respuesta vibratoria del rotor, 1X=21.66 Hz.....	65
Figura 5.27 Transformada de Fourier de la señal 5.25, armónicas 1X, 2X, 3X, 4X y 5X en la respuesta vibratoria del rotor, 1X=21.66 Hz.....	65
Figura 5.28 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 0.999$	66
Figura 6.1 Banco de pruebas experimentales, rotor tipo Jeffcott	68
Figura 6.2 Arreglo utilizado en el desarrollo de las pruebas experimentales.....	68
Figura 6.3 Valores RMS del diagrama de Bode de rotor experimental a) eje y, b) eje x.	69
Figura 6.4 Comparación de los diagramas de Bode experimental y numérico $m_d = 0.19$ gr, $\beta=0^\circ$ y $\alpha = 1$ rad/s ² , a) eje y, b) eje x.....	70
Figura 6.5 Comparación de los diagramas de Bode experimental vs numérico $m_d = 0.381$ gr, $\beta=0^\circ$ y $\alpha = 1$ rad/s ² , a) eje y, b) eje x	71
Figura 6.6 a) Respuesta de vibración del rotor, 700 rpm (11.66 Hz), eje y, b) Transformada de Fourier.....	71
Figura 6.7 a) Respuesta de vibración del rotor, 700 rpm (11.66 Hz), eje x, b) Transformada de Fourier.....	72
Figura 6.8 Señal filtrada del rotor, rango de filtrado de 1-350 Hz, $\omega = 700$ rpm (11.66 Hz) a) eje y, b) eje x.....	72
Figura 6.9 Comparación de la transformada de Fourier con filtro y sin filtro a) eje y, b) eje x	73
Figura 6.10 a) Sección transversal del eje agrietado, b) ubicación de la grieta en la longitud del eje del rotor.....	73

Figura 6.11 Prueba, $\omega = 700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	74
Figura 6.12 Prueba, $\omega = 1200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	74
Figura 6.13 Prueba, $\omega = 1700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	75
Figura 6.14 Prueba, $\omega = 2200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	75
Figura 6.15 Prueba, $\omega = 2700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	76
Figura 6.16 Prueba, $\omega = 3200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	76
Figura 6.17 Prueba, $\omega = 3700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	77
Figura 6.18 Prueba, $\omega = 4200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	77
Figura 6.19 Prueba, $\omega = 4700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	78
Figura 6.20 Prueba, $\omega = 5200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	78
Figura 6.21 Prueba, $\omega = 5700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	79
Figura 6.22 Prueba, $\omega = 6200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	79
Figura 6.23 Prueba, $\omega = 6700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.....	80
Figura 6.24 Identificación de Δk_ξ , $h/D = 0.32$ a) 1200 rpm, b) 2700 rpm, c) 4200 rpm, d) 5700 rpm.....	82
Figura 6.25 Variación de Δk_ξ en función de la profundidad h/D , Caso 1.....	84
Figura 6.26 Desviación estándar (σ) de los valores identificados correspondientes a Δk_ξ en función de la profundidad h/D , Caso 1.....	85
Figura 6.27 Ajuste lineal del comportamiento de Δk_ξ promedio en función de h/D , Caso 1.....	85
Figura 6.28 Comparación del diagrama de Bode del rotor experimental para $h/D = 0$ con $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$ a) eje y b) eje x.....	86
Figura 6.29 Comparación del diagrama de Bode del rotor experimental para	

$h/D = 0.06$ con $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$ a) eje y b) eje x.	87
Figura 6.30 Comparación del diagrama de Bode del rotor experimental para $h/D = 0.06$ con $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$ a) eje y b) eje x.	87
Figura 6.31 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.14$ con $\alpha = 1.56 \text{ rad/s}^2$	87
Figura 6.32 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.14$ con $\alpha = 1.56 \text{ rad/s}^2$	88
Figura 6.33 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.19$ con $\alpha = 0.98 \text{ rad/s}^2$	88
Figura 6.34 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.19$ con $\alpha = 0.98 \text{ rad/s}^2$	88
Figura 6.35 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.26$ con $\alpha = 0.93 \text{ rad/s}^2$	89
Figura 6.36 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.26$ con $\alpha = 0.93 \text{ rad/s}^2$	89
Figura 6.37 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.32$ con $\alpha = 0.36 \text{ rad/s}^2$	89
Figura 6.38 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.32$ con $\alpha = 0.36 \text{ rad/s}^2$	90
Figura 6.39 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.41$ con $\alpha = 1.16 \text{ rad/s}^2$	90
Figura 6.40 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.41$ con $\alpha = 1.16 \text{ rad/s}^2$	90
Figura 6.41 Evolución del diagrama de Bode eje y del rotor experimental en función de la profundidad h/D	91
Figura 6.42 Evolución del diagrama de Bode eje x del rotor experimental en función de la profundidad h/D	92
Figura 6.43 Comparación de los diagramas de Bode experimental y numérico con $m_d = 0.471 \text{ gr}$ y $\alpha = 1.0748 \text{ rad/s}^2$ a) eje y, b) eje x.	93
Figura 6.44 Prueba, $\omega = 700 \text{ rpm}$, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_ξ	94
Figura 6.45 Prueba, $\omega = 900 \text{ rpm}$, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_ξ	94
Figura 6.46 Prueba, $\omega = 1100 \text{ rpm}$, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_ξ	95
Figura 6.47 Prueba, $\omega = 1300 \text{ rpm}$, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_ξ	95
Figura 6.48 Prueba, $\omega = 1500 \text{ rpm}$, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_ξ	96

Figura 6.49 Prueba, $\omega = 1700$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor,	
b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ}	96
Figura 6.50 Prueba, $\omega = 1900$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor,	
b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ}	97
Figura 6.51 Prueba, $\omega = 2100$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor,	
b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ}	97
Figura 6.52 Prueba, $\omega = 2300$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor,	
b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ}	98
Figura 6.53 Prueba, $\omega = 2500$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor,	
b) Identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ}	98
Figura 6.54 Variación de Δk_{ξ} en función de h/D , Caso 2	100
Figura 6.55 Desviación estándar (σ) de los valores identificados correspondientes	
a Δk_{ξ} en función de la profundidad h/D , Caso 2	101
Figura 6.56 Ajuste lineal del comportamiento de Δk_{ξ} promedio en función de h/D ,	
Caso 2	102
Figura 6.57 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para	
$h/D = 0$ con $m_d e = 1.413(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 1.07 \text{ rad/s}^2$	103
Figura 6.58 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para	
$h/D = 0$ con $m_d e = 1.413(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 1.07 \text{ rad/s}^2$	103
Figura 6.59 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para	
$h/D = 0.09$ con $m_d e = 1.143(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.37 \text{ rad/s}^2$	103
Figura 6.60 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para	
$h/D = 0.09$ con $m_d e = 1.143(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.37 \text{ rad/s}^2$	104
Figura 6.61 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para	
$h/D = 0.20$ con $m_d e = 1.143(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.96 \text{ rad/s}^2$	104
Figura 6.62 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para	
$h/D = 0.20$ con $m_d e = 1.143(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.96 \text{ rad/s}^2$	104
Figura 6.63 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para	
$h/D = 0.34$ con $m_d e = 8.43(10)^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.47 \text{ rad/s}^2$	105
Figura 6.64 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para	
$h/D = 0.34$ con $m_d e = 8.43(10)^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.47 \text{ rad/s}^2$	105
Figura 6.65 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para	
$h/D = 0.42$ con $m_d e = 1.122(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.55 \text{ rad/s}^2$	105
Figura 6.66 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para	
$h/D = 0.42$ con $m_d e = 1.122(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.55 \text{ rad/s}^2$	106
Figura 6.67 Evolución del diagrama de Bode eje y en función de la profundidad h/D	107
Figura 6.68 Evolución del diagrama de Bode eje x en función de la profundidad h/D	107

Figura 6.69 Comportamiento de Δk_{ξ} para el Caso 1, Caso 2 y Ecuación de tipo lineal $V_s \ b/D$	108
Figura A.1 Configuración de las probetas utilizadas para las pruebas de fatiga	115
Figura A.2 Configuración de la máquina de fatiga rotatoria	116
Figura A.3 a) Máquina de fatiga rotatoria, b) probeta montada sobre la máquina de fatiga rotatoria	116
Figura A.4 Fractura de la flecha de aluminio para $n = 145617$ ciclos	117
Figura A.5 Flecha con $n = 50611$ ciclos de carga a) esquina A, b) esquina B, c) esquina C, d) esquina D	118
Figura A.6 Flecha con $n = 90342$ ciclos de carga (sin grieta) a) esquina A, b) esquina B, c) esquina C, d) esquina D.	118
Figura A.7 Flecha con $n = 130172$ ciclos de carga a) esquina A sin grieta, b) esquina B sin grieta, c) esquina C con grieta, d) esquina D con grieta	119
Figura A.8 Grieta transversal en la sección del eje $n = 130172$ ciclos de carga a) sección C-B, b) sección D-A.	119
Figura A.9 Terminación de la grieta en la sección transversal del eje generada con $n = 130172$ ciclos de carga a) sección C-B, b) sección D-A	120
Figura A.10 Diagrama de Bode del rotor con eje de aluminio a) eje y, b) eje x	121
Figura A.11 Comparación de la amplitud de los armónicos de la respuesta en el eje y, a) 300 rpm b) 500 rpm c) 800 rpm d) 1000 rpm	122
Figura A.12 Comparación de la amplitud de los armónicos de la respuesta en el eje x, a) 300 rpm b) 500 rpm c) 800 rpm d) 1000 rpm	122
Figura A.13 Prueba, $\omega = 800$ rpm, a) señal experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez del rotor	123
Figura A.14 Prueba, $\omega = 900$ rpm, a) señal experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez del rotor	123
Figura A.15 Prueba, $\omega = 1000$ rpm, a) señal experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez del rotor	124

Lista de tablas

Tabla 3.1 Algoritmo de Newmark, Bathe [44].....	33
Tabla 4.1 Datos del rotor, Sekhar [45]	34
Tabla 6.1 Características físicas del rotor experimental.....	68
Tabla 6.2 Parámetros del rotor experimental, Caso 1.....	70
Tabla 6.3 Valores identificados de k_p , Caso 1	81
Tabla 6.4 Valores identificados de Δk_ξ , Caso 1.....	83
Tabla 6.5 Parámetros promedios de Δk_ξ , k_p y ω_ξ estimados en el rotor experimental, Caso 1	83
Tabla 6.6 Desviación estándar de los parámetros de Δk_ξ identificados, Caso 1.....	84
Tabla 6.7 Parámetros del rotor experimental, Caso 2.....	92
Tabla 6.8 Valores identificados de Δk_ξ , Caso 2.....	99
Tabla 6.9 Valores identificados de k_p , Caso 2.....	99
Tabla 6.10 Parámetros promedios de Δk_ξ , k_p y ω_ξ estimados en el rotor experimental, Caso 2	100
Tabla 6.11 Desviación estándar de los parámetros de Δk_ξ identificados, Caso 2.....	101

Capítulo 1: Introducción

1.1 Introducción

La maquinaria rotatoria ha sido utilizada por la humanidad desde los primeros siglos de su existencia. Una de las primeras fue la rueda de agua, la cual fue utilizada para aprovechar la energía de la caída de corrientes de agua. Sin embargo, fue a partir de la revolución industrial que la maquinaria rotatoria tuvo un cambio significativo, las nuevas máquinas se utilizaron para sustituir la mano de obra y aumentar la eficiencia de los procesos de producción. En la actualidad, la maquinaria rotatoria juega un papel fundamental en todos los sectores industriales, principalmente en el sector energético pues éste depende casi en su totalidad de máquinas rotatorias para la generación de energía eléctrica, entre éstas, se puede mencionar: turbinas de gas y vapor, generadores de dos polos, turbogeneradores, compresores centrífugos, motores, etc.

La amplia aplicación de la maquinaria rotatoria desde hace décadas y a causa del crecimiento de la población mundial, ha hecho indispensable eficientizar cada vez más los procesos de producción. Esta demanda ha hecho necesario que la maquinaria rotatoria opere a velocidades cada vez mayores, llegando a superar velocidades mayores a los 100,000 rpm [1]. A consecuencia de las condiciones de operación impuestas a la maquinaria rotatoria, diversos problemas se han hecho presentes con mayor frecuencia, como, por ejemplo: el desbalance, desalineamiento y la generación de grietas presentes en el rotor.

Normalmente cuando una máquina rotatoria se encuentra en operación, los esfuerzos de trabajo se intensifican a medida que se eleva la velocidad de rotación. A causa de esto, el fenómeno de la fatiga se ha hecho cada vez más presente. La fatiga en una máquina rotatoria se presenta cuando esta está sometida en gran escala a cargas dinámicas repetitivas, y éstas en presencia de factores de concentración de esfuerzos o imperfecciones en el material pueden producir discontinuidades en el material del rotor, las cuales se conocen como grietas.

Las grietas en un componente rotatorio pueden clasificarse de distintos tipos: abiertas, inclinadas, longitudinales, transversales y respiratorias, de acuerdo a su posición y a su comportamiento respecto a los esfuerzos a los que se someten.

La detección temprana de una grieta en un componente rotatorio es fundamental, ya que, de ser así, acciones correctivas pueden llevarse a cabo antes del fallo catastrófico de la máquina. La propagación de la grieta se llevará a cabo si el rotor no es puesto fuera de servicio inmediatamente, ya que, la propagación se ve afectada de forma exponencial por las velocidades de operación. Cuando esto ocurre, la sección del rotor no será capaz de soportar los esfuerzos de trabajo, lo que eventualmente llevará al fallo repentino de la máquina. El fallo repentino de una máquina es considerado como un suceso catastrófico, debido a las consecuencias que puede ocasionar. La energía liberada por la fractura del rotor afecta incluso a máquinas cercanas que también estén en servicio, así como pérdidas económicas y lo más importante, daños en los recursos humanos de la planta.

Este fenómeno ha despertado el interés de la comunidad científica, debido al impacto que puede generar. Por esta razón se han desarrollado diversas investigaciones con la finalidad de proponer metodologías que sirvan para la detección de grietas en los sistemas rotatorios.

Debido a la demanda en el sector industrial, es necesario que las máquinas rotatorias siempre estén en operación. Por este motivo, detectar una grieta en un rotor no es una tarea sencilla a diferencia de cuando se inspecciona una estructura fija, además de que otros fenómenos pueden estar presentes al mismo tiempo, lo cual puede causar confusión. Por esta razón se han desarrollado diversas metodologías con la finalidad de poder detectar grietas. Tradicionalmente las armónicas 1X, 2X y 3X de la vibración han sido empleadas como parámetros para poder determinar la presencia de una grieta en un rotor, debido a la relación entre éstas con una grieta. Por otro lado, también se han desarrollado modelos dinámicos de rotores con la finalidad de poder predecir el comportamiento dinámico del sistema y así hacer más sencilla la tarea de detectar una o más grietas.

La respuesta vibratoria de cualquier sistema depende de las variables o parámetros del mismo, así como de la naturaleza de las fuerzas de excitación que actúan sobre él. De acuerdo con lo anterior, en el presente trabajo se propone un modelo matemático para la identificación de parámetros relacionados con la presencia de una grieta transversal en un rotor experimental tipo Jeffcott. El modelo matemático de identificación propuesto, tiene como base la metodología de identificación algebraica y tiene como principal característica la identificación de parámetros desconocidos de un sistema a partir de su modelo matemático del comportamiento dinámico del sistema. Se proponen dos modelos matemáticos para la identificación de grietas: velocidad angular constante y velocidad angular variable (rampas de excitación del tipo lineal). La exactitud de los parámetros identificados, está estrechamente relacionada con que tanto se apegue el modelo matemático del comportamiento dinámico con el fenómeno de estudio, pues entre más aproximado sea a la realidad, se pueden obtener mejores resultados.

Por otra parte, con el modelo matemático de identificación propuesto, se puede conocer el parámetro atribuible a la presencia de una grieta, teniendo como datos conocidos los parámetros de masa, amortiguamiento, rigidez y desbalance (magnitud y posición angular) del rotor, así como, la respuesta de vibración. Una de las ventajas del método propuesto, es que solo se requiere medir la respuesta de vibración del rotor ya sea a velocidad constante o velocidad variable para realizar la identificación del parámetro de la presencia de una grieta *in situ* en un tiempo menor a 1 segundo. Cabe mencionar que la mayoría de los métodos propuestos en la literatura son complejos y en ocasiones los parámetros atribuibles a una grieta son también a causa de otras fallas que pueden estar presentes en el sistema.

El presente trabajo está estructurado en 6 capítulos. En el Capítulo 2 se presenta la revisión del estado del arte concerniente a los rotores agrietados; en el Capítulo 3 se presenta la descripción del modelo matemático del comportamiento dinámico de un rotor agrietado seleccionado de la literatura para el presente estudio, así como los métodos numéricos utilizados para la solución del mismo. La validación numérica de la plataforma computacional para la obtención de la respuesta de vibración del rotor agrietado y su análisis se presenta en el Capítulo 4. Por otra parte, en el Capítulo 5 se presenta el desarrollo y

validación numérica de los modelos matemáticos de los identificadores en línea propuestos (identificadores algebraicos). Finalmente, el desarrollo de las pruebas experimentales de identificación de grietas en un rotor tipo Jeffcott con grieta transversal, se presenta en el Capítulo 6.

1.2 Objetivos

Objetivo general:

Realizar un análisis numérico-experimental para la detección grietas en un sistema rotodinámico implementando la técnica de identificación algebraica.

Objetivos específicos:

- Desarrollo de un identificador algebraico a velocidad angular constante y variable, tomando como base un modelo matemático de 2 GDL de un rotor agrietado
- Análisis de la respuesta de un rotor agrietado
- Realizar un análisis experimental para detectar grietas considerando un sistema rotodinámico de dos grados de libertad a velocidad angular constante
- Implementación de un banco de pruebas experimental para un rotor con grieta, considerando distintas profundidades.

1.3 Alcances y limitaciones

Análisis numérico-experimental de la identificación de parámetros atribuibles a una grieta en un rotor tipo Jeffcott implementando la metodología de identificación algebraica en línea.

En la simulación numérica la identificación de parámetros se realizó a velocidad angular constante y variable (rampas de excitación de tipo lineal), mientras que en la parte experimental solo se consideró velocidad angular constante.

Capítulo 2: Estado del arte

2.1 Dinámica de los rotores agrietados

Una grieta es una discontinuidad en el material del rotor, cuya principal causa es la fatiga. De acuerdo Sabnavis *et al.* [2] pueden clasificarse de acuerdo a su posición respecto al eje longitudinal del rotor en: transversales, longitudinales e inclinadas. Las grietas transversales son aquellas que se presentan en la sección transversal del eje, localizadas perpendicularmente al eje longitudinal del rotor, figura 2.1a, por su parte, las inclinadas presentan cierta inclinación respecto al eje longitudinal, también son conocidas como helicoidales, figura 2.1b; finalmente, las longitudinales son aquellas presentes de forma paralela al eje longitudinal del rotor, se considera que este tipo de grietas son las menos serias y son poco comunes, figura 2.1c.

Un eje rotatorio está sujeto a distintos tipos de esfuerzos, tales como flexión, torsión, corte y cargas estáticas radiales. La mayoría de los sistemas rotatorios están sometidos a esfuerzos de flexión y torsión, si el eje rotatorio está sometido en su totalidad a cargas de flexión, lo más probable es que una grieta de tipo transversal se desarrolle en la sección transversal; mientras que, si el efecto de la torsión es predominante al de flexión, es más probable que una grieta de tipo inclinada se inicie en la sección transversal del eje. Por lo general, en este tipo de máquinas los esfuerzos de flexión son predominantes a los de torsión, por tal motivo las grietas transversales se presentan con mayor frecuencia a diferencia de otros tipos [3].

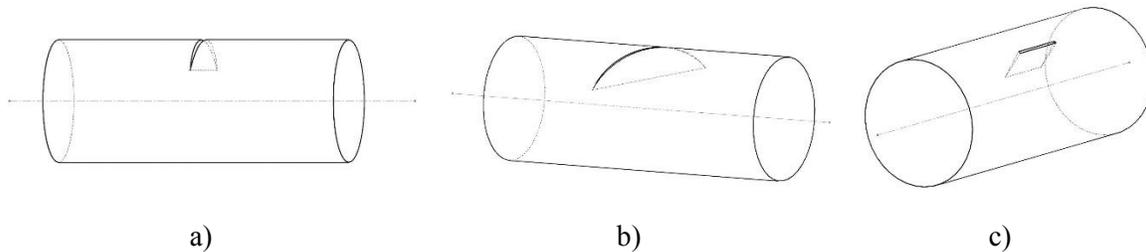


Figura 2.1 a) grieta transversal, b) grieta inclinada, c) grieta longitudinal.

Por otro lado, las grietas pueden clasificarse de acuerdo a su comportamiento dinámico durante la rotación del rotor. Las grietas respiratorias son aquellas que presentan un comportamiento de “respiro”, debido a que abren y cierran a causa de la acción de los esfuerzos de compresión y tensión a los que se ve sometido el rotor, lo cual genera una variación de la rigidez del eje en función del giro, pasando de un estado de abierta a cerrada, donde la mínima y máxima rigidez del sistema se presentan respectivamente, a este fenómeno se le conoce como mecanismo de respiro de la grieta, ver figura 2.2. Por otro lado, las grietas abiertas son aquellas que no presentan un comportamiento de apertura y cierre, es decir, que permanecen abiertas durante toda la rotación del eje. Este tipo de grietas se asemejan más a una hendidura o muesca presente en la sección transversal del eje.

En la figura 2.2 se ilustra el comportamiento de respiro de una grieta transversal en función del ángulo de rotación, aquí la zona blanca representa la apertura de la grieta, se puede observar que la grieta comienza su apertura en 25° logrando su apertura completa hasta

alcanzar los 125°; a partir de 125° hasta los 180° de giro, la grieta permanece totalmente abierta, posteriormente de 180° hasta alcanzar los 20° la grieta vuelve a cerrar por completo. A este fenómeno se le conoce como mecanismo de respiro de la grieta.

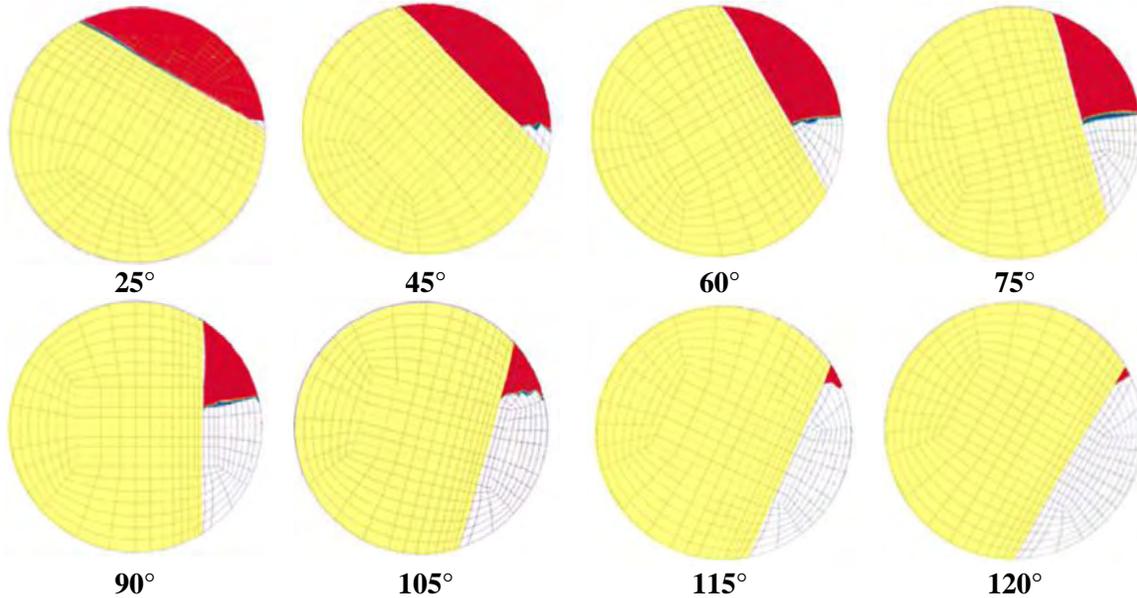


Figura 2.2 Comportamiento típico de respiro de una grieta transversal, de 125°-180° la grieta permanece totalmente abierta (Bachschnid *et al.* [4]).

Desde inicios de los años 70 diversos investigadores se dieron a la tarea de comprender el comportamiento dinámico de los rotores agrietados, para así poder crear metodologías y modelos capaces de detectar grietas en estado incipiente. En la revisión realizada por Wauer [5], se presentan los primeros trabajos realizados hasta los años 90 dentro del campo de la dinámica de rotores agrietados, hace hincapié en el potencial que tiene el monitoreo de las vibraciones para detectar grietas en un rotor mientras está en funcionamiento, ya que a la fecha la única forma de detectar una grieta en un rotor era sacando de servicio a la máquina para inspeccionarla.

La predicción del comportamiento dinámico de un sistema se puede realizar de forma numérica a partir de un modelo matemático. Los primeros modelos y ecuaciones para analizar el comportamiento dinámico de un rotor agrietado fueron realizados tomando como base el modelo presentado por Jeffcott [6], quien fue el primero en realizar un aporte en el campo de la rotodinámica. Con el paso de los años se han propuesto diversos modelos dinámicos que sean capaces de replicar la dinámica de un rotor agrietado, esto con el fin de entender y analizar el comportamiento dinámico de un rotor agrietado. Estos modelos y ecuaciones sentaron las bases para desarrollar las posteriores metodologías de detección de grietas en rotores, ya que, al comprender mejor la dinámica de un sistema rotodinámico simplificado agrietado, este puede extrapolarse a sistemas más complejos y más apegados a la realidad. Algunos de los trabajos realizados correspondiente a modelos dinámicos se explican brevemente a continuación.

Uno de los primeros métodos desarrollados para resolver las ecuaciones de movimiento para un sistema rotodinámico agrietado fue presentado por Mayes y Davies [7], quienes consideraron que, para calcular la profundidad de una grieta, el propio peso del rotor gobierna el comportamiento respiratorio de la grieta. Para la simulación de la grieta, se propuso una reducción localizada en el diámetro del rotor en la posición de la grieta; con ese fin, se relacionó el diámetro y la longitud reducida de la sección. Para ello se modificó el método de Rayleigh y así obtener la relación del segundo momento de área y simular su reducción en la sección a causa de la presencia de grieta.

Wauer [8] formuló las ecuaciones de movimiento para un rotor agrietado, asumiendo al eje conformado con un material viscoelástico, considerando los efectos giroscópicos del sistema y la influencia del cortante a la flexión. En su estudio utilizó una estructura uniforme con una discontinuidad de carga en la ubicación de la grieta para el modelado del rotor. Sus resultados ofrecieron un enfoque distinto para generar ecuaciones de modelos que pudieran utilizarse como un subconjunto dentro de un extenso sistema de ecuaciones de movimiento para máquinas rotatorias con ejes y rodamientos múltiples.

Collins *et al.* [9] modelaron la apertura y cierre de una grieta. Para ello utilizaron un eje rotatorio considerando una viga Timoshenko con una grieta transversal. Utilizaron las ecuaciones descritas previamente por Wauer [8] aplicadas a un elemento con soportes simples en sus extremos a velocidad angular constante. En el modelo matemático, las discontinuidades en la rigidez y el amortiguamiento debido a la grieta fueron presentadas como vectores de fuerza auto equilibrados generalizados. El decrecimiento de la rigidez en la localización de la grieta se representó por una matriz, la cual fue obtenida usando conceptos de la mecánica de la fractura. La grieta se consideró totalmente abierta o bien totalmente cerrada en un tiempo determinado. Las ecuaciones utilizadas involucraron desplazamientos axiales, torsionales, dos desplazamientos transversales y dos ángulos de inclinación (rotaciones). Se concluyó que la presencia de una grieta incrementa el acoplamiento entre los desplazamientos, por lo que, puede ser utilizado como un parámetro para identificar una grieta. Se observó que el espectro de frecuencias del sistema difiere cuando está agrietado siempre y cuando se apliquen impulsos periódicos axiales. A su vez se encontró que la presencia de una grieta introduce nuevos picos al espectro. Por otro lado, si existen vibraciones forzadas, la presencia de la grieta tiende a agregar armónicas en el espectro de frecuencias.

Jun y Eun [10] propusieron ecuaciones de movimiento para un rotor con una grieta respiratoria. Las rigideces del sistema se estimaron mediante la aplicación de conceptos de la mecánica de la fractura para considerar el comportamiento del mecanismo de respiro, debido al efecto del peso del rotor sobre la grieta cuando está en rotación. El comportamiento vibratorio del sistema se analizó utilizando el método de integración numérica de Runge-Kutta para la solución de las ecuaciones de movimiento y rigidez del rotor. El mecanismo de apertura y cierre de la grieta fue simplificado a una función de permutación (*switching function*). Se observó que el incremento de la profundidad de la grieta causa un decremento en la rigidez del rotor, lo que a su vez genera un incremento en la amplitud de la vibración. Además, el grado de asimetría en la rigidez se vuelve mucho mayor, resultando en un cambio en el espectro de respuesta del sistema. Se concluyó que no es recomendable hacer uso de la

respuesta de las componentes síncronas como un identificador de la dirección de la grieta. Los resultados sugirieron el monitoreo de la componente de la segunda armónica horizontal como un buen indicador de la presencia de una grieta, debido a que las direcciones en sus valores máximos y mínimos de la fase permanecen relativamente estables respecto a la dirección del desbalance.

Por su parte, Gasch [11] propuso un modelo de un rotor Jeffcott con una grieta transversal cerca del disco, el cual llamó modelo “bisagra” o *hinge model*. Su modelo consideró que la flexibilidad del sistema se mantiene como si el rotor no estuviera agrietado cuando la grieta se encuentra en compresión y la rigidez es la misma que la del rotor sin grieta, asimismo, el rotor experimenta una flexibilidad adicional cuando la grieta está abierta, es decir, cuando experimenta los esfuerzos de tensión debido al peso del rotor. El modelo consideró un decremento en la matriz de rigidez del rotor cuando la grieta está abierta, mientras que la rigidez se mantiene sin cambio cuando está cerrada. Para el comportamiento del respiro de la grieta, añadió una función de respiro en función del ángulo de rotación del rotor. Sus resultados permitieron proveer una visión global del comportamiento dinámico de un modelo de un rotor simple con una grieta transversal.

Como se mencionó anteriormente, la dinámica de un rotor agrietado es compleja, debido a que el comportamiento de la grieta depende principalmente de la posición angular de la misma. El mecanismo de respiro describe el comportamiento dinámico de una grieta respiratoria, el cual dicta que ésta pasa de un estado de abierta a cerrada a causa del efecto de los esfuerzos de tensión y compresión, cuando el eje está sometido a momentos flexionantes. El mecanismo de respiro puede clasificarse en dos funciones de respiro que modelan el comportamiento de apertura y cierre de una grieta respiratoria, el primero de ellos consiste en utilizar una función de conmutación o *switching function*, la cual describe la dinámica de una grieta que pasa directamente de un estado de abierta a cerrada; el modelo armónico o *harmonic model* propone implementar tres etapas de respiro de la grieta, esta función considera una etapa intermedia de apertura y cierre, que es cuando la grieta está parcialmente abierta o cerrada, hasta llegar a cerrar o abrir por completo, un ejemplo de este tipo de modelado fue desarrollado por Al-Shudeifat y Butcher [12] basándose en el método del elemento finito para un sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad.

Con el fin de tener un mejor entendimiento sobre este fenómeno, Dimarogonas [13] realizó un estudio sobre el comportamiento de estructuras agrietadas. Dimarogonas concluyó que la presencia de una grieta en un rotor produce una flexibilidad adicional local, la cual afecta a la respuesta vibratoria del sistema. También, al estar en movimiento el rotor, la grieta presenta un mecanismo de respiro en función del ángulo de rotación y de la amplitud de la vibración. La presencia de una grieta en un rotor hace que el sistema se considere no lineal, lo cual genera que esté acoplado, en contraste cuando el rotor no está agrietado el sistema está desacoplado, esto significa que una grieta induce nuevas armónicas en el espectro de frecuencias del sistema. De acuerdo con este autor, actualmente existen tres enfoques para abordar el problema del comportamiento de un rotor agrietado: considerar una reducción de una sección de área equivalente debido a la grieta; agregar una matriz de flexibilidad local en el sistema; y considerar una barra o viga agrietada continua.

Detectar fallas en máquinas rotatorias presenta ciertos inconvenientes, los cuales no ocurren cuando se hace en estructuras fijas. Además de la falla que se pretende localizar, otras fallas pueden estar presentes al mismo tiempo, lo cual puede “enmascarar” la falla que se busca. Lo ideal es detectar una grieta cuando está en etapa temprana de propagación, de lo contrario, el rotor se vuelve inservible y debe sacarse de operación inmediatamente. Por estos motivos detectar una grieta en una máquina en línea no es una tarea sencilla, debido a que al estar en funcionamiento aumenta la dificultad de su detección. Diversos investigadores han propuesto metodologías de detección, donde la mayoría se basan en el monitoreo de la máquina a través de vibraciones mecánicas. A lo largo de los años se han desarrollado técnicas de diagnóstico que permiten detectar la presencia de grietas en rotores. Sabnavis *et al.* [2] presentaron una revisión de la literatura de técnicas de diagnóstico, clasificaron los métodos de diagnóstico en tres grupos, técnicas basadas en medición de vibración, las cuales a su vez se clasifican en técnicas basadas en señales y en modelos dinámicos, pruebas modales para la detección y finalmente, métodos no tradicionales como *neural networks*, *fuzzy logic* y la aplicación de las transformadas de Wavelet y Wigner-Ville.

Una formulación para la detección de grietas fue desarrollada por Grabowski [14], quien presentó un modelo para simular el mecanismo de respiro de la grieta. En su modelo, consideró diversos ángulos de rotación y su relación con la apertura. Observó una clara dependencia de la rigidez del sistema con respecto al ángulo de rotación. Los resultados numéricos presentaron parámetros de vibración propios de la presencia de grieta en el rotor. Se presentaron en su mayoría vibraciones una vez por revolución (1X) y dos veces por revolución (2X) como resultado de la grieta respiratoria, es decir, a causa de la grieta respiratoria en la vibración del sistema, se presentaron armónicas 1X y 2X, además se concluyó que una grieta abierta induce armónicas 2X.

En el trabajo de investigación realizado por Bently y Muszynska [15], se concluyó que los factores más fiables para la detección grietas en rotores es a través del monitoreo de las componentes 1X y 2X. Se concluyó que el cambio de la amplitud y fase a través del tiempo de la componente 1X es una fuerte señal de presencia de grieta en el rotor. A causa de la pérdida de rigidez del sistema, conforme la grieta se propaga a través del rotor, tiende a “arquearse” más, produciendo una respuesta en esta componente. Por otra parte, se sugiere de igual forma el monitoreo de la componente 2X. La presencia de una grieta en un rotor causa que el material del rotor se considere asimétrico, y produzca una rigidez anisotrópica, es decir, que a medida que el rotor gire se producirá un efecto de transición dos veces por revolución, lo cual, en presencia de una carga estática radial cerca de la grieta, producirá una fuerte respuesta en la componente 2X.

Basándose en el concepto de que una grieta transversal en una estructura, en este caso un rotor, induce cierta flexibilidad local en el sistema, Papadopoulos y Dimarogonas [16] desarrollaron una matriz completa de flexibilidad local para un eje rotatorio agrietado. Considerando un sistema de tres grados de libertad, vibraciones acopladas libres y forzadas sin amortiguamiento y sin efectos de cortante. Reportaron que las resonancias subarmónicas y cambios en la frecuencia a causa de vibraciones longitudinales y de flexión acopladas son fuentes de información confiables para detectar grietas en rotores. La matriz de flexibilidad local empleada se limitó a una grieta que permanece abierta durante la rotación del eje. En su investigación se hace hincapié en lo siguiente: cuando la deflexión estática del rotor es

pequeña, como en la mayoría de ejes ligeros, la grieta permanece abierta si el desbalance está en la dirección de la grieta, mientras que la grieta abre y cierra cuando la deflexión del eje es muy grande comparada con la amplitud de la vibración.

Otros investigadores optaron por tomar un enfoque diferente. Basándose en la idea de que una grieta produce un cambio en la rigidez del sistema y, por ende, en las frecuencias naturales y modos de vibración del mismo. Por una parte, Rajab y Al-Sabeeh [17], presentaron una metodología para detectar grietas en rotores. Desarrollaron un modelo con base en la “integral j”, un concepto de la mecánica de la fractura. Por otra parte, Sekhar y Prabhu [18] desarrollaron un modelo usando el método del elemento finito, basándose en la metodología descrita por Rajab y Al-Sabeeh para el análisis de los datos recolectados para la detección de grietas, quienes desarrollaron una plataforma computacional para introducir los datos de entrada del sistema (material, dimensiones, etc.). La localización y profundidad de la grieta se determinó a través de los cambios de la frecuencia natural del sistema. Como era de esperarse, la frecuencia natural en el sistema decreció en presencia de una grieta, presentando un decremento adicional conforme la profundidad de la grieta va en aumento. Para ello es necesario primero medir un adecuado número de frecuencias naturales del sistema y después usar el método para la detección de grietas. De acuerdo con los resultados, se observaron cambios en los modos de vibración, así como un decremento en la primera y segunda frecuencia natural del sistema a causa de la presencia de la grieta.

En la investigación de Sámano [19], se determinó la relación existente en un rotor con y sin grieta y cómo éstas afectan a la respuesta del sistema, a través de las vibraciones mecánicas del mismo. Para ello se modeló un rotor con grieta mediante la metodología del método del elemento finito, con el fin de determinar frecuencias naturales y modos de vibración propios del sistema con grieta con distintas localizaciones de la misma. En su estudio obtuvo diagramas de Campbell propios del sistema para condiciones con y sin fractura. Concluyó que el primer modo de vibración y la primera frecuencia natural del sistema son los que se ven más afectados por la presencia de la grieta, lo cual puede usarse como indicio para detectar una grieta en un sistema rotodinámico.

Blanco-Ortega [20] realizó un estudio numérico y experimental con la finalidad de identificar parámetros para identificar grietas en un rotor Jeffcott. Para este fin se analizó la respuesta de un rotor de 2 GDL con una grieta transversal localizada cerca del disco inercial, el cual consideró una reducción del segundo momento de área sobre la sección transversal del eje. De acuerdo con el análisis numérico, se observó que la grieta afecta principalmente a la segunda armónica (2X) para grietas con profundidad menor al 10% de profundidad relativa p/D (relación de profundidad respecto al diámetro del eje), mientras que para grietas mayores al 10% este efecto se observa en las primeras dos armónicas de la respuesta; asimismo, se observó que la mayor amplitud de vibración se presenta a un ángulo de 45° y 135° de la posición del desbalance de acuerdo a la dirección de la grieta, mientras que a 135° y 315° se presentan las menores amplitudes. De los experimentos realizados, se observó que para grietas en etapa incipiente cerca del disco inercial el efecto de la asimetría es predominante al de la flexibilidad, provocando mayores cambios en la segunda armónica, asimismo, para grietas con profundidad $p/D > 0.1$ localizadas en el centro del rotor, el efecto de la flexibilidad

es más notorio, ya que se observó un cambio en la primera y segunda armónica, predominando en la 1x. Adicionalmente, se observó que el comportamiento de la amplitud y fase de la segunda armónica fue similar al observado de forma numérica.

Sekhar y Prabhu [21] desarrollaron un modelo matemático considerando un rotor Jeffcott con una grieta respiratoria. En su estudio analizaron la respuesta transitoria del sistema rotodinámico con y sin grieta, el cual pasa a través de su primera velocidad crítica. También se analizaron los efectos en la vibración del sistema y como esta se relaciona con la presencia de una grieta. Se estudió la relación de la profundidad y localización de la grieta respecto a la excentricidad del desbalance. Mediante el espectro de Fourier de frecuencias se observó que a $1/3$ de la respuesta crítica las características para detectar y monitorear una grieta no son considerables, mientras que a $1/2$ de la respuesta estas si lo son, lo cual es un fuerte indicio de la presencia de una grieta en el rotor. Por otro lado, el incremento en $1/2$ y $1/3$ de la respuesta crítica comparada con la respuesta $1X$ es mucho mayor, y en particular la $1/2$ respuesta crítica incrementa mucho más cuando hay grietas en el rotor. Se concluyó que la presencia de una grieta en el rotor modifica su respuesta dinámica, lo cual puede usarse para predecir y monitorear un equipo rotatorio. Asimismo, se observó que las amplitudes en el primer pico, correspondiente al de la resonancia, son mayores cuando la grieta y la posición angular del desbalance están en fase, mientras que las amplitudes menores se presentan a 180° , por otra parte, la amplitud de los picos correspondientes a $1/2$ y $1/3$ de la velocidad crítica (subresonancias) se mantiene constante sin importar la posición angular del desbalance respecto a la posición de la grieta.

Con la finalidad de encontrar parámetros útiles para la detección temprana de grietas, Goldman *et al.* [22] realizaron un estudio experimental para determinar la respuesta torsional y lateral de un rotor agrietado. Para ello se aplicaron distintos tipos de excitación al sistema rotodinámico. Los resultados experimentales mostraron que debido a las altas amplitudes laterales y torsionales y a la inestabilidad del sistema, las frecuencias de resonancia no son muy sensibles a la presencia de una grieta, debido a las no-linealidades presentes en el sistema. De acuerdo con este autor, la rigidez dinámica permite identificar la rigidez torsional y lateral, lo cual exhibe una mayor sensibilidad a la presencia de una grieta. Los resultados mostraron que los modos de vibración también se ven afectados debido a la presencia de una grieta.

Por otro lado, Sekhar [23] con base en la investigación previamente presentada por Sekhar y Prabhu [21], utilizó la transformada de Wavelet continua (CWT, por sus siglas en inglés) para detectar grietas transversales en un sistema rotodinámico el cual pasa a través de su primera velocidad crítica. Se encontró que a $1/3$ de la velocidad crítica de la resonancia es un mejor indicador para identificar una grieta en comparación a $1/2$ de la velocidad crítica de resonancia, causada por la asimetría del rotor o incluso los soportes. La CWT mostró ser una poderosa herramienta para el monitoreo de un rotor con grieta que pasa por su velocidad crítica en comparación con el monitoreo de la respuesta transitoria de la vibración del mismo, particularmente para aceleraciones (rampas de excitación) mayores.

Sekhar [24] propuso una metodología para la detección de grietas en un rotor considerando múltiples grados de libertad en el sistema el cual pasa a través de su primera velocidad crítica.

Para este fin empleó la metodología del elemento finito, considerándose a la grieta como un cambio en la rigidez local del elemento agrietado. La metodología se basó en la idea de que las fallas en el sistema son representadas por cargas virtuales o equivalentes en el modelo tal cual (sin grieta). Las cargas son momentos y fuerzas ficticias calculadas mediante expansión modal, los cuales permiten generar el mismo comportamiento dinámico que en el sistema real con grieta. Cada falla en el sistema se representó por un modelo matemático que describe la relación entre las cargas equivalentes y parámetros de falla, en este caso, un vector que contiene la localización y profundidad de la grieta. El método demostró ser eficiente para la detección de grietas en distintas localizaciones del elemento y diferentes aceleraciones angulares del rotor. Se concluyó que la efectividad del método de identificación aumenta cuando se considera un mayor número de grados de libertad en el sistema. De igual forma se utilizó la técnica de Transformada de Wavelet para extraer características subarmónicas de la grieta en el dominio del tiempo.

Por otra parte, Sinou [25] investigó el uso de las componentes Superarmónicas $2X$ y $3X$ como parámetros para detectar la presencia de una grieta en un sistema rotodinámico. Para ello utilizó un modelo de un rotor con un disco en el centro (Jeffcott), considerando una viga Timoshenko. El modelo matemático se desarrolló considerando una reducción en el segundo momento de área en la localización de la grieta. La grieta se modeló de acuerdo con el mecanismo de respiro, donde la matriz de rigidez del eje en la localización de la grieta es no-lineal y periódica, la cual varía con el tiempo durante la rotación del sistema. De acuerdo con las simulaciones numéricas, se concluyó que la evolución de las componentes $2X$ y $3X$ en la región de la velocidad subcrítica pueden ser usadas como un indicio para detectar la presencia de una grieta en el rotor. También se observó un decremento en las velocidades críticas del sistema debido a la reducción de rigidez como resultado de la presencia de grieta. Asimismo, también se estudió la relación de la orientación de la grieta y el desbalance en el sistema. Se observó que la interacción del ángulo de orientación entre el desbalance y la grieta afectan drásticamente la evolución de la frecuencia de la segunda superarmónica a $1/2$ de la resonancia subcrítica. También se observó que, debido a la interacción entre la grieta con el desbalance, este puede “enmascarar” la presencia de una grieta en el rotor. Se demostró que, para una profundidad dada de la grieta, la fase del desbalance no solamente afecta a la amplitud de vibración de la componente $1X$, sino también a los picos de resonancias subcríticas. Todos estos resultados mostraron que la detección de una grieta puede dificultarse debido a su interacción con los efectos del desbalance. Sin embargo, incluso si la orientación de la grieta con el desbalance y la magnitud de este último son desconocidas, la componente $2X$ y $3X$ pueden ser usadas para detectar la presencia de una grieta en el rotor.

Estrada [26] realizó un estudio numérico para determinar la respuesta de un rotor con fractura con el fin de identificar características propias de la vibración que permitieran la detección y el monitoreo de fracturas en estado incipiente. Para ello, propuso dos métodos: el primero consistió en realizar una resta de los espectrogramas de las transformadas de Wavelet de Gabor del rotor con y sin fractura. Su propósito fue obtener la aportación de la fractura al sistema; el segundo método consistió en obtener la respuesta del rotor en el tiempo con y sin presencia de fractura implementando rampas de aceleración de tipo lineal y aplicando la

transformada de Wavelet de Gabor a estas respuestas. Concluyó que la fractura en un rotor afecta a la componente armónica 2X, lo cual permite detectar fracturas en estado incipiente, en vibración con predominancia del primer modo de vibración. Por otro lado, en fracturas incipientes, éstas afectan de forma similar a las componentes 1X y 2X, aumentando la componente 2X a medida que se incrementa la profundidad de la fractura en el sistema.

Iman *et al.* [27], propusieron una nueva tecnología para la detección de grietas y el monitoreo en línea de máquinas rotatorias. Una de las ventajas de ésta, es que es aplicable a cualquier máquina rotatoria que esté sometida a cargas de flexión. Estas incluyen turbinas, generadores, bombas, motores, etc. La idea básica es que, a través del modelado de la máquina, los síntomas atribuibles a la presencia de una grieta pueden ser determinados en términos de las características de las señales vibratorias del rotor. Estas posteriormente son usadas para diagnosticar a la máquina. La información de la amplitud y fase de las armónicas de la vibración 1X, 2X y 3X fueron utilizadas en la plataforma computacional, debido a la relación de éstas con la presencia de una grieta en el rotor. El modelado del sistema rotatorio se realizó utilizando el método del elemento finito, utilizándose elementos tipo viga 3D para las secciones no agrietadas del rotor, mientras que se desarrolló un nuevo elemento 3D para el elemento que contiene la grieta en el cual la profundidad y localización de la grieta puede variarse. Mediante la aplicación de cargas en forma de fuerzas transversales o momentos flectores, las deflexiones del modelo propuesto agrietado fueron comparadas contra las del no agrietado, obteniéndose así el efecto de la grieta. Otra de las ventajas del modelo propuesto, es que el elemento 3D agrietado es aplicable a los dos comportamientos de la grieta, ya sea que ésta permanece abierta todo el tiempo, o bien exhibe un comportamiento de respiro. A partir de lo anterior, se desarrolló una técnica llamada histograma, la cual utiliza la información de las armónicas antes mencionadas. El primer paso antes de la aplicación de esta metodología consiste en la suma sincrónica de diversos datos de la vibración tal cual, recolectados de la máquina, de esta forma es posible descontar todo lo atribuible al ruido y otros fenómenos presentes en el sistema, así como las demás armónicas ya existentes. A continuación, se aplica la metodología como tal, para ello, (i) se obtienen los datos de vibración del sistema en el dominio del tiempo utilizando la señal 1X del rotor en condiciones cuando el rotor no está agrietado, ésta se toma como la información base del sistema; (ii) Se monitorea la máquina, adquiriéndose datos del sistema continuamente; (iii) se sustraen los datos de (i) y (ii) en el dominio del tiempo y se utiliza la transformada rápida de Fourier para obtener la diferencia de éstos, lo obtenido de lo anterior se conoce como armónicas del histograma. Las armónicas resultantes aplicando el histograma son consideradas atribuibles a la presencia de una grieta, en el caso de una grieta presente, estas armónicas cambian continuamente a medida que la grieta se propaga. El principal logro de esta técnica, es que permitió detectar grietas en etapa incipiente, del orden de 1-2% de profundidad en relación con el diámetro del eje. Por otro lado, las grietas cercanas a los rodamientos no fueron capaces de detectarse, debido a que en estas localizaciones el efecto del momento flexionante es mínimo. Debido a que las grietas localizadas cerca de los rodamientos producen una baja respuesta que las localizadas cercanas a los discos. También es de interés mencionar que, cuando una grieta se encuentra cercana a los rodamientos o es superficial, el efecto de la asimetría predomina al efecto de la flexibilidad, y el cambio en la armónica 2x es

proporcionalmente mayor; mientras que cuando una grieta se encuentra cerca del centro del rotor, el efecto de la flexibilidad predomina ante el de la asimetría, en cuyo caso la armónica 1X es predominante a la 2X. La presente metodología fue validada con dos equipos de laboratorio, pudiéndose identificar grietas alrededor del 1 y 2% de profundidad y comprobando por pruebas de ultrasonido y tinte penetrante. De acuerdo con Iman *et al.*, una de las principales desventajas de la aplicación de esta técnica, es que existen otras anomalías en la maquinaria rotatoria que pueden hacer presentes las armónicas de la vibración utilizadas como base de este método.

La presencia de una grieta transversal en una máquina rotatoria tiende a cambiar la dinámica del sistema, de acuerdo con lo reportado en la literatura y experiencia en el campo, se sabe que una grieta transversal presente en el sistema hace presentes las armónicas 1X, 2X y 3X [28]. De acuerdo con esto, Pennacchi, Bachschmid y Vania [29] propusieron una metodología basada en un modelo para la detección de la profundidad y posición de una grieta transversal presente en una máquina rotatoria la cual puede ser aplicada a maquinaria industrial. El comportamiento estático y dinámico del sistema fue simulando en el dominio de la frecuencia utilizando un modelo en elemento finito al cual se le aplicaron distintas cargas correspondientes a un elemento agrietado, una para cada componente armónica (1X, 2X y 3X). La determinación de la profundidad de la grieta se llevó a cabo mediante la implementación de diagramas de momento flexionante vs profundidad, los cuales están en función del porcentaje de la profundidad de la grieta respecto a los momentos flexionantes, ya que existe una relación entre la flexión y la profundidad de la grieta. Estos momentos flexionantes incluyen el momento obtenido experimentalmente del rotor respecto al ya conocido del rotor sin grieta. Estas relaciones profundidad-momento flexionante se establecieron para cada una de las armónicas ya mencionadas. Por otro lado, la localización del elemento agrietado fue calculada mediante un sistema de ecuaciones complejas en función de la longitud equivalente del elemento, el diámetro del eje y la carga en el rotor, la cual a su vez está en función de la profundidad de la grieta. Estas a su vez están en función del tipo de componente armónica utilizada en el análisis. La validación del modelo propuesto se realizó en un equipo experimental el cual simula el comportamiento real de una máquina rotatoria, cuyo comportamiento se puede asemejar bastante al de una turbomáquina. Las pruebas se realizaron para tres casos de profundidad de la grieta. El primero de ellos fue una grieta generada mediante electroerosión, la cual corresponde a una profundidad del 34 %. Debido al método utilizado para la inducción de la grieta, esta no exhibe un comportamiento de respiro, por lo cual el efecto sobre las armónicas se presenta principalmente en la componente 2X, ello debido a la asimetría que genera en el rotor; posteriormente el momento equivalente de acuerdo a esta componente fue determinado y comparándolo con el estático y utilizando los diagramas propuestos para la componente, fue posible identificar una grieta del 32% mientras que la posición fue determinada con un error del 2.1 %. La segunda prueba se realizó a una grieta generada por fatiga con el 14% de profundidad; a causa del fenómeno de respiro, la grieta generó armónicas 1X, 2X y 3X. Sin embargo, debido al desbalance presente en el sistema, al poco arqueado y el ruido generado por factores externos, las componentes 1X y 3X fueron descartadas para el análisis, por lo cual se hizo únicamente uso de la 2X, y aplicando la misma metodología fue posible identificar la profundidad de 15.6%.

La última prueba fue realizada en un eje con una grieta con profundidad de 47 % respecto al diámetro. En este caso las tres componentes fueron utilizadas en el análisis, obteniéndose un error del 1.7% respecto a la componente 1X y se logró identificar una profundidad del 30% mediante la utilización de la 3X. De acuerdo con estos autores, los síntomas de una grieta son bien conocidos, la presencia o cambio en las armónicas 1X, 2X y 3X. Sin embargo, existe una amplia diversidad de fenómenos que también pueden influenciar la aparición de las mismas, como son: el desbalance, desalineamiento, arqueo del eje, rigidez asimétrica, errores geométricos, no linealidades en los rodamientos etc.; lo cual sería una desventaja del método propuesto. Otra desventaja del método propuesto es que se requiere conocer el tipo de armónica que genera la grieta ya que de esto depende el análisis a realizar para conocer la profundidad y localización, además de que es necesario conocer parámetros base de momentos flexionantes en la máquina.

Zhongyi [3] investigó el fenómeno de respiro en un eje circular elástico con una grieta transversal utilizando tres métodos experimentales para su inducción. En su estudio se utilizó un eje de acero AISI 1030 con una longitud de 542 mm y diámetro de 15.875 mm. El primer espécimen experimental fue realizado utilizando una máquina Instron 8501 con el fin de aplicar cargas cíclicas sobre la sección transversal del eje para generar una grieta por fatiga localizada en el centro del eje, el rango de estas cargas aplicadas fue variado desde los 5 kN hasta 1 kN hasta alcanzar una profundidad del 40% de profundidad de la grieta. El segundo espécimen se realizó cortando dos piezas de un eje circular con las mismas dimensiones ya mencionadas, posteriormente éstas se unieron nuevamente mediante soldadura. El tercer y último espécimen se realizó utilizando una máquina de corte de alambre capaz de generar una grieta con un espesor de 0.15 mm. Se realizaron pruebas de carga con una máquina universal Instron 5569 con el fin de obtener los desplazamientos resultantes para cada uno de los especímenes y también para un eje intacto de las mismas dimensiones considerando distintos ángulos de rotación. A partir de los valores de carga aplicados y los desplazamientos registrados, fue posible calcular la rigidez para cada ángulo de rotación de cada uno de los especímenes. De los resultados obtenidos, se observó que, para el eje intacto, la rigidez permanece totalmente independiente del ángulo de rotación, es decir, que ésta se mantiene prácticamente constante; por otro lado, para un eje con una grieta generada por fatiga exhibe el típico comportamiento de respiro. El espécimen con grieta generado por soldadura mostró también un comportamiento similar al de la grieta generada por fatiga, sin embargo, se observó un mayor decremento en la rigidez en la zona donde la grieta permanece cerrada, lo cual se puede atribuir a cambios en las propiedades del material durante el proceso de soldadura. Para el caso del espécimen con grieta generada por corte de alambre se observó que el comportamiento es totalmente diferente al observado en el eje con grieta generada por fatiga, lo cual se debe a que este no llega a cerrar durante toda la rotación del eje. A partir de los resultados obtenidos, se concluyó que, para el caso de una grieta generada por fatiga, la grieta permanece en su mayoría parcialmente abierta durante la rotación del eje, esta únicamente permanece abierta desde 348.5° hasta 11.5°, mientras que permanece totalmente cerrada en el rango 152.1° a 207.9°.

Popaleny y Péton [30] diagnosticaron una turbina de gas con una grieta en el rotor a través de mediciones de la vibración. En su estudio se enfatizó la dificultad de diagnosticar una grieta debido a que este fenómeno puede ser enmascarado por otros, tales como desbalance, desalineamiento, holgura de los rodamientos o *soft foot*. Este último fenómeno se refiere a un incorrecto contacto entre la placa utilizada como base o apoyo y la carcasa de la máquina. Debido a las altas amplitudes de vibración, primero se procedió a balancear la turbina de gas, para que ésta fuera capaz de pasar su primera velocidad crítica. Posteriormente, la máquina fue alineada, con el fin de descartar este fenómeno como el causante de la respuesta de la máquina. Con el fin de verificar la holgura en los rodamientos, éstos fueron inspeccionados revisándose los claros radiales de los mismos y también se revisó el correcto contacto de todos los soportes. Se observaron diversos síntomas atribuibles a la presencia de una grieta, tales como, cambios unidireccionales el arqueado de la sección transversal; decremento en la rigidez modal del sistema, el cual se observó en el decremento de la frecuencia de la resonancia; decremento del amortiguamiento efectivo del sistema y una división de la frecuencia de resonancia durante el apagado de la máquina el cual no se presentó durante el arranque, lo cual es indicio de la propagación de una grieta. De acuerdo con estos síntomas, se inspeccionó la turbina encontrándose una grieta de 18 mm de profundidad cerca de las uniones del rodamiento número dos; asimismo la ausencia de la componente $2x$ puede atribuirse a la escasez de una precarga radial en el sistema que permita a la grieta abrir, ocasionado por estar cerca del segundo rodamiento.

2.2 Métodos de identificación de parámetros

De acuerdo con Arias-Montiel *et al.* [31] los modelos dinámicos y simulaciones numéricas son herramientas muy importantes para el diseño y análisis de máquinas rotatorias. Para tal caso es necesario obtener modelos que representen el comportamiento real del sistema con bastante precisión. La exactitud de un modelo se determina mediante la comparación de la respuesta del modelo y el sistema real.

Beltrán-Carbajal *et al.* [32] mencionan que los métodos de identificación proveen las herramientas analíticas, algoritmos, programas computacionales e implementación en tiempo real para obtener buenas aproximaciones a un modelo adecuado para análisis y propósitos de control. Actualmente existe una vasta literatura de metodologías de identificación y estimación de parámetros los cuales son esencialmente asintóticos, recursivos o complejos que llevan a implementaciones poco realistas. Dentro de éstos se encuentran los reportados por Ljung [33], Soderstrom y Stoica [34], Sagara y Zhao [35] y Sagara y Zhao [36].

El objetivo de los métodos presentados en la sección anterior es identificar una grieta en un rotor. Para ese fin es necesario conocer dos variables, localización y profundidad de la grieta. Actualmente existen diversos métodos de identificación de parámetros que han sido aplicados en otras áreas. Sin embargo, existe otro método que ofrece notables ventajas con respecto a los demás.

Fliess y Sira-Ramírez [37] propusieron una metodología de identificación de parámetros en línea, que ofrece un enfoque diferente a los métodos tradicionales. Esta técnica se conoce como método de identificación algebraica y se basa en la teoría de módulos, el álgebra diferencial y el cálculo operacional. La ventaja de esta técnica es que requiere únicamente del modelo matemático del sistema y con él se desarrollan estimadores en línea, que permiten conocer parámetros desconocidos del sistema. Otra ventaja de esta técnica es que muestra buenas propiedades de robustez con respecto a una gran variedad de perturbaciones y se caracteriza por proporcionar relaciones de identificación completamente independientes de las condiciones iniciales del sistema.

Beltrán-Carbajal *et al.* [32] hicieron uso de esta técnica para estimar la frecuencia y amplitud de vibraciones exógenas, que afectan a un sistema mecánico, utilizando únicamente mediciones de su posición. Beltrán-Carbajal y Arias-Montiel [38] utilizaron esta técnica para estimar masa, rigidez, amortiguamiento y excentricidad con el fin de conocer las fuerzas centrífugas inducidas por el desbalance en un rotor en línea. Por otro lado, Arias-Montiel *et al.* [31] hicieron uso de la misma técnica para determinar excentricidades en los discos en un sistema rotor-cojinete utilizando el método de elemento finito. El método propuesto requirió únicamente de los desplazamientos laterales del eje en la localización de los discos.

La principal causa de la vibración de una máquina rotatoria es el desbalance. Cuyo fenómeno ocurre cuando el centro geométrico del sistema no coincide con el inercial del mismo. Actualmente existe una amplia gama de métodos de balanceo, los cuales pueden clasificarse en pasivos, activos y semiactivos. La principal desventaja de los métodos pasivos es que son bastante complicados de aplicar y se requiere realizar distintas corridas para conocer la magnitud y posición angular del desbalance. La tarea de balanceo se complica cuando se requiere balancear a la máquina hasta su velocidad nominal de operación, ya que actualmente existe maquinaria que opera por arriba de los 100,000 rpm, lo que implica que el rotor pase por varios modos de vibración. Sabiendo que el desbalance es un parámetro más en un sistema rotodinámico, Mendoza-Larios [39] propuso un identificador algebraico en línea de parámetros de desbalance (magnitud y posición angular) en un sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad a velocidad angular constante y variable. El modelado del sistema se realizó a través del método del elemento finito, y a partir de este modelo aplicó la técnica de identificación algebraica. La plataforma computacional fue validada de forma experimental en un rotor de laboratorio, la cual mostró buenos resultados. La principal ventaja del método propuesto es que la identificación del desbalance se puede realizar a cualquier velocidad de operación del rotor, y cuando se utilizan rampas no importa la aceleración angular del rotor. Otra de las ventajas del método, a diferencia de los métodos convencionales, es que no es necesario realizar muchas corridas de pruebas para poder determinar el desbalance.

Por su parte Nango [40] propuso un identificador algebraico en línea para la estimación de parámetros de desbalance para el balanceo de un rotor asimétrico considerando rampas de excitación de tipo lineal. Para ello realizó un modelo con base en el método del elemento finito, considerando un elemento tipo viga con cuatro grados de libertad por nodo. En su estudio identificó parámetros propios del desbalance: magnitud de masa de desbalance y posición angular. Los identificadores propuestos requirieron únicamente de la respuesta vibratoria del sistema y el tipo de rampa de excitación. Los resultados numéricos mostraron

la rapidez y convergencia en la identificación de los parámetros. La identificación se realizó en fracciones de segundo, sin importar la aceleración en la rampa de excitación usada.

El avance en las máquinas rotatorias ha sido evidente con el paso de los años, no solo en la mejora de los materiales con las cuales están construidas sino también en sus componentes. Los rodamientos utilizados en la maquinaria rotatoria se ven sometidos a desgaste debido a la fricción a causa de las altas velocidades de operación. Las chumaceras presurizadas son una tecnología en rodamientos bastante novedosa, su principal ventaja es que no presentan desgaste, ya que no existe contacto directo entre el muñón y la superficie interna del cojinete y pueden operar a velocidades más altas debido a la película de fluido dentro de la misma. Sin embargo, la determinación de los coeficientes de las mismas no es una tarea nada sencilla, ya que éstos dependen directamente de la velocidad y la determinación mediante ecuaciones es bastante complicada. Sabiendo esto, Landa-Damas [41] propuso un identificador algebraico para determinar los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada en un rotor experimental tipo Jeffcott de dos grados de libertad. Para ello propuso un identificador algebraico de estos coeficientes. En su estudio reportó buenos resultados con la utilización de esta metodología, concluyéndose que esta técnica ofrece notables ventajas en la determinación de parámetros desconocidos de un sistema respecto a los métodos convencionales, además de que el tiempo de identificación fue menor a 1 segundo.

2.3 Conclusiones del estado del arte

De acuerdo con lo anterior, es notable que la dinámica de un rotor agrietado es bastante compleja. Con el fin de poder conocer características propias de un rotor agrietado, se han propuesto diversos modelos matemáticos con el fin de poder conocer mejor la dinámica de la maquinaria rotatoria con una o más grietas en la sección transversal del rotor. La principal característica de un rotor agrietado es que éste sufre una pérdida de rigidez a causa de la apertura y cierre de la grieta, fenómeno que se conoce como mecanismo de respiro. El modelo armónico y el modelo que implementa una función de permutación son ejemplos de estos mecanismos de respiro, la principal diferente entre ellos es que el primero considera una apertura y cierre gradual de la grieta en función del ángulo de rotación, mientras que la función de permutación considera únicamente la apertura y cierre de la grieta de forma abrupta.

Debido a la amplia aplicación de la maquinaria rotatoria, se ha hecho indispensable que opere a velocidades cada vez más altas y que prácticamente nunca cese su operación, a excepción por paros técnicos programados anticipadamente los cuales ocurren en ocasiones una o dos veces cada año. Como consecuencia de esto, ha sido necesario desarrollar metodologías que permitan monitorear a la máquina mientras está en funcionamiento. Por otro lado, determinar fallas en un componente rotatorio es algo muy complicado, debido a todos los fenómenos que pueden estar afectándolo al mismo tiempo.

De acuerdo con la literatura, actualmente existen pocas metodologías de detección de grietas en maquinaria rotatoria. Sin embargo, éstas a su vez presentan ciertos inconvenientes, en primer lugar, por su complejidad y en segundo lugar por los parámetros con los cuales

funcionan para de alguna forma relacionarlos con la presencia de una grieta. Del estado del arte, se observó que una alternativa viable para la detección de grietas *in situ* es la técnica de identificación algebraica y que ya se ha implementado en el campo de la rotodinámica para la determinación o identificación de parámetros desconocidos. Dentro de las ventajas de esta técnica, es que la identificación se puede realizar en línea en cualquier velocidad de operación del sistema, además de que ofrece buenas propiedades de robustez frente a una gran variedad de perturbaciones que pueden estar afectando al sistema. Para la aplicación de este método se requiere del modelo matemático del sistema, a partir del cual se desarrolla un estimador en línea de uno o más parámetros que se deseen identificar.

Como se mencionó anteriormente, la mayor parte de metodologías para la detección de grietas en línea de sistemas rotodinámicos se basan en el monitoreo de la respuesta de vibración del equipo. A partir de los cambios en la respuesta, es que se puede concluir que fuentes de excitación pueden estar afectando al sistema. Como se mencionó anteriormente, la identificación algebraica es un método que permite estimar parámetros desconocidos de un sistema a partir de su modelo matemático. La principal importancia de este trabajo, es que se aborda la problemática del monitoreo y detección de grietas en un sistema rotor-cojinete desde un punto de vista totalmente diferente, es decir, empleando la técnica de identificación algebraica.

3.1 Descripción del modelo matemático del rotor agrietado

El modelado de un rotor agrietado puede ser dividido en dos partes fundamentales: la obtención del modelo de respiro de la grieta, así como la obtención del modelo matemático del rotor. Actualmente existen dos enfoques para el modelado de una grieta transversal en un eje rotatorio, *switching function* o función de conmutación y *breathing function* o función de respiro. La función de conmutación considera que la grieta transversal pasa de un estado de abierta a cerrada de forma directa, es decir, se asume que la rigidez del sistema se resta o se considera sin cambio. Por otro lado, la función de respiro proporciona una variación de la rigidez del sistema la cual considera tres estados de la grieta: abierta, parcialmente abierta y cerrada, en el caso de abierta la pérdida de rigidez es máxima, mientras que al empezar a cerrar la pérdida de rigidez disminuye en función del ángulo de rotación hasta llegar a un estado de totalmente cerrada, donde la rigidez se considera sin cambio, es decir como si el rotor no estuviera agrietado. A continuación, se presenta una breve explicación sobre la obtención de la matriz de rigidez de un rotor Jeffcott agrietado, así como el modelado de un rotor Jeffcott agrietado de dos grados de libertad.

3.1.1 Matriz de rigidez del rotor agrietado: modelo de bisagra

La flexibilidad en un eje rotatorio está dada de acuerdo a su configuración y características. Sin embargo, la presencia de una grieta transversal modifica esta condición, lo cual deriva que una flexibilidad local se adicione a la flexibilidad ya dada por el propio sistema. Este comportamiento puede ser aproximado mediante un modelo de bisagra el cual fue propuesto por Gasch [11]. Al fenómeno que se presenta por la apertura y cierre de una grieta a consecuencia de la rotación del rotor se le conoce como respiro de la grieta, esto a causa de que el eje del rotor es sometido a esfuerzos de tensión y compresión por el propio peso del rotor cuando éste está en rotación. La adición de la flexibilidad del sistema a causa del respiro de la grieta se representa en la figura 3.1.

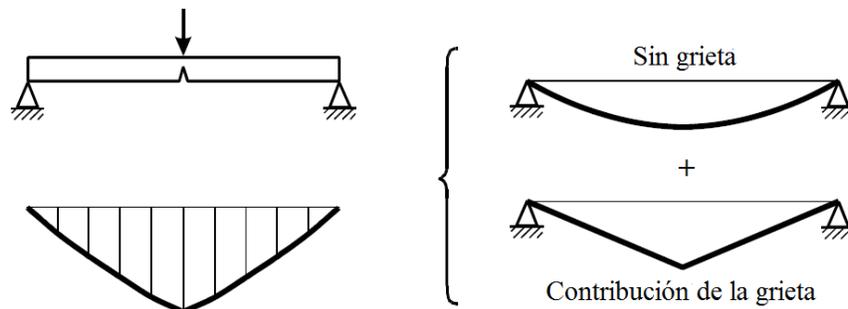


Figura 3.1 Flexibilidad de un rotor agrietado Bachschmid *et al.* [4].

El efecto de una grieta transversal sobre un eje en rotación se puede modelar considerando una matriz de flexibilidad local añadida sobre el elemento agrietado, dando como resultado una pérdida de rigidez que es función del tiempo y se debe al comportamiento dinámico de la grieta bajo la acción del peso del rotor.

Usualmente el cambio en la flexibilidad del rotor se presenta únicamente en la dirección vertical, esto a causa del peso del rotor, ya que de acuerdo con la literatura para el caso de grietas poco profundas la flexibilidad en la dirección horizontal se considera despreciable. Tomando en cuenta el sistema de referencia propuesto por Bachschmid *et al.* [4], figura 3.2, este fenómeno puede ser expresado matemáticamente a través de la ecuación (3.1). En la figura 3.2 se presenta el sistema de referencia, donde los ejes y y x corresponden al sistema de coordenadas fijo, mientras que los ejes ξ y η corresponde al sistema de coordenadas rotatorio.

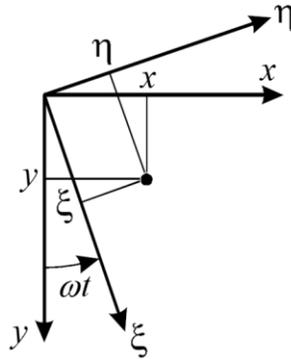


Figura 3.2 Sistema de referencia rotatorio y no rotatorio del rotor, Bachschmid *et al.* [4].

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 + \Delta h_\xi & 0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

En la ecuación (3.1) h_0 representa el parámetro de la flexibilidad del sistema sin considerar el efecto de la grieta, mientras que Δh_ξ corresponde al cambio de flexibilidad local en la dirección ξ cuando éste coincide con la línea de acción del peso del rotor, generando en ese instante la apertura de la grieta. Como se mencionó anteriormente, los cambios de flexibilidad es función del peso del rotor cuando éste se encuentra en rotación. De tal forma, que la ecuación (3.1) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} h_0 & 0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix} + \psi(t) \begin{bmatrix} \Delta h_\xi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Donde $\psi(t)$ es una función de conmutación en el tiempo que gobierna la apertura y cierre de la grieta, y que es función del ángulo de rotación del rotor:

- $\psi(t) = 0$, cuando la grieta se encuentra en la zona de compresión.
- $\psi(t) = 1$, cuando la grieta se encuentra en la zona de tensión.

Por otra parte, la ecuación (3.2) se puede expresar en términos de rigidez, para lo anterior, se requiere de la inversa de la matriz de flexibilidad, dando como resultado:

$$\begin{bmatrix} h_o + \psi(t)\Delta h_\xi & 0 \\ 0 & h_o \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{h_o (h_o + \psi(t)\Delta h_\xi)} \begin{bmatrix} h_o & 0 \\ 0 & h_o + \psi(t)\Delta h_\xi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Considerando el modelo de bisagra, y tomando en cuenta que $\psi(t) = 0$ ó $\psi(t) = 1$ dependiendo de la ubicación de la grieta, la ecuación (3.3) puede expresarse como:

$$\frac{1}{h_o (h_o + \psi(t)\Delta h_\xi)} \begin{bmatrix} h_o & 0 \\ 0 & h_o + \psi(t)\Delta h_\xi \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{1}{h_o} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_o} \end{bmatrix}, \psi(t) = 0 \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{h_o + \Delta h_\xi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_o} \end{bmatrix}, \psi(t) = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

De la ecuación (3.4) $\frac{1}{h_o}$ corresponde a la rigidez del rotor sin grieta y se puede representar como:

$$k_0 = \frac{1}{h_o}$$

Mientras que $\frac{1}{h_o + \Delta h_\xi}$ denota la pérdida de rigidez en el sistema en la dirección ξ y también se puede expresar como:

$$\frac{1}{h_o + \Delta h_\xi} = k_0 - \Delta k_\xi$$

Por lo que ahora, la ecuación (3.2) en función de la rigidez del sistema se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} - \psi(t) \begin{bmatrix} \Delta k_\xi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Donde Δk_ξ representa la pérdida de rigidez del sistema en la dirección vertical debido a la apertura de la grieta, y k_0 es la rigidez del rotor sin grieta. De acuerdo con Sawicki *et al.* [42], el cambio en la rigidez Δk_ξ es constante para grietas poco profundas con $h/R < 0.5$ (menor al 50% de profundidad respecto al radio del eje) un cambio de la rigidez en la dirección horizontal es pequeña en comparación con la vertical y a menudo se asume como cero.

De acuerdo con la figura 3.2, la transformación del sistema de coordenadas rotatorio al sistema de coordenadas fijo se obtiene a partir de la siguiente relación:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ -\text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Utilizando la matriz de transformación (3.6), la ecuación (3.5) referenciada al sistema de coordenadas fijo se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \psi(t) \Delta k_\xi \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\omega t) & \text{sen}(2\omega t) \\ \text{sen}(2\omega t) & 1 - \cos(2\omega t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Donde la ecuación (3.7) también puede expresarse como:

$$[K] = [K(y, t)] = [K_0] + [\Delta K(y, t)] \quad (3.8)$$

La matriz $[K]$ depende tanto del desplazamiento en y inicial del rotor y del desplazamiento en el tiempo, es decir, la respuesta vibratoria. De acuerdo con Bachschmid *et al.* [4] el término Δk_ξ se puede determinar de forma experimental si se conocen las frecuencias naturales ω_0 y ω_ξ que denotan las frecuencias naturales del rotor cuando la grieta está cerrada (sin grieta) y abierta respectivamente. En la figura 3.3 se muestra un esquema del procedimiento para determinar las frecuencias naturales del rotor. Conocidos ω_0 y ω_ξ el término Δk_ξ se puede calcular a partir de la siguiente relación:

$$k_p = 1 - \frac{\Delta k_\xi}{k_0} \quad (3.9)$$

Donde $k_p = \left(\frac{\omega_\xi}{\omega_0}\right)^2$ denota el parámetro de profundidad adimensional de la grieta. Despejando Δk_ξ de la ecuación (3.9) se obtiene:

$$\Delta k_\xi = (1 - k_p) k_0 \quad (3.10)$$

Donde el término Δk_ξ representa la pérdida de rigidez experimentada por el rotor a causa del respiro de la grieta, aquí $\varepsilon = (1 - k_p)$ representa el factor de pérdida de rigidez, el cual multiplicado por k_0 proporciona la pérdida o cambio de rigidez a causa de la grieta transversal. El parámetro adimensional k_p es utilizado posteriormente como parámetro adimensional de la grieta normalizada a identificarse.

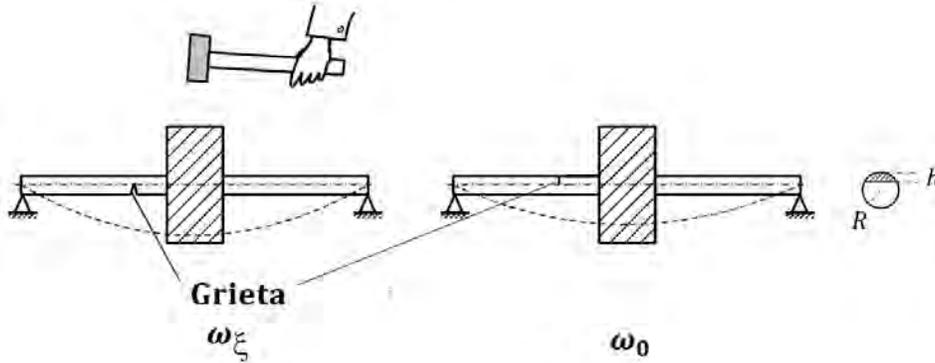


Figura 3.3 Determinación experimental del parámetro de profundidad de la grieta normalizada, (modificado de [4]).

De acuerdo con Bachschmid *et al.* [4], para el caso de grietas poco profundas $h/R < 0.5$, donde h denota la profundidad de la grieta y R el radio de la flecha, se sabe que la grieta abre y cierra de forma abrupta cuando pasa los 90° y 270° , lo que hace que la flecha pase de un estado de tensión a un estado de compresión. Por otro lado, en el caso de grietas con mayor profundidad, hay una transición más suave en el comportamiento respiratorio, estado del rotor que puede ser representado por la función modificada de Mayes y Davies [7]. Sin embargo, ambos casos solo consideran el estado de la grieta de abierta o cerrada. En la figura 3.4 se muestra el comportamiento de los dos modelos matemáticos que representan la apertura y cierre de la grieta.

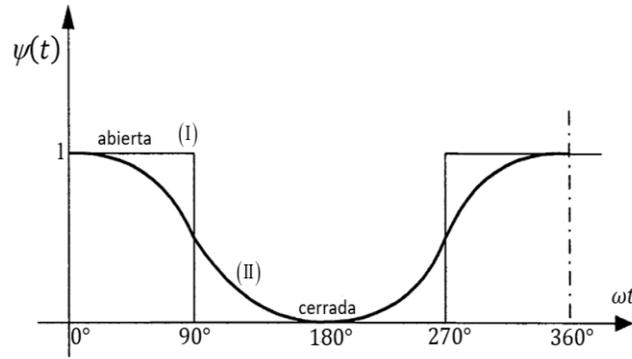


Figura 3.4 Función de apertura y cierre de la grieta debido al peso del rotor, (I) modelo de bisagra propuesto por Gasch [11], (II) función modificada de Mayes y Davies [7].

Matemáticamente, la función escalón (I) que describe el comportamiento respiratorio de la grieta puede expresarse de la siguiente manera:

$$\psi(t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{\pi}\right)\cos(\omega t) - \left(\frac{2}{3\pi}\right)\cos(3\omega t) + \left(\frac{2}{5\pi}\right)\cos(5\omega t) - \dots \quad (3.11)$$

Mientras que la curva (II) correspondiente a la función modificada de Mayes y Davies se puede expresar de la siguiente forma:

$$\psi(t) = \frac{1 + \cos(\omega t)}{2} \quad (3.12)$$

De las ecuaciones (3.11) y (3.12) se puede observar que ambos son modelos matemáticos que están en función de la velocidad de rotación y del giro del rotor, tal y como se muestra en la figura 3.5.

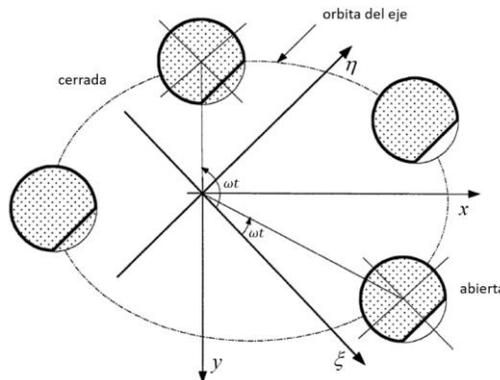


Figura 3.5 Comportamiento respiratorio de la grieta en función de la posición del eje alrededor de su órbita, Sawicki *et al.* [42].

3.1.2 Modelo del rotor Jeffcott agrietado

El modelo de un rotor Jeffcott representa una versión simplificada de rotores más realistas, sin embargo, conserva algunas características básicas que permiten observar diversos fenómenos de importancia. Este consiste en un eje con un disco inercial montado en el centro y soportado por dos rodamientos rígidos en sus extremos. En la figura 3.6 se muestra un esquema de un rotor Jeffcott con una grieta transversal.

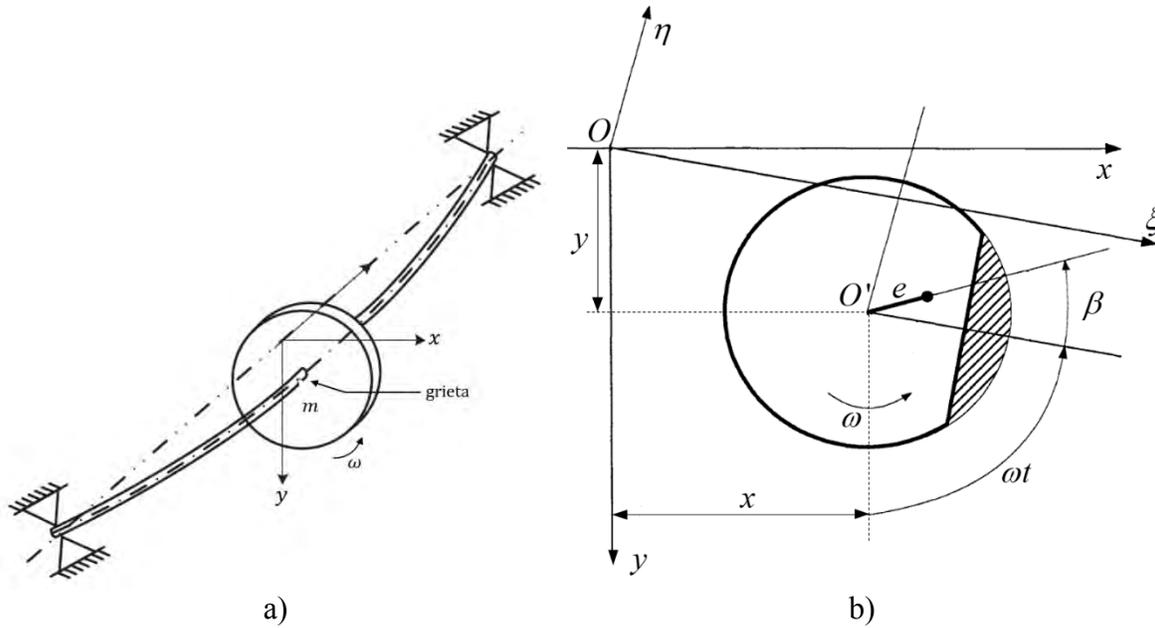


Figura 3.6 a) Esquema de un rotor Jeffcott con una grieta transversal, b) Sección transversal del rotor agrietado (modificado de [42]).

Siguiendo la metodología propuesta por Lalanne y Ferraris [43], el modelo matemático correspondiente a un rotor Jeffcott se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \left(\omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mg \\ 0 \end{Bmatrix} \\ + m_d e \omega^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi l_d}{L_e} \right) \begin{Bmatrix} \cos(\omega t + \beta) \\ \operatorname{sen}(\omega t + \beta) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donde:

- m = masa equivalente del sistema (kg)
- a = efectos giroscópicos del disco
- c = amortiguamiento del sistema (N·s/m)
- k_0 = rigidez del sistema (N/m)

- ω = velocidad angular del rotor (rad/s)
- m_d = masa de desbalance (kg)
- β = posición angular del desbalance (grados)
- e = excentricidad de la masa de desbalance (m)
- g = aceleración gravitacional (m/s^2)

La masa equivalente está dada por la siguiente relación [44]:

$$m = m_{disco} + \frac{1}{2} m_{eje}$$

Asimismo, por simplicidad la rigidez y amortiguamiento del sistema se consideran idénticos para ambas direcciones. Por otra parte, el modelo matemático correspondiente a velocidad angular constante; puede extenderse para el caso donde se utilicen rampas de excitación de tipo lineal (aceleración angular constante), de acuerdo con Sawicki *et al.* [42], éste puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \left(\omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mg \\ 0 \end{Bmatrix} \\ + m_d e \operatorname{sen} \left(\frac{\pi l_d}{L_e} \right) \begin{Bmatrix} \omega^2 \cos(\varphi + \beta) + \alpha \operatorname{sen}(\varphi + \beta) \\ \omega^2 \operatorname{sen}(\varphi + \beta) - \alpha \cos(\varphi + \beta) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Donde el término α representa la aceleración angular del sistema. En este caso el término φ representa la posición angular del rotor y se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$\varphi = \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (3.15)$$

Donde ω_i corresponde a una frecuencia de giro inicial. Asimismo, la rampa de excitación de tipo lineal se puede calcular mediante la siguiente ecuación:

$$\omega = \omega_i + \alpha t \quad (3.16)$$

El término $\text{sen}(\pi l_d/L_e)$ es una función de desplazamiento la cual corresponde exactamente a la primera forma modal de un rotor con sección transversal constante, donde el término l_2 y L_e representan la distancia exacta del soporte a la posición del disco inercial para un rotor Jeffcott y la longitud del rotor respectivamente.

La ecuación (3.13) puede expresarse de la siguiente forma:

$$[M]\ddot{\delta} + [\hat{C}]\dot{\delta} + [K]\delta = W + f_d \quad (3.17)$$

Donde

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$[\hat{C}] = \left(\omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \quad (3.19)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$W = \begin{Bmatrix} mg \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

$$f_d = me\omega^2 \text{sen} \left(\frac{\pi l_d}{L_e} \right) \begin{Bmatrix} \cos(\omega t + \beta) \\ \text{sen}(\omega t + \beta) \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Sustituyendo la ecuación (3.8), la cual representa la matriz de rigidez de un rotor Jeffcott agrietado, la ecuación (3.17) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$[M]\ddot{\delta} + [\hat{C}]\dot{\delta} + ([K_0] + [\Delta K(y,t)])\delta = W + f_d \quad (3.23)$$

Donde el vector de desplazamientos δ está en función de la deflexión estática del rotor (δ_0) y de los desplazamientos del sistema rotatorio ($\delta(t)$):

$$\delta = \delta_0 + \delta(t) = \begin{Bmatrix} y_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \delta(t) = \begin{Bmatrix} mg/k_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \delta(t) \quad (3.24)$$

Tomando en cuenta que $\delta(t)$ es pequeña, es decir $\delta(t) \ll \delta_0$, es decir, la deflexión a causa del peso es predominante y gobierna el comportamiento de respiro de la grieta, debido a que las amplitudes de $\delta(t)$ son pequeñas a las comparadas con δ_0 . Por lo tanto, la ecuación (3.23) puede expresarse de la siguiente forma:

$$[M]\ddot{\delta} + [\widehat{C}]\dot{\delta} + ([K_0] + [\Delta K(y,t)])(\delta_0 + \delta(t)) = W + f_d \quad (3.25)$$

En la ecuación (3.25) $[K_0]\delta_0 = W$, es decir:

$$\begin{Bmatrix} mg \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} mg/k_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.25) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$[M]\ddot{\delta} + [\widehat{C}]\dot{\delta} + ([K_0](\delta_0 + \delta(t)) + [\Delta K(y,t)]\delta(t)) = -[\Delta K(y,t)]\delta_0 + f_d \quad (3.27)$$

Donde el término $[\Delta K(y,t)]\delta(t)$ puede ser despreciado si se garantiza la estabilidad del sistema. Obteniéndose de la siguiente forma el modelo del rotor Jeffcott agrietado a velocidad angular constante:

$$[M]\ddot{\delta} + [\widehat{C}]\dot{\delta} + [K_0]\delta = -[\Delta K(y,t)]\delta_0 + f_d \quad (3.28)$$

La ecuación (3.27) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \left(\omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} \\
 & = \frac{1}{2} \psi(t) \Delta k_{\xi} \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\omega t) & \text{sen}(2\omega t) \\ \text{sen}(2\omega t) & 1 - \cos(2\omega t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + m_d e \omega^2 \text{sen} \left(\frac{\pi l_d}{L_e} \right) \begin{Bmatrix} \cos(\omega t + \beta) \\ \text{sen}(\omega t + \beta) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

De manera similar se obtiene el modelo del rotor Jeffcott agrietado con aceleración constante (ec. 3.14), el cual queda expresado de la siguiente forma:

$$[M] \ddot{\delta} + [C] \dot{\delta} + [K] \delta = W + f_d^* \tag{3.30}$$

Donde

$$f_d^* = m_d e \text{sen} \left(\frac{\pi l_d}{L_e} \right) \begin{Bmatrix} \omega^2 \cos(\varphi + \beta) + \alpha \text{sen}(\varphi + \beta) \\ \omega^2 \text{sen}(\varphi + \beta) - \alpha \cos(\varphi + \beta) \end{Bmatrix} \tag{3.31}$$

Finalmente, al sustituir la ecuación (3.8) en (3.30), el modelo (3.30) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \left(\omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} \\
 & = \frac{1}{2} \psi(t) \Delta k_{\xi} \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\varphi) & \text{sen}(2\varphi) \\ \text{sen}(2\varphi) & 1 - \cos(2\varphi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 & + m_d e \text{sen} \left(\frac{\pi l_d}{L_e} \right) \begin{Bmatrix} \omega^2 \cos(\varphi + \beta) + \alpha \text{sen}(\varphi + \beta) \\ \omega^2 \text{sen}(\varphi + \beta) - \alpha \cos(\varphi + \beta) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

3.2 Solución a la ecuación de movimiento del rotor

El comportamiento de sistemas dinámicos se describe mediante ecuaciones diferenciales de movimientos, sin embargo, la solución de estas ecuaciones no es nada sencilla, por tal motivo se presentan dos métodos para la solución de las ecuaciones de movimiento presentadas en la sección anterior.

3.2.1 Solución en estado estable: Método directo

De acuerdo con Lalanne y Ferraris [43], el método directo es una forma de solucionar las ecuaciones de movimiento y obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia para condiciones de estado estable. Para este fin, las ecuaciones de movimiento del rotor son resueltas considerando una velocidad angular de rotación constante y se resuelve para cada incremento de ω . Las ecuaciones a ser resueltas por este método son las siguientes:

$$[M]\ddot{\delta} + [\hat{C}]\dot{\delta} + [K_0]\delta = f \quad (3.33)$$

Con

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad [\hat{C}] = \left(\omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right), \quad [K_0] = \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} F_y \\ F_x \end{Bmatrix}$$

Donde:

$$F_y = m_d e \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ -\text{sen} \beta \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

$$F_x = m_d e \omega^2 \begin{Bmatrix} \text{sen} \beta \\ \cos \beta \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Con m_d como la masa de desbalance del sistema. Se agrupan en el siguiente arreglo matricial:

$$\begin{bmatrix} [K_0] - \omega^2 [M] & -\omega^2 [\hat{C}] \\ \omega^2 [\hat{C}] & [K_0] - [M] \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_y \\ F_x \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Y el sistema se resuelve para cada intervalo de ω . Posteriormente se soluciona la ecuación (3.36) y se obtiene el vector de desplazamientos u . Por otro lado, las velocidades críticas de un rotor pueden obtenerse a partir del diagrama de Campbell. Este diagrama es una de las herramientas más importantes para comprender el comportamiento dinámico de la

maquinaria rotatoria. Consiste básicamente en un esquema de las frecuencias naturales (velocidades críticas) del sistema en función de la velocidad de rotación del sistema. El diagrama de Campbell puede revelar información importante concerniente a un sistema rotatorio no lineal [45].

Las ecuaciones de un sistema rotor-cojinete amortiguado de dos grados de libertad se expresan como se muestra a continuación [43]:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_0y = 0 \quad (3.37)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_0x = 0 \quad (3.38)$$

La solución al sistema de ecuaciones (3.37) y (3.38), se obtiene a partir de la siguiente ecuación característica [43]:

$$m^2r^4 + m(c_y + c_x)r^3 + (k_y m + k_x m + c_y c_x + \omega^2)r^2 + (k_y c_x + k_x c_y)r + k_y k_x = 0 \quad (3.39)$$

A partir solución de la ecuación (3.39) se obtienen las velocidades críticas (frecuencias naturales) del rotor en función de la velocidad de giro.

3.2.2 Solución en estado transitorio: Método de Newmark

De acuerdo con Bathe [46], los métodos de integración directa tienen la finalidad de solucionar las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico, la principal ventaja de estos métodos es que no se requiere realizar transformaciones de las ecuaciones de movimiento antes de la integración. Parten de la idea de que, en lugar de tratar de satisfacer la ecuación de movimiento para cada tiempo t , lo hacen para cada intervalo de tiempo Δt ; la segunda idea en la cual un método de integración directa está basado es que se asume una variación de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones dentro de cada intervalo de tiempo Δt . El esquema de integración de Newmark utiliza las siguientes suposiciones:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\delta} = {}^t\dot{\delta} + \left[(1-\lambda) {}^t\ddot{\delta} + \lambda {}^{t+\Delta t}\ddot{\delta} \right] \Delta t \quad (3.40)$$

$${}^{t+\Delta t}\delta = {}^t\delta + {}^t\dot{\delta}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \gamma \right) {}^t\ddot{\delta} + \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\delta} \right] \Delta t^2 \quad (3.41)$$

Donde λ y γ son parámetros que determinan la exactitud en la integración y estabilidad. Cuando $\lambda = 1/2$ y $\gamma = 1/6$, se obtiene el método de aceleración lineal. Newmark originalmente propuso como un esquema incondicionalmente estable el método de aceleración constante promedio, también conocido como regla trapezoidal (RT), en cuyo caso $\lambda = 1/2$ y $\gamma = 1/4$. Las suposiciones de aceleración en las figuras 3.7a-b son integradas respecto a τ para obtener los esquemas.

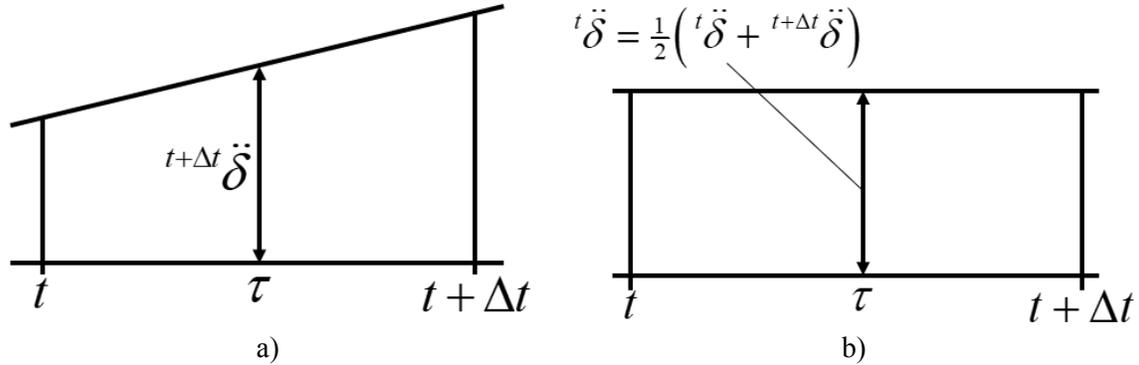


Figura 3.7 a) Método de aceleración lineal, b) esquema RT, Bathe [46].

En adición a (3.40) y (3.41), para la solución de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en un tiempo $t + \Delta t$, la ecuación de equilibrio (3.29) en un tiempo $t + \Delta t$ se puede expresar como:

$$[M]^{t+\Delta t} \ddot{\delta} + [\widehat{C}]^{t+\Delta t} \dot{\delta} + [K_0]^{t+\Delta t} \delta = F \quad (3.42)$$

Donde δ representa el vector de desplazamientos del sistema y F el vector de fuerzas de excitación. Considerando la regla trapezoidal, resolviendo para ${}^{t+\Delta t} \dot{\delta}$ y ${}^{t+\Delta t} \ddot{\delta}$ de (3.40) y (3.41) en términos de ${}^{t+\Delta t} \delta$, se resuelve para cada paso de tiempo Δt :

$$\left(\frac{4}{\Delta t^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [\widehat{C}] + [K_0] \right) {}^{t+\Delta t} \delta = {}^{t+\Delta t} F + [M] \left(\frac{4}{\Delta t^2} {}^t \delta + \frac{4}{\Delta t} {}^t \dot{\delta} + {}^t \ddot{\delta} \right) + [\widehat{C}] \left(\frac{2}{\Delta t} {}^t \delta + {}^t \dot{\delta} \right) \quad (3.43)$$

Y posteriormente se calcula ${}^{t+\Delta t} \dot{\delta}$ y ${}^{t+\Delta t} \ddot{\delta}$. La solución completa del algoritmo de Newmark se presenta en la tabla 3.1:

Tabla 3.1 Algoritmo de Newmark, Bathe [46].

Cálculos iniciales:

Formar matriz de rigidez $[K_0]$, matriz de masa $[M]$ y de amortiguamiento $[\hat{C}]$.

Inicializar δ , $\dot{\delta}$ y $\ddot{\delta}$

Seleccionar un intervalo de tiempo Δt y parámetros λ y γ :

$$\lambda = 0.5 \text{ y } \gamma = 0.25$$

Calcular las constantes de integración.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\gamma \Delta t^2}, & a_1 &= \frac{\lambda}{\gamma \Delta t}, & a_2 &= \frac{1}{\gamma \Delta t}, & a_3 &= \frac{1}{2\gamma} - 1 \\ a_4 &= \frac{\gamma}{\lambda} - 1, & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\lambda}{\gamma} - 2 \right), & a_6 &= \Delta t (1 - \lambda), & a_7 &= \lambda \Delta t \end{aligned}$$

Formar matriz de rigidez efectiva $[\hat{K}]$:

$$[\hat{K}]: [\hat{K}] = [K_0] + a_0 [M] + a_1 [\hat{C}]$$

Triangularizar $[\hat{K}]: [\hat{K}] = LDL^T$

Para cada paso de tiempo:

Calcular vector de carga efectiva \hat{F} en el tiempo $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t} F = {}^{t+\Delta t} F + [M](a_0 {}^t \delta + a_2 {}^t \dot{\delta} + a_3 {}^t \ddot{\delta}) + [\hat{C}](a_1 {}^t \delta + a_4 {}^t \dot{\delta} + a_5 {}^t \ddot{\delta})$$

Resolver para los desplazamientos en el tiempo $t + \Delta t$:

$$LDL^T {}^{t+\Delta t} \delta = {}^{t+\Delta t} F$$

Calcular las aceleraciones y velocidades en el tiempo $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \ddot{\delta} &= a_0 ({}^{t+\Delta t} \delta - {}^t \delta) - a_2 {}^t \dot{\delta} - a_3 {}^t \ddot{\delta} \\ {}^{t+\Delta t} \dot{\delta} &= {}^t \dot{\delta} + a_6 {}^t \ddot{\delta} + a_7 {}^{t+\Delta t} \ddot{\delta} \end{aligned}$$

Capítulo 4: Respuesta vibratoria del rotor agrietado

En esta sección se presenta la validación de la solución del modelo matemático del rotor utilizando valores de la literatura. Asimismo, se presenta un análisis numérico del comportamiento dinámico de un rotor agrietado.

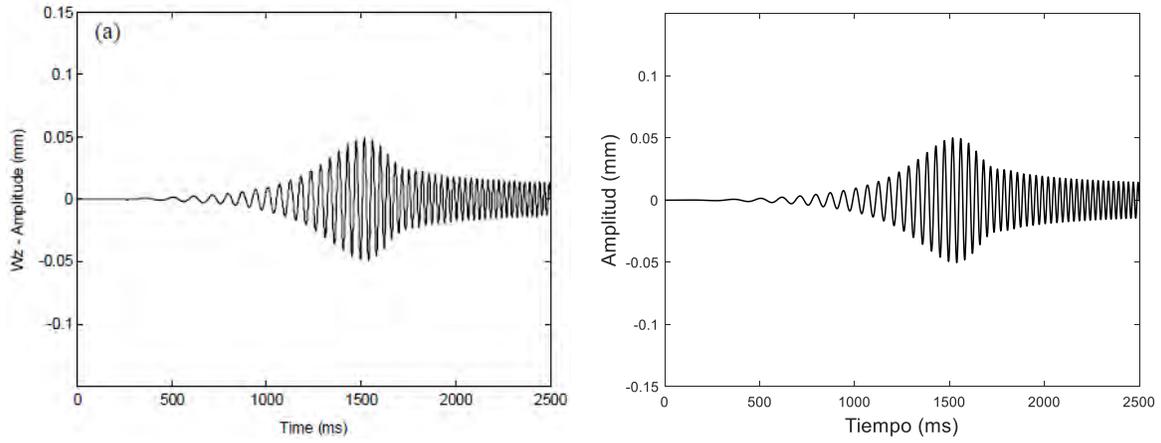
4.1 Validación del modelo matemático de un rotor con grieta utilizando el algoritmo de Newmark

La respuesta de un sistema contiene información de los fenómenos presentes en el sistema, esta a su vez está influenciada por los valores de masa, amortiguamiento y rigidez, así como de los parámetros del desbalance y en este caso, de la profundidad de la grieta. La respuesta vibratoria del sistema rotodinámico con grieta a velocidad constante y con rampas de excitación de tipo lineal, se obtiene de la solución de los modelos (3.29) y (3.32) respectivamente. Para la solución del modelo del rotor agrietado, se utilizó el algoritmo de integración de Newmark descrito en el Capítulo 3, sección 3.2.2. La solución permite encontrar la respuesta vibratoria del sistema considerando como excitación el desbalance y el efecto de la grieta en el rotor. Para la validación de la solución del modelo matemático del comportamiento dinámico del rotor con grieta se seleccionaron datos de un rotor tipo Jeffcott reportados por Sekhar [47]. En la tabla 4.1 se muestran los valores de los diferentes parámetros del rotor a simular.

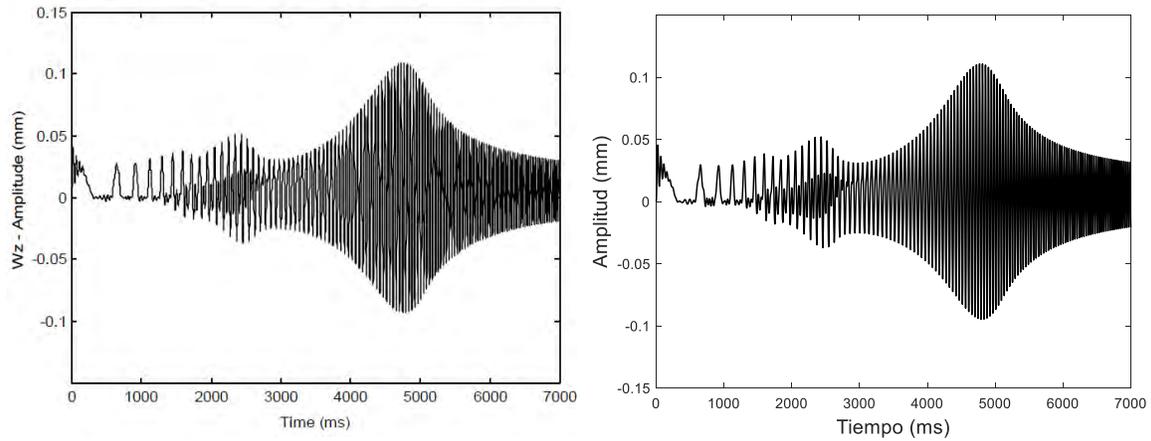
Tabla 4.1 Datos del rotor, Sekhar [47].

Datos del rotor	
m	51 kg
k_0	$9.99(10)^5 \text{ N/m}$
ζ	0.1
Δt	$1(10)^{-4} \text{ s}$
e	$1(10)^{-4} \text{ m}$
$m_a e$	$5.1(10)^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$
β	0°

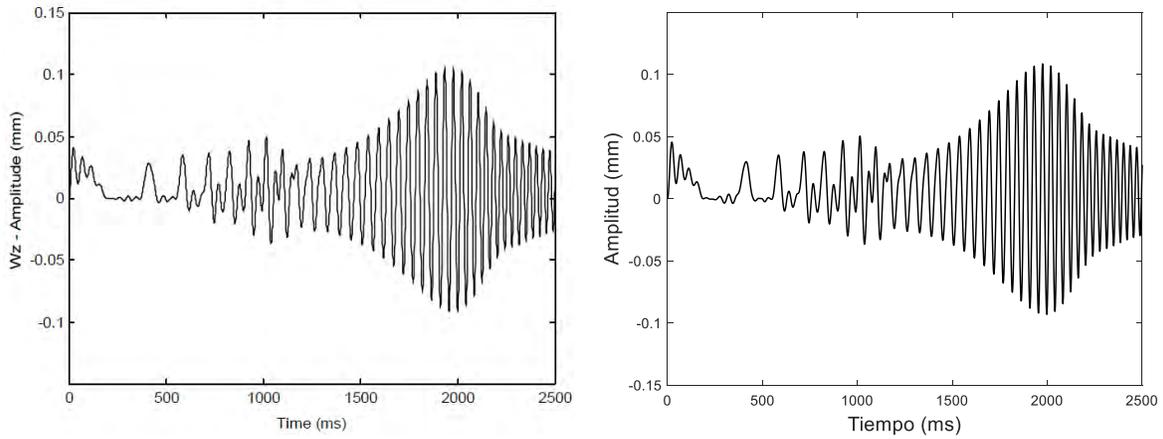
En las figuras 4.1-4.6 se muestran los resultados obtenidos con la plataforma computacional desarrollada en este trabajo y su comparación con los resultados reportados por Sekhar [47].



a) b)
 Figura 4.1 Respuesta vibratoria componente eje y del rotor con $\alpha = 100 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 1$ (sin grieta), a) Sekhar [47], b) plataforma computacional.



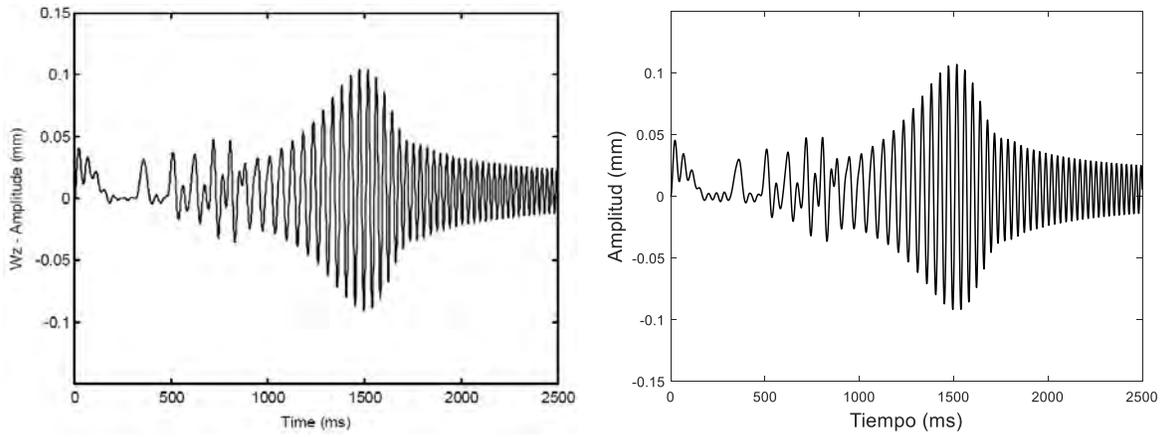
a) b)
 Figura 4.2 Respuesta vibratoria componente eje y del rotor con $\alpha = 30 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 0.95$ a) Sekhar [47], b) plataforma computacional.



a)

b)

Figura 4.3 Respuesta vibratoria componente eje y del rotor con $\alpha = 75 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 0.95$ a) Sekhar [47], b) Plataforma computacional.



a)

b)

Figura 4.4 Respuesta vibratoria componente eje y del rotor con $\alpha = 100 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 0.95$ a) Sekhar [47], b) Plataforma computacional.

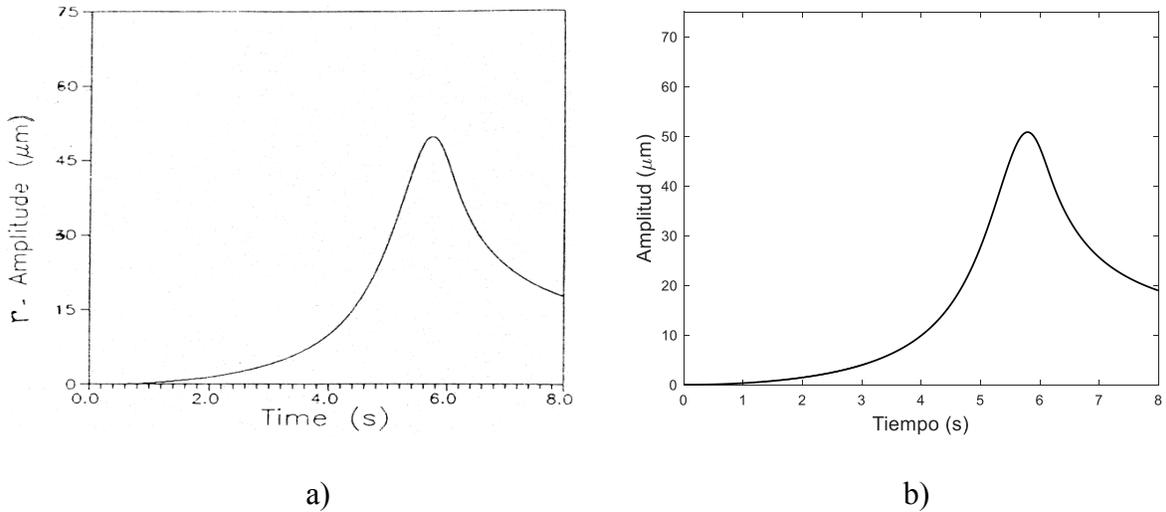


Figura 4.5 Respuesta resultante del rotor pasando la velocidad crítica con $\alpha = 25 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 1$ (sin grieta), a) Sekhar [21], b) Plataforma computacional.

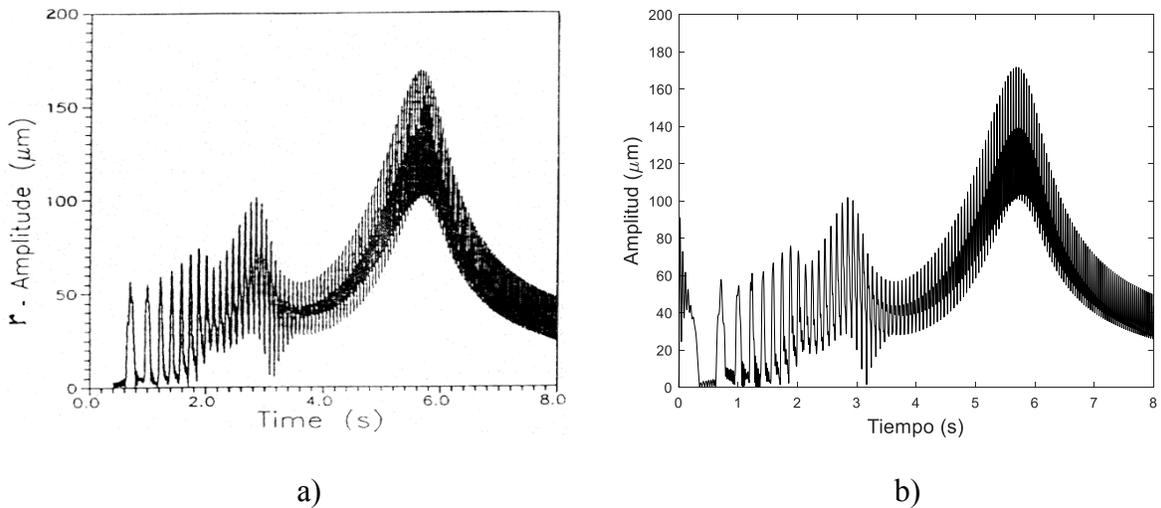


Figura 4.6 Respuesta resultante del rotor pasando la velocidad crítica con $\alpha = 25 \text{ rad/s}^2$ y $k_p = 0.90$, a) Sekhar [21], b) Plataforma computacional.

De la comparación de los resultados obtenidos en este trabajo con los reportados por Sekhar [47] y Sekhar [20] se puede observar que la respuesta vibratoria del rotor es idéntica a la respuesta de vibración del rotor reportada en la literatura, por lo que se concluye, que el modelo desarrollado y su solución utilizando el método numérico de integración de Newmark arroja resultados correctos.

4.2 Análisis numérico del comportamiento dinámico de un rotor agrietado

La principal característica de un rotor con una grieta transversal es el respiro de la misma a causa del efecto de los esfuerzos de tensión y compresión que experimenta el eje del rotor mientras está en operación. De acuerdo con Iman *et al.* [27], el efecto de flexibilidad en el sistema debido a una grieta transversal es predominante ante el efecto de asimetría en el sistema cuando la grieta se encuentra cerca del centro del sistema rotatorio, mientras que si la grieta se encuentra más próxima de los soportes, el efecto de la asimetría predomina en el sistema a causa de que en esta posición los esfuerzos de trabajo son menores. Cuando el sistema rotatorio presenta mayor flexibilidad, es decir, cuando la grieta presenta un respiro, las componentes armónicas $1X$, $2X$, $3X$, ..., nX son excitadas, mientras que cuando el efecto de la asimetría predomina al de la flexibilidad, el efecto es exclusivo en la armónica $2X$. El efecto de la asimetría a causa de una grieta abierta hace que se presenten dos rigideces distintas en los ejes principales de la sección transversal del rotor. De acuerdo con lo anterior, se puede concluir que cuando una grieta no presenta el efecto de respiro, se puede considerar como una grieta abierta, este fenómeno se presenta cuando una grieta se comporta más como una ranura que como una grieta ocasionada por la fatiga del material.

En la figura 4.7 se muestra la comparación de la respuesta de vibración correspondiente a la componente en el eje y de un rotor a velocidad constante (1300 rpm) sin grieta, con grieta respiratoria y con grieta siempre abierta. Para el caso del rotor con grieta respiratoria y grieta siempre abierta se consideró un valor de $k_p=0.98$. Para lograr la condición de una grieta siempre abierta, en el modelo matemático de la ecuación (3.29) se tomó a $\psi(t) = 1$, mientras que para el rotor con grieta respiratoria se utilizó la serie de Fourier correspondiente a la ecuación (3.11). Aquí se puede observar que la respuesta de vibración que presenta menor amplitud de vibración es para el caso del rotor sin grieta y la de mayor amplitud es para el caso del rotor con una grieta respiratoria.

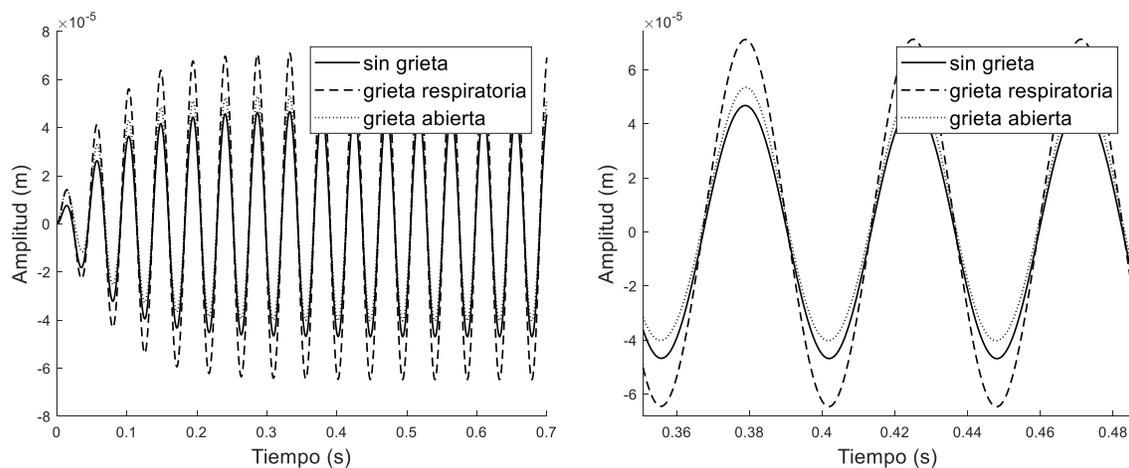


Figura 4.7 Efecto de la grieta respiratoria y abierta en la respuesta vibratoria del rotor, componente eje y a $\omega = 1300$ rpm.

De la señal en la figura 4.7, se sabe que la respuesta de vibración del rotor corresponde a una velocidad de 1300 rpm, por lo que la primera armónica se localiza en 21.66 Hz, en consecuencia, las armónicas $2X$ y $3X$ se localizarán en 43.33 Hz y 65 Hz respectivamente.

En la figura 4.8b se muestra el comportamiento de la armónica 1X, se puede observar que, en comparación con la amplitud de la armónica correspondiente al rotor sin grieta, cuando el rotor tiene una grieta respiratoria la amplitud de ésta se incrementa, en contraste cuando el rotor tiene una grieta siempre abierta la amplitud armónica se mantiene constante, no sufre cambio en amplitud. Por otra parte, en la figura 4.8c y 4.8d se muestra el comportamiento de la armónica 2X y 3X respectivamente. En estas figuras se puede observar que la respuesta de vibración de un rotor sin grieta excitado únicamente por el desbalance no presenta armónicas superiores a 1X, mientras que cuando en el rotor existe una grieta siempre abierta, la respuesta de vibración solo presenta armónicas 1X y 2X. En contraste, la respuesta de vibración de un rotor con grieta respiratoria puede presentar armónicas mayores que 2X, es decir, 1X, 2X, 3X, ..., nX . También se puede observar que la presencia de una grieta siempre abierta afecta en mayor grado la amplitud de la componente 2X en comparación cuando el rotor tiene una grieta respiratoria.

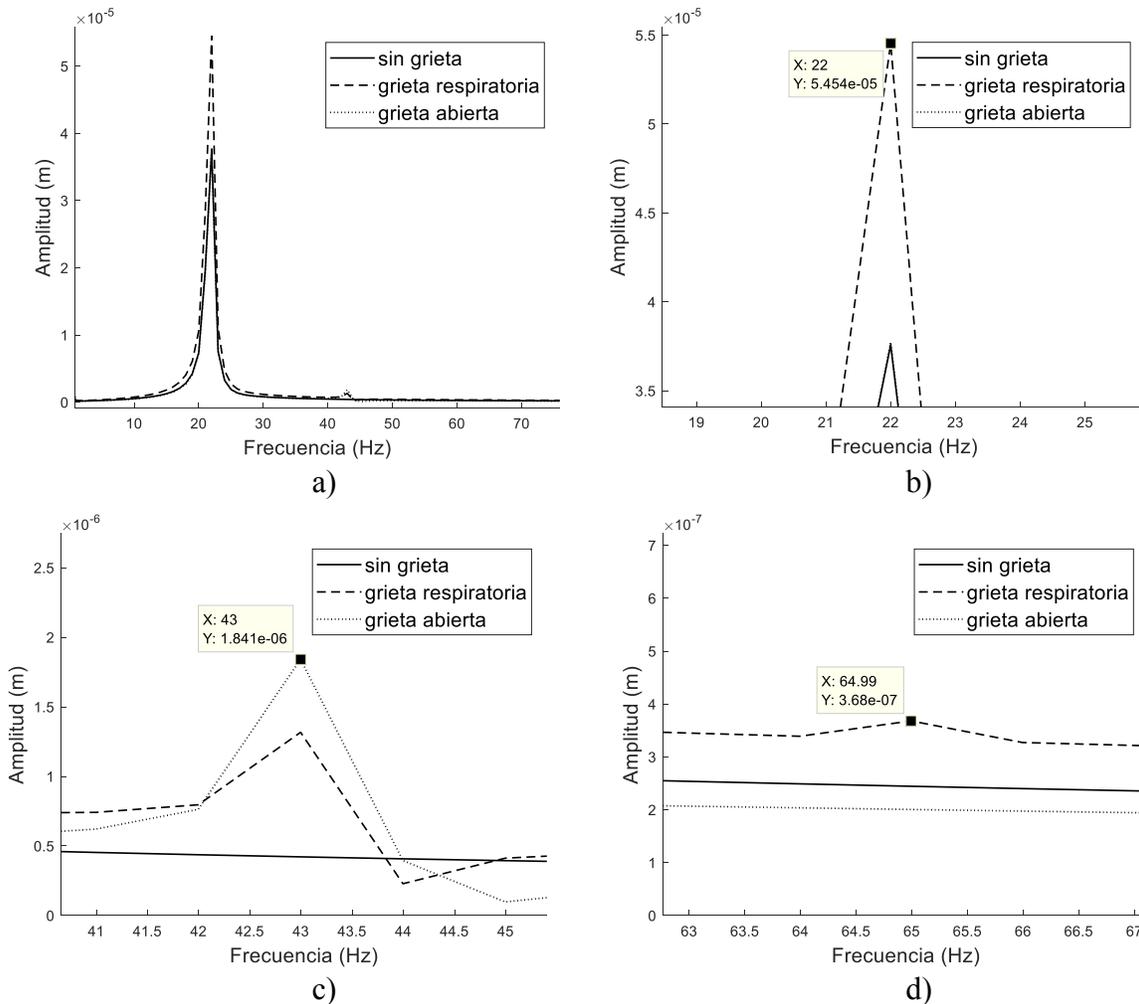


Figura 4.8 Transformada de Fourier de la figura 4.7, a) espectro de la señal completa, b) armónica 1X, 21.66 Hz, c) armónica 2X, 43.33 Hz, d) armónica 3X, 65 Hz.

De manera similar, en la figura 4.9 se muestra el comportamiento de la respuesta vibratoria del rotor correspondiente a la componente en el eje x , se puede observar que presenta un

comportamiento similar a la respuesta vibratoria correspondiente al eje y (figura 4.7), únicamente con menor amplitud de vibración.

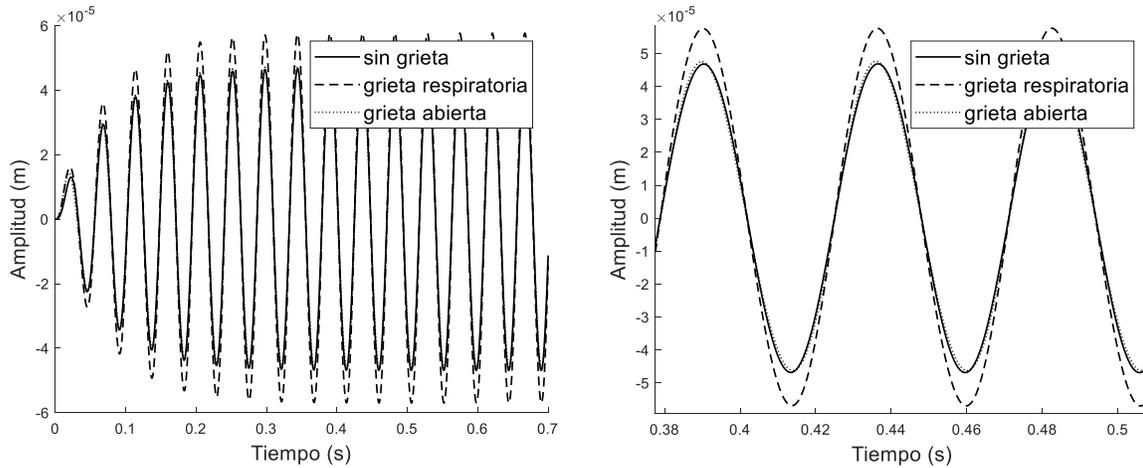


Figura 4.9 Efecto de la grieta en la respuesta vibratoria del rotor, componente eje x a $\omega = 1300$ rpm.

Por otra parte, en las figuras 4.10 y 4.11 se muestra la respuesta vibratoria de un rotor con grieta con una profundidad de $k_p = 0.98$ considerando rampas de excitación de tipo lineal con una aceleración $\alpha = 15 \text{ rad/s}^2$. En la figura 4.10 se presenta la respuesta vibratoria de un rotor con grieta respiratoria, mientras que en la figura 4.11 se muestra la respuesta vibratoria para el rotor con grieta siempre abierta.

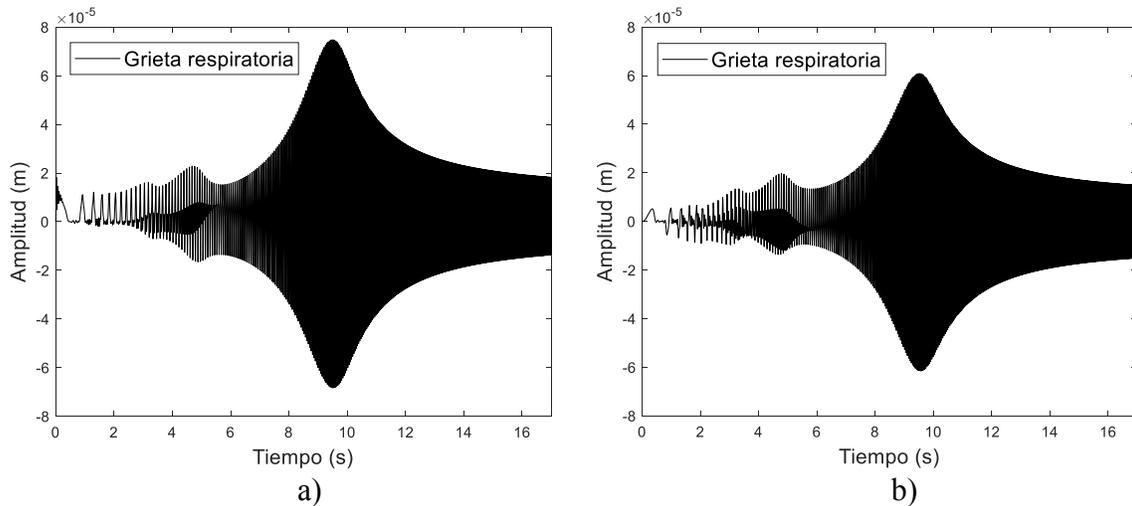


Figura 4.10 Respuesta vibratoria del rotor con grieta respiratoria con $k_p = 0.98$ y $\alpha = 15 \text{ rad/s}^2$ a) componente eje y , b) componente eje x .

Comparando la respuesta de vibración del rotor con grieta respiratoria, figura 4.10, con la del rotor con grieta siempre abierta, figura 4.11, se puede observar que cuando existe presencia de una grieta respiratoria se presentan componentes subcríticas o subresonancias que se presentan en $1/2, 1/3, \dots, 1/n$ de la primera velocidad crítica del rotor, mientras que para el caso cuando existe una grieta siempre abierta, la asimetría generada por la grieta predomina en el comportamiento del rotor, por lo que solo se presenta una componente

subcrítica a la mitad (1/2) de la primera velocidad crítica del rotor, además de que la amplitud de vibración de esta componente es mayor en comparación con la de la señal del rotor con grieta respiratoria

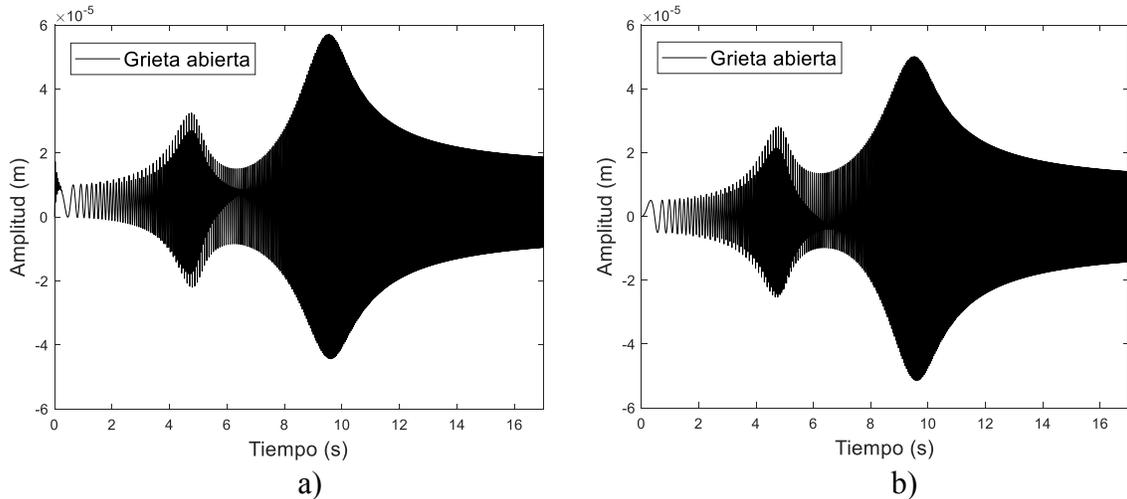


Figura 4.11 Respuesta vibratoria del rotor con grieta abierta con $k_p = 0.98$ y $\alpha = 15 \text{ rad/s}^2$, a) componente eje y, b) componente eje x.

Lo anterior se fundamenta en el análisis de los diagramas de Bode obtenidos de la respuesta de vibración de las figuras 4.10 y 4.11. En la figura 4.12 se muestra la comparación de los diagramas de Bode para un rotor sin grieta, un rotor con grieta respiratoria y un rotor con grieta siempre abierta, correspondientes a la componente del eje y. Se puede concluir que una grieta respiratoria excita a ω_n y a las componentes subcríticas $\frac{1}{2}\omega_n, \frac{1}{3}\omega_n, \dots, \frac{1}{n}\omega_n$, mientras que una grieta abierta excita únicamente a la componente subcrítica $\frac{1}{2}\omega_n$, donde ω_n corresponde al valor de la primera velocidad crítica del rotor. Asimismo, se puede observar que la amplitud de vibración en la componente subcrítica $\frac{1}{2}\omega_n$ es mayor para el caso de una grieta siempre abierta.

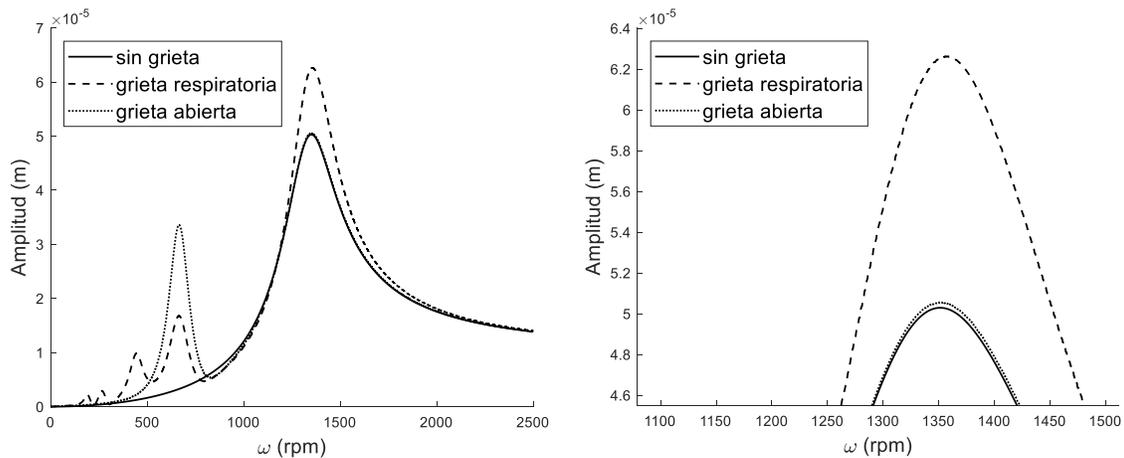


Figura 4.12 Diagrama de Bode del rotor con $k_p = 0.98$ y $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$.

Por otro lado, en la figura 4.13 se muestra el efecto del incremento de la masa de desbalance en el comportamiento dinámico del rotor con grieta, aquí la gráfica con línea continua representa la señal de referencia con un desbalance dado, mientras que la gráfica con línea intermitente representa la respuesta del rotor con el doble del desbalance de la señal de referencia (línea continua). En la figura 4.13a se muestra el diagrama de Bode del rotor con grieta respiratoria, mientras que en la figura 4.13b se presenta el diagrama de Bode del rotor con grieta siempre abierta. En ambos casos se utilizaron los datos del rotor de la tabla 4.1 y una rampa de excitación de tipo lineal con una aceleración $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$. En la figura 4.13 se puede observar que, sin importar el tipo de grieta, el incremento en la masa de desbalance no modifica la amplitud de las componentes subcríticas presentes en la respuesta del rotor, el cambio se observa en la frecuencia natural principal del rotor.

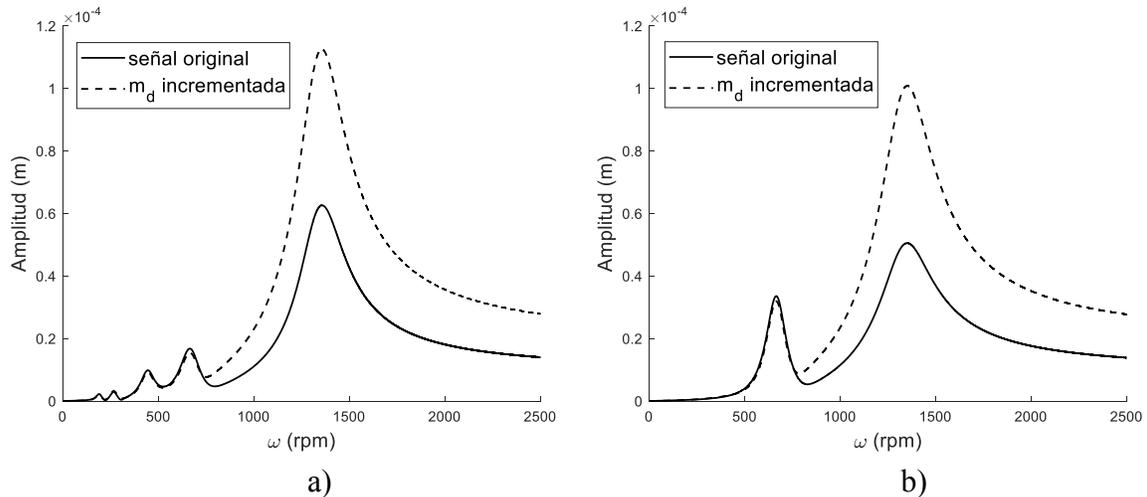


Figura 4.13 Diagrama de Bode componente eje y del rotor con $k_p = 0.98$ y rampa de excitación de tipo lineal $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$ a) grieta respiratoria, b) grieta abierta.

De acuerdo con lo anterior, la principal característica en la respuesta de un rotor agrietado con grieta respiratoria es la excitación de las tres primeras armónicas de la respuesta. En contraste, el comportamiento de un rotor con una grieta transversal abierta excita únicamente a la componente $2X$ (equivalente a dos veces la velocidad de rotación), o bien, presenta una subresonancia a la mitad de la primera velocidad crítica del rotor. De acuerdo con Papadopoulos y Dimarogonas [48], la suposición de un rotor con una grieta abierta hace que el sistema tenga un comportamiento similar al de un rotor asimétrico, ya que este exhibe dos rigideces distintas en sus ejes de inercia principales, a diferencia de que la asimetría generada por la grieta es localizada. Por otra parte, la condición necesaria para que una grieta permanezca siempre abierta se presenta cuando la deflexión estática del sistema sea pequeña y la dirección del desbalance coincida con la posición angular de la grieta.

De acuerdo con el análisis realizado, el desbalance presente en el sistema no tiene efecto alguno sobre la amplitud de vibración de las resonancias subcríticas o subresonancias del sistema. Para el estudio de un rotor con grieta respiratoria debe considerarse la función de respiro definida por $\psi(t)$ presentada en el Capítulo 3, ecuación (3.11), mientras que, para el estudio de un rotor con una grieta transversal siempre abierta, se debe cumplir que la función

$\psi(t) = 1$. Cuando $\psi(t) = 1$, esta hace que el sistema experimente una pérdida de rigidez invariante, ya que la grieta se comporta más como una ranura que como una grieta respiratoria, en consecuencia, la única componente que se excita es la 2X.

Por otra parte, en las figuras 4.14 y 4.15 se muestra el comportamiento dinámico del rotor en función de la profundidad de la grieta transversal, para cuando el rotor tiene una grieta respiratoria y una grieta siempre abierta respectivamente. Para el caso de un rotor con grieta respiratoria, figura 4.14, se puede observar que al incrementar la profundidad de la grieta mediante el parámetro k_p , se presenta un incremento en la amplitud de la respuesta de vibración en ω_n , $\frac{1}{2}\omega_n$, $\frac{1}{3}\omega_n$, $\frac{1}{5}\omega_n$ y $\frac{1}{7}\omega_n$ por lo que la excitación de las diferentes subresonancias del sistema es un claro indicio de la presencia de una grieta en el rotor. En contraste, para el caso de un rotor con grieta abierta, figura 4.15, al incrementarse la profundidad de la grieta mediante el parámetro k_p , la única subresonancia excitada es la de $1/2\omega_n$, mientras que, en la primera frecuencia natural del sistema ω_n , la amplitud permanece sin cambio, es decir, el efecto de la grieta abierta sobre la respuesta vibratoria del rotor es visible únicamente en la subresonancia mencionada.

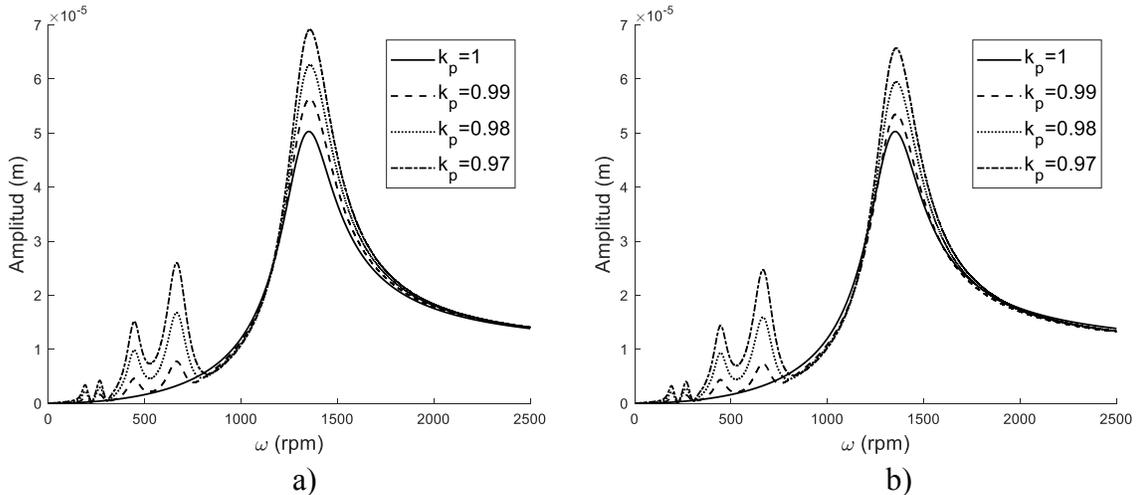


Figura 4.14 Diagrama de Bode, rotor con grieta respiratoria vs k_p , a) componente eje y, b) componente eje x.

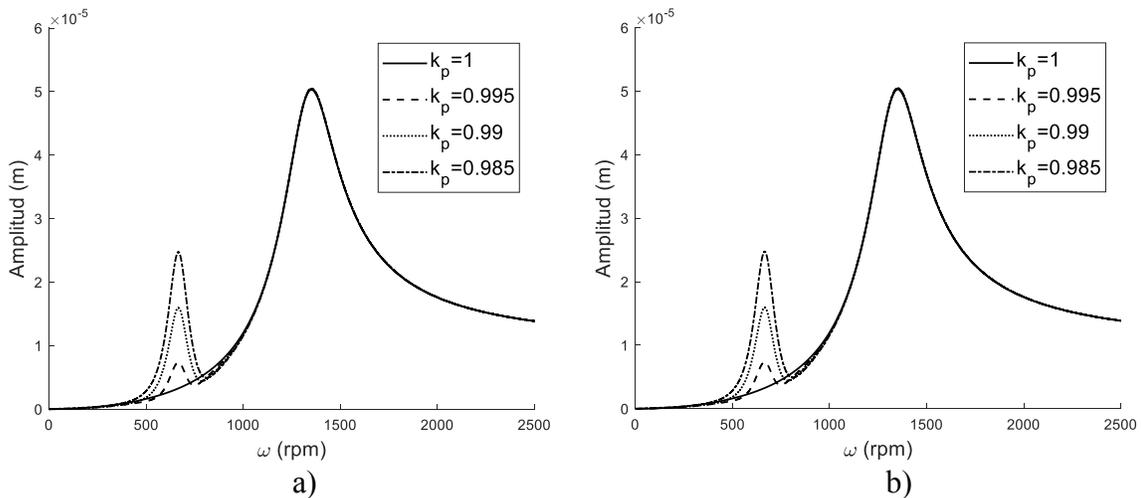


Figura 4.15 Diagrama de Bode, rotor con grieta abierta vs k_p , a) componente eje y, b) componente eje x.

Capítulo 5: Identificador algebraico

El método de identificación algebraica es una técnica que permite determinar parámetros desconocidos a partir del modelo matemático del sistema en tiempo continuo o discreto. Este se apoya en el álgebra diferencial y el cálculo operacional para el desarrollo de los estimadores en línea.

La principal característica de este método es que proporciona relaciones de identificación completamente independientes a las condiciones iniciales del sistema. De acuerdo con Fliess y Sira-Ramírez [37], este método presenta buenas propiedades de robustez respecto a una gran variedad de perturbaciones que pueden estar presentes en el sistema, además que es una técnica eficiente. La principal ventaja de este método, es que permite conocer parámetros desconocidos de un sistema, a partir de su modelo matemático.

5.1 Identificador algebraico a velocidad constante

En esta sección se presenta el desarrollo matemático del estimador de la profundidad de la grieta transversal considerando velocidad angular constante del rotor, para ello se emplea la técnica reportada por Fliess y Sira-Ramírez [37]. El estimador en línea se desarrolla a partir del modelo matemático del rotor agrietado a velocidad angular constante, ecuación (3.29) descrito en el Capítulo 3, sección 3.1. El modelo del rotor agrietado a velocidad angular constante describe la dinámica de un rotor Jeffcott agrietado, en donde el parámetro k_p es el valor adimensional de la profundidad de la grieta transversal en el sistema. Como se puede observar en la ecuación (5.1), el modelo es función de los desplazamientos en las direcciones y y x del rotor (respuesta vibratoria), así como de sus respectivas derivadas (velocidad y aceleración).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \left(\omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} \\ & = \frac{1}{2} \psi(t) \Delta k_\xi \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\omega t) & \text{sen}(2\omega t) \\ \text{sen}(2\omega t) & 1 - \cos(2\omega t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + m e \omega^2 \text{sen} \left(\frac{\pi l_d}{L_e} \right) \begin{Bmatrix} \cos(\omega t + \beta) \\ \text{sen}(\omega t + \beta) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

La ecuación (5.1) puede expresarse de la siguiente forma:

$$[M] \ddot{\delta} + [\hat{C}] \dot{\delta} + [K_0] \delta = \frac{1}{2} y_0 \psi(t) \Delta k_\xi \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\omega t) \\ \text{sen}(2\omega t) \end{bmatrix} + f_d \quad (5.2)$$

Donde

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; \quad [\widehat{C}] = \omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}; \quad [K_0] = \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix}$$

$$f_d = me\omega^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi l_d}{L_e} \right) \begin{Bmatrix} \cos(\omega t + \beta) \\ \operatorname{sen}(\omega t + \beta) \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\delta} = \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}; \quad \dot{\delta} = \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix}; \quad \delta = \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix};$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{\pi} \right) \cos(\omega t) - \left(\frac{2}{3\pi} \right) \cos(3\omega t) + \left(\frac{2}{5\pi} \right) \cos(5\omega t)$$

Y definiendo a

$$n(t) = \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\omega t) \\ \operatorname{sen}(2\omega t) \end{bmatrix}$$

Seguindo la metodología propuesta por Fliess y Sira-Ramírez [37], la ecuación (5.2) se puede expresar de la siguiente forma al integrarse dos veces y multiplicarse por t^2 :

$$\int_0^{(2)} [M] \ddot{\delta} t^2 + \int_0^{(2)} [\widehat{C}] \dot{\delta} t^2 + \int_0^{(2)} [K_0] \delta t^2 = \int_0^{(2)} \left(\frac{1}{2} y_0 \psi(t) \Delta k_\xi \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\omega t \\ \operatorname{sen} 2\omega t \end{bmatrix} + f_d \right) t^2 \quad (5.3)$$

Donde $\int^{(2)} \phi(t)$ son integrales iteradas en el tiempo de la forma $\int_0^t \int_0^{\chi_1} \dots \int_0^{\chi_{n-1}} \phi(\chi_n) d\chi_n \dots d\chi_1$ con $\int \phi(t) = \int_0^t \phi(\chi) d\chi$ y n un entero positivo.

La ecuación (5.3) se integra por partes y a través de un tratamiento matemático ésta puede expresarse como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 & [M] \left(\delta t^2 - 4 \int^{(2)} \delta t + 2 \int^{(2)} \delta \right) + [\widehat{C}] \left(\int^{(2)} \delta t^2 - 2 \int^{(2)} \delta t \right) + [K_0] \int^{(2)} \delta t^2 \\
 & = \int^{(2)} \left(\frac{1}{2} y_0 \psi(t) \Delta k_\xi n(t) + f_d \right) t^2
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Como se puede observar, la ecuación (5.4) ahora está únicamente en función del vector de desplazamientos $\delta(y, x)$ el cual se considera que está disponible como dato de entrada en el modelo.

Reordenando la ecuación (5.4):

$$\begin{aligned}
 & [M] \delta t^2 + \int \left([\widehat{C}] t^2 - 4[M] t \right) \delta + \int \left([K_0] t - 2[\widehat{C}] t + 2[M] \right) \delta - \int f_d t^2 \\
 & = \frac{1}{2} \int^{(2)} y_0 \Delta k_\xi \psi(t) n(t) t^2
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Donde:

$$y_0 = \frac{mg}{k_0} \tag{5.6}$$

$$\Delta k_\xi = (1 - k_p) k_0 \tag{5.7}$$

Donde el término Δk_ξ es el parámetro de pérdida de rigidez que experimenta el sistema a causa de una grieta transversal con profundidad k_p , parámetro que corresponde a una profundidad de grieta normalizada en función de las frecuencias naturales del rotor con grieta y sin grieta. Al sustituir la ecuación (5.7) en la ecuación (5.5) y despejando el parámetro k_p , se tiene como resultado una ecuación que únicamente es función del vector de desplazamientos (respuesta del sistema), donde los parámetros de masa, amortiguamiento, rigidez y el vector de fuerza de excitación del desbalance, son conocidos. Por lo tanto, el identificador algebraico o estimador de la profundidad de la grieta transversal del sistema queda expresado de la siguiente manera:

$$k_p = \frac{m(t)}{d(t)} \tag{5.8}$$

Donde:

$$m(t) = -2[M]\delta t^2 + \int (-2[\hat{C}]t^2 + 8[M]t)\delta + \int (-2[K_0]t + 4[\hat{C}]t - 4[M])\delta \\ + 2 \int f_d t^2 + mg \int \psi(t)n(t)t^2 \\ d(t) = mg \int \psi(t)n(t)t^2$$

La ecuación (5.8) es válida siempre y cuando el denominador $d(t)$ sea distinto de cero. Se puede observar que el estimador k_p es función únicamente del vector de desplazamientos δ (respuesta vibratoria del sistema). De la ecuación (5.8) se puede observar que el valor del parámetro k_p es identificable algebraicamente sí, y solo sí, la trayectoria del sistema dinámico es persistente en el sentido establecido por Fliess y Sira-Ramírez [37]. Normalmente, esta condición se cumple al menos en un intervalo pequeño de tiempo $(t_0, t_0 + \epsilon)$, donde ϵ es un valor positivo y suficientemente pequeño de tiempo.

Por lo tanto, el parámetro k_p identificado a partir de la ecuación (5.8) es válido para:

$$k_p = \begin{cases} \text{arbitrario} & t \in [t_0, t_0 + \epsilon] \\ \frac{m(t)}{d(t)} & t > t_0 + \epsilon \end{cases}$$

Como se puede observar, a partir de la ecuación (5.8), el identificador algebraico de la profundidad de la grieta transversal es independiente de las condiciones iniciales del sistema, y depende únicamente del vector de desplazamientos δ del sistema, por lo que la respuesta de vibración son los datos de entrada para lograr la identificación de la grieta.

5.1.1 Simulación de identificador algebraico a velocidad constante

En esta sección se presenta el comportamiento en función del tiempo del identificador desarrollado, donde como dato de entrada se utilizó la respuesta vibratoria obtenida de forma numérica del rotor con grieta del modelo matemático correspondiente a la ecuación (3.29). Para la simulación del comportamiento dinámico del rotor se utilizaron los datos del rotor de la tabla 4.1 y una frecuencia de muestro de 10,000 muestras/s ($\Delta t = 1(10)^{-4}$ s), variando la posición angular del desbalance y profundidad de la grieta. La solución de las integrales en el tiempo de la ecuación (5.8) se realizó utilizando la regla trapezoidal [49].

En las figuras 5.1-5.6 se muestra el comportamiento del identificador para diferentes velocidades angulares del rotor (500, 900, 1600, 2000, 4000, 6000 rpm) y profundidades de la grieta ($k_p = 0.95, 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.9999$). En las figuras se presenta la señal del rotor que se utilizó como dato de entrada correspondiente a las direcciones y y x , así como, el comportamiento del identificador, aquí k_{pe} denota el valor correspondiente a la profundidad de la grieta estimada o identificada, mientras que k_{pr} denota el valor real de la profundidad de la grieta.

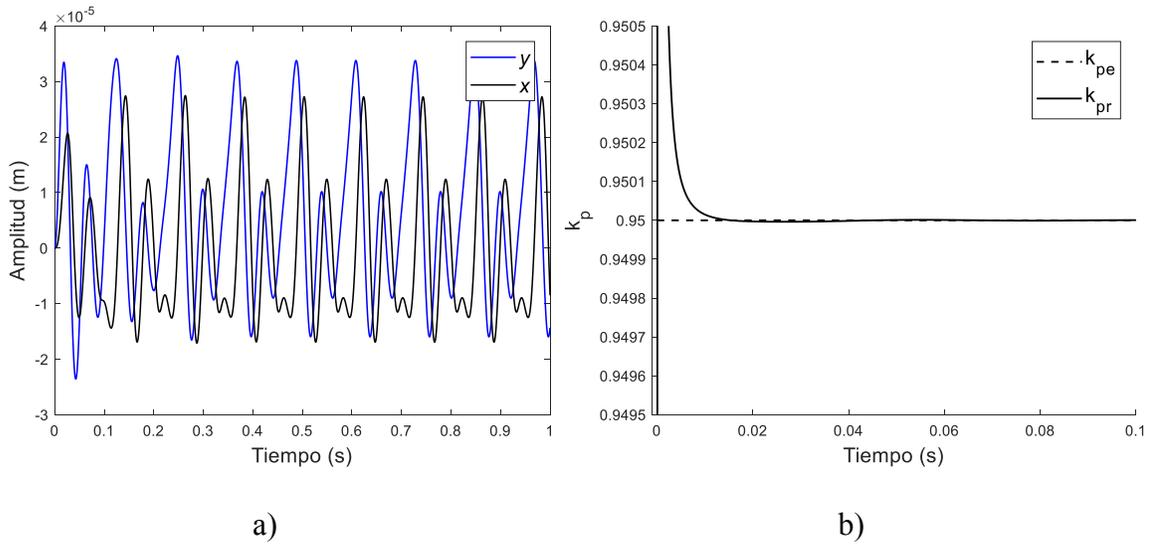


Figura 5.1 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 500$ rpm, $\beta = 0^\circ$ y $k_p = 0.95$, b) estimación de la profundidad k_p .

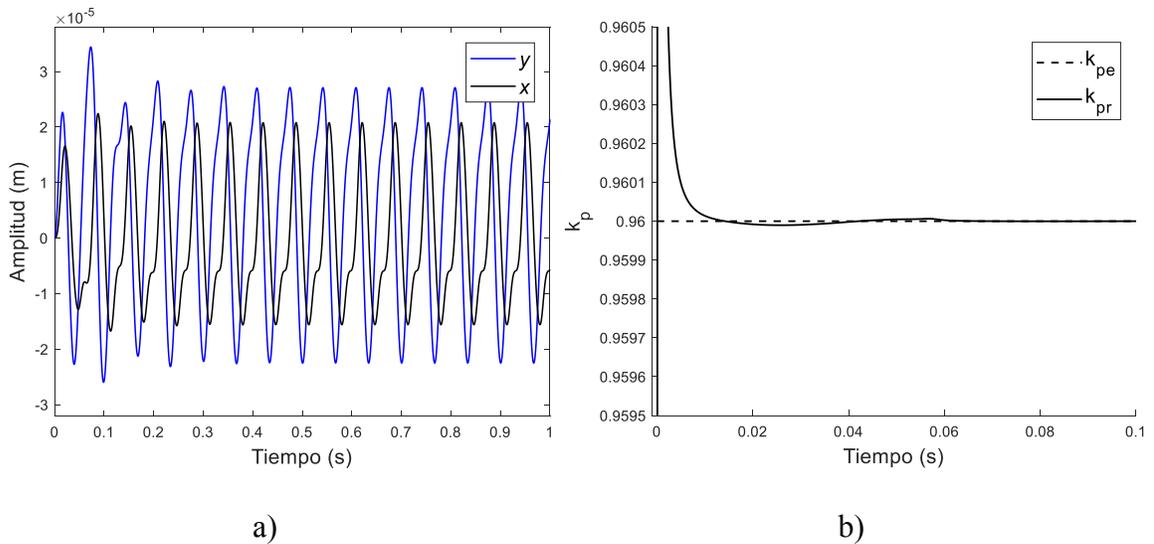
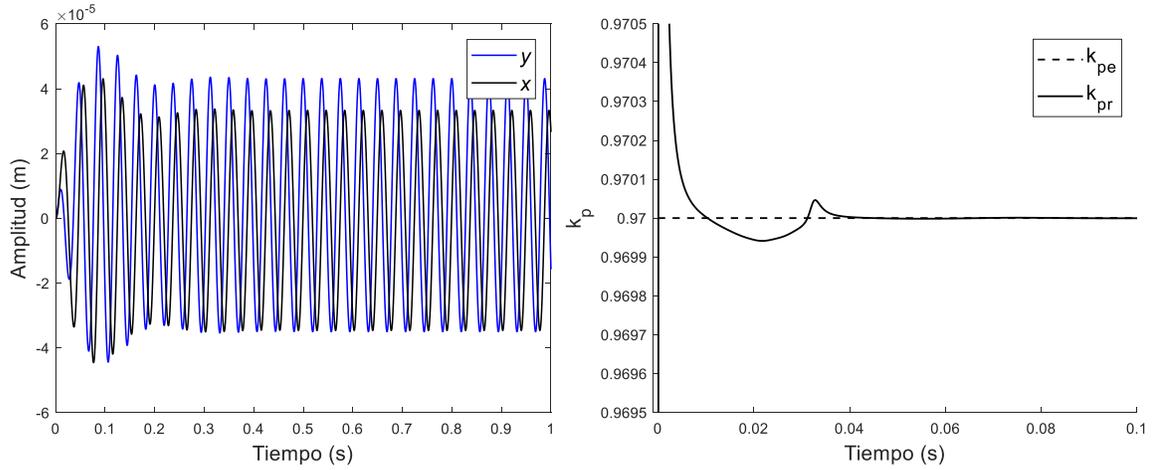
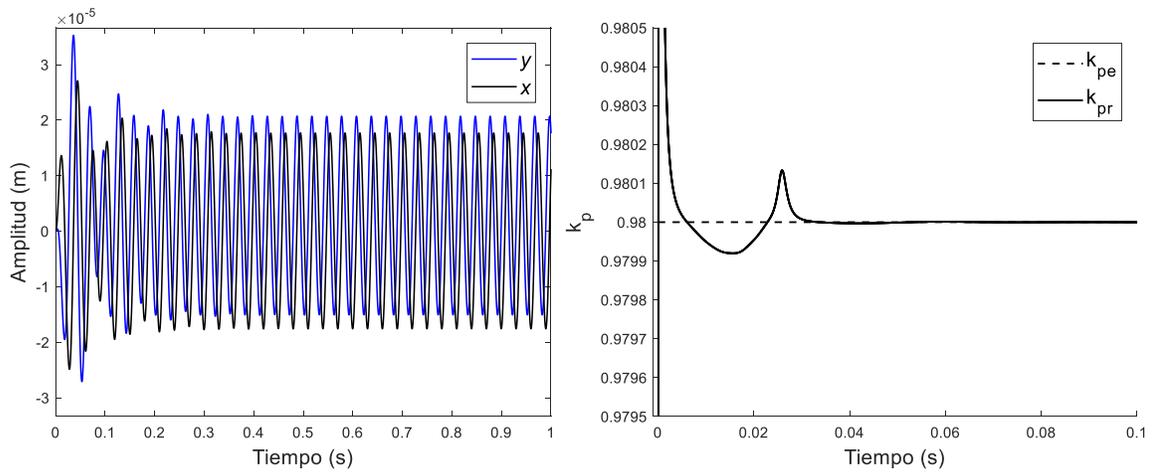


Figura 5.2 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 900$ rpm, $\beta = 0^\circ$ y $k_p = 0.96$, b) estimación de la profundidad k_p .



a) b)
 Figura 5.3 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 1600$ rpm, $\beta = 45^\circ$ y $k_p = 0.97$, b) estimación de la profundidad k_p .



a) b)
 Figura 5.4 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 2000$ rpm, $\beta = 90^\circ$ y $k_p = 0.98$, b) estimación de la profundidad k_p .

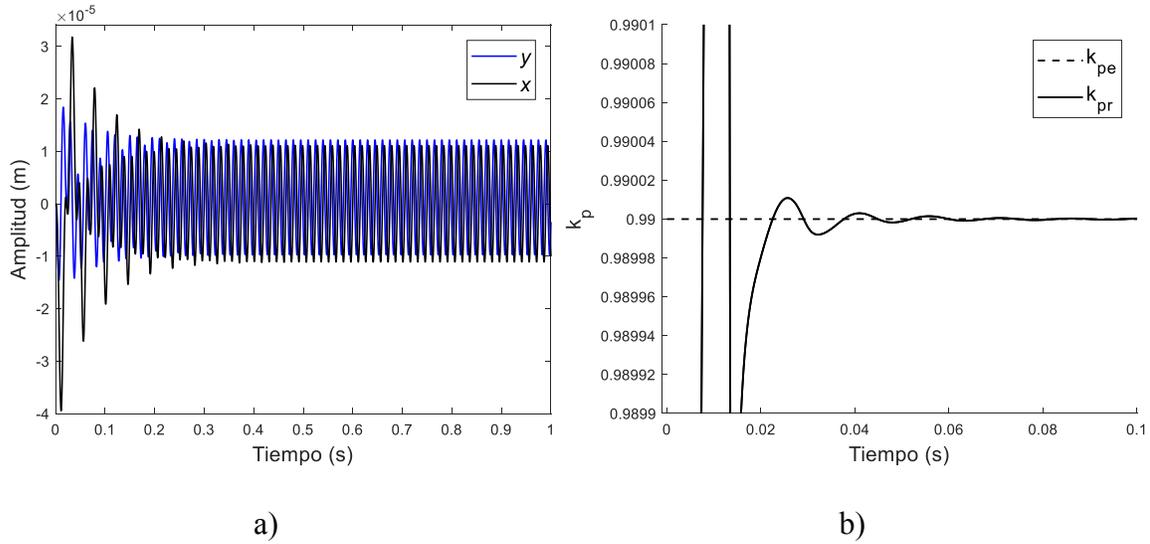


Figura 5.5 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 4000$ rpm, $\beta = 180^\circ$ y $k_p = 0.99$, b) estimación de la profundidad k_p .

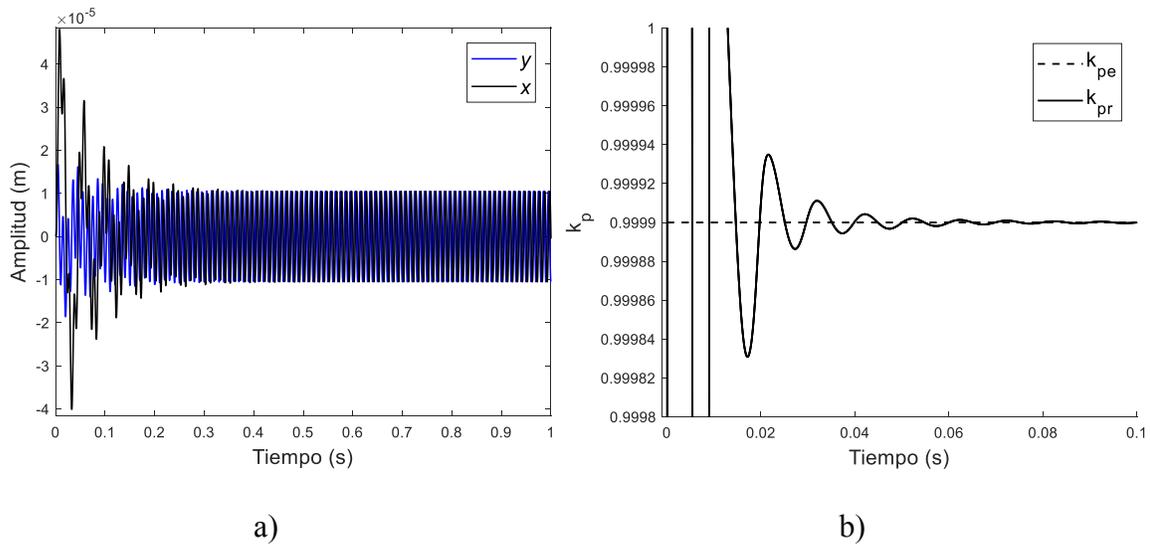


Figura 5.6 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\omega = 6000$ rpm, $\beta = 0^\circ$ y $k_p = 0.9999$, b) estimación de la profundidad k_p .

De acuerdo a las simulaciones mostradas en las figuras 5.1-5.6, se puede observar que en todos los casos el identificador desarrollado converge al valor buscado de la profundidad de la grieta en un tiempo menor a 0.1 s, sin importar la velocidad angular del rotor, la posición angular del desbalance respecto a la posición de la grieta o la profundidad de la grieta, por lo que se concluye que el identificador detecta grietas de manera precisa.

5.2 Identificador algebraico a velocidad variable (aceleración constante)

En esta sección se presenta el desarrollo matemático del estimador de la profundidad de la grieta transversal considerando velocidad angular variable empleando la técnica reportada por Fliess y Sira-Ramírez [37]. El estimador en línea se desarrolla a partir del modelo matemático del rotor agrietado a velocidad angular variable, ecuación (3.32), descrito en el Capítulo 3, sección 3.1, el cual está limitado a aceleración angular constante (rampa de excitación de tipo lineal). El modelo del rotor agrietado a velocidad angular variable describe la dinámica de un rotor Jeffcott agrietado, en donde el parámetro k_p es el valor adimensional de la profundidad de la grieta transversal en el sistema. Como se puede observar en la ecuación (5.9), el modelo depende de los desplazamientos en las direcciones y y x del rotor (respuesta vibratoria), así como de sus respectivas derivadas (velocidad y aceleración).

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \left(\omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} \\
 & = \frac{1}{2} \psi(t) \Delta k_\xi \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\varphi) & \text{sen}(2\varphi) \\ \text{sen}(2\varphi) & 1 - \cos(2\varphi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 & + m_d e \text{sen} \left(\frac{\pi l_d}{L_e} \right) \begin{Bmatrix} \omega^2 \cos(\varphi + \beta) + \alpha \text{sen}(\varphi + \beta) \\ \omega^2 \text{sen}(\varphi + \beta) - \alpha \cos(\varphi + \beta) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

La ecuación (5.9) se puede expresar de la siguiente forma:

$$[M] \ddot{\delta} + [\widehat{C}] \dot{\delta} + [K_0] \delta = \frac{1}{2} y_0 \psi(t) \Delta k_\xi \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\varphi) \\ \text{sen}(2\varphi) \end{bmatrix} + f_d^* \tag{5.10}$$

Donde

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; \quad [\widehat{C}] = \omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}; \quad [K_0] = \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix}$$

$$f_d^* = m_d e \text{sen} \left(\frac{\pi l_d}{L_e} \right) \begin{Bmatrix} \omega^2 \cos(\varphi + \beta) + \alpha \text{sen}(\varphi + \beta) \\ \omega^2 \text{sen}(\varphi + \beta) - \alpha \cos(\varphi + \beta) \end{Bmatrix}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{\pi}\right)\cos\varphi - \left(\frac{2}{3\pi}\right)\cos(3\varphi) + \left(\frac{2}{5\pi}\right)\cos(5\varphi)$$

$$\ddot{\delta} = \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}; \quad \dot{\delta} = \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix}; \quad \delta = \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix}; \quad n(t)^* = \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\varphi) \\ \text{sen}(2\varphi) \end{bmatrix}$$

Seguindo la metodología propuesta por Fliess y Sira-Ramírez [37], la ecuación (5.10) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\int^{(2)} [M] \ddot{\delta} t^2 + \int^{(2)} [\widehat{C}] \dot{\delta} t^2 + \int^{(2)} [K_0] \delta t^2 = \int^{(2)} \left(\frac{1}{2} y_0 \psi(t) \Delta k_{\xi} n(t)^* + f_d^* \right) t^2 \quad (5.11)$$

Donde $\int^{(2)} \phi(t)$ son integrales iteradas en el tiempo de la forma $\int_0^t \int_0^{\chi_1} \dots \int_0^{\chi_{n-1}} \phi(\chi_n) d\chi_n \dots d\chi_1$ con $\int \phi(t) = \int_0^t \phi(\chi) d\chi$ y n un entero positivo.

La ecuación (5.11) se integra por partes y a través de un tratamiento matemático ésta puede expresarse como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} & [M] \left(\delta t^2 - 4 \int^{(2)} \delta t + 2 \int^{(2)} \delta \right) + [\widehat{C}] \left(\int^{(2)} \delta t^2 - 2 \int^{(2)} \delta t \right) + [K_0] \int^{(2)} \delta t^2 \\ & = \int^{(2)} \left(\frac{1}{2} y_0 \psi(t) \Delta k_{\xi} n(t)^* + f_d^* \right) t^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Como se puede observar, la ecuación (5.12) ahora está únicamente en función del vector de desplazamientos $\delta (y, x)$ el cual se considera que está disponible como dato de entrada.

Reordenando la ecuación (5.12):

$$\begin{aligned} & [M] \delta t^2 + \int^{(2)} \left([\widehat{C}] t^2 - 4[M] t \right) \delta + \int^{(2)} \left([K_0] t - 2[\widehat{C}] t + 2[M] \right) \delta - \int^{(2)} f_d^* t^2 \\ & = \frac{1}{2} \int^{(2)} y_0 \Delta k_{\xi} \psi(t) n(t)^* t^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Donde:

$$y_0 = \frac{mg}{k_0}$$

$$\Delta k_\xi = (1 - k_p) k_0$$

Donde el término Δk_ξ es el parámetro de pérdida de rigidez que experimenta el sistema a causa de una grieta transversal con profundidad k_p , parámetro que corresponde a una profundidad de grieta normalizada en función de las frecuencias naturales del rotor con grieta y sin grieta. Sustituyendo Δk_ξ en la ecuación (5.11) y despejando el parámetro k_p , se tiene como resultado una ecuación que únicamente es función del vector de desplazamientos (respuesta del sistema), donde los parámetros de masa, amortiguamiento, rigidez y fuerza de excitación del desbalance, son conocidos. Por lo tanto, el identificador algebraico o estimador de la profundidad de la grieta transversal del sistema queda expresado de la siguiente manera:

$$k_p = \frac{m(t)}{d(t)} \quad (5.14)$$

Donde:

$$\begin{aligned} m(t) = & -2[M]\delta t^2 + \int (-2[\widehat{C}]t^2 + 8[M]t)\delta + \int^{(2)} (-2[K_0]t + 4[\widehat{C}]t - 4[M])\delta \\ & + 2 \int^{(2)} f_d^* t^2 + mg \int^{(2)} \psi(t)n(t)^* t^2 \\ d(t) = & mg \int^{(2)} \psi(t)n(t)^* t^2 \end{aligned}$$

La ecuación (5.14) es válida siempre y cuando el denominador $d(t)$ sea distinto de cero. Se puede observar que el estimador k_p es función únicamente del vector de desplazamientos δ (respuesta vibratoria del sistema). De la ecuación (5.14) se puede observar que el valor del parámetro k_p es identificable algebraicamente sí, y solo sí, la trayectoria del sistema dinámico es persistente en el sentido establecido por Fliess y Sira-Ramírez [37]. Normalmente, esta condición se cumple al menos en un intervalo pequeño de tiempo $(t_0, t_0 + \epsilon)$, donde ϵ es un valor positivo y suficientemente pequeño de tiempo.

Por lo tanto, el parámetro k_p identificado a partir de la ecuación (5.14) es válido para:

$$k_p = \begin{cases} \text{arbitrario} & t \in [t_0, t_0 + \epsilon] \\ \frac{m(t)}{d(t)} & t > t_0 + \epsilon \end{cases}$$

Como se puede observar, a partir de la ecuación (5.14), el identificador algebraico de la profundidad de la grieta transversal es independiente de las condiciones iniciales del sistema, y depende únicamente del vector de desplazamientos δ del sistema, por lo que la respuesta de vibración son los datos de entrada para lograr la identificación de la grieta.

5.2.1 Simulación de identificador algebraico con aceleración constante

En esta sección se presenta el comportamiento en función del tiempo del identificador desarrollado, donde como dato de entrada se utilizó la respuesta de vibración obtenida de forma numérica del rotor con grieta del modelo matemático correspondiente a la ecuación (3.32). Para la simulación del comportamiento dinámico del rotor se utilizaron los datos del rotor de la tabla 4.1 y una frecuencia de muestreo de 10,000 muestras/s ($\Delta t = 1(10)^{-4}$ s), variando la posición angular del desbalance y profundidad de la grieta. La solución de las integrales en el tiempo de la ecuación (5.14) se realizó utilizando la regla trapezoidal [47].

En la figuras 5.7-5.13 se muestra el comportamiento del identificador para diferentes aceleraciones angulares del rotor ($\alpha = 10, 15, 25, 30, 50, 70, 100 \text{ rad/s}^2$) y profundidades de la grieta ($k_p = 0.95, 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 0.9999$), en las figuras se presenta la señal del rotor que se utilizó como dato de entrada en las direcciones y y x , así como, el comportamiento del identificador, aquí k_{pe} denota el valor correspondiente a la profundidad de grieta estimada o identificada, mientras que k_{pr} denota el valor real de la profundidad de grieta.

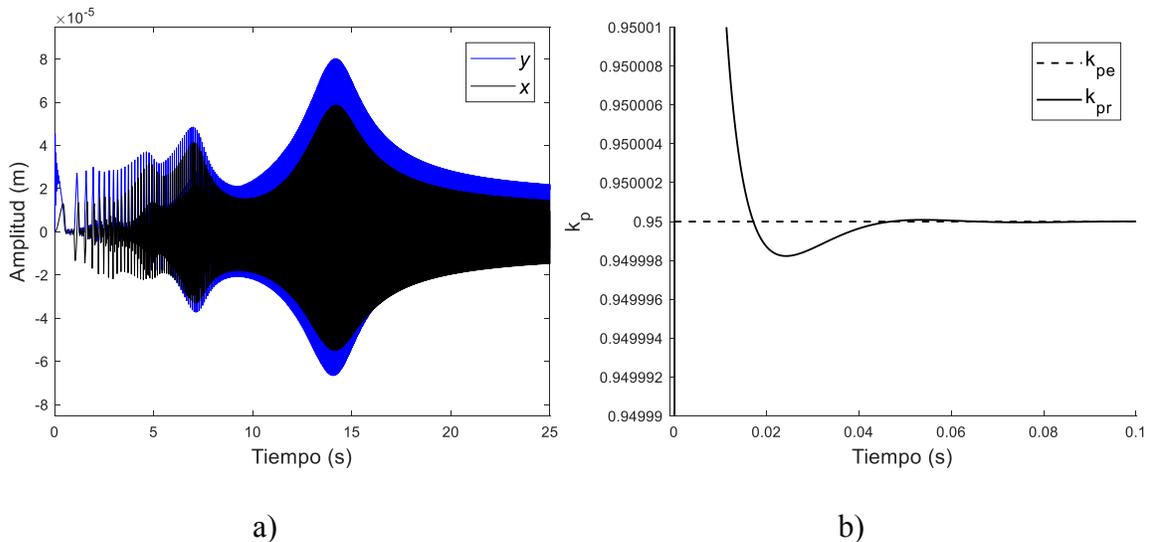
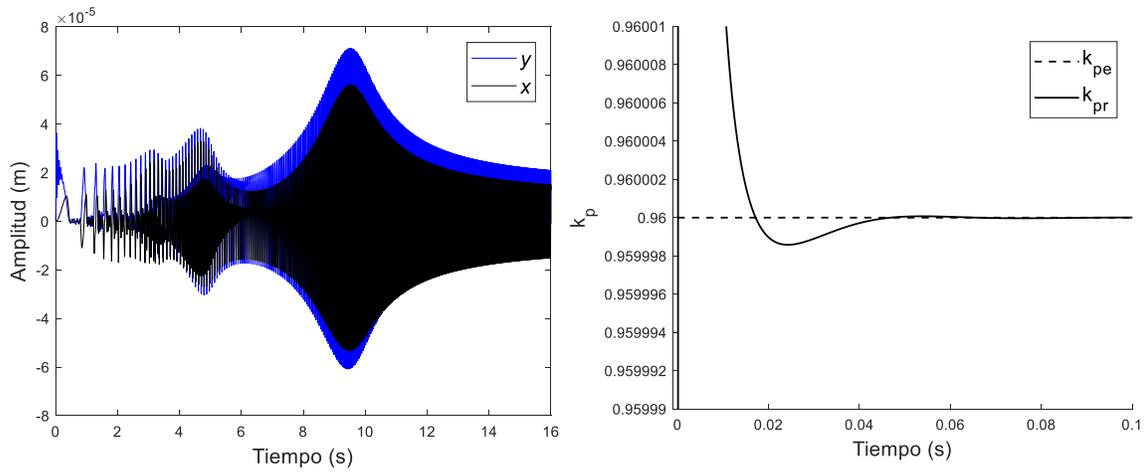


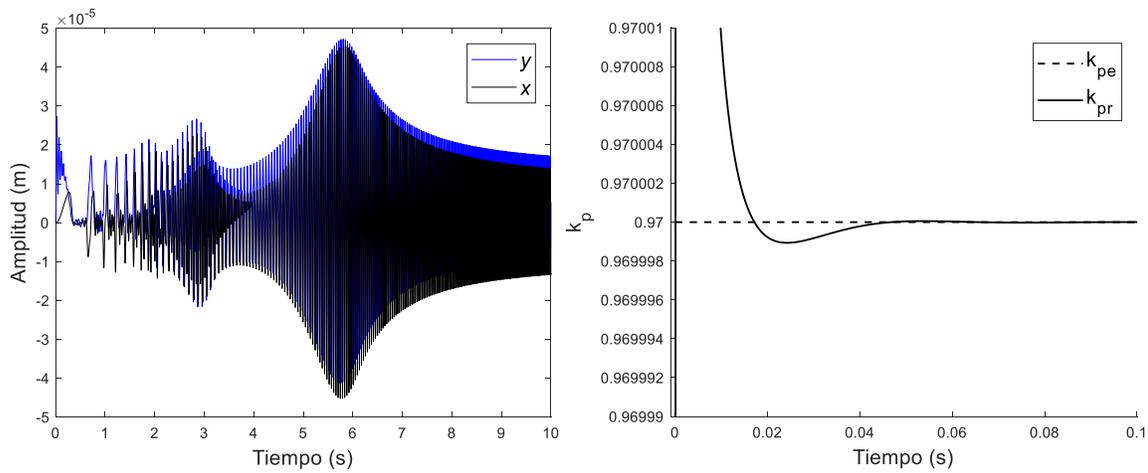
Figura 5.7 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\alpha = 10 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 0^\circ$ y $k_p = 0.95$, b) estimación de la profundidad k_p .



a)

b)

Figura 5.8 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\alpha = 15 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 90^\circ$ y $k_p = 0.96$, b) estimación de la profundidad k_p .



a)

b)

Figura 5.9 a) Respuesta vibratoria del rotor a $\alpha = 25 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 120^\circ$ y $k_p = 0.97$, b) estimación de la profundidad k_p .

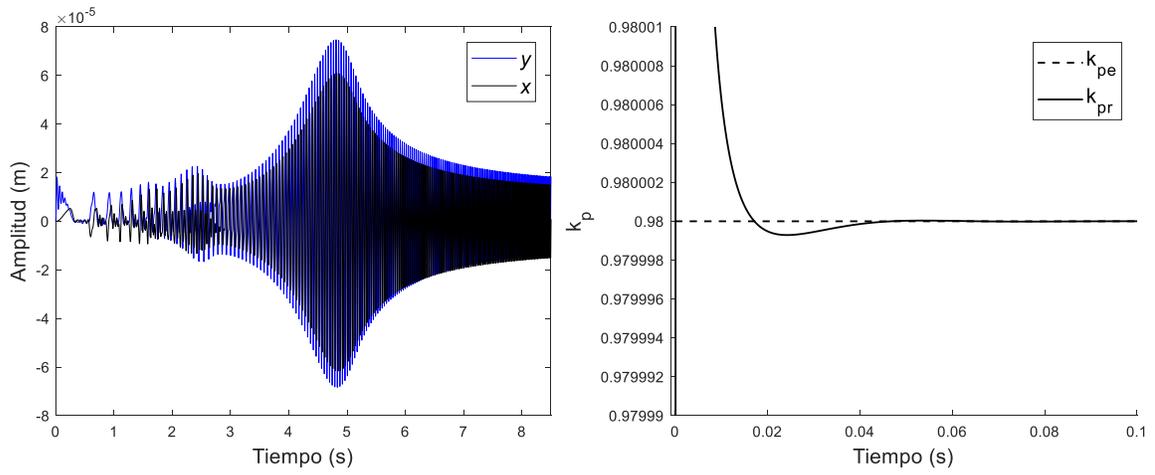


Figura 5.10 a) Respuesta vibratoria del rotor $\alpha = 30 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 0^\circ$ y $k_p = 0.98$, b) estimación de la profundidad k_p .

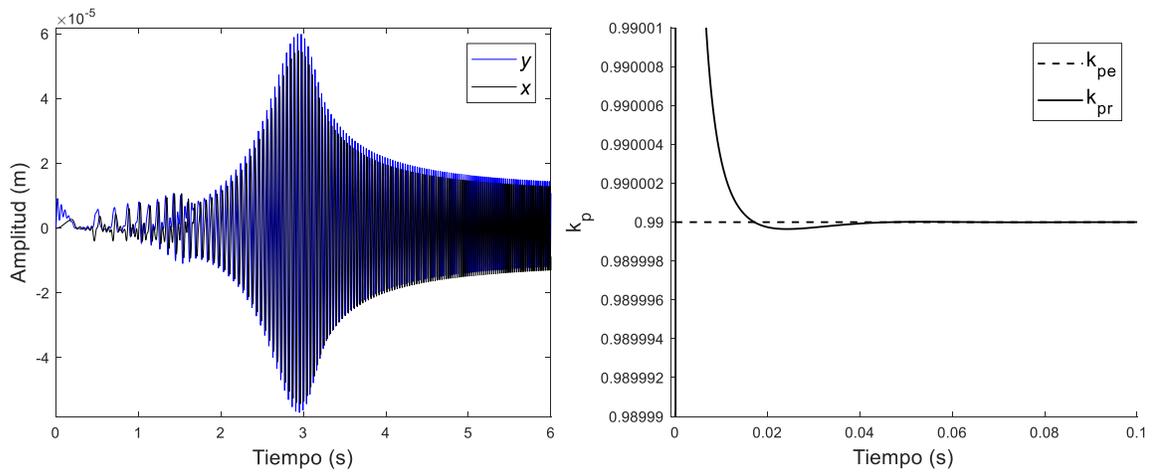


Figura 5.11 a) Respuesta vibratoria del rotor $\alpha = 50 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 45^\circ$ y $k_p = 0.99$, b) estimación de la profundidad k_p .

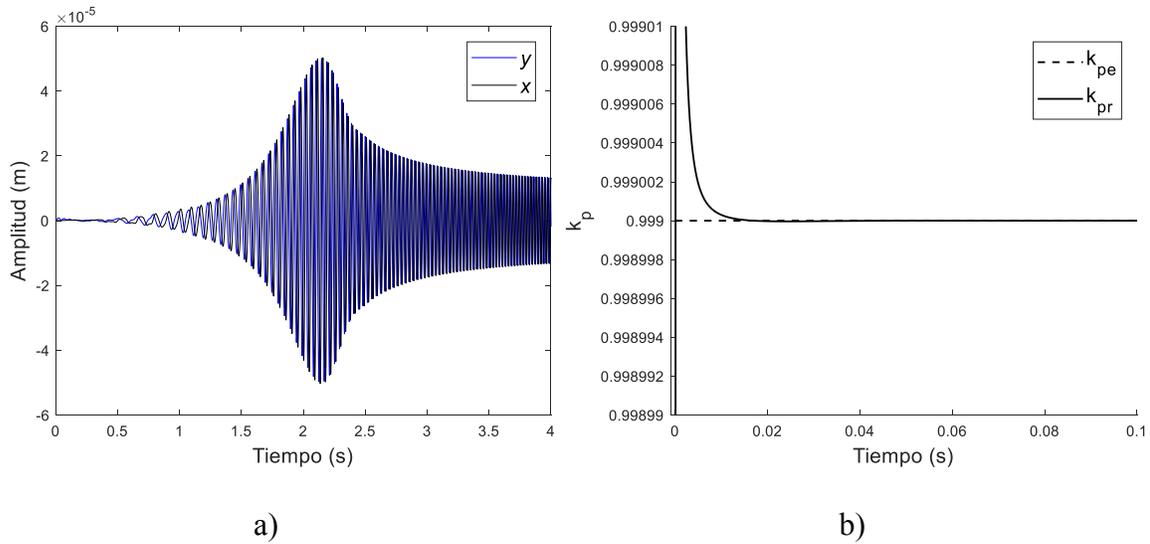


Figura 5.12 a) Respuesta vibratoria del rotor $\alpha = 70 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 225^\circ$ y $k_p = 0.999$, b) estimación de la profundidad k_p .

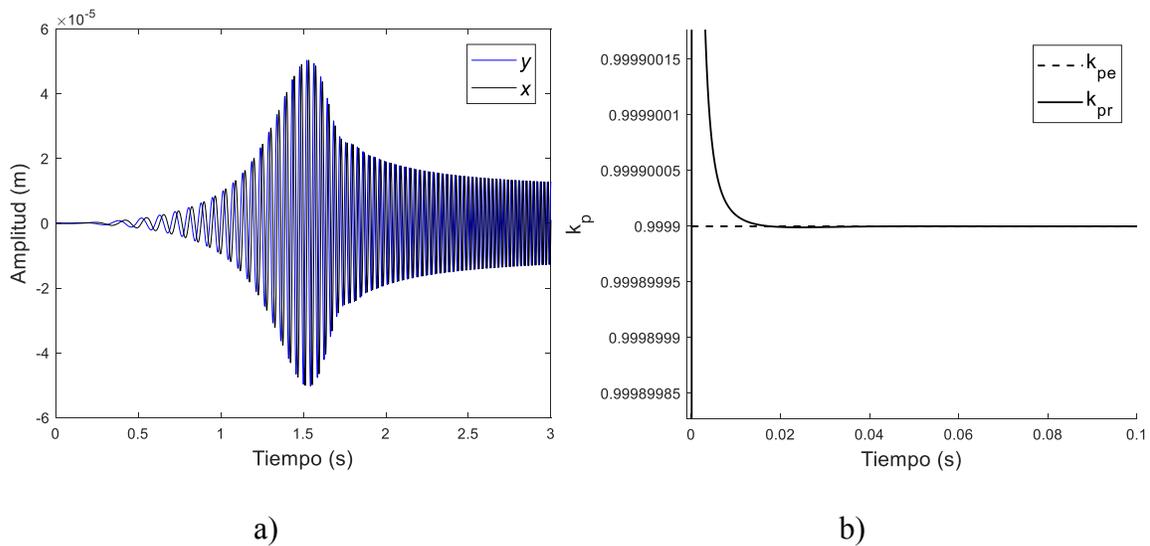


Figura 5.13 a) Respuesta vibratoria del rotor $\alpha = 100 \text{ rad/s}^2$, $\beta = 315^\circ$ y $k_p = 0.9999$, b) estimación de la profundidad k_p .

De acuerdo a las simulaciones mostradas en las la figuras 5.7-5.13, se puede observar que en todos los casos el identificador desarrollado converge al valor buscado de la profundidad de la grieta en un tiempo menor a 0.1 s, sin importar la aceleración angular del rotor, la posición angular del desbalance o la profundidad de la grieta, por lo que se concluye que el identificador detecta grietas de manera precisa.

5.3 Robustez del identificador algebraico a velocidad constante

5.3.1 Robustez ante la fuerza de excitación del desbalance

En esta sección se analiza el comportamiento del identificador algebraico a velocidad constante (ecuación 5.8) ante la fuerza de excitación del desbalance (5.15):

$$f_d = m_d e \omega^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi l_d}{L_e} \right) \begin{cases} \cos(\omega t + \beta) \\ \operatorname{sen}(\omega t + \beta) \end{cases} \quad (5.15)$$

De acuerdo con el identificador desarrollado para un rotor con grieta considerando velocidad constante, la fuerza de excitación debida al desbalance f_d es un parámetro necesario para la identificación de la profundidad k_p de la grieta presente en el sistema. Por lo tanto, el objetivo es analizar el comportamiento del identificador de grietas al no considerar este parámetro en la identificación en línea del parámetro de profundidad de la grieta k_p del sistema.

En la sección 5.1.1, para la identificación se toma como dato de entrada la respuesta del rotor obtenida de forma numérica considerando un desbalance de $5.1(10)^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$, parámetro del desbalance que debería ser considerado como dato de entrada en el identificador de la grieta, sin embargo, para este caso en particular en el identificador se consideró una fuerza de excitación $f_d = 0$.

En las figuras 5.14-5.17 se muestra el comportamiento del identificador para diferentes velocidades de rotación y una profundidad de grieta k_p en estado incipiente (0.999 y 0.9999).

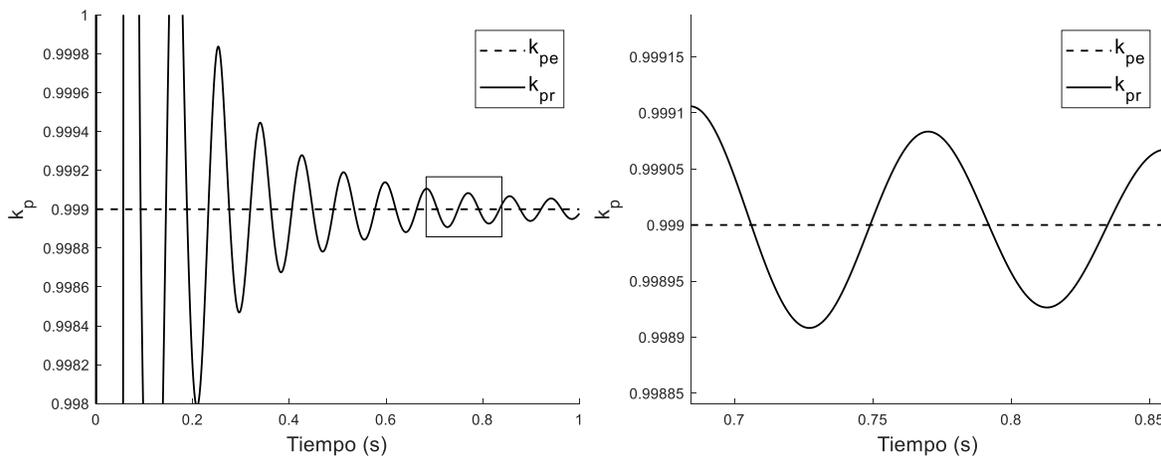


Figura 5.14 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 700 \text{ rpm}$, $k_p = 0.999$.

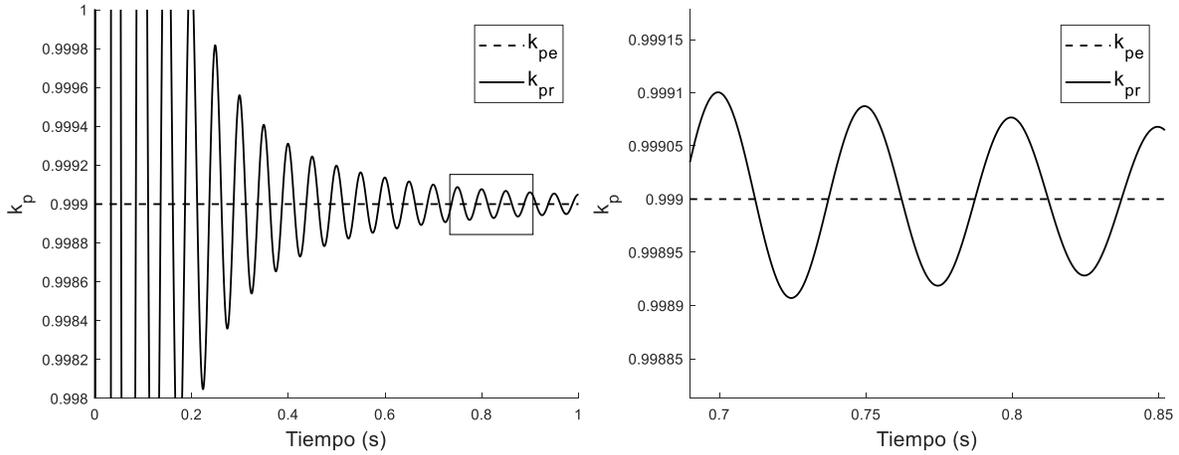


Figura 5.15 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 1200$ rpm, $k_p = 0.999$.

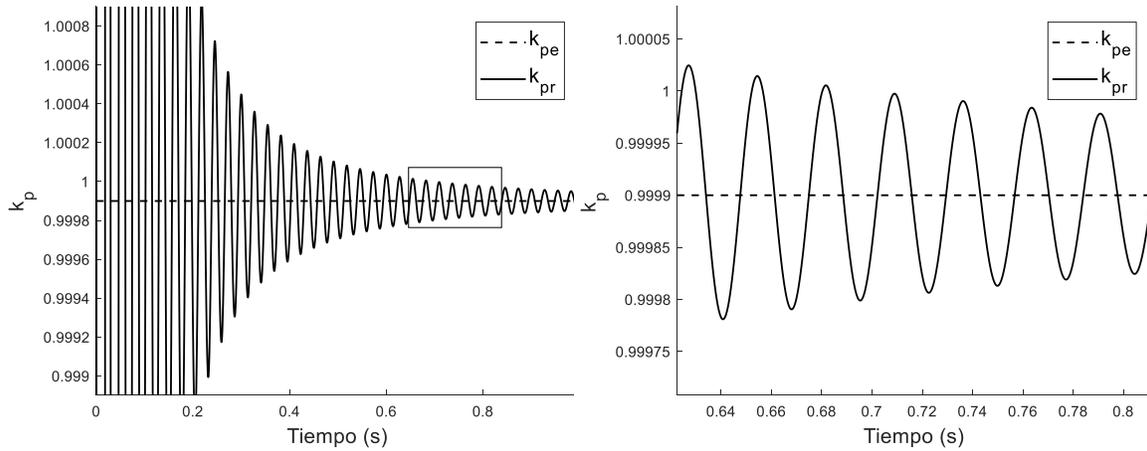


Figura 5.16 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 2200$ rpm, $k_p = 0.9999$.

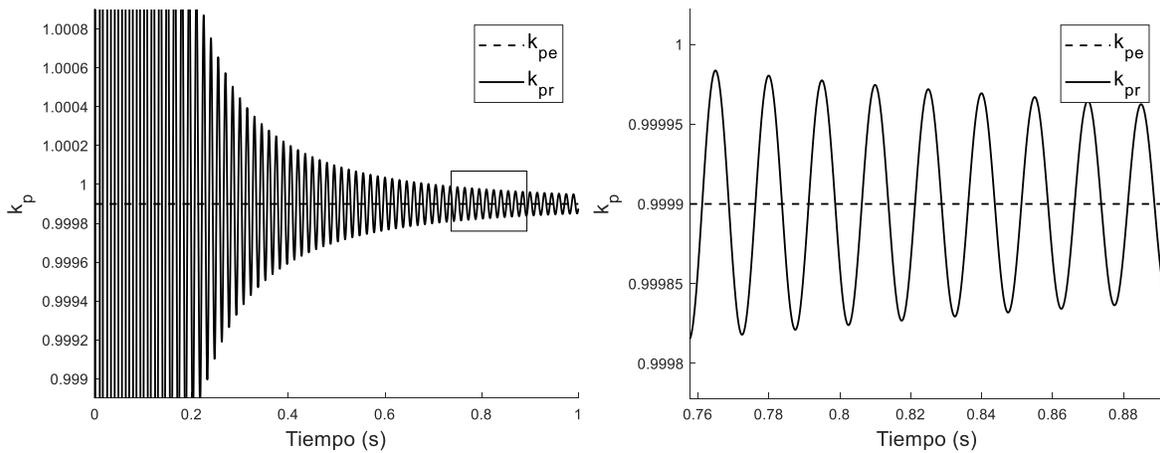


Figura 5.17 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 4000$ rpm, $k_p = 0.9999$.

De las figuras 5.14-5.17, se puede observar que, en todos los casos, el identificador al no tener el valor correcto del parámetro del desbalance como dato de entrada, presenta un comportamiento oscilatorio, sin embargo, éste converge al valor esperado en un tiempo mayor a 0.8 segundos, posterior a este tiempo el identificador oscila en un intervalo pequeño alrededor del valor real, sin llegar a estabilizarse. Es importante mencionar que aun cuando se presenta una grieta con profundidad k_p en etapa incipiente el identificador converge sin problemas al valor deseado.

Por otra parte, también se observa que el periodo de oscilación que presenta el comportamiento del identificador cuando éste converge al valor deseado corresponde al periodo de la velocidad de rotación del rotor.

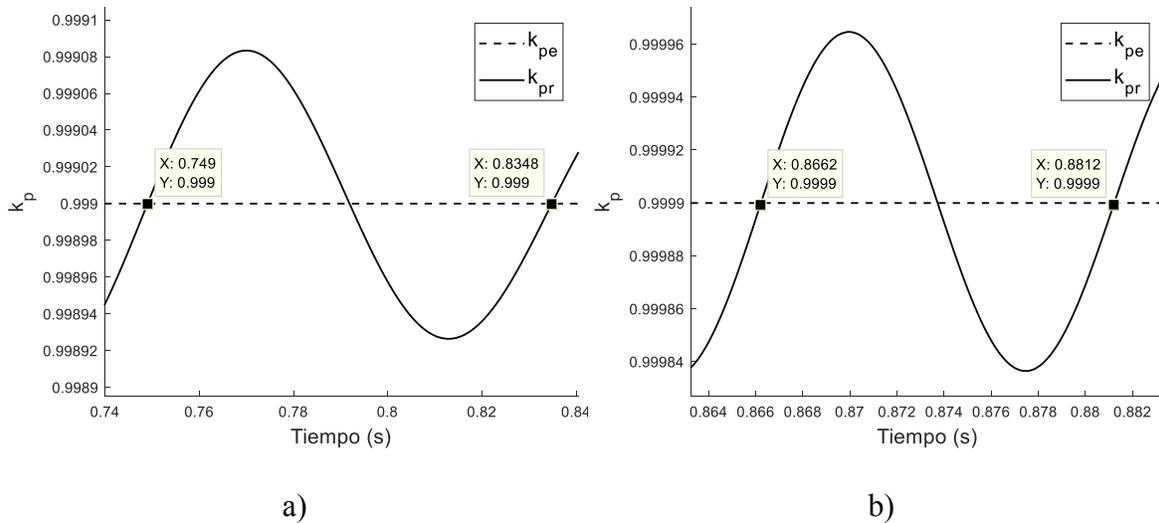


Figura 5.18 Periodo de oscilación del identificador a) figura 5.14, $\omega = 700$ rpm, $k_p = 0.999$, b) figura 5.14, $\omega = 4000$ rpm, $k_p = 0.9999$.

En la figura 5.18a y 5.18b se muestra un solo periodo del comportamiento oscilatorio del identificador para los casos particulares de las figuras 5.14 y 5.17 respectivamente. En ambos casos se puede observar que el periodo de oscilación del comportamiento del identificador corresponde con el periodo de la velocidad de rotación del rotor, 700 rpm (0.085) s y 4000 rpm (0.015 s) respectivamente.

5.3.2 Robustez ante perturbaciones en la respuesta vibratoria del rotor

En esta sección se presenta un análisis de la robustez del identificador algebraico propuesto (ecuación 5.8) ante perturbaciones en la respuesta vibratoria del rotor con grieta. Para la identificación, se tomó como dato de entrada la respuesta del rotor obtenida de forma numérica (ecuación 3.29) suponiendo una fuerza de excitación debida al desbalance, definida como f_d , más fuerzas adicionales de excitación de tipo asínrona, es decir:

$$fa = \begin{Bmatrix} Fq_1 \\ Fq_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fsen(s\omega t) \\ F \cos(s\omega t) \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Donde $s = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ denotan las componentes armónicas de la señal fundamental $1X$ respectivamente.

Cabe mencionar que en este análisis el modelo del identificador no considera como dato entrada las fuerzas de excitación, es decir para el identificador $f_d = 0$ y $f_a = 0$.

De acuerdo con lo anterior, el modelo matemático que representa el comportamiento dinámico de un rotor agrietado a velocidad constante, considerando las fuerzas de excitación de desbalance y armónicas, se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \left(\omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} \\ & = \frac{1}{2} \psi(t) \Delta k_\xi \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\omega t) & \text{sen}(2\omega t) \\ \text{sen}(2\omega t) & 1 - \cos(2\omega t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + me\omega^2 \text{sen}\left(\frac{\pi l_d}{L_e}\right) \begin{Bmatrix} \cos(\omega t + \beta) \\ \text{sen}(\omega t + \beta) \end{Bmatrix} \\ & + F_1 \begin{Bmatrix} \text{sen}(s_1\omega t) \\ \cos(s_1\omega t) \end{Bmatrix} + F_2 \begin{Bmatrix} \text{sen}(s_2\omega t) \\ \cos(s_2\omega t) \end{Bmatrix} + \dots + F_n \begin{Bmatrix} \text{sen}(s_n\omega t) \\ \cos(s_n\omega t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Donde F_1, F_2, \dots, F_n corresponden a fuerzas asíncronas con diferente magnitud y periodo s . La solución en tiempo discreto del modelo del rotor agrietado con fuerza asíncrona permite obtener una señal perturbada a velocidad constante en función del tiempo, que al aplicarle la transformada rápida de Fourier, se pasa del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, y se obtienen los armónicos presentes en la respuesta vibratoria del rotor. Para la simulación se consideró los datos del rotor de la tabla 4.1 y los valores de $F_1 = 8.5, F_2 = 8.3, F_3 = 8.2, F_4 = 8$ y $s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 4, s_4 = 5$. Para el análisis se consideró un rotor sin grieta y un rotor con grieta.

Rotor sin grieta

En la figura 5.19 se muestra la comparación de la respuesta de vibración en el eje y del rotor sin grieta con fuerzas de excitación asíncronas con la respuesta del mismo rotor también en la dirección y pero sin fuerzas de excitación asíncronas, las cuales se obtienen al solucionar la ecuación (5.17) mediante el método de integración de Newmark con los datos de la tabla 4.1.

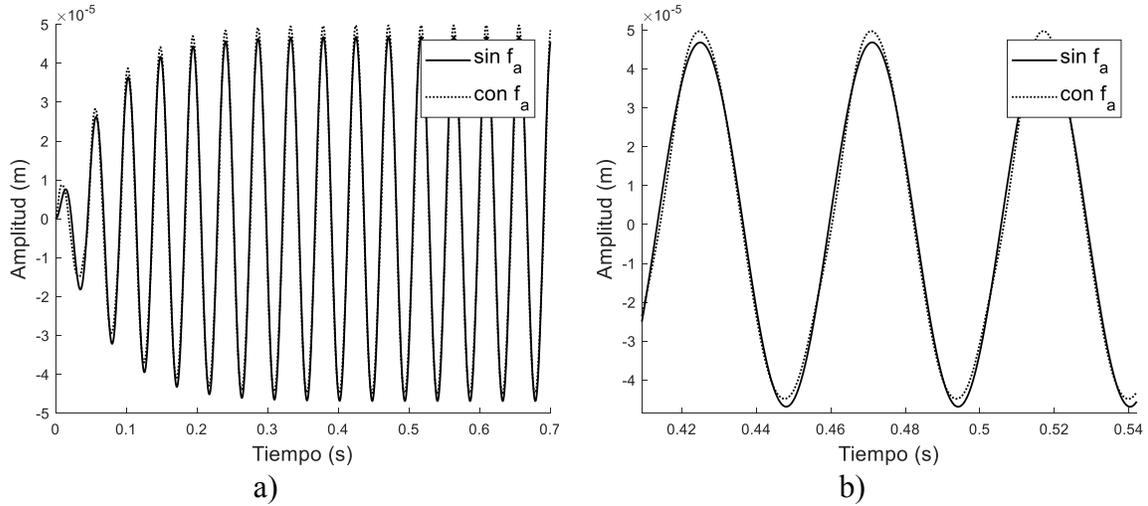


Figura 5.19 Respuesta vibratoria del rotor con y sin fuerzas asíncronas, eje y , a $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 1$.

En la figura 5.19 se puede observar un incremento en la amplitud en la respuesta de vibración del rotor cuando se consideran los efectos de las fuerzas asíncronas. Por otra parte, en la figura 5.20 se presenta la transformada de Fourier de la señal de la figura 5.19, se puede observar que cuando se consideran las fuerzas asíncronas como fuente de excitación adicional en la respuesta del rotor se presentan las armónicas $2X$, $3X$, $4X$, ..., nX , mientras que cuando solo se considera como fuerza de excitación la fuerza del desbalance, la respuesta de vibración del rotor presenta únicamente la componente $1X$.

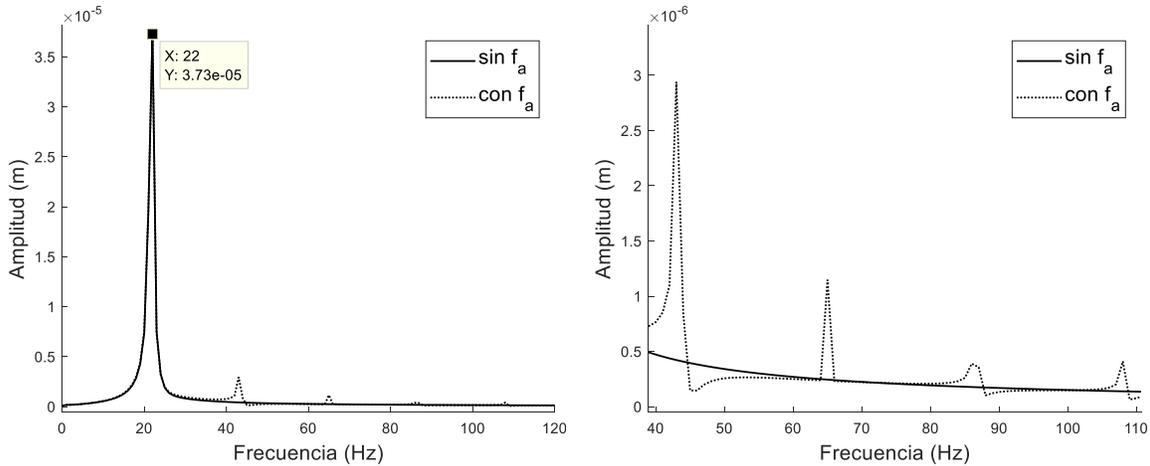


Figura 5.20 Transformada de Fourier de la señal 5.19, armónicas $1X$, $2X$, $3X$, $4X$ y $5X$ en la respuesta vibratoria del rotor, $1x=21.66$ Hz.

De manera similar, en la figura 5.21 se muestra la comparación de la respuesta de vibración en el eje x del rotor sin grieta con fuerzas de excitación asíncronas con la respuesta del mismo rotor también en la dirección x pero sin fuerzas de excitación asíncronas, se puede observar que el comportamiento es similar al que se presenta en la respuesta de vibración de la figura 5.19.

Por otra parte, en la figura 5.22 se presenta la transformada de Fourier de la señal de la figura 5.21, se puede observar que cuando se consideran las fuerzas asíncronas en las fuerzas de excitación, en la respuesta del rotor se presentan las armónicas $2X$, $3X$, $4X$, ..., nX , mientras que cuando solo se considera como fuerza de excitación la fuerza del desbalance, la respuesta de vibración del rotor presenta únicamente la componente $1X$.

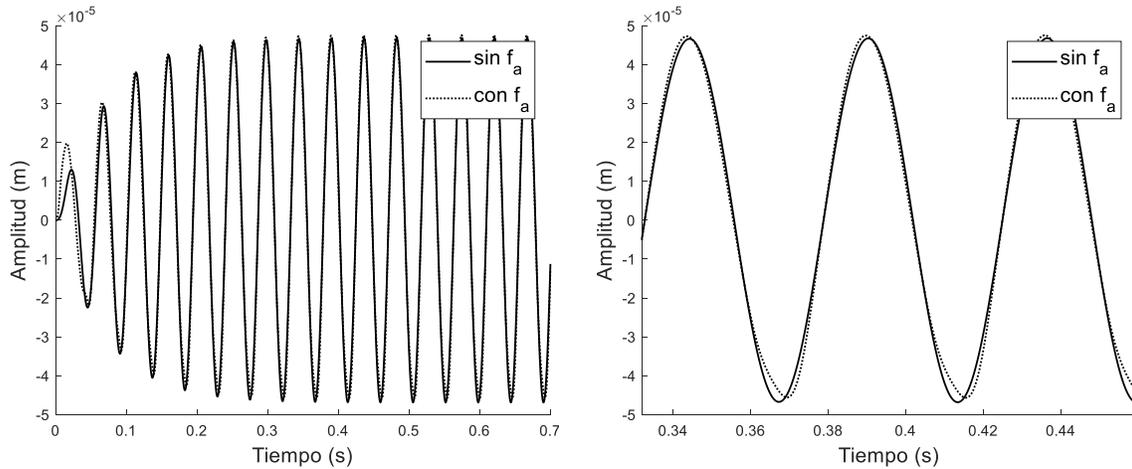


Figura 5.21 Respuesta vibratoria del rotor con y sin fuerzas asíncronas, eje x , a $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 1$.

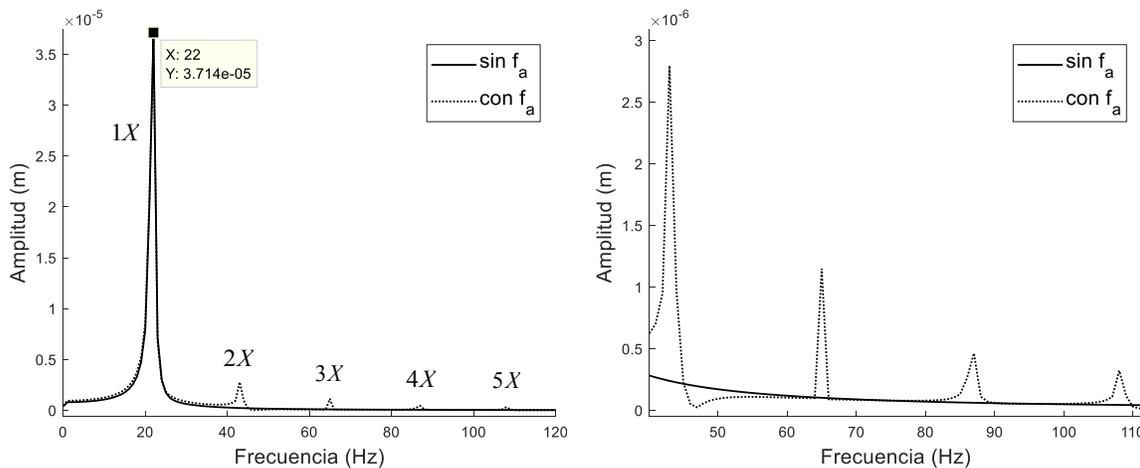


Figura 5.22 Transformada de Fourier de la señal 5.21, armónicas $1X$, $2X$, $3X$, $4X$ y $5X$ en la respuesta vibratoria del rotor, $1x=21.66$ Hz.

De acuerdo con lo anterior se puede concluir que las armónicas presentes en la respuesta del rotor son función de las fuerzas de excitación que estén presentes en el sistema.

Tomando como dato de entrada la respuesta del rotor en la dirección y y x cuando se consideran fuerzas de excitación asíncronas, figuras 5.19 y 5.21 respectivamente, se analiza el comportamiento del identificador propuesto (ecuación 5.8). Cabe recordar que el modelo del identificador no considera como dato entrada las fuerzas de excitación, es decir para el identificador $f_d = 0$ y $f_a = 0$.

De acuerdo con lo anterior, en la figura 5.23 se muestra el comportamiento en función del tiempo del identificador, se puede observar que el identificador presenta un comportamiento tipo oscilatorio, éste converge al valor deseado $k_p = 1$, en aproximadamente 0.8 segundos manteniendo una oscilación en valores cercanos al valor real.

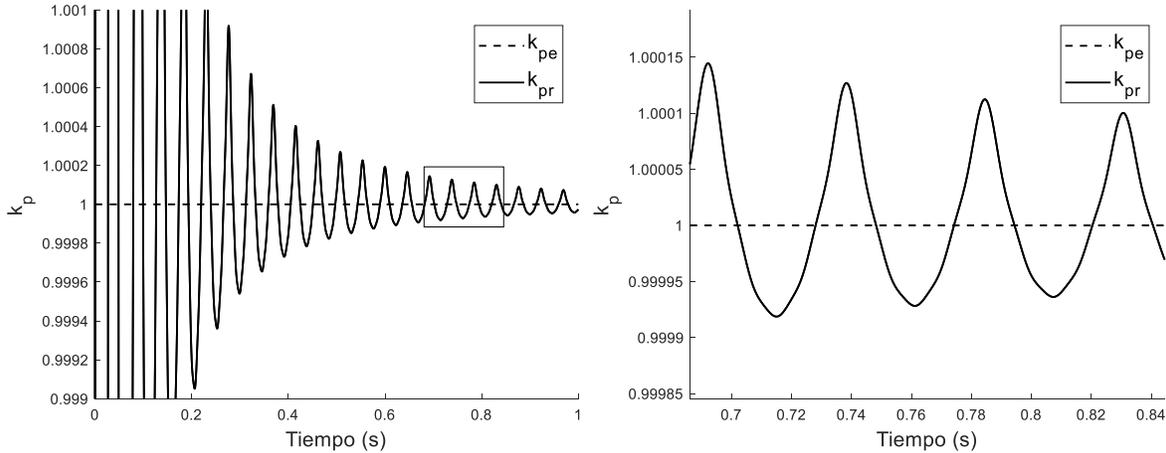


Figura 5.23 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 1$.

Rotor con grieta

En las figuras 5.24 y 5.25 se muestra la comparación de la respuesta del rotor en la dirección y y x respectivamente, de un rotor agrietado al considerar fuerzas de excitación asíncronas y una profundidad de grieta $k_p = 0.999$ con la respuesta del rotor de las figuras 5.19 y 5.21 respectivamente.

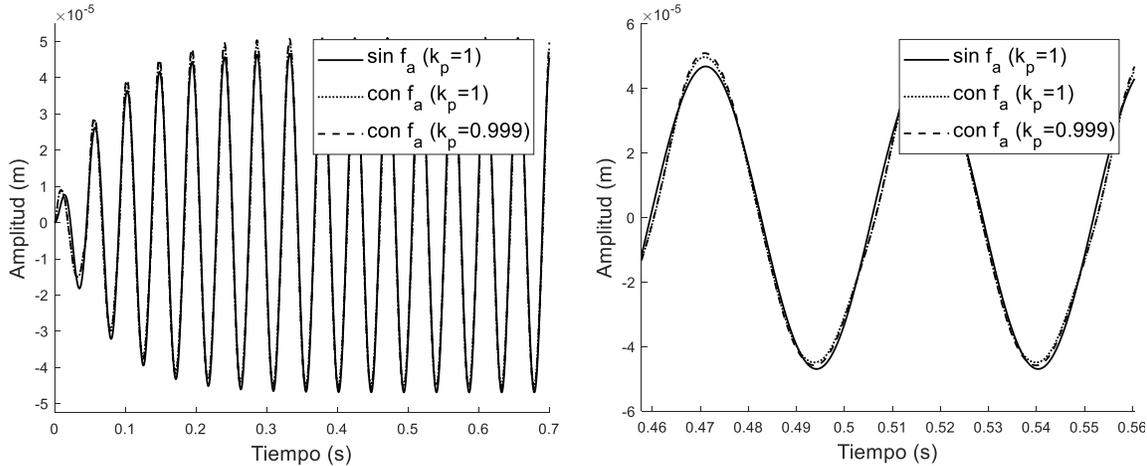


Figura 5.24 Respuesta vibratoria del rotor con y sin fuerzas asíncronas, eje y , a $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 0.999$.

En estas figuras se observa que la respuesta vibratoria para el caso donde el rotor tiene una grieta de profundidad $k_p = 0.999$ y fuerzas de excitación asíncrona presenta una amplitud de vibración mayor con respecto a los dos casos anteriores.

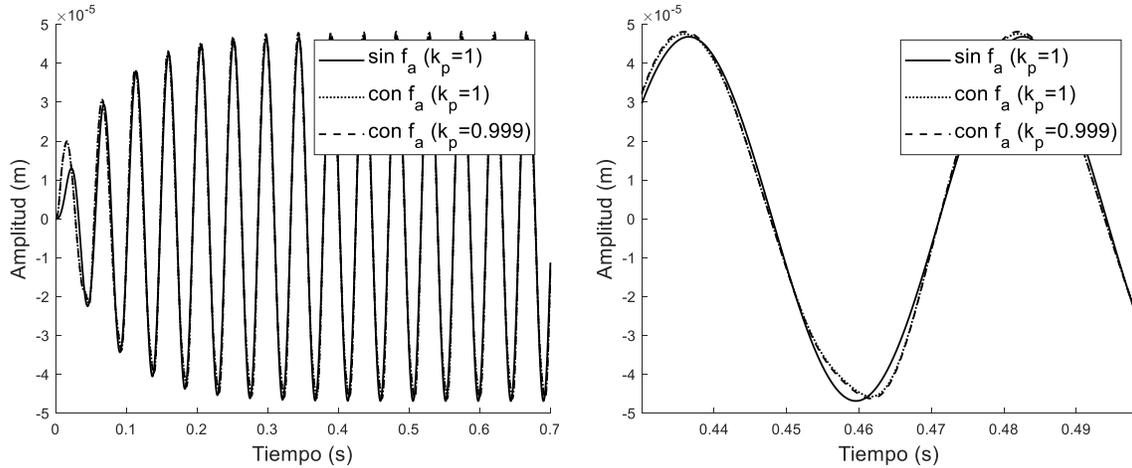


Figura 5.25 Respuesta vibratoria del rotor con y sin fuerzas asincronas, eje x, a $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 0.999$.

Por otra parte, en las figuras 5.26 y 5.27 se muestran las transformadas de Fourier correspondientes a la respuesta de vibración de las figuras 5.24 y 5.25 respectivamente

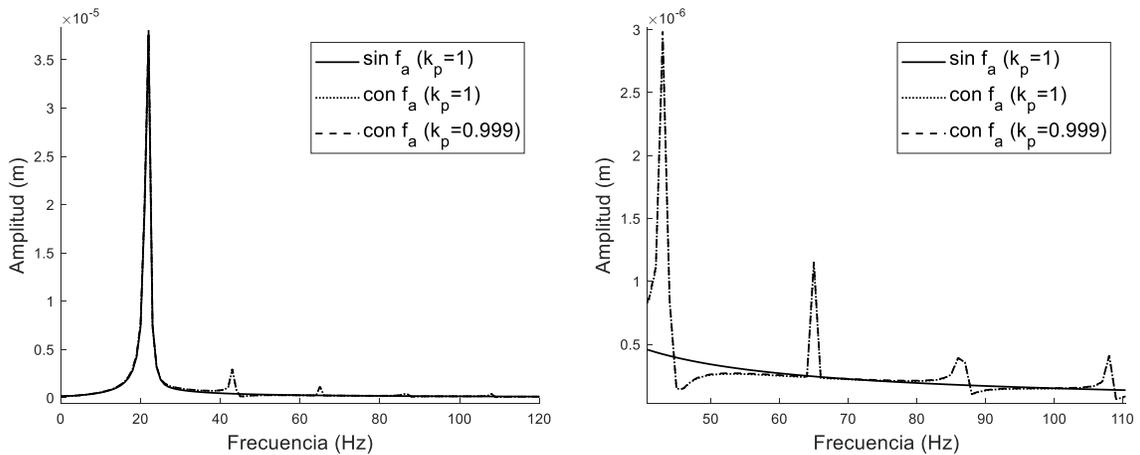


Figura 5.26 Transformada de Fourier de la señal 5.24, armónicas 1X, 2X, 3X, 4X y 5X en la respuesta vibratoria del rotor, $1x=21.66$ Hz.

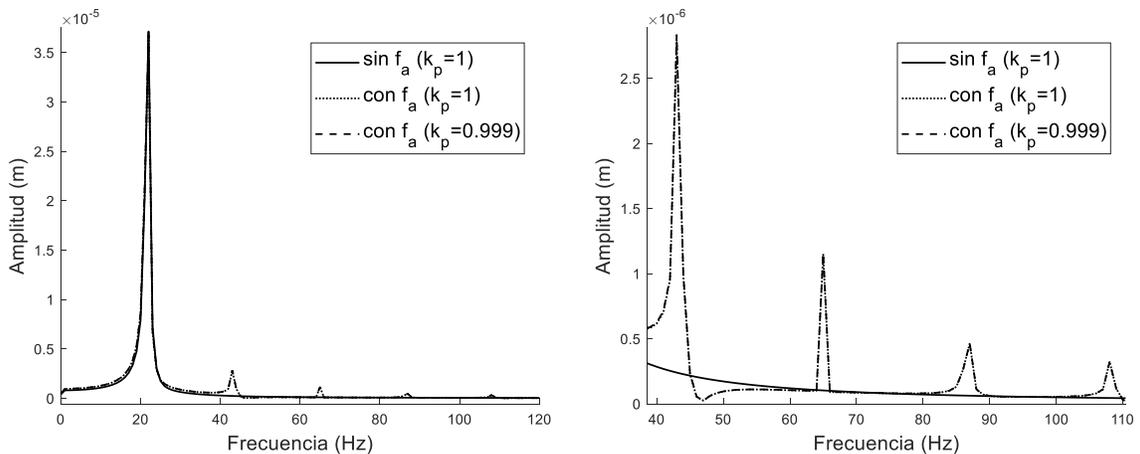


Figura 5.27 Transformada de Fourier de la señal 5.25, armónicas 1X, 2X, 3X, 4X y 5X en la respuesta vibratoria del rotor, $1x=21.66$ Hz.

En ambas figuras se puede observar que cuando se consideran las fuerzas asíncronas en las fuerzas de excitación, así como, el efecto de la grieta, en la respuesta del rotor se presentan las armónicas $2X$, $3X$, $4X$, ..., nX , mientras que cuando solo se considera como fuerza de excitación la fuerza del desbalance, la respuesta de vibración del rotor presenta únicamente la componente $1X$.

Es importante observar que las amplitudes de vibración de las componentes armónicas son muy similares para un rotor agrietado con fuerzas asíncronas que para un rotor sin grieta con fuerzas asíncronas. Por lo que el comportamiento del identificador en el tiempo para la respuesta de vibración correspondiente al rotor con grieta y fuerzas de excitación asíncronas es similar al que se presenta en la figura 5.23.

En la figura 5.28 se muestra el comportamiento del identificador de profundidad de la grieta, para el caso de un rotor con grieta y fuerzas de excitación asíncronas. Cabe recordar que el modelo del identificador no considera como dato entrada las fuerzas de excitación, es decir para el identificador $f_d = 0$ y $f_a = 0$. Se puede observar que el identificador converge al valor de profundidad de la grieta $k_p = 0.999$ a pesar de las perturbaciones generadas por las fuerzas de excitación asíncronas y de desbalance. La identificación se realiza en tiempo aproximado de 0.8 segundos manteniendo una oscilación en valores cercanos al valor deseado.

De acuerdo con los resultados obtenidos se concluye que el comportamiento periódico del identificador algebraico se observa en todos los casos donde está presente una fuerza de excitación de tipo asíncrona en la respuesta de vibración y no se consideran en el desarrollo del identificador, este mismo comportamiento se presenta al no considerar el desbalance en la identificación. Es importante mencionar, que la adición de una fuerza asíncrona a un periodo s permite simular algún fenómeno presente en el rotor que pueda estar fuera de control del usuario en un sistema rotor-cojinete.

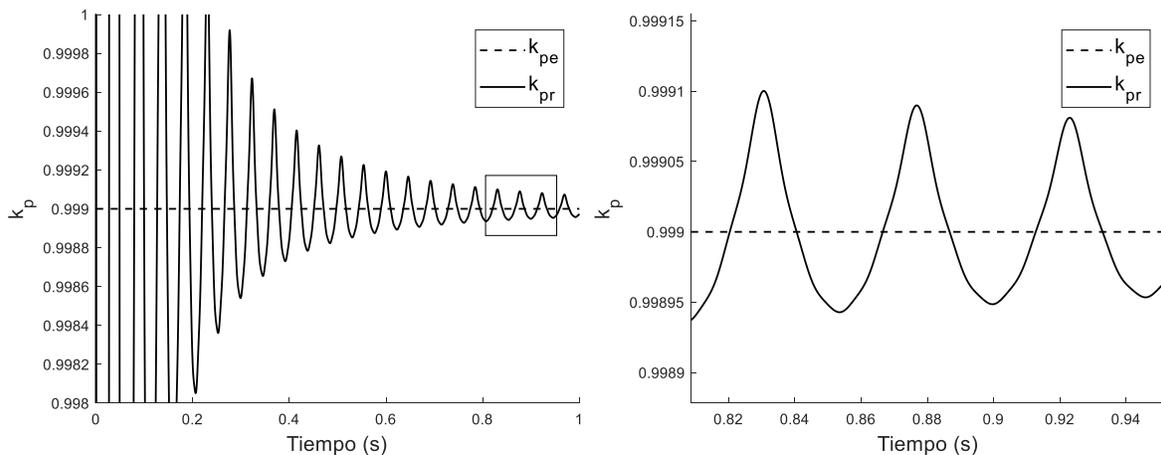


Figura 5.28 Identificación de la profundidad de la grieta, $\omega = 1300$ rpm, $k_p = 0.999$.

Capítulo 6: Pruebas experimentales

El presente estudio tiene como objetivo identificar parámetros atribuibles a la presencia de una grieta transversal en un sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott. En los capítulos anteriores se presentó el modelo matemático que describe la dinámica de un rotor Jeffcott desbalanceado con una grieta transversal cerca del disco inercial. Asimismo, a partir del modelo matemático que simula el comportamiento dinámico del rotor y a través de un tratamiento matemático, se desarrolló un nuevo modelo matemático de identificación el cual es capaz de identificar la profundidad k_p o en dado caso la pérdida de rigidez Δk_ξ .

En esta sección se presentan las pruebas experimentales realizadas durante el desarrollo del presente trabajo. Las pruebas experimentales se llevaron a cabo en el laboratorio de rotodinámica del CENIDET. Las pruebas experimentales se realizaron en un rotor de la marca Bently Nevada modelo RK4, el rotor consta de un disco inercial montado sobre el eje de acero en la parte central y soportado por dos rodamientos en sus extremos. Para el análisis se consideró un rotor con una grieta abierta, es decir, el rotor cuenta con una grieta transversal que no presenta el comportamiento típico de respiro. La grieta abierta fue generada de manera artificial con una segueta de 0.25 mm de espesor, lo que hace que la grieta se comporte más como una ranura o una asimetría localizada en el eje.

6.1 Pruebas experimentales en un rotor Jeffcott con grieta abierta

Para el análisis experimental se implementó un rotor con grieta abierta, se utilizó un eje de acero 4140, al cual se le realizó un corte transversal sobre la sección del rotor. El corte se realizó utilizando una segueta con un espesor de 0.25 mm (segueta del tipo triple cero), este se hizo de manera cuidadosa con el fin de no producir una deformación permanente (pandeo) sobre el eje, lo cual fue verificado midiendo la posición del eje utilizando sensores de desplazamiento.

En el presente trabajo se realizaron dos conjuntos de pruebas (Caso 1 y 2) las cuales tienen la misma configuración, sin embargo, se consideraron distintas profundidades de la grieta en el rotor. A continuación, se muestra una descripción del equipo experimental utilizado en la realización de las pruebas de laboratorio.

6.1.1 Banco de pruebas experimentales

En la figura 6.1 se muestra una fotografía del banco experimental utilizado. El rotor consta de un disco inercial montado en el centro del eje, el cual está soportado por dos rodamientos en sus extremos. Las características físicas del rotor experimental se enlistan en la tabla 6.1

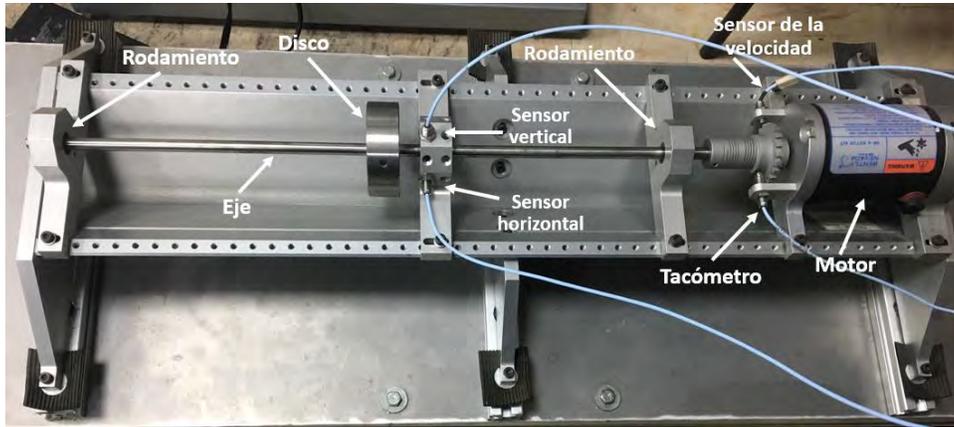


Figura 6.1 Banco de pruebas experimentales, rotor tipo Jeffcott.

Tabla 6.1 Características físicas del rotor experimental.

Característica	Dimensión
Longitud del eje	0.51 m
Diámetro del disco	0.075 m
Diámetro del eje	0.01 m
Espesor del disco	0.025 m
Masa del disco	0.7875 kg
Masa conjunta del rotor	0.9437 kg
Excentricidad de la masa de desbalance	0.03 m

6.2 Pruebas experimentales: Caso 1

En la figura 6.2 se muestra el arreglo experimental empleado para el desarrollo de las pruebas experimentales.

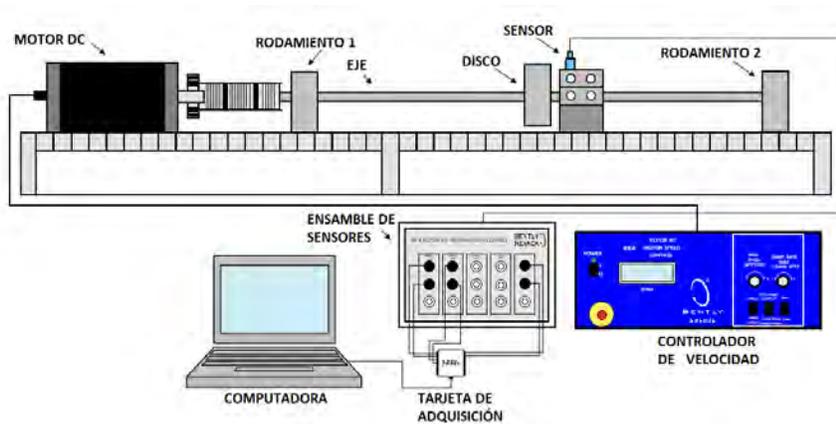


Figura 6.2 Arreglo utilizado en el desarrollo de las pruebas experimentales.

6.2.1 Parámetros del rotor

El identificador algebraico propuesto requiere como datos de entrada el vector de desplazamientos δ , es decir, la respuesta vibratoria del sistema en dirección del eje y y x , esta puede obtenerse a través de la medición de la respuesta de vibración del rotor utilizando sensores de desplazamiento. Sin embargo, de forma adicional se requiere conocer los parámetros del rotor experimental como amortiguamiento, rigidez, y masa del sistema. Para la adquisición de los datos se utilizó una tarjeta NI modelo 6009 con un muestreo de 10,000 muestras/s, es decir, un incremento de tiempo de $\Delta t = 1(10)^{-4}$ s. La metodología utilizada para obtener el amortiguamiento y rigidez del sistema es la siguiente:

1. Balanceo del equipo experimental con el fin de tener un control de la respuesta de vibración en el rotor.
2. Adquisición de diagramas de Bode del rotor experimental balanceado (*run-out*).
3. Adquisición de diagrama de Bode colocando un desbalance conocido. Es importante mencionar que la primera corrida sin el desbalance añadido corresponde a la vibración residual o *run-out* del sistema, mientras que la segunda corrida corresponde a la suma de esta vibración residual más el efecto del desbalance añadido.
4. Resta de los diagramas de Bode correspondientes al run-out y el run-out más el desbalance controlado.
5. Obtención de los valores RMS a partir del método de ancho de banda [50] para el cálculo de los parámetros de amortiguamiento y rigidez en cada dirección del rotor (y y x).
6. Cálculo del factor de amortiguamiento [50] correspondientes a cada dirección del rotor experimental empleando el método de ancho de banda.

En la figura 6.3 se muestra el diagrama de Bode obtenido del rotor experimental correspondiente a los ejes y y x . En la figura 6.3 se pueden observar las resonancias correspondientes a los dos ejes mencionados, mientras que en el diagrama de Bode de la figura 6.3a solo se presenta la resonancia correspondiente a la dirección y .

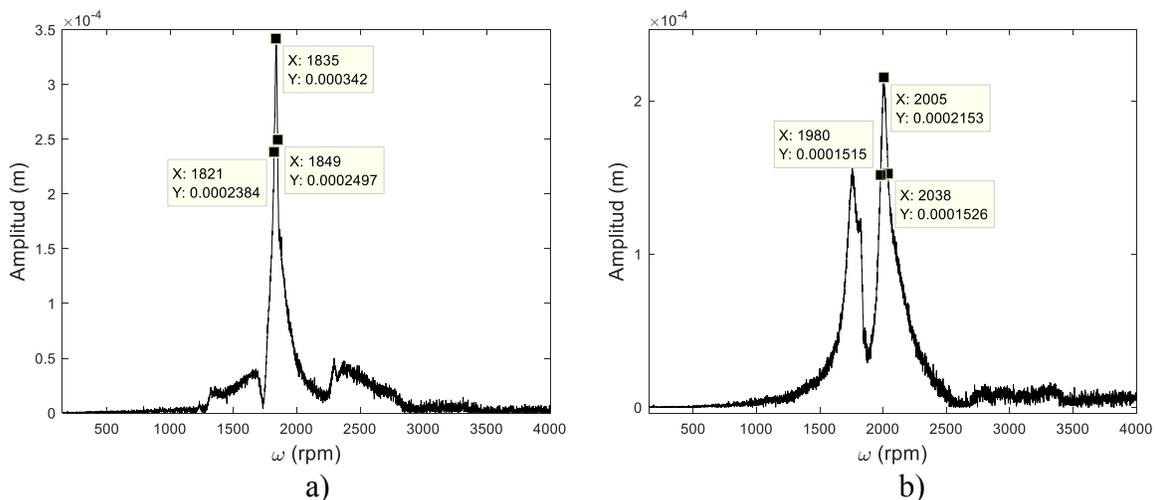


Figura 6.3 Valores RMS del diagrama de Bode de rotor experimental a) eje y , b) eje x .

A partir de los valores RMS obtenidos de los diagramas de la figura 6.3, tomando como referencia la amplitud en cada una de las resonancias en los ejes y y x , se obtienen los valores del factor de amortiguamiento en el eje y , $\zeta_y = 0.0076$ y en el eje x , $\zeta_x = 0.0144$ a partir de los cuales se calcula el amortiguamiento del sistema. La rigidez en y y x se obtiene una vez que se conocen la frecuencia natural ω_n para cada dirección, así como la masa del rotor.

Tabla 6.2 Parámetros del rotor experimental, Caso 1.

Parámetro	Dimensión
m	0.9437 kg
c_x	5.7046 Ns/m
c_y	2.7563 Ns/m
k_x	41602.5458 N/m
k_y	34846.8157 N/m

La confiabilidad de los datos del rotor experimental al momento de utilizarlos como datos conocidos en el identificador algebraico es un punto importante, para ello se realizaron simulaciones numéricas con la finalidad de comparar los parámetros calculados de amortiguamiento y rigidez del rotor. Esto se realizó con el fin de validar tanto la plataforma computacional, así como la veracidad de los datos obtenidos. Para ello se realizaron dos comparaciones de la respuesta del rotor con distintos valores del desbalance, ya que si se calculan nuevamente estos parámetros puede existir una ligera o amplia variación dependiendo de la exactitud del diagrama resultante al momento de descontar el *run-out*. En las figuras 6.4 y 6.5 se muestra la comparación del comportamiento dinámico del rotor experimental, con el comportamiento dinámico obtenido de forma numérica utilizando los datos calculados de la tabla 6.2, para dos masas de desbalance diferentes.

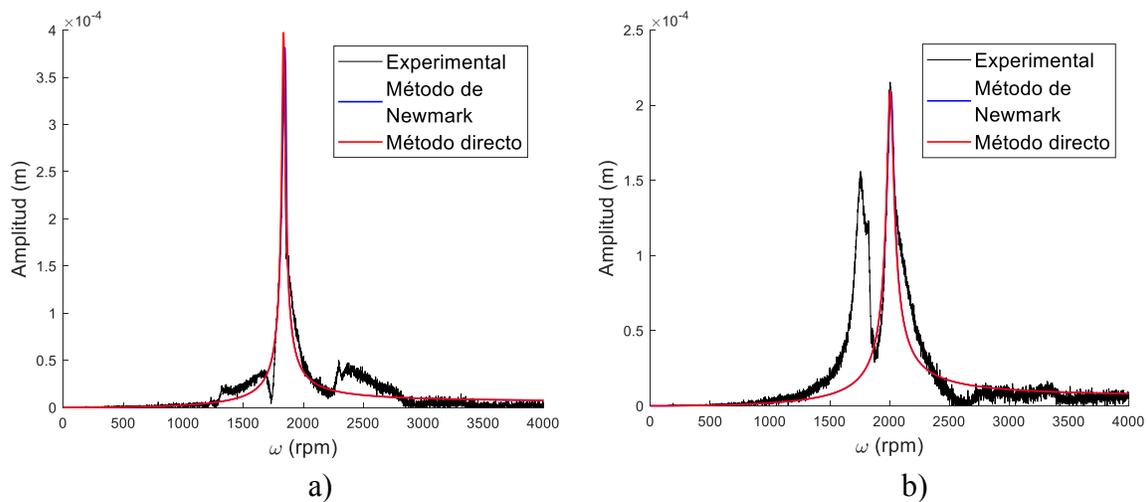


Figura 6.4 Comparación de los diagramas de Bode experimental y numérico $m_d = 0.19 \text{ gr}$, $\beta=0^\circ$ y $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$, a) eje y , b) eje x .

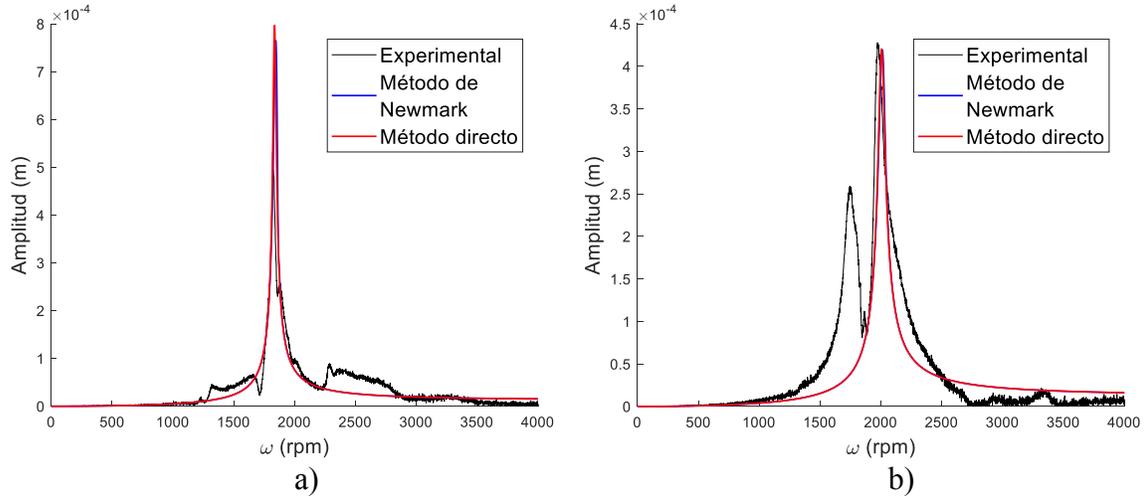


Figura 6.5 Comparación de los diagramas de Bode experimental vs numérico $m_d = 0.381 \text{ gr}$, $\beta=0^\circ$ y $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$, a) eje y, b) eje x.

En las figuras 6.4 y 6.5 se puede observar que el diagrama de Bode experimental en ambas direcciones presenta un comportamiento cualitativo y cuantitativo similar al diagrama de Bode obtenido de forma numérica. También en las figuras 6.4 y 6.5, se muestra que el comportamiento dinámico del rotor obtenido de forma numérica utilizando el método directo, es exactamente igual al obtenido con el método de integración directa de Newmark. De acuerdo con esto, se puede concluir que los datos calculados del rotor son confiables, puesto que la plataforma computacional es capaz de reproducir la respuesta del rotor experimental.

6.2.2 Filtrado de la señal experimental

En el Capítulo 4 se analizó la respuesta del rotor a través de la transformada rápida de Fourier; a partir de este análisis se observó que la señal de un rotor agrietado tiene armónicas que se atribuyen tanto al desbalance como a la grieta transversal.

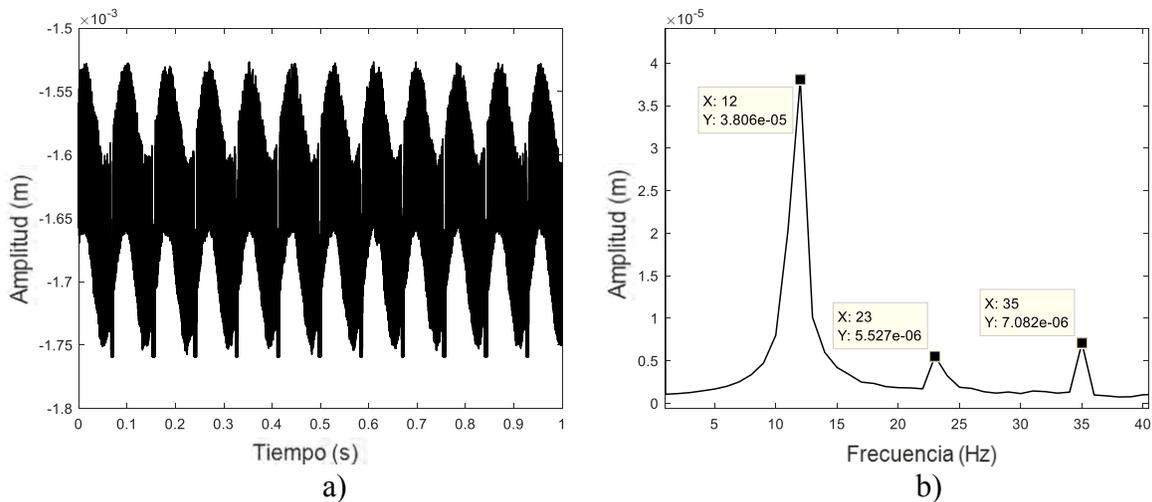


Figura 6.6 a) Respuesta de vibración del rotor, 700 rpm (11.66 Hz), eje y, b) Transformada de Fourier.

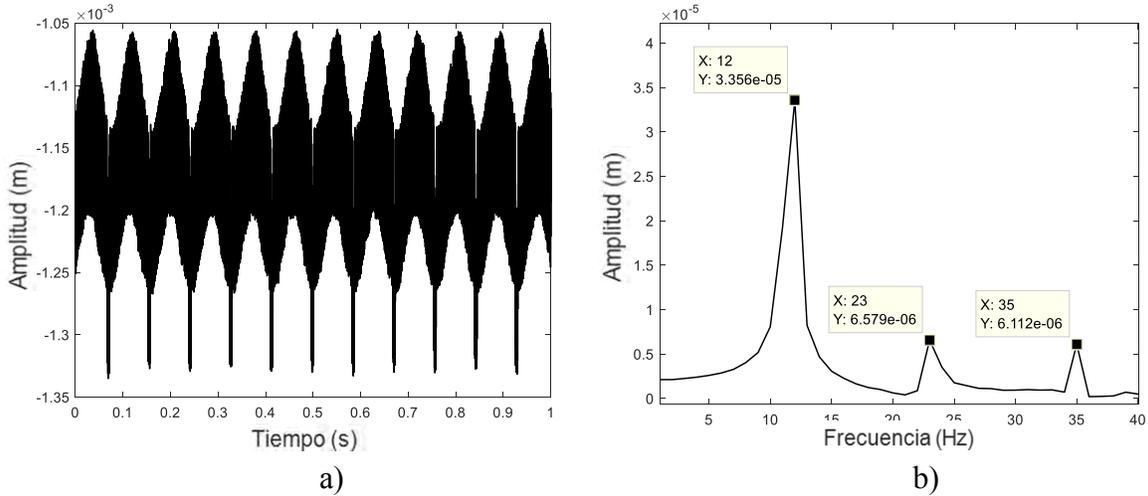


Figura 6.7 a) Respuesta de vibración del rotor, 700 rpm (11.66 Hz), eje x, b) Transformada de Fourier.

En las figuras 6.6 y 6.7 se muestran las respuestas de vibración a velocidad constante en los ejes y y x del rotor, así como, su respectiva transformada de Fourier. Cabe mencionar que la respuesta de vibración de las figuras 6.6 y 6.7 corresponde a un rotor con grieta con desbalance como fuerza de excitación. Se puede observar que la respuesta vibratoria del rotor experimental presenta armónicas asíncronas adicionales a la armónica fundamental, armónicas que son consecuencia de la grieta en el rotor más otras fuerzas de excitación desconocidas.

Por otra parte, con la finalidad de tener una señal de la respuesta del rotor con menos ruido, se utilizó un filtro pasa bandas (*Bandpass*), asegurando que el filtro no eliminara información relevante (amplitud de las armónicas) de la señal de la respuesta de vibración del rotor, su principal característica es que filtra la señal en un rango de frecuencias o velocidades específicas. En la figura 6.8 se muestra la respuesta de vibración filtrada para el rotor con grieta. La señal de la figura 6.8a corresponde a la respuesta de vibración del rotor en el eje y (figura 6.6a), mientras que la señal de la figura 6.8b corresponde a la respuesta del rotor en el eje x (figura 6.7a).

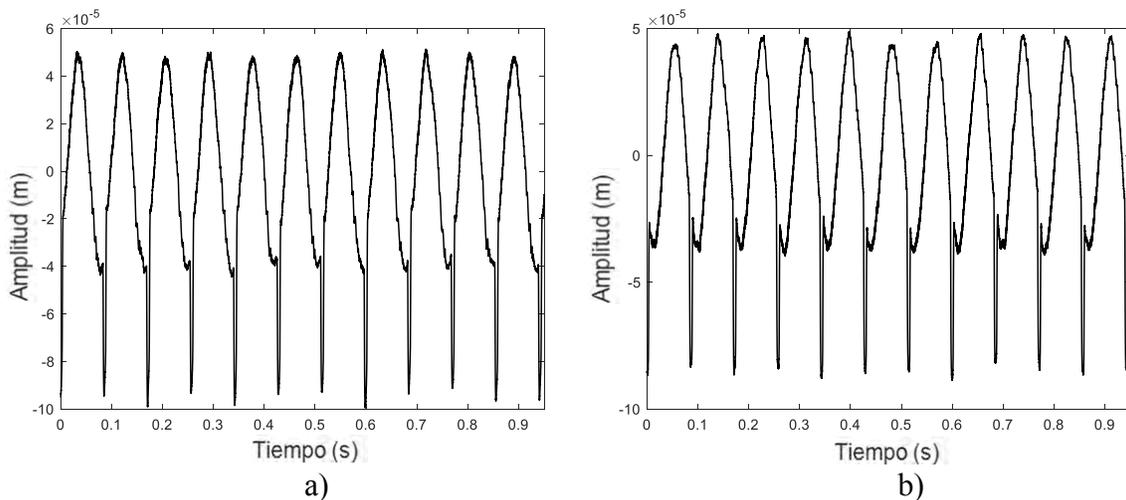


Figura 6.8 Señal filtrada del rotor, rango de filtrado de 1-350 Hz, $\omega = 700$ rpm (11.66 Hz) a) eje y, b) eje x.

Asimismo, en la figura 6.9 se muestra la comparación de la transformada de Fourier que resulta de la respuesta de vibración de la señal con filtro (figura 6.8), con la señal sin filtro, figura 6.6a y 6.7a. En la figura 6.9 se puede observar que en ambos casos la señal filtrada presenta las mismas armónicas que la señal no filtrada, concluyendo que filtro no elimina información importante de la respuesta de vibración.

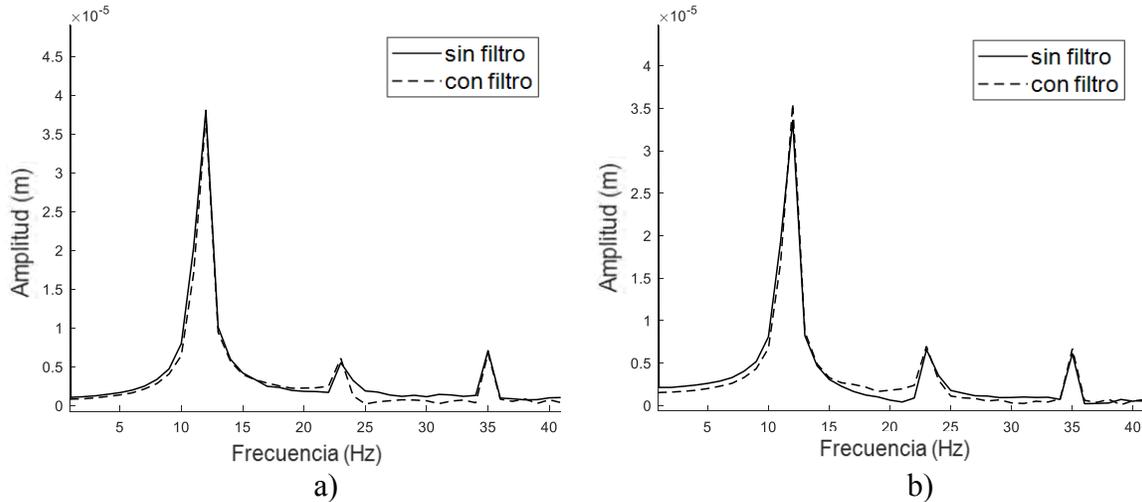


Figura 6.9 Comparación de la transformada de Fourier con filtro y sin filtro a) eje y, b) eje x.

6.2.3 Identificación de la profundidad de la grieta en el rotor experimental

La configuración de la grieta transversal se ilustra en la figura 6.10, donde h corresponde a la profundidad dimensional de la grieta y D al diámetro del eje. La ubicación de la grieta es a 2 cm de la posición del disco inercial. Como se mencionó anteriormente, la profundidad h se varió en la sección transversal del rotor de forma progresiva. Por cuestiones de seguridad la profundidad máxima con la cual se trabajó fue hasta alcanzar el 41% de profundidad relativa h/D .

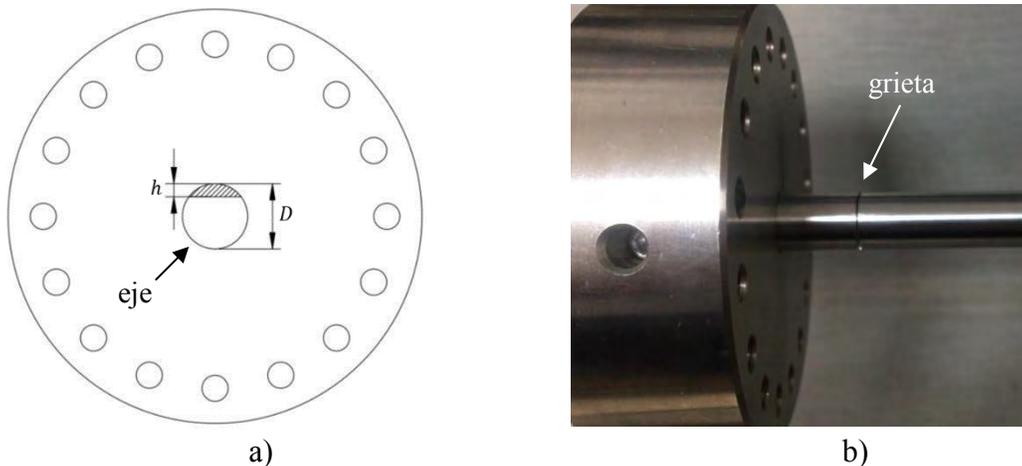


Figura 6.10 a) Sección transversal del eje agrietado, b) ubicación de la grieta en la longitud del eje del rotor.

Para el análisis, se consideró diferentes profundidades de grieta y se realizó la identificación de ésta en diferentes velocidades del rotor en un intervalo de $700 \leq \omega \leq 6700$ rpm, con incrementos de velocidad de 500 rpm. Cabe recordar que el modelo del identificador no considera como dato entrada las fuerzas de excitación, es decir para el identificador $f_d = 0$ y $f_a = 0$.

Como ejemplo, se muestran los resultados obtenidos de la identificación de la profundidad k_p para el caso particular del rotor cuando la grieta se consideró con una profundidad normalizada de $h/D=0.32$. En las figuras 6.11 a la 6.23 se muestran las respuestas de vibración en las direcciones y y x del rotor que se consideraron como datos de entrada para la identificación de la profundidad de la grieta, asimismo, también se muestra el comportamiento del identificador, las gráficas correspondientes se denotan por los incisos a) y b) respectivamente.

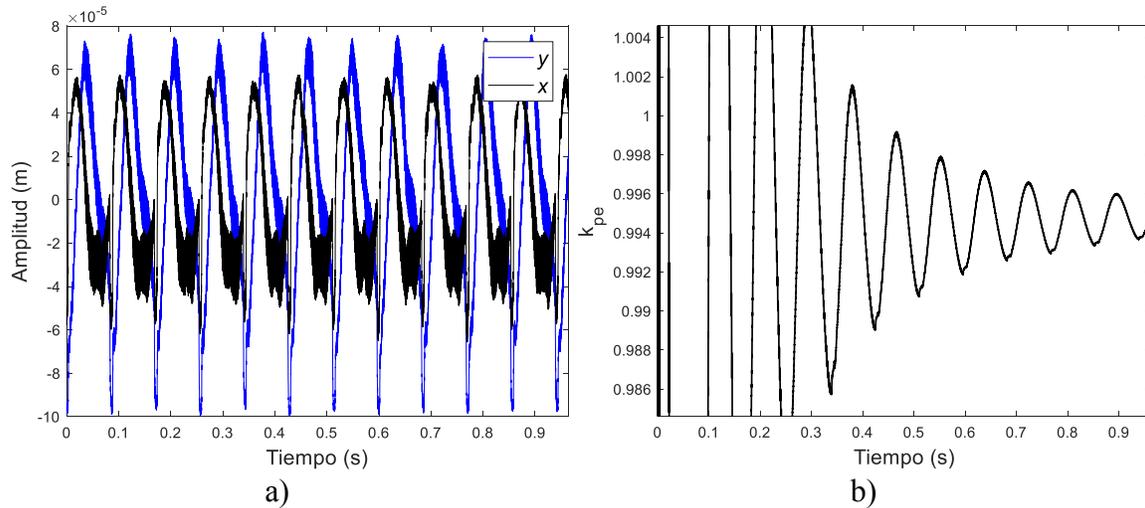


Figura 6.11 Prueba, $\omega = 700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

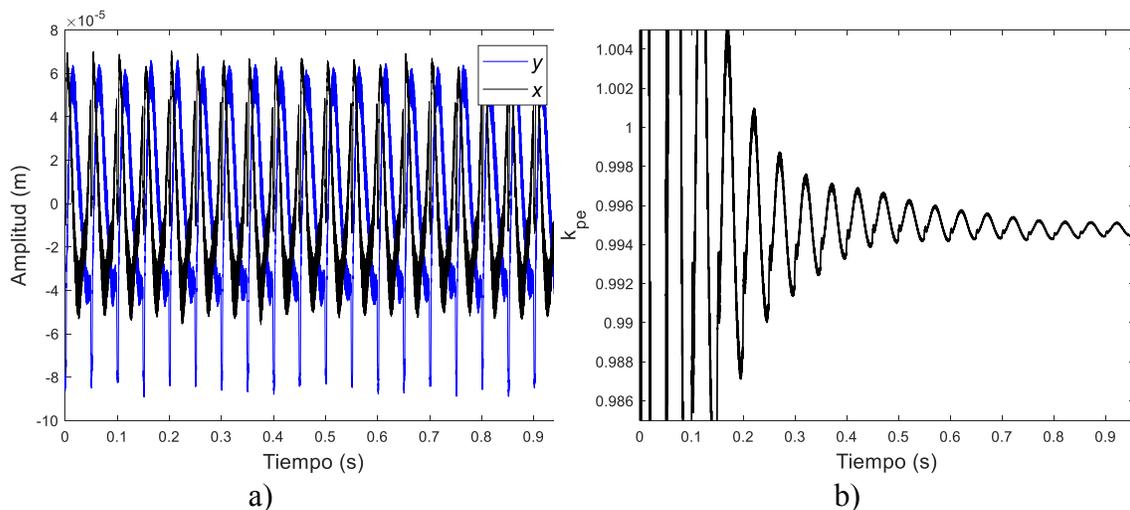


Figura 6.12 Prueba, $\omega = 1200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

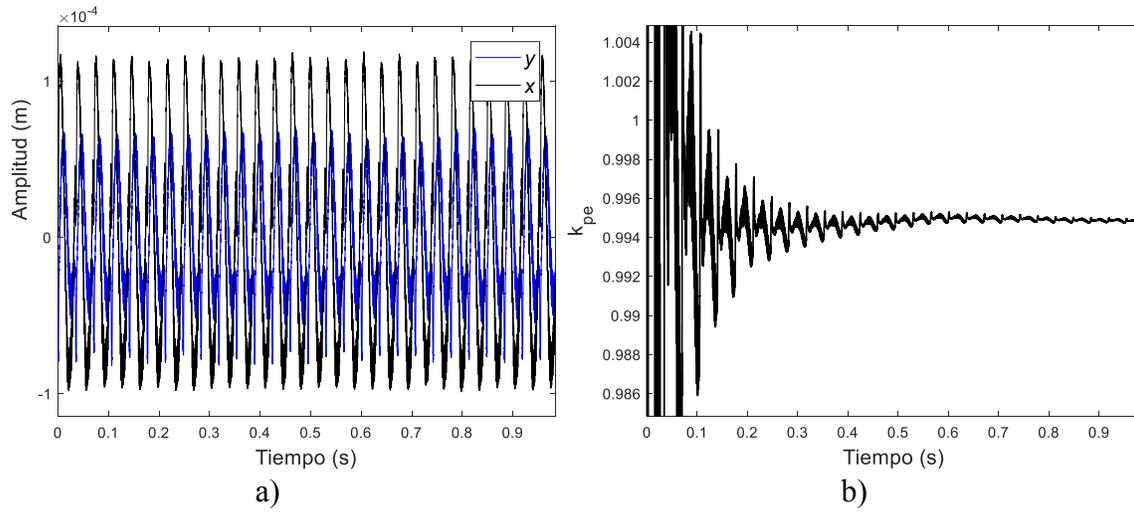


Figura 6.13 Prueba, $\omega = 1700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

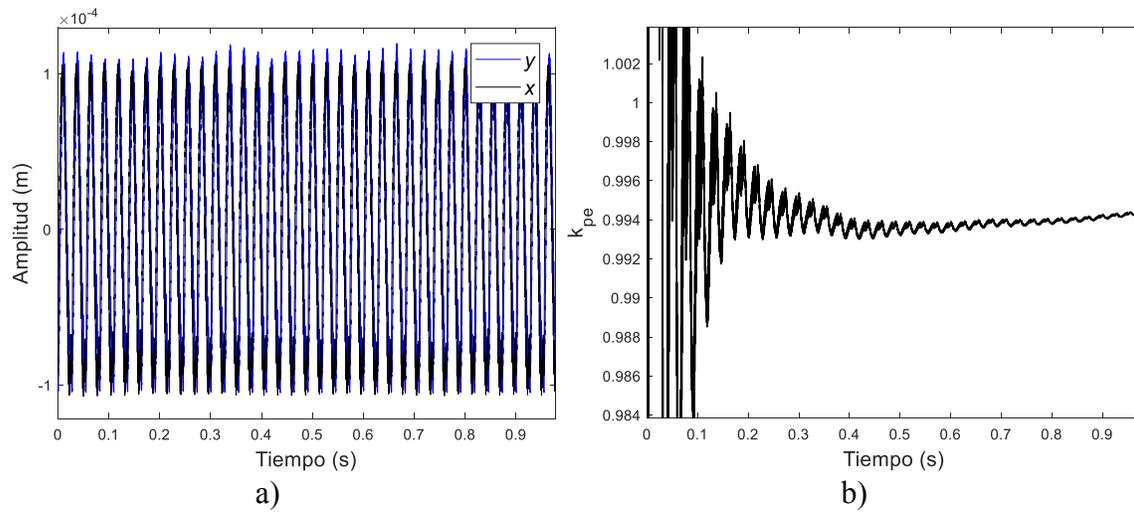


Figura 6.14 Prueba, $\omega = 2200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

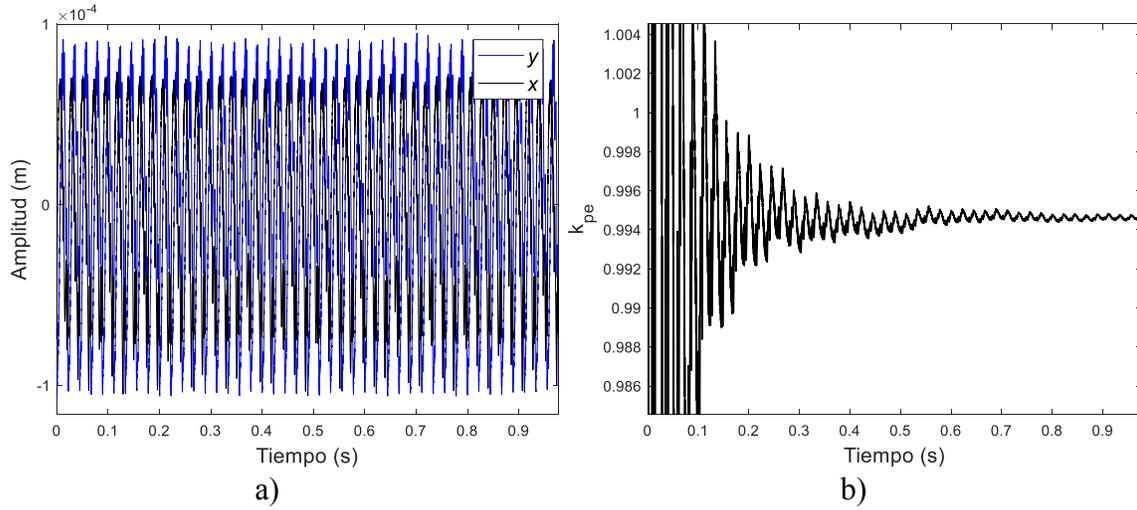


Figura 6.15 Prueba, $\omega = 2700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

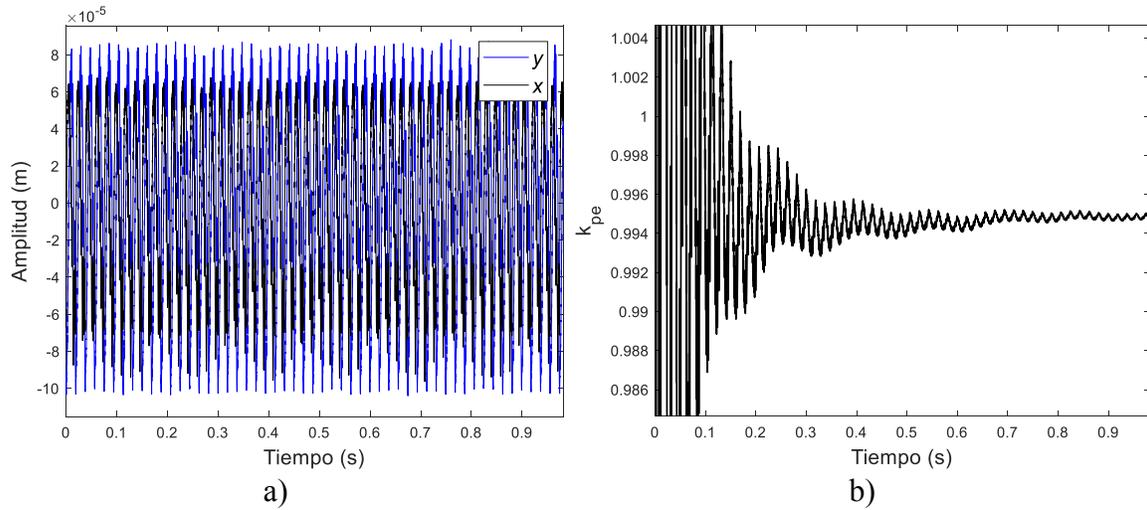


Figura 6.16 Prueba, $\omega = 3200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

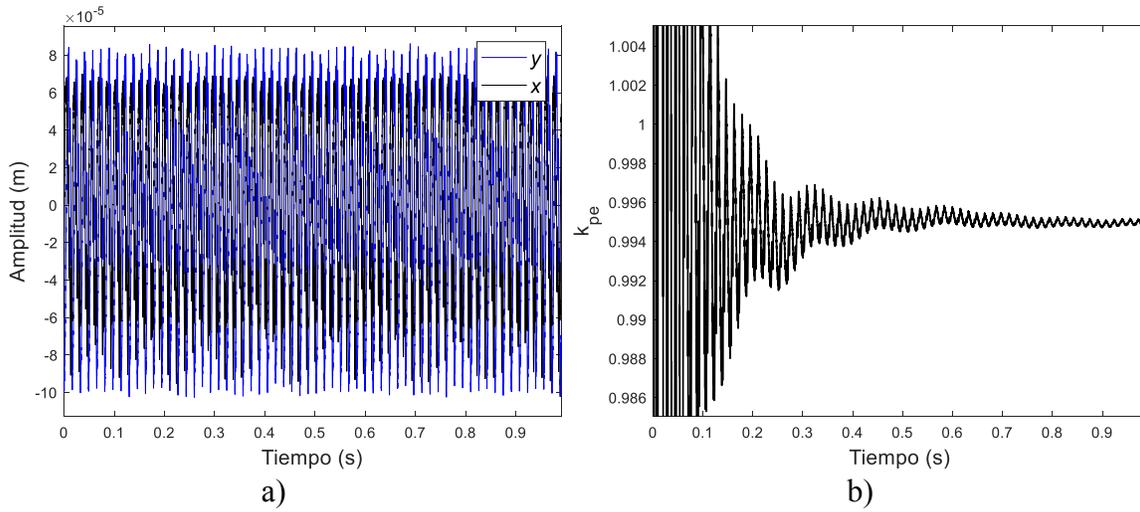


Figura 6.17 Prueba, $\omega = 3700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

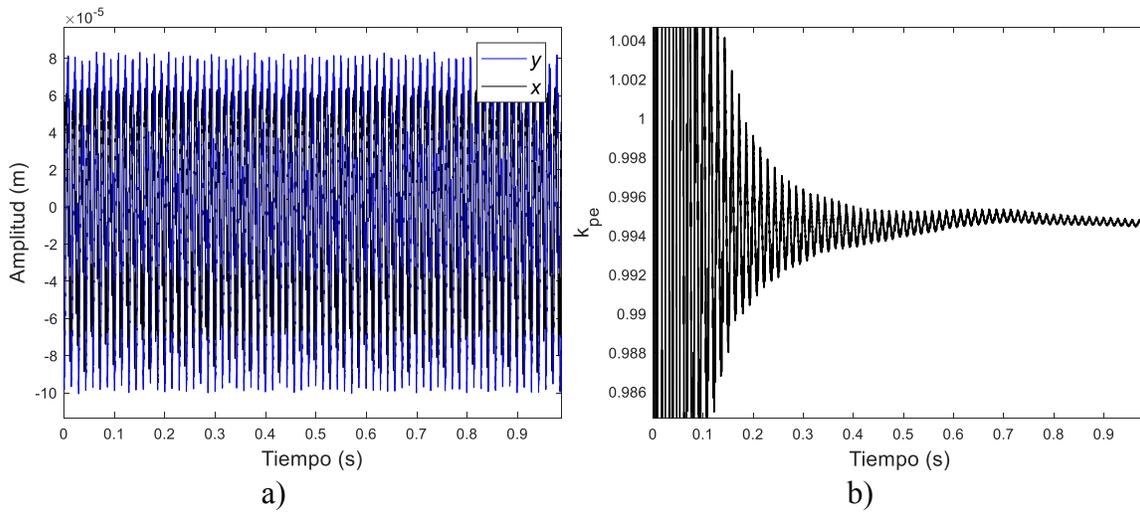


Figura 6.18 Prueba, $\omega = 4200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

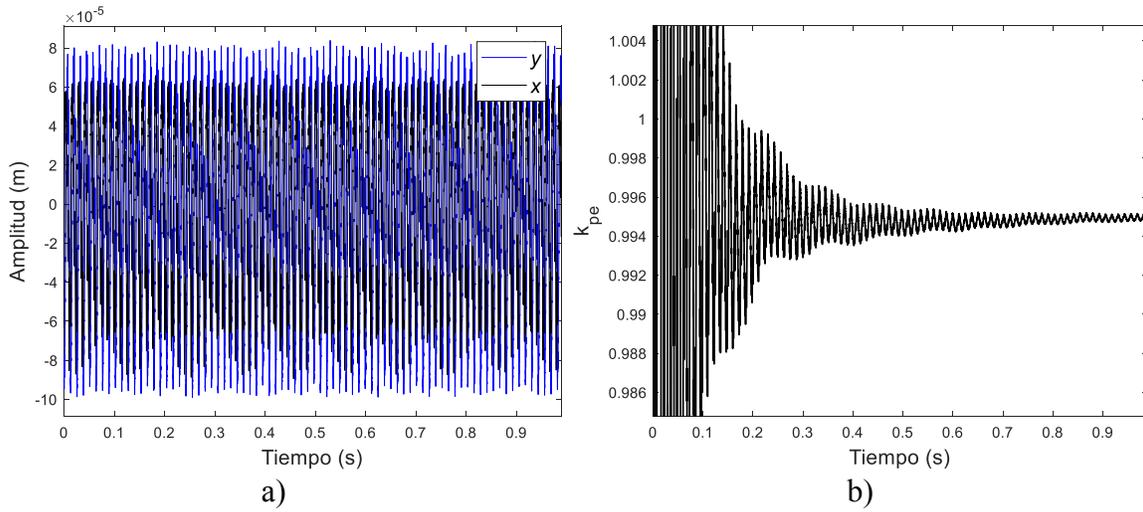


Figura 6.19 Prueba, $\omega = 4700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

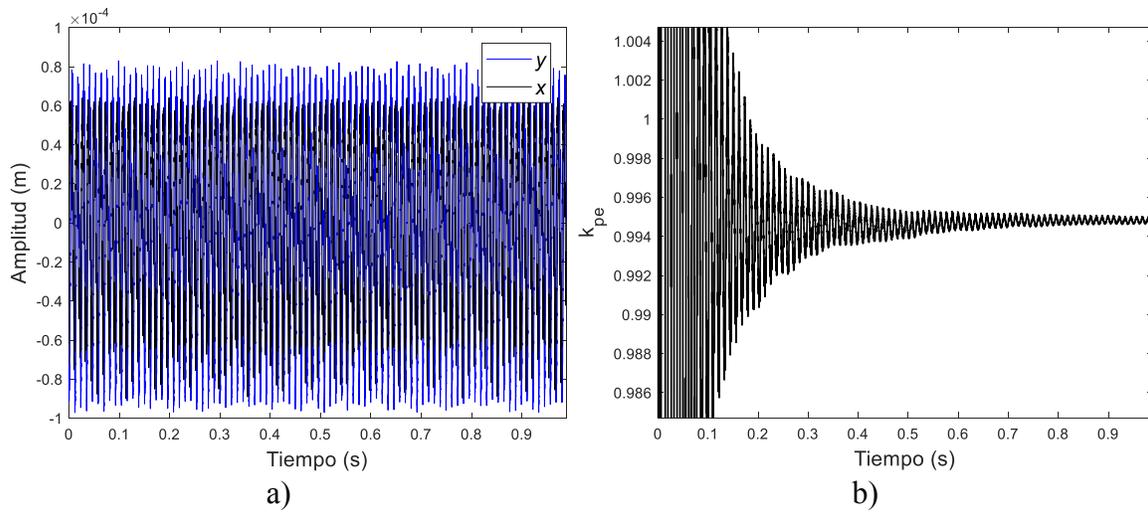


Figura 6.20 Prueba, $\omega = 5200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

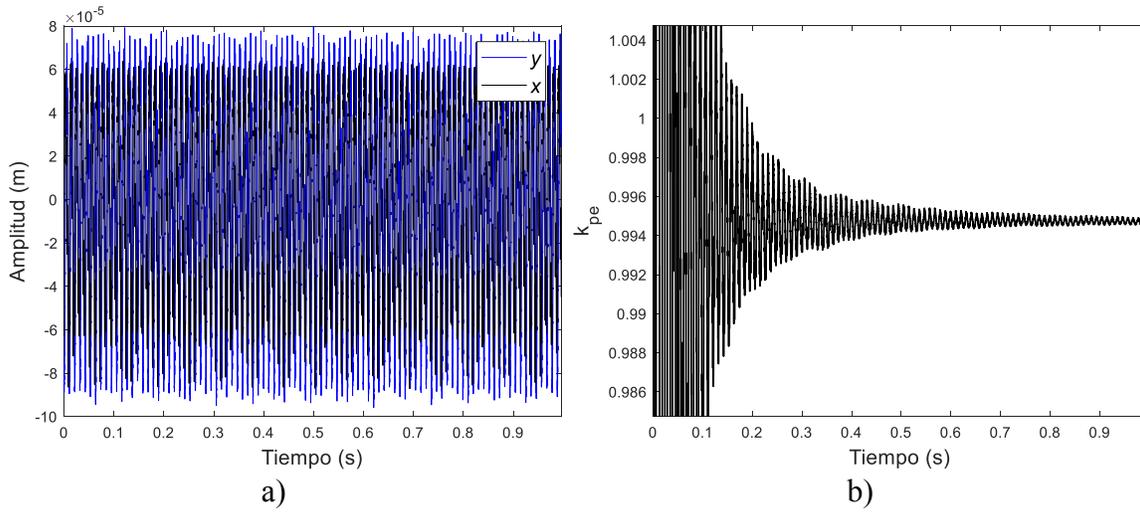


Figura 6.21 Prueba, $\omega = 5700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

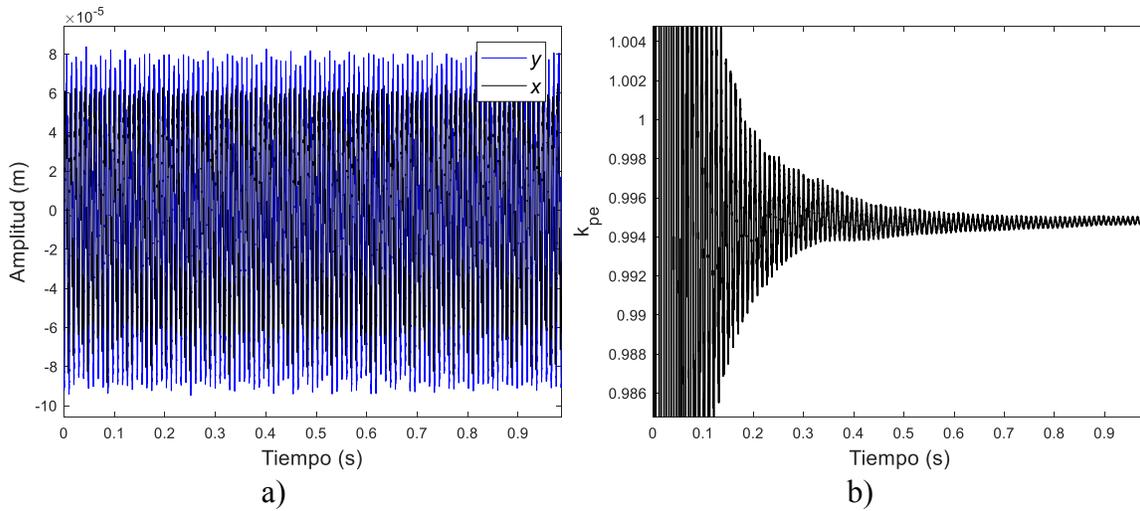


Figura 6.22 Prueba, $\omega = 6200$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

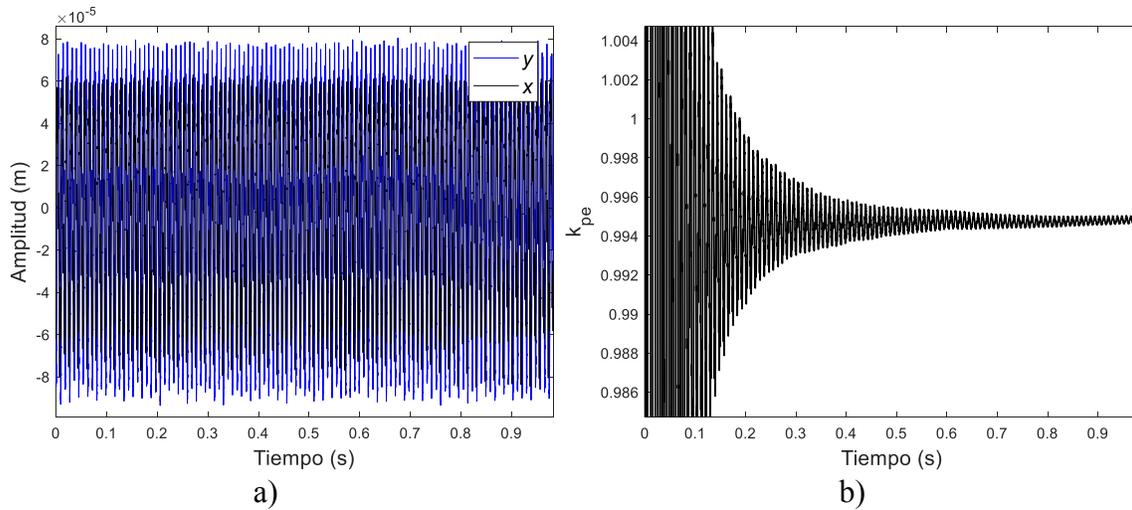


Figura 6.23 Prueba, $\omega = 6700$ rpm, $h/D = 0.32$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la profundidad k_p de la grieta.

De las figuras 6.11 a la 6.23 se puede observar que para todos los casos independientemente de la velocidad del rotor, éste presenta un comportamiento oscilatorio presentando una convergencia al valor buscado en aproximadamente 0.8 segundos, una vez identificado el valor de la profundidad de grieta, éste se mantiene oscilado en un intervalo pequeño alrededor del valor de k_p real.

Es importante hacer notar que la identificación es independiente de la velocidad del rotor, ya que para las diferentes velocidades del rotor el identificador siempre convergió a un valor similar. Por otra parte, también se comprobó que el periodo de oscilación que presenta el identificador, corresponde con el periodo de la velocidad de rotación del rotor. Cabe mencionar que este comportamiento del identificador es el mismo que se observó en las simulaciones numéricas y se debe a las diferentes armónicas presentes en la señal a causa de la grieta y otros fenómenos presentes en el rotor como desalineamiento, asimetría en la flecha, cambios de rigidez, velocidad de rotación, etc.

En la tabla 6.3 se muestran los valores identificados de la profundidad de grieta del parámetro k_p al variar la profundidad h/D de la grieta en el rotor, éstos se obtuvieron promediando el valor de k_p identificado, cuando el identificador se estabiliza o mantiene una oscilación constante alrededor del valor identificado.

Tabla 6.3 Valores identificados de k_p , Caso 1.

Identificación de la profundidad k_p							
ω (rpm)	Profundidad relativa h/D						
	0	0.06	0.14	0.19	0.26	0.32	0.41
700	0.999926	0.999022	0.997682	0.996373	0.995552	0.994609	0.993286
1200	0.999994	0.999224	0.997669	0.996914	0.995694	0.994988	0.994514
1700	0.999979	0.999162	0.997788	0.996864	0.995715	0.994838	0.993693
2200	0.999971	0.999057	0.997639	0.996939	0.995874	0.993837	0.993124
2700	0.999973	0.999376	0.997670	0.996835	0.995638	0.994542	0.994071
3200	0.999964	0.999001	0.997703	0.996840	0.995574	0.994639	0.993889
3700	0.999890	0.998894	0.997750	0.996843	0.996200	0.995042	0.992627
4200	0.999931	0.999003	0.997759	0.997496	0.995571	0.994658	0.993681
4700	0.999929	0.998646	0.997733	0.996935	0.995484	0.994776	0.992396
5200	0.999931	0.998848	0.997647	0.997172	0.995180	0.994715	0.993309
5700	0.999852	0.998940	0.997734	0.996982	0.995603	0.994747	0.993704
6200	0.999929	0.999018	0.997728	0.996867	0.995613	0.994775	0.993476
6700	0.999956	0.999052	0.997717	0.996346	0.995574	0.994721	0.993769
Promedio	0.999940	0.999019	0.997709	0.996877	0.995636	0.994684	0.993503

En la tabla 6.3 se puede observar que para cada caso de profundidad h/D de la grieta existen pequeñas variaciones a partir de la tercera cifra posterior al punto decimal, de tal forma que no es posible concluir si la identificación se está realizando de forma correcta.

Por otra parte, el valor de la pérdida de rigidez Δk_ξ es otro parámetro que es función del parámetro identificado k_p , de tal manera que el modelo del identificador se puede modificar para que identifique los cambios de rigidez del Δk_ξ rotor. Sin embargo, también es posible calcularlo a partir de la ecuación 6.1.

$$\Delta k_\xi = (1 - k_p) k_y \tag{6.1}$$

Donde k_p es el término de profundidad adimensional identificado, el cual es una función de las frecuencias naturales del rotor con grieta y sin grieta y que se denotan por ω_ξ y ω_o respectivamente, k_y corresponde a la rigidez del rotor sin grieta en la dirección y , ya que de acuerdo con Bachschmid *et al.* [3], un rotor con grieta experimenta mayor pérdida de rigidez en la dirección vertical. A partir de la ecuación (6.1), se puede calcular la pérdida de rigidez y la frecuencia natural ω_ξ para cada caso de profundidad adimensional h/D del rotor experimental.

Como ejemplo, en la figura 6.24 se muestra el comportamiento del identificador de la pérdida de rigidez del rotor Δk_ξ a causa de la grieta transversal para cuatro velocidades del rotor

1200, 2700, 4200 y 5700 rpm. Para la identificación de Δk_{ξ} en cada velocidad del rotor, se tomó como dato de entrada las respuestas de vibración que se muestran en las figuras 6.12, 6.15, 6.18 y 6.21 respectivamente, caso donde $h/D=0.32$.

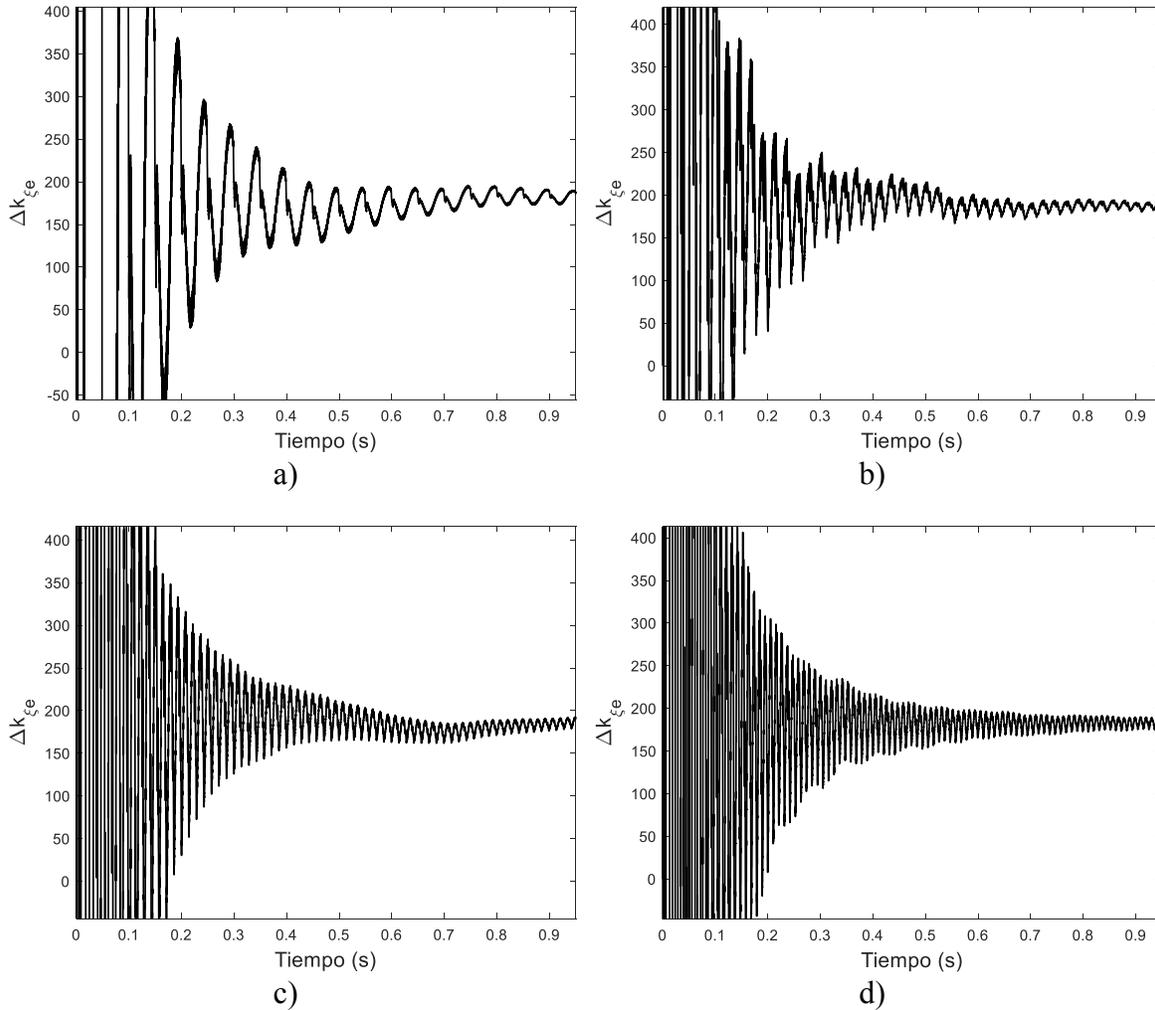


Figura 6.24 Identificación de Δk_{ξ} , $h/D = 0.32$ a) 1200 rpm, b) 2700 rpm, c) 4200 rpm, d) 5700 rpm.

Tal y como se esperaba, en la figura 6.24, se puede observar que en todos los casos el identificador converge a un valor similar de Δk_{ξ} sin importar la velocidad del rotor. En la tabla 6.4 se presentan los valores identificados de Δk_{ξ} para cada caso de profundidad normalizada h/D y velocidad del rotor. Por otro lado, en la tabla 6.4 se muestran los valores del parámetro Δk_{ξ} para las diferentes velocidades del rotor y las diferentes profundidades de grieta. De los resultados mostrados en la tabla, se puede observar que el parámetro Δk_{ξ} varía de manera significativa para cada profundidad de grieta por lo que este parámetro será el indicado para asegurar la presencia de grieta en el rotor con una profundidad determinada.

Tabla 6.4 Valores identificados de Δk_{ξ} , Caso 1.

Identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ} (N/m)							
ω (rpm)	Profundidad relativa h/D						
	0	0.06	0.14	0.19	0.26	0.32	0.41
700	2.5745	34.0842	80.7788	126.3975	154.9958	187.8497	233.9526
1200	0.2247	27.0411	81.2354	107.5365	150.0629	174.6472	191.1808
1700	0.7241	29.2175	77.0757	109.2777	149.3059	179.8935	219.7715
2200	1.0003	32.8642	82.2593	106.6647	143.7610	214.7627	239.6131
2700	0.9260	21.7415	81.1948	110.2955	151.9935	190.2107	206.6173
3200	1.2456	34.8262	80.0338	110.1148	154.2436	186.8255	212.9622
3700	3.8252	38.5457	78.4146	110.0185	132.4053	172.7816	256.9428
4200	2.3938	34.7321	78.0854	87.26804	154.3456	186.1440	220.1963
4700	2.4700	47.1673	79.0077	106.7909	157.3839	182.0244	264.9817
5200	2.3938	40.1500	81.9908	98.56156	167.9551	184.1788	233.1753
5700	5.1605	36.9427	78.9746	105.1599	153.2073	183.0346	219.3836
6200	2.4903	34.2086	79.1621	109.1802	152.8632	182.0909	227.3440
6700	1.5368	33.0195	79.5396	127.3200	154.2385	183.9571	217.1398
Promedio	2.0742	34.1954	79.8271	108.8143	152.0586	185.2616	226.4047

Por otra parte, en la tabla 6.5, se muestran los valores promedios obtenidos de frecuencia natural del rotor con grieta para cada caso de profundidad k_p , así como el cambio o pérdida de rigidez del sistema Δk_{ξ} .

Tabla 6.5 Parámetros promedios de Δk_{ξ} , k_p y ω_{ξ} estimados en el rotor experimental, Caso 1.

h/D	Δk_{ξ} (N/m)	k_p	ω_{ξ} (Hz)
0	2.0742	0.9999	31.9983
0.06	34.1954	0.9990	31.9839
0.14	79.8271	0.9977	31.9631
0.19	108.8143	0.9968	31.9487
0.26	152.0586	0.9956	31.9295
0.32	185.2616	0.9946	31.9134
0.41	226.4047	0.9935	31.8958

De acuerdo con los resultados mostrados en la tabla 6.5, se puede notar que de manera experimental mediante un martillo de impacto no sería posible detectar los cambios en la frecuencia natural ω_{ξ} del rotor para el cálculo de parámetros k_p . Como ya se mencionó, el parámetro del cambio de rigidez Δk_{ξ} será el parámetro utilizado para asegurar la presencia de una grieta en el rotor.

De acuerdo con lo anterior, en la figura 6.25 se muestra el comportamiento de los valores del parámetro Δk_{ξ} reportados en la tabla 6.4 en función la profundidad h/D de la grieta. En la figura 6.25, se muestra la variación de Δk_{ξ} en función de la profundidad h/D para cada rango

de velocidad de operación del rotor a partir de las cuales se estimaron los parámetros de profundidad k_p . Se puede observar que, para todos los rangos de velocidades, los valores estimados de Δk_ξ muestran un comportamiento similar.

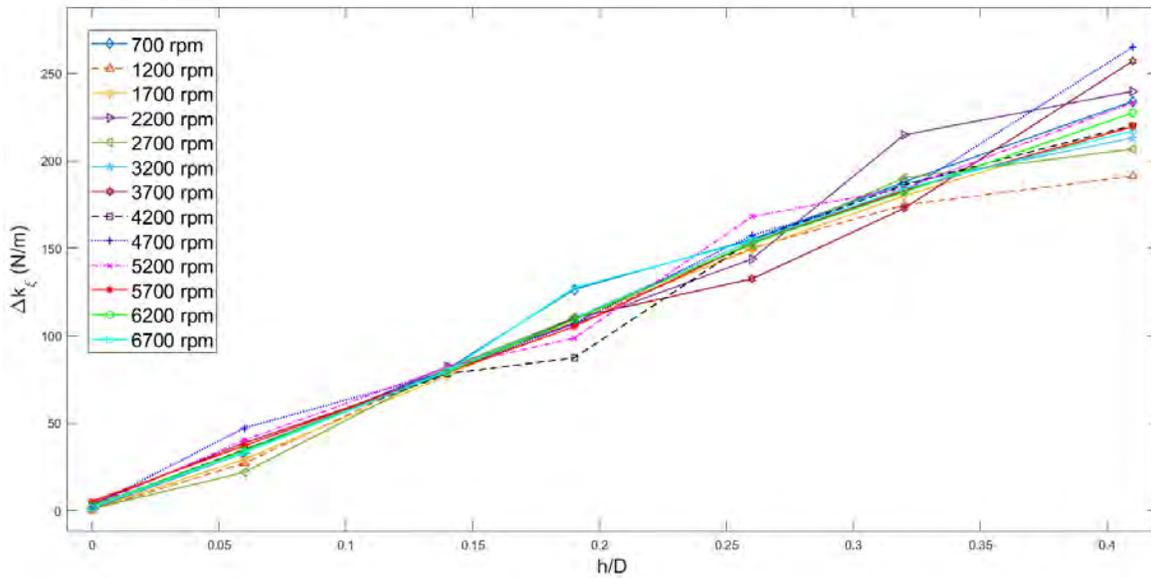


Figura 6.25 Variación de Δk_ξ en función de la profundidad h/D , Caso 1.

Por otro lado, en la tabla 6.6 se muestra la desviación estándar (σ) de los valores de Δk_ξ identificados en función de la profundidad h/D .

Tabla 6.6 Desviación estándar de los parámetros de Δk_ξ identificados, Caso 1.

h/D	σ
0	1.302839
0.06	5.981489
0.14	1.51712
0.19	9.807282
0.26	7.711504
0.32	9.728349
0.41	19.07386

Asimismo, en la figura 6.26 se muestra el comportamiento de Δk_ξ calculado a partir del valor promedio de los datos de la figura 6.25 para cada velocidad del rotor. También se muestra la desviación estándar, denotada por σ .

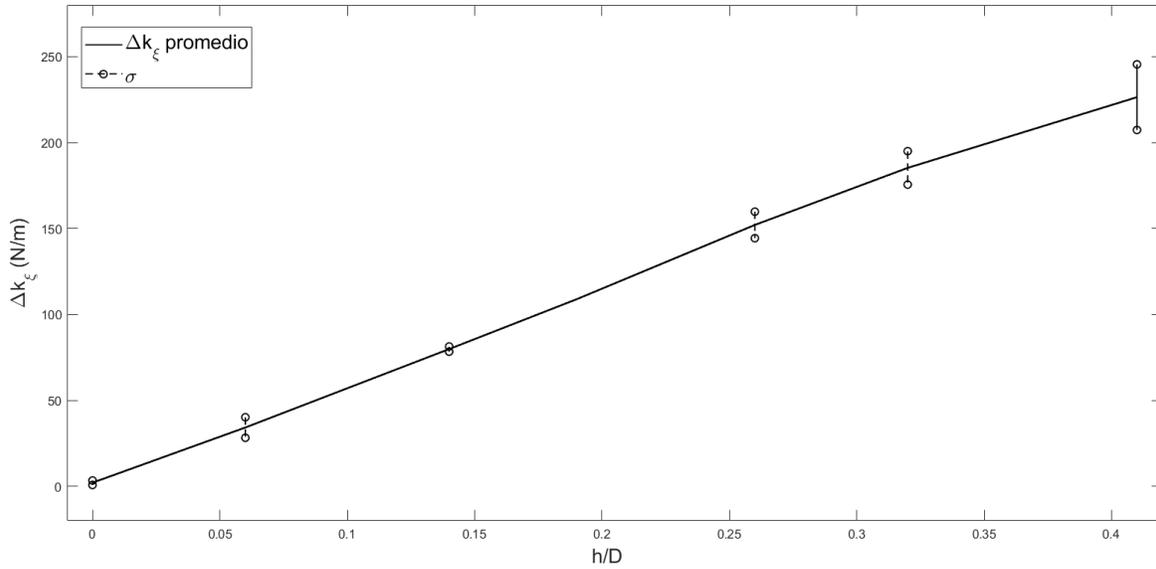


Figura 6.26 Desviación estándar (σ) de los valores identificados correspondientes a Δk_ξ en función de la profundidad h/D , Caso 1.

De la figura 6.26, se puede observar que el cambio de rigidez Δk_ξ que experimenta el rotor en función de la profundidad h/D de la grieta, presenta un comportamiento lineal, además de que los valores de la desviación estándar σ es un indicativo de la repetitividad de los datos obtenidos de forma experimental. Adicionalmente, en la figura 6.27 se muestra un ajuste de tipo lineal y su comparación con el comportamiento promedio de Δk_ξ de los valores identificados.

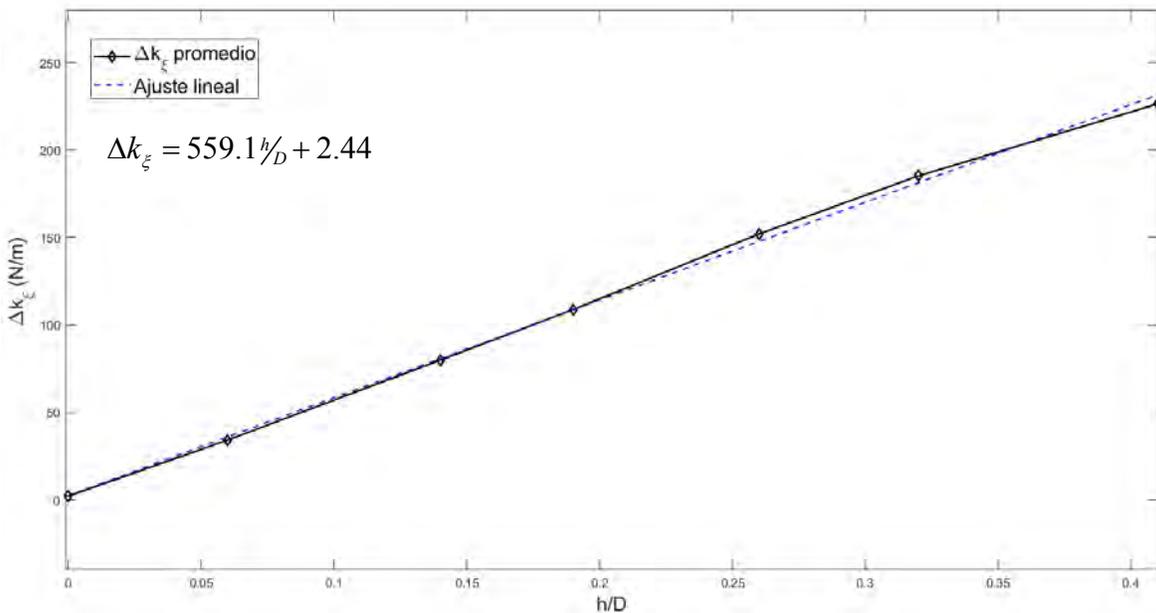


Figura 6.27 Ajuste lineal del comportamiento de Δk_ξ promedio en función de h/D , Caso 1.

6.2.4 Diagramas de Bode del rotor agrietado experimentales Vs numéricos

Con el objetivo de validar los cambios de rigidez del rotor Δk_ξ estimados con el identificador propuesto, se comparó la respuesta de vibración experimental del rotor con grieta con rampa de excitación (Diagrama de Bode experimental), con la respuesta de vibración obtenida de forma numérica (Diagrama de Bode numérico).

Para la simulación numérica del comportamiento vibratorio del rotor con grieta, se utilizaron los datos del rotor reportados en la tabla 6.2 y los valores de k_p ó Δk_ξ identificados presentados en las tablas 6.3 y 6.4 respectivamente, así como, una rampa de excitación de tipo lineal similar a la utilizada en la parte experimental y una masa de desbalance $m_{de} = 5.70 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$ con posición angular $\beta = 0^\circ$.

Por tanto, los diagramas de Bode numéricos se obtuvieron a partir de la señal filtrada al resolver el modelo matemático del rotor agrietado, considerando una grieta siempre abierta, es decir, $\psi(t) = 1$. Es importante mencionar que la amplitud de la subresonancia se ve afectada únicamente por los valores Δk_ξ identificados en la parte experimental, parámetro que se tomó como dato de entrada en el modelo matemático del rotor con grieta.

En las figuras 6.28 a la 6.40 se muestra la comparación de los diagramas de Bode obtenidos de forma experimental con los diagramas de bode obtenidos de forma numérica.

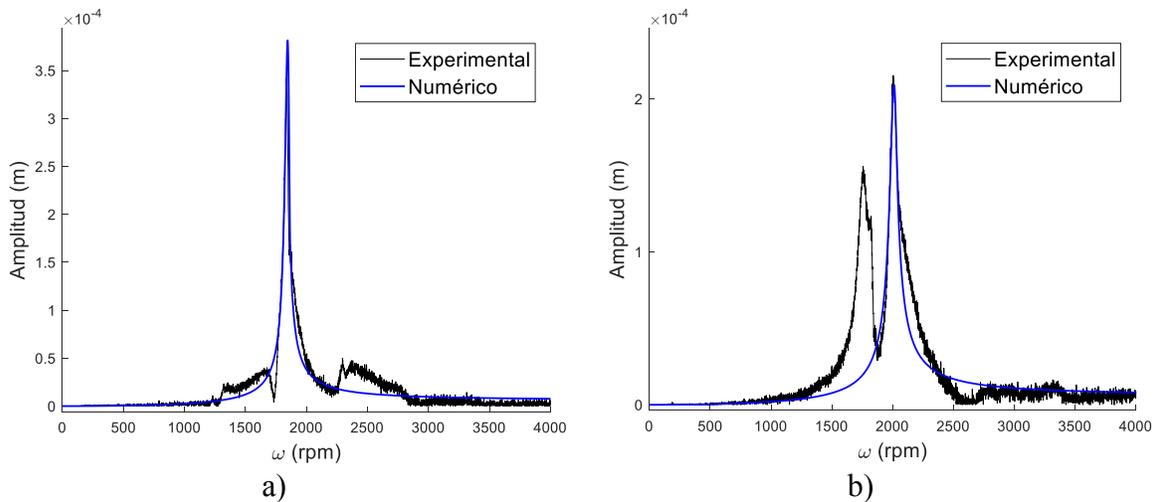


Figura 6.28 Comparación del diagrama de Bode del rotor experimental para $h/D = 0$ con $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$ a) eje y b) eje x.

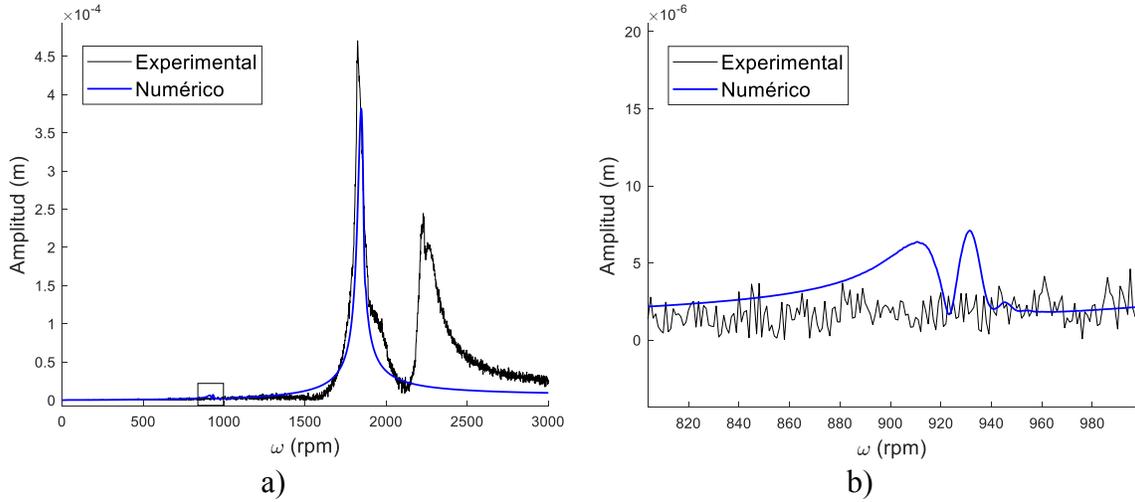


Figura 6.29 Comparación del diagrama de Bode del rotor experimental para $h/D = 0.06$ con $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$. a) eje y b) eje x.

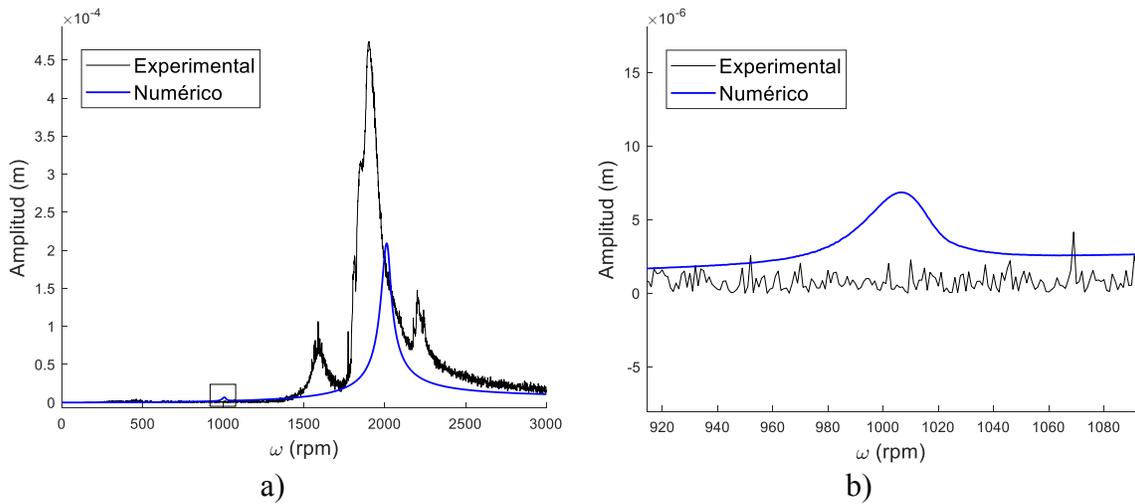


Figura 6.30 Comparación del diagrama de Bode del rotor experimental para $h/D = 0.06$ con $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$. a) eje y b) eje x.

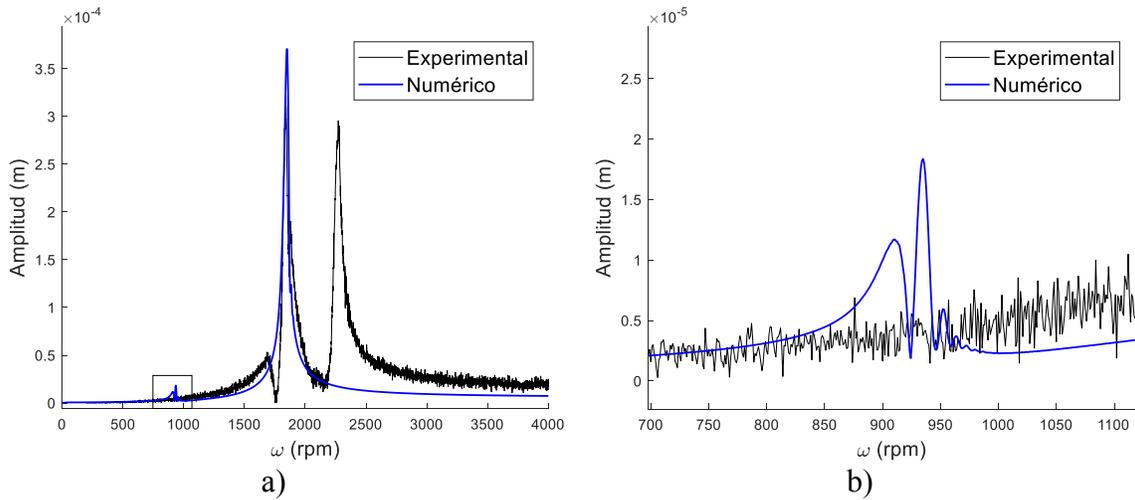


Figura 6.31 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.14$ con $\alpha = 1.56 \text{ rad/s}^2$.

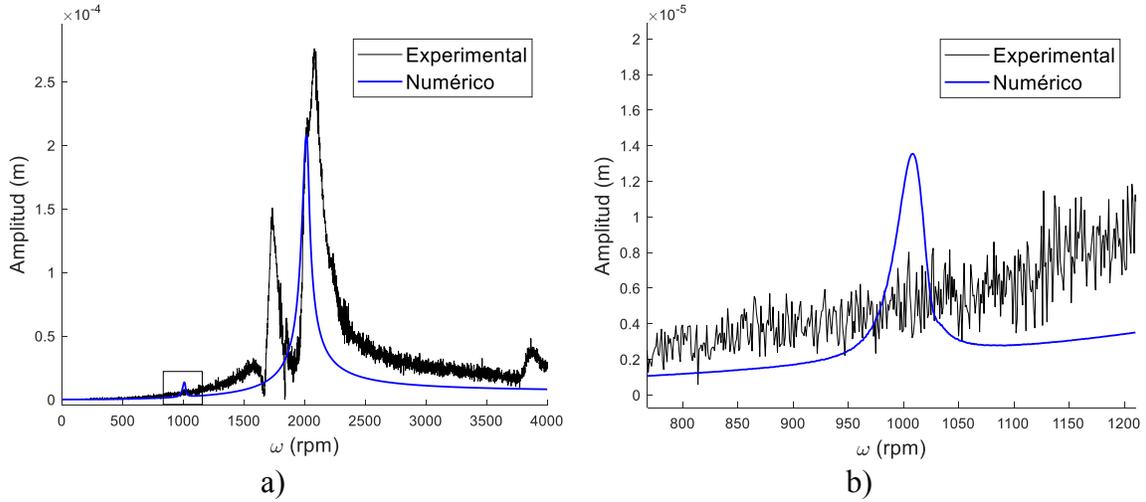


Figura 6.32 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.14$ con $\alpha = 1.56 \text{ rad/s}^2$.

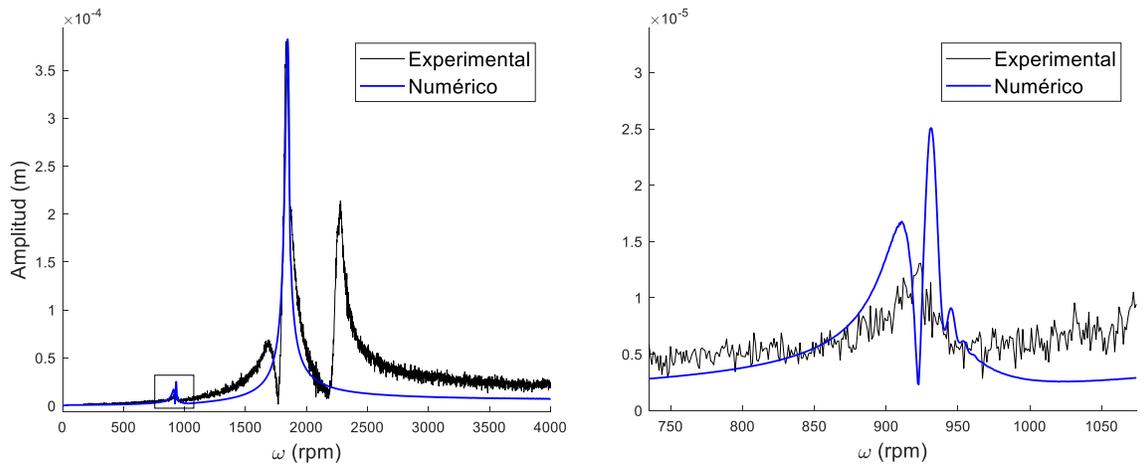


Figura 6.33 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.19$ con $\alpha = 0.98 \text{ rad/s}^2$.

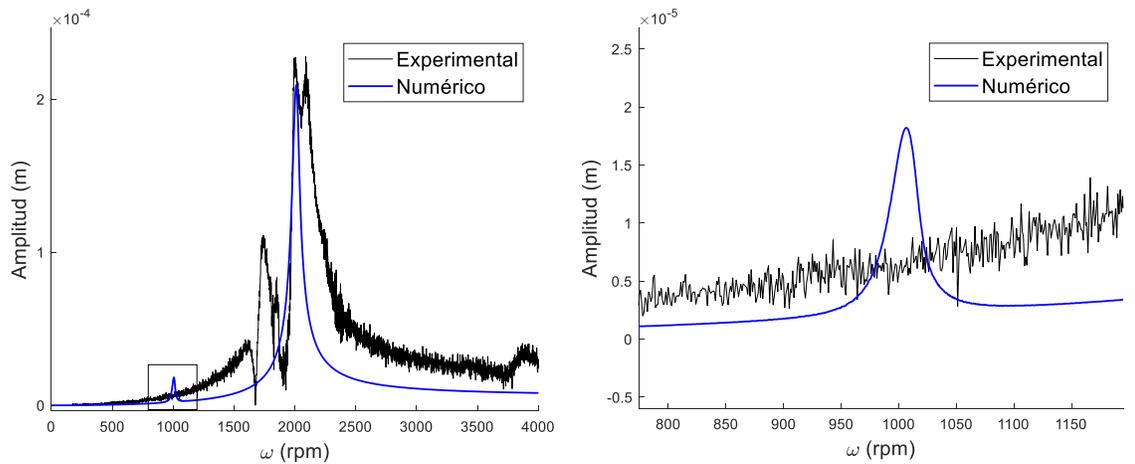


Figura 6.34 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.19$ con $\alpha = 0.98 \text{ rad/s}^2$.

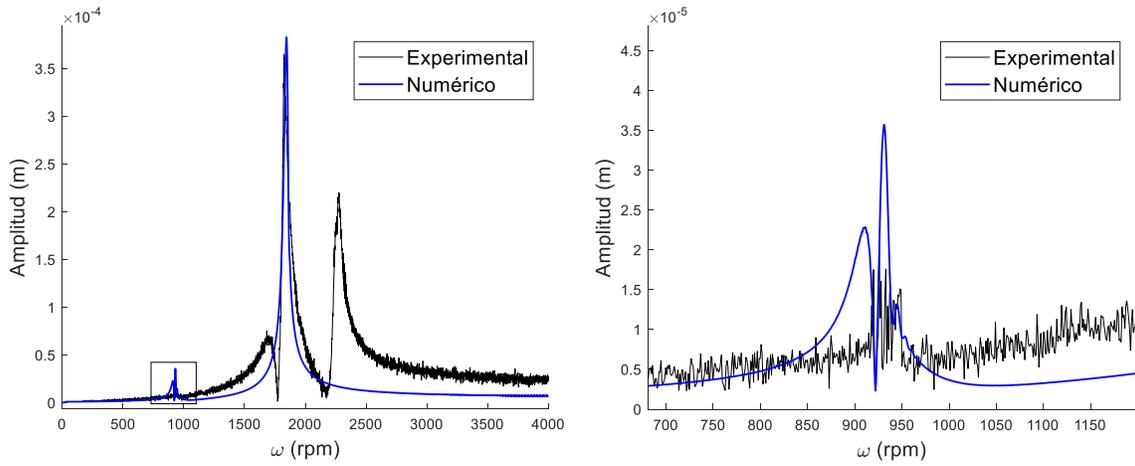


Figura 6.35 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.26$ con $\alpha = 0.93 \text{ rad/s}^2$.

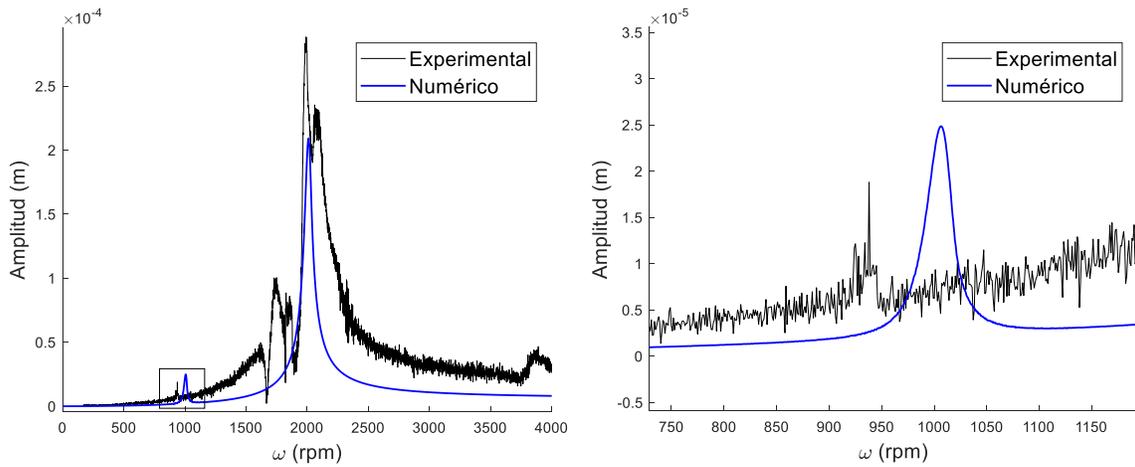


Figura 6.36 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.26$ con $\alpha = 0.93 \text{ rad/s}^2$.

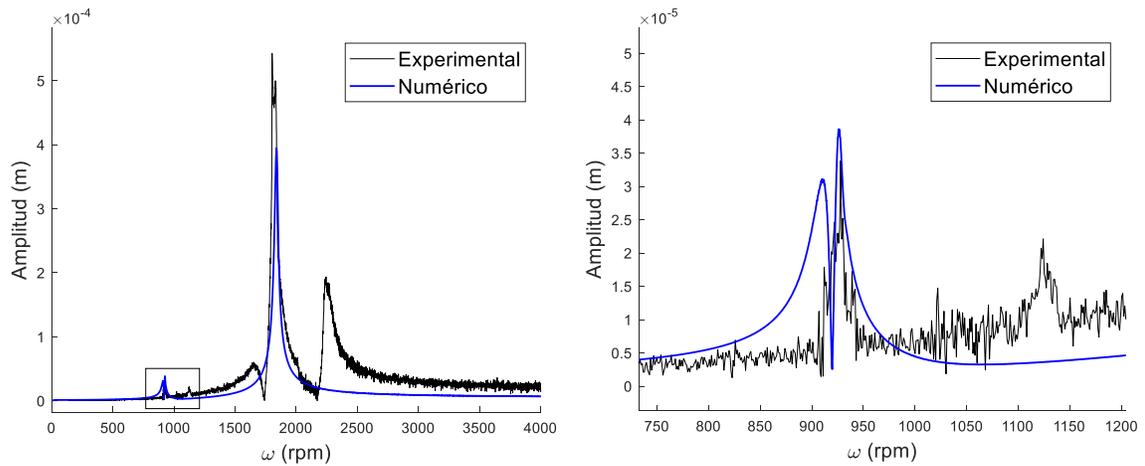


Figura 6.37 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.32$ con $\alpha = 0.36 \text{ rad/s}^2$.

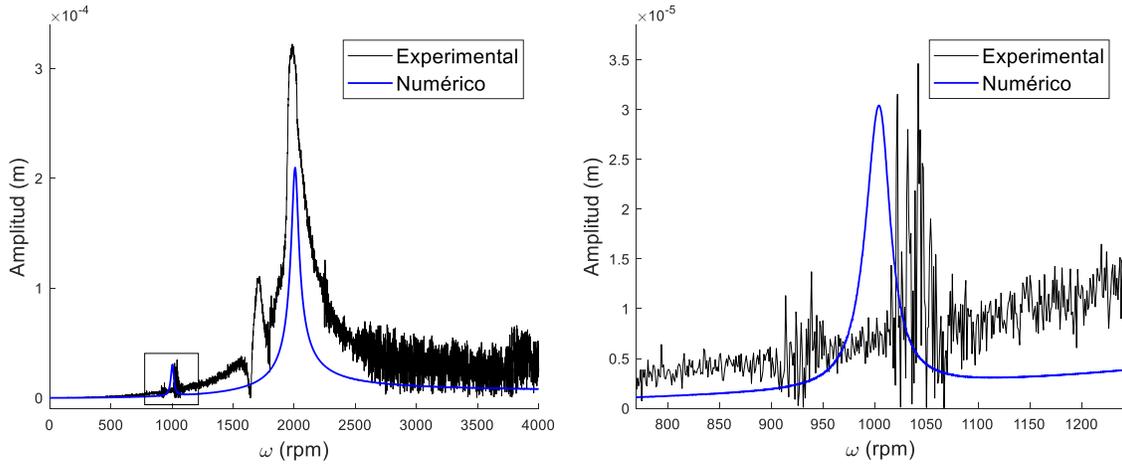


Figura 6.38 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.32$ con $\alpha = 0.36 \text{ rad/s}^2$.

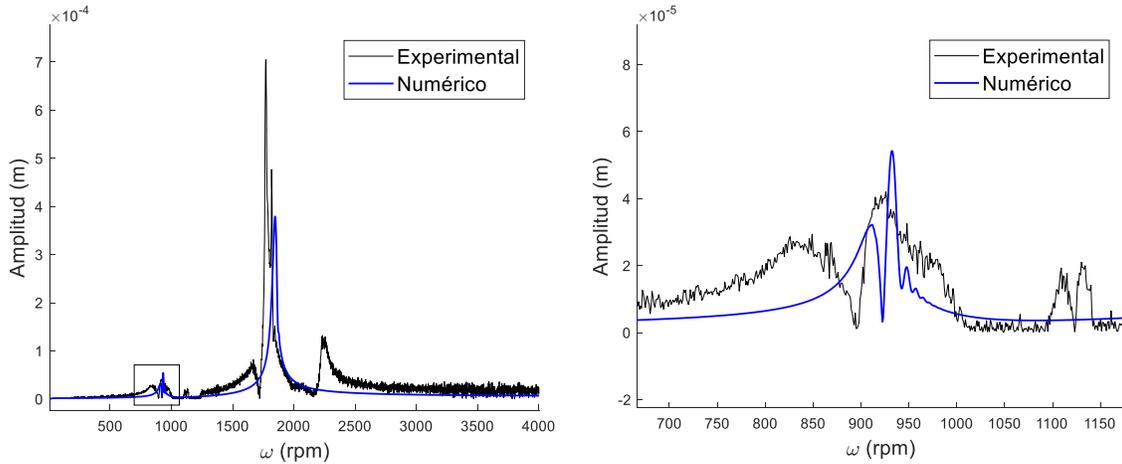


Figura 6.39 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.41$ con $\alpha = 1.16 \text{ rad/s}^2$.

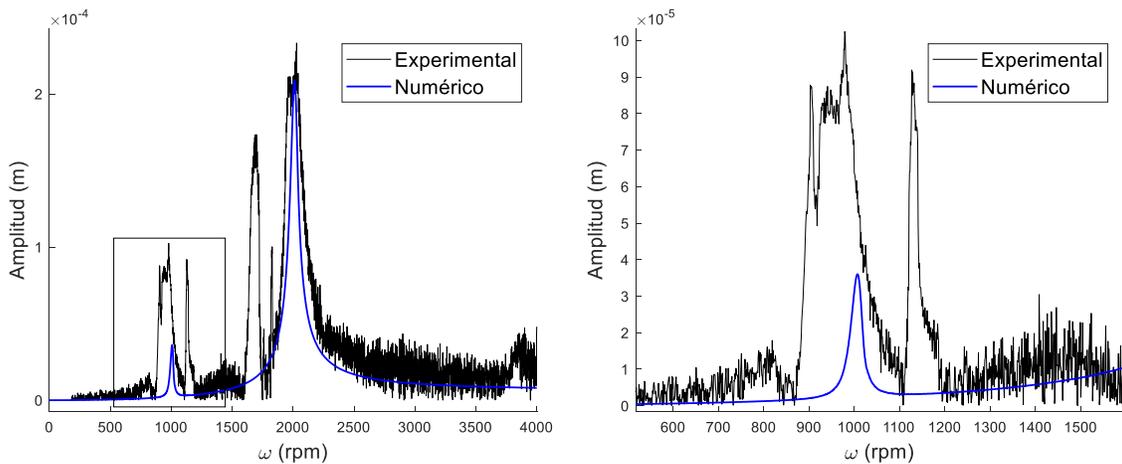


Figura 6.40 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.41$ con $\alpha = 1.16 \text{ rad/s}^2$.

De la comparación de los diagramas de Bode experimentales y numéricos de las figuras 6.28 a la 6.40 se puede observar que la respuesta de vibración del rotor con grieta obtenido de forma numérica, presenta un comportamiento tanto cualitativo como cuantitativo muy similar al de la respuesta de vibración del rotor con grieta experimental. Asimismo, se puede observar que conforme se incrementa la profundidad de la grieta, la amplitud de la subresonancia $\frac{1}{2}\omega_n$ (ω_n primera frecuencia natural del rotor) también se incrementa. Es importante observar que tanto numérica como experimentalmente solo se presenta una subresonancia $\frac{1}{2}\omega_n$ donde se concluye que la grieta inducida en la flecha experimental del rotor presenta un comportamiento dinámico donde la grieta siempre está abierta, tal y como se consideró en la parte numérica $\psi(t) = 1$.

De acuerdo con los resultados presentados, se puede concluir que los valores identificados de pérdida de rigidez Δk_ξ y profundidad k_p con grieta experimental son correctos, ya que, al tomar estos valores identificados como datos de entrada en el modelo matemático del comportamiento dinámico del rotor agrietado, el modelo es capaz de reproducir la respuesta del rotor experimental.

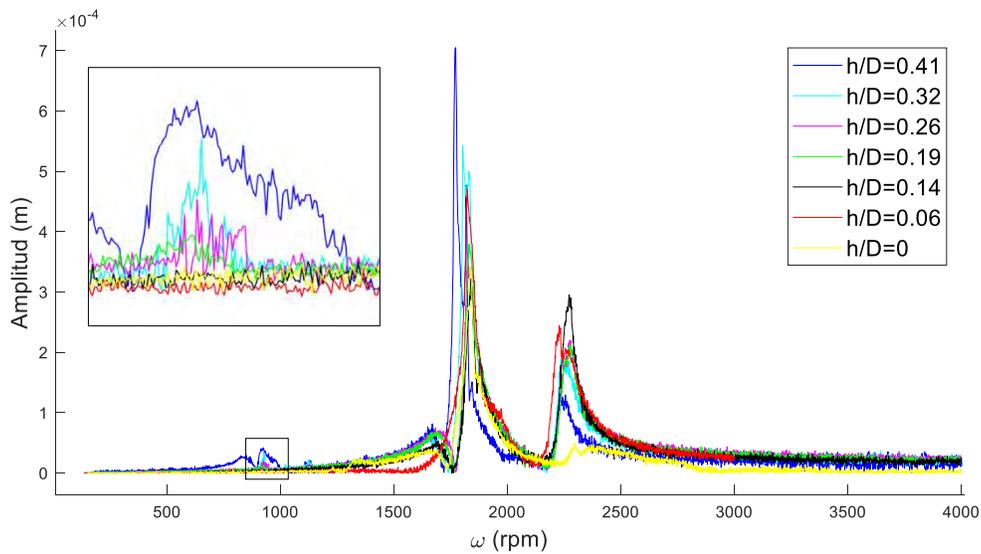


Figura 6.41 Evolución del diagrama de Bode eje y del rotor experimental en función de la profundidad h/D .

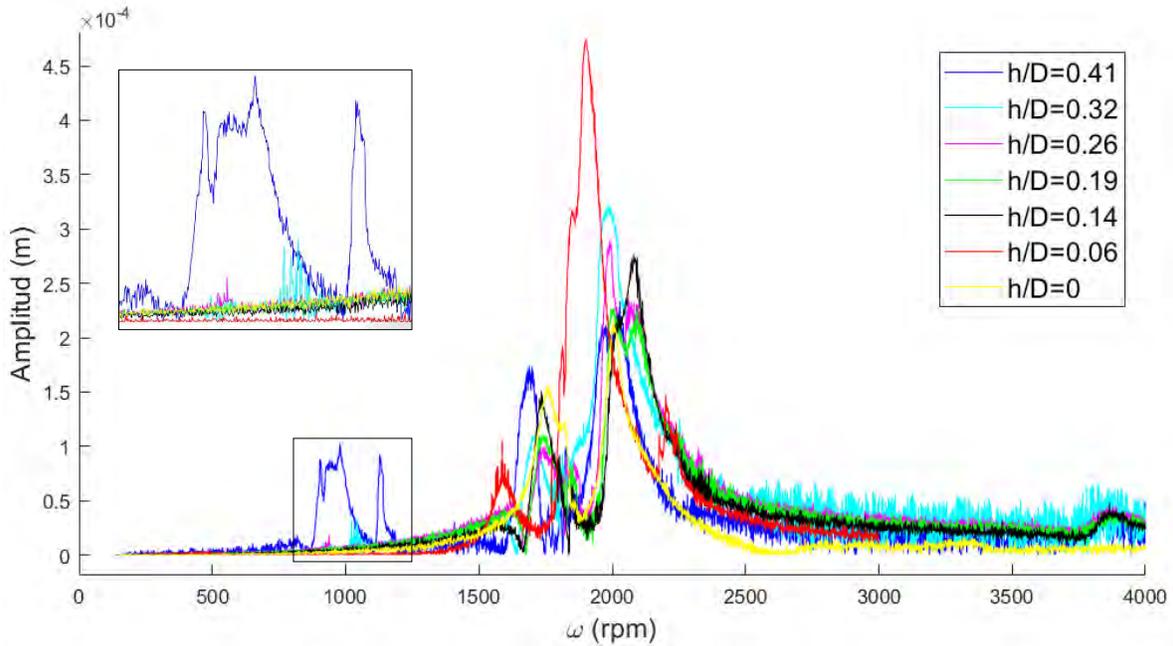


Figura 6.42 Evolución del diagrama de Bode eje x del rotor experimental en función de la profundidad h/D .

6.3 Pruebas experimentales: Caso 2

6.3.1 Parámetros del rotor

Con el objetivo de demostrar la repetitividad del comportamiento del identificador propuesto, se realizaron pruebas de identificación tomando como dato de entrada la respuesta de vibración del rotor experimental con grieta inducida de forma similar que el Caso 1.

Los parámetros del rotor experimental fueron calculados considerando el nuevo eje en el rotor. Estos parámetros se obtuvieron siguiendo la misma metodología descrita en la sección 6.2.1. Los parámetros para el Caso 2 se muestran en la tabla 6.7, sin embargo, se puede observar que los parámetros para el Caso 1 (Tabla 6.2) y Caso 2 son similares, esto se debe a que las condiciones y configuración son las mismas.

Tabla 6.7 Parámetros del rotor experimental, Caso 2.

Parámetro	Dimensión
m	0.9437 kg
c_x	6.1887 Ns/m
c_y	3.9338 Ns/m
k_x	39634.4270 N/m
k_y	34505.8242 N/m

En la figura 6.43 se muestra la comparación del comportamiento dinámico del rotor experimental, con el comportamiento dinámico obtenido de forma numérica utilizando los datos calculados de la tabla 6.7.

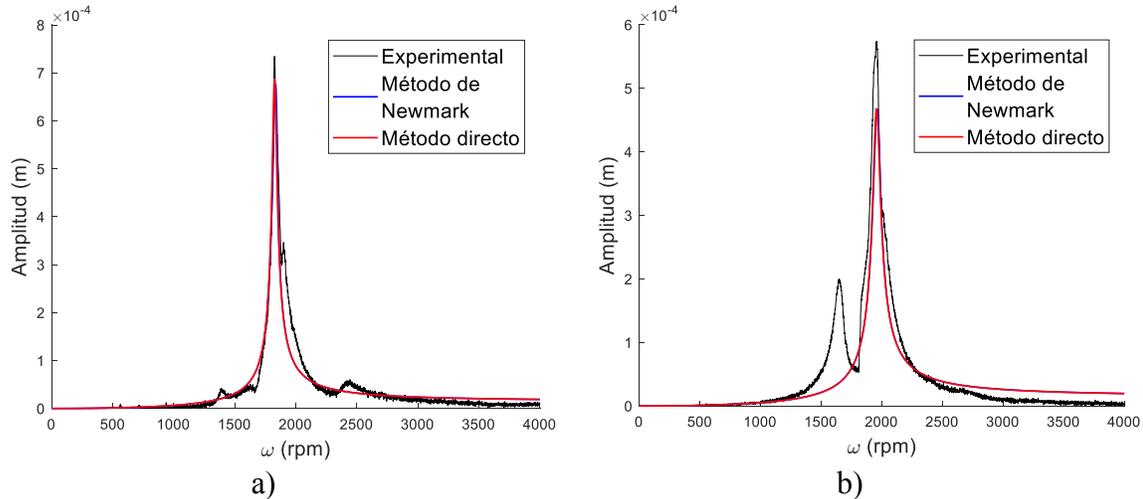


Figura 6.43 Comparación de los diagramas de Bode experimental y numérico con $m_d = 0.471$ gr y $\alpha = 1.0748 \text{ rad/s}^2$ a) eje y , b) eje x .

En la figura 6.43 se puede observar que el diagrama de Bode experimental en ambas direcciones presenta un comportamiento cualitativo y cuantitativo muy similar con el diagrama de Bode obtenido de forma numérica. También se muestra que el comportamiento dinámico del rotor obtenido de forma numérica utilizando el método directo, es exactamente igual que el que se obtuvo al utilizar el método de integración directa de Newmark. De acuerdo con lo anterior, se puede concluir que los datos calculados del rotor son confiables, puesto que la plataforma computacional es capaz de reproducir la respuesta del rotor experimental.

6.3.2 Identificación de la pérdida de rigidez de la grieta en el rotor experimental

Para el análisis realizado en este caso, se consideraron diferentes profundidades de grieta normalizada ($h/D=0, 0.09, 0.20, 0.34$ y 0.42), además se realizó la identificación de ésta en diferentes velocidades del rotor en un intervalo de $700 \leq \omega \leq 2500$ rpm, con incrementos de velocidad de 200 rpm. Cabe recordar que el modelo del identificador no considera como dato entrada las fuerzas de excitación, es decir para el identificador $f_d = 0$ y $f_a = 0$.

Con el objetivo de demostrar que la identificación de grietas se puede realizar mediante el parámetro k_p o Δk_ξ , para el Caso 2, la identificación se realizó en función de Δk_ξ . Como ejemplo, se muestran los resultados obtenidos de la identificación de Δk_ξ para el caso particular del rotor para una profundidad normalizada de $h/D=0.34$. En las figuras 6.44 a la 6.53 se muestran las respuestas de vibración en las direcciones y y x del rotor que se consideraron como datos de entrada para la identificación de la profundidad de la grieta, así

mismo, también se muestra el comportamiento del identificador, las gráficas correspondientes se denotan por los incisos a) y b) respectivamente.

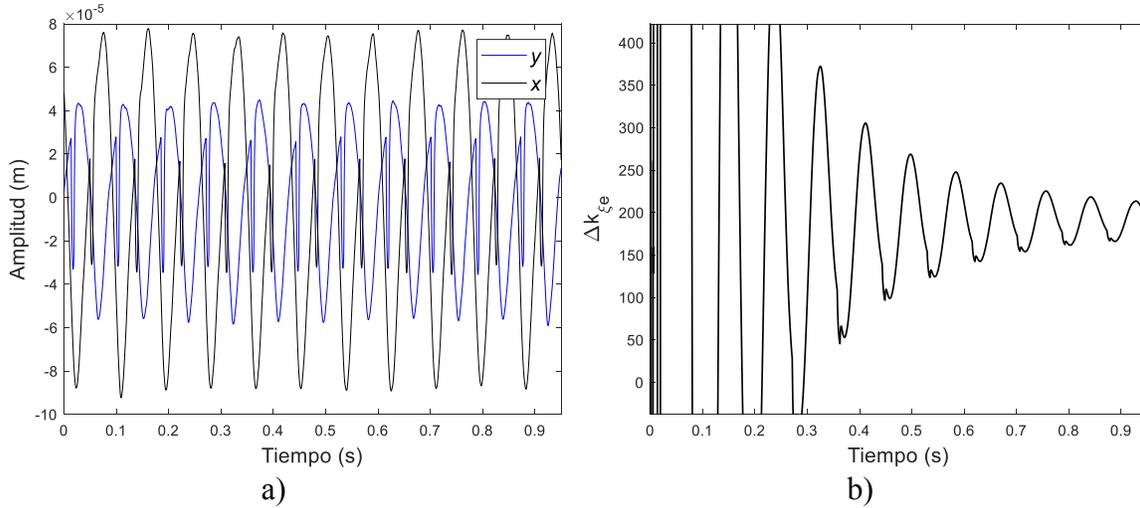


Figura 6.44 Prueba, $\omega = 700$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ} .

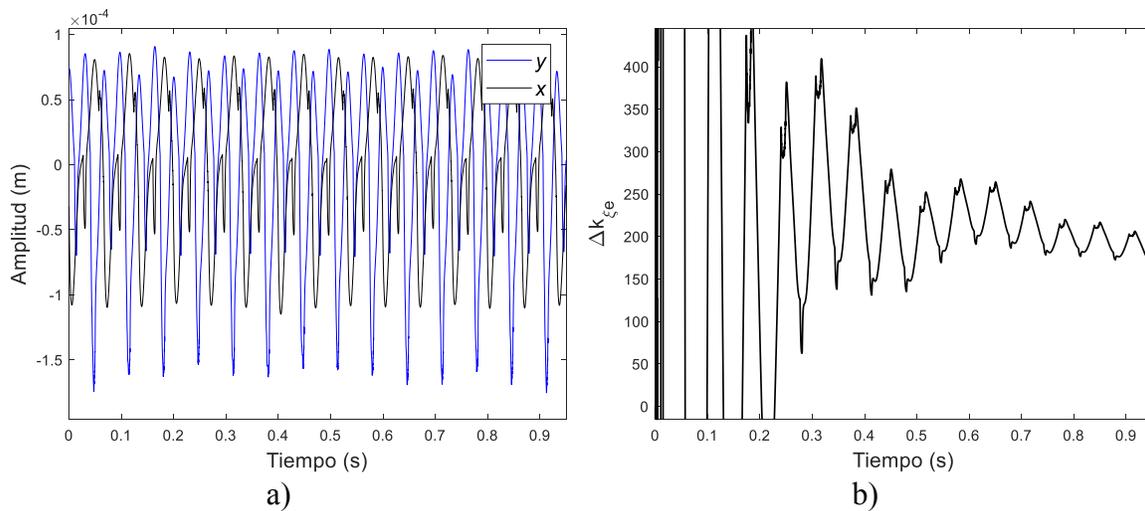


Figura 6.45 Prueba, $\omega = 900$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ} .

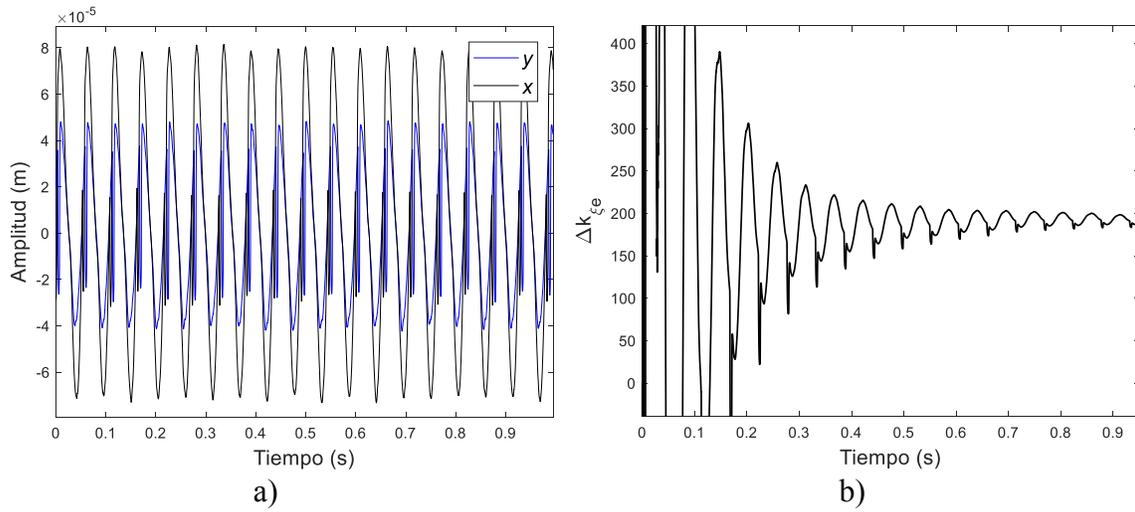


Figura 6.46 Prueba, $\omega = 1100$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ} .

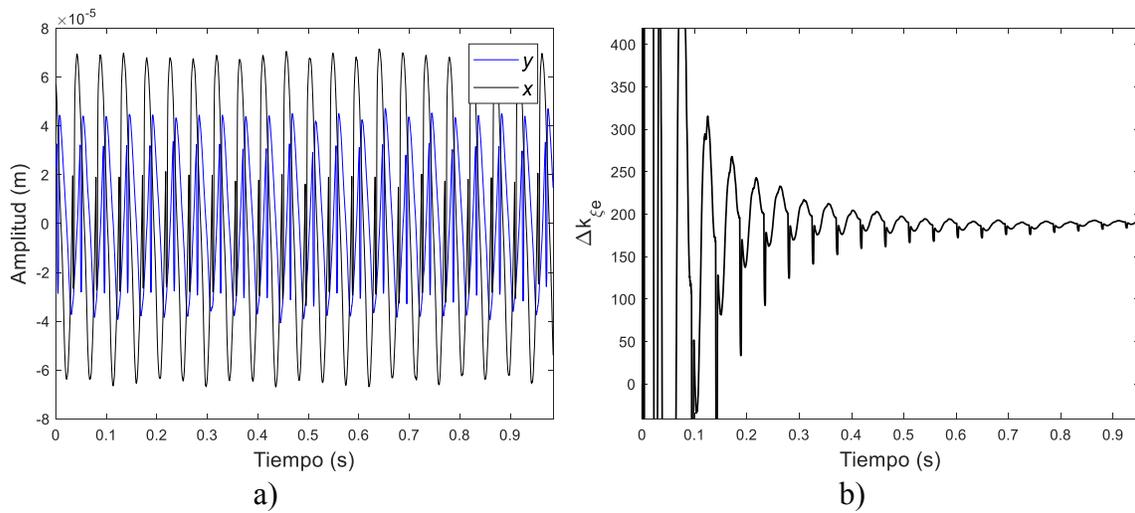


Figura 6.47 Prueba, $\omega = 1300$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ} .

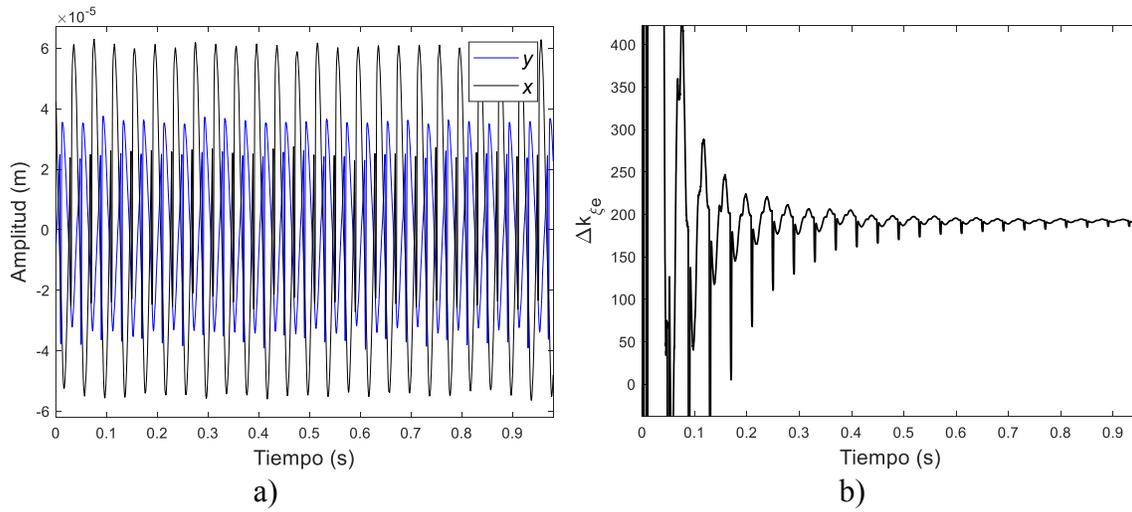


Figura 6.48 Prueba, $\omega = 1500$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ} .

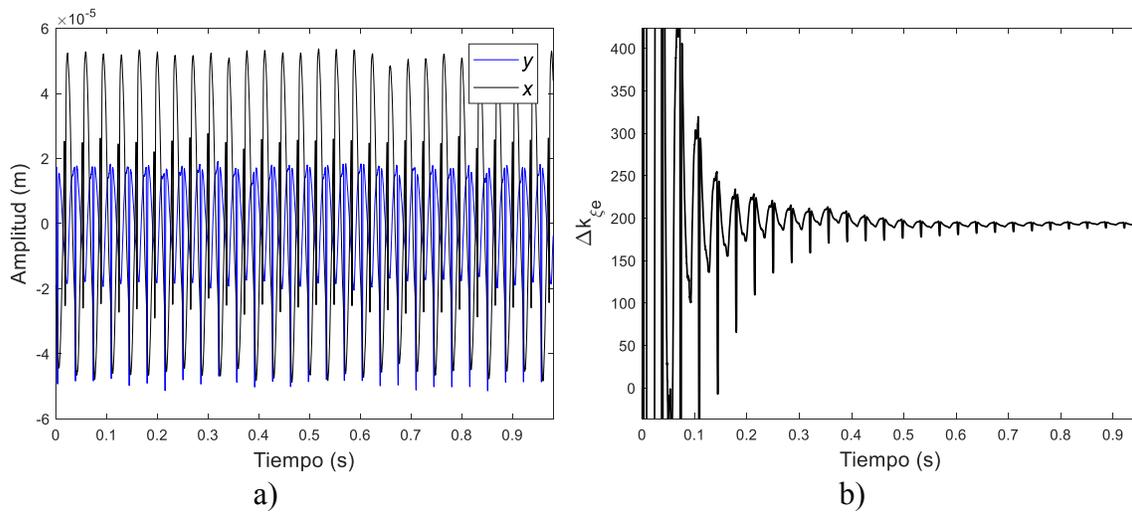


Figura 6.49 Prueba, $\omega = 1700$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ} .

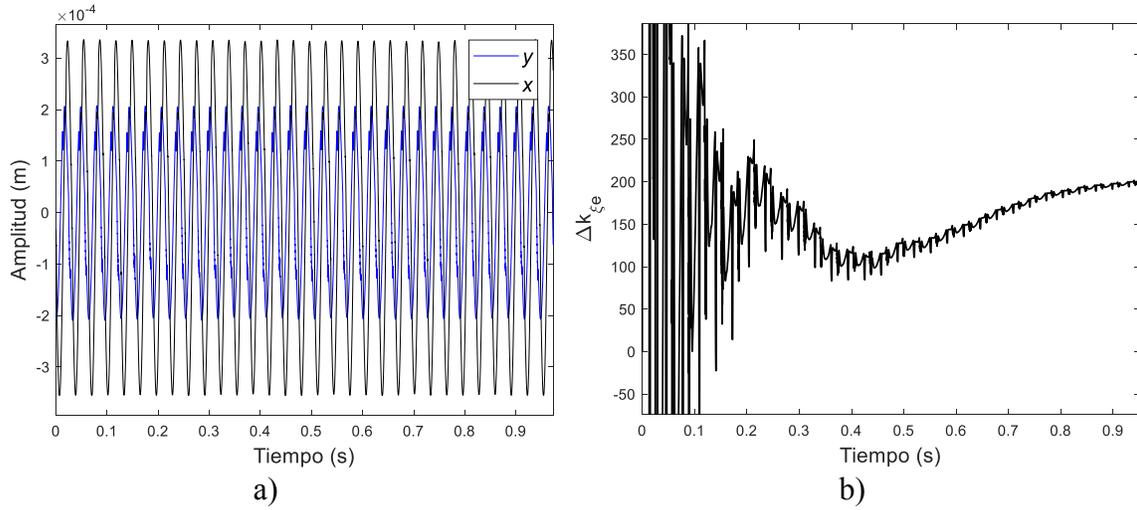


Figura 6.50 Prueba, $\omega = 1900$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ} .

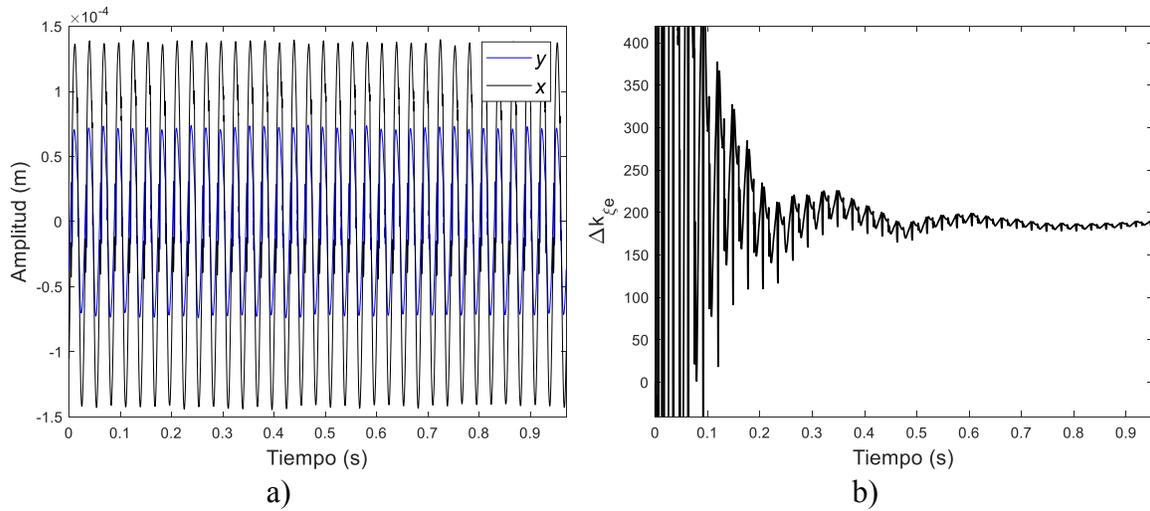


Figura 6.51 Prueba, $\omega = 2100$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ} .

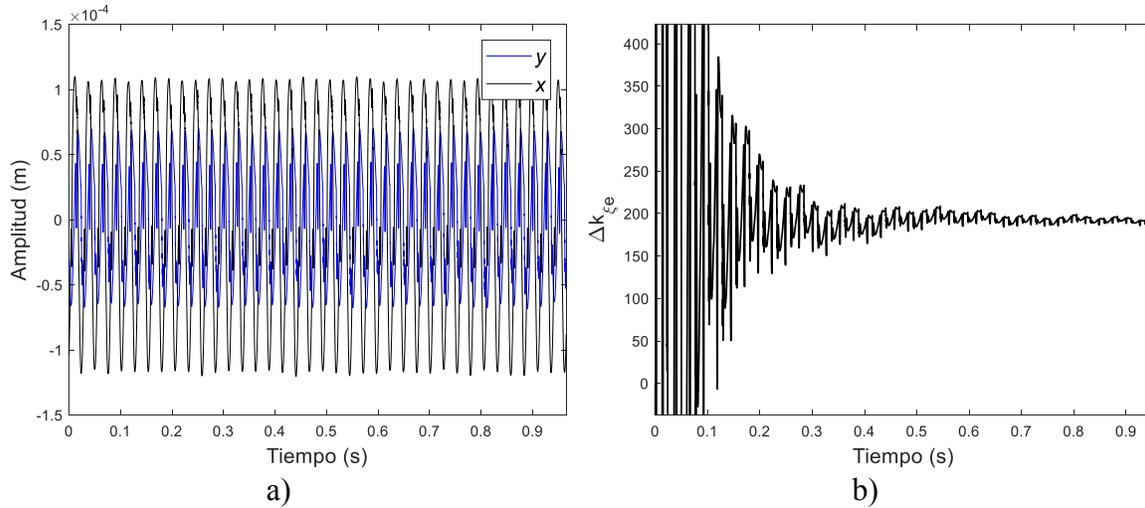


Figura 6.52 Prueba, $\omega = 2300$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ} .

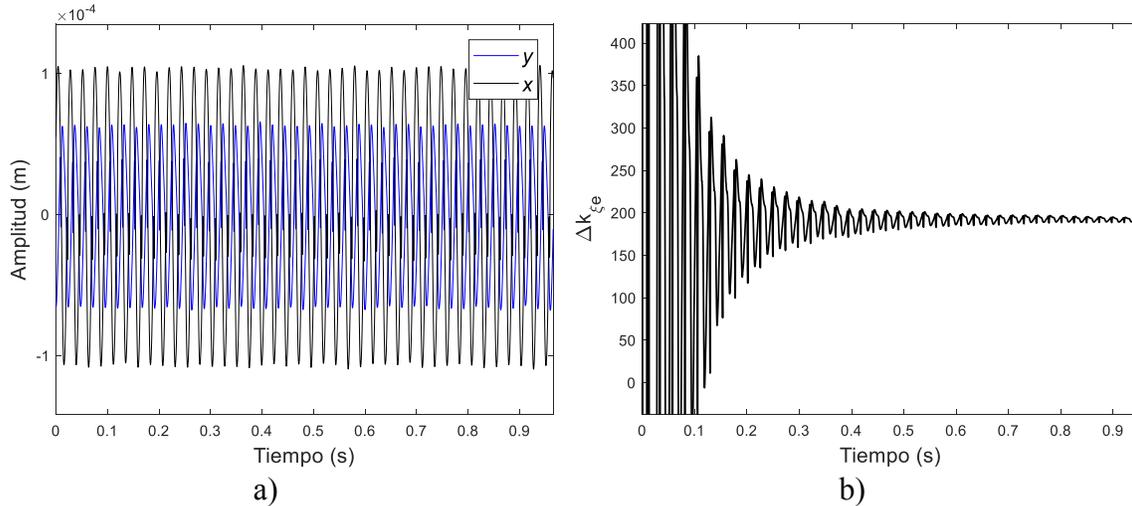


Figura 6.53 Prueba, $\omega = 2500$ rpm, $h/D = 0.34$ a) respuesta experimental del rotor, b) Identificación de la pérdida de rigidez Δk_{ξ} .

De las figuras 6.44 a la 6.53 se puede observar que para todos los casos independientemente de la velocidad del rotor, este presenta un comportamiento oscilatorio presentando una convergencia al valor buscado en aproximadamente 0.8 segundos, una vez identificado el valor de la profundidad de grieta, éste se mantiene oscilado en un intervalo pequeño alrededor del valor de Δk_{ξ} real. Es importante hacer notar que la identificación es independiente de la velocidad del rotor, ya que para las diferentes velocidades del rotor el identificador siempre convergió al mismo valor. Por otra parte, también se comprobó que el periodo de oscilación que presenta el identificador, corresponde con el periodo de la velocidad de rotación del rotor. En la tabla 6.8 se muestran los valores identificados del parámetro Δk_{ξ} al variar la profundidad h/D de la grieta en el rotor, estos se obtuvieron promediando el valor de Δk_{ξ} identificado, cuando el identificador se estabiliza o mantiene una oscilación constante alrededor del valor identificado.

Tabla 6.8 Valores identificados de Δk_g , Caso 2.

Identificación de la pérdida de rigidez Δk_g (N/m)					
ω (rpm)	Profundidad relativa h/D				
	0	0.09	0.20	0.34	0.42
700	4.9835	49.0569	96.5555	192.2616	235.9205
900	2.8732	49.7083	94.9367	214.8026	307.2145
1100	1.8510	51.0372	101.9030	190.7859	237.4441
1300	-4.6769	52.0078	140.9782	189.2797	238.1638
1500	-4.6111	44.9899	134.9157	192.0831	239.5695
1700	-3.4777	51.9455	93.8479	194.0072	240.1686
1900	-20.7706	37.6789	127.9903	155.9469	216.3937
2100	-8.4136	39.3780	121.0860	189.5383	250.0153
2300	2.1714	40.1186	111.8884	192.5697	242.1529
2500	0.2406	34.8544	109.0545	192.5657	235.8464
Promedio	-2.9830	45.6438	113.3156	190.38412	244.2889

De manera similar que en el caso 1, los valores identificados de la profundidad de grieta k_p se muestran en la tabla 6.9. Estos se obtuvieron promediando el valor de k_p identificado, cuando el identificador se estabiliza o mantiene una oscilación constante alrededor del valor identificado.

Tabla 6.9 Valores identificados de k_p , Caso 2.

Identificación de la profundidad k_p					
ω (rpm)	Profundidad relativa h/D				
	0	0.09	0.20	0.34	0.42
700	0.999855	0.998578	0.997201	0.994428	0.993162
900	0.999916	0.998559	0.997248	0.993775	0.991096
1100	0.999946	0.998520	0.997046	0.994471	0.993118
1300	1.000135	0.998492	0.995914	0.994514	0.993097
1500	1.000133	0.998696	0.996090	0.994433	0.993057
1700	1.000100	0.998494	0.997280	0.994377	0.993039
1900	1.000601	0.998908	0.996290	0.995480	0.993728
2100	1.000243	0.998858	0.996490	0.994507	0.992754
2300	0.999937	0.998837	0.996757	0.994419	0.992982
2500	0.999993	0.998989	0.996839	0.994419	0.993165
Promedio	1.000085	0.998676	0.996715	0.994482	0.992919

En la tabla 6.10 se presentan los parámetros estimados de la grieta abierta en el rotor experimental.

Tabla 6.10 Parámetros promedios de Δk_ξ , k_p y ω_ξ estimados en el rotor experimental, Caso 2.

h/D	Δk_ξ (N/m)	k_p	ω_ξ (Hz)
0	-2.9830	1	32
0.09	45.6438	0.9986	31.9775
0.20	113.3156	0.9967	31.9471
0.34	190.38412	0.9944	31.9102
0.42	244.2889	0.9929	31.8861

En la figura 6.54 se muestra el comportamiento de Δk_ξ en función de la profundidad h/D . Se puede observar el comportamiento de la pérdida de rigidez para cada rango de velocidad de operación del rotor considerado en las pruebas. Se puede observar que, para todos los rangos de velocidades, los valores estimados de Δk_ξ muestran el mismo comportamiento.

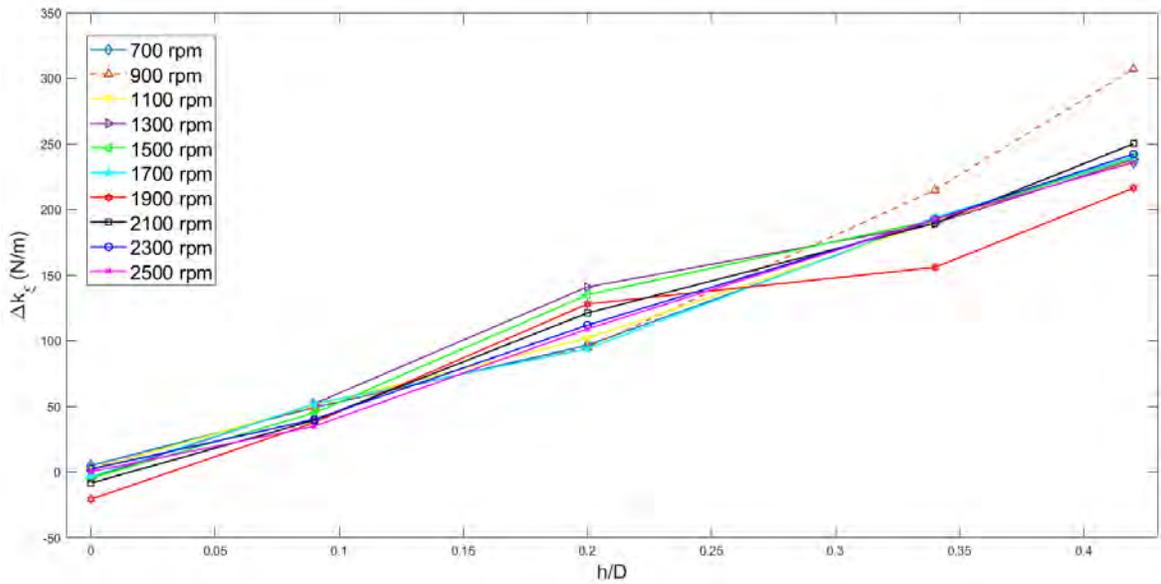


Figura 6.54 Variación de Δk_ξ en función de h/D , Caso 2.

Por otro lado, en la tabla 6.11 se muestra la desviación estándar (σ) de los valores de Δk_ξ identificados para cada velocidad respecto al promedio de Δk_ξ en función de la profundidad h/D .

Tabla 6.11 Desviación estándar de los parámetros de Δk_ξ identificados, Caso 2.

h/D	σ
0	7.139622
0.09	6.199437
0.20	16.2961
0.34	13.46609
0.42	22.45006

Asimismo, en la figura 6.55 se muestra el comportamiento de Δk_ξ calculado a partir del valor promedio de los datos de la figura 6.54 para cada velocidad del rotor, también se muestra la desviación estándar, denotada por el parámetro σ .

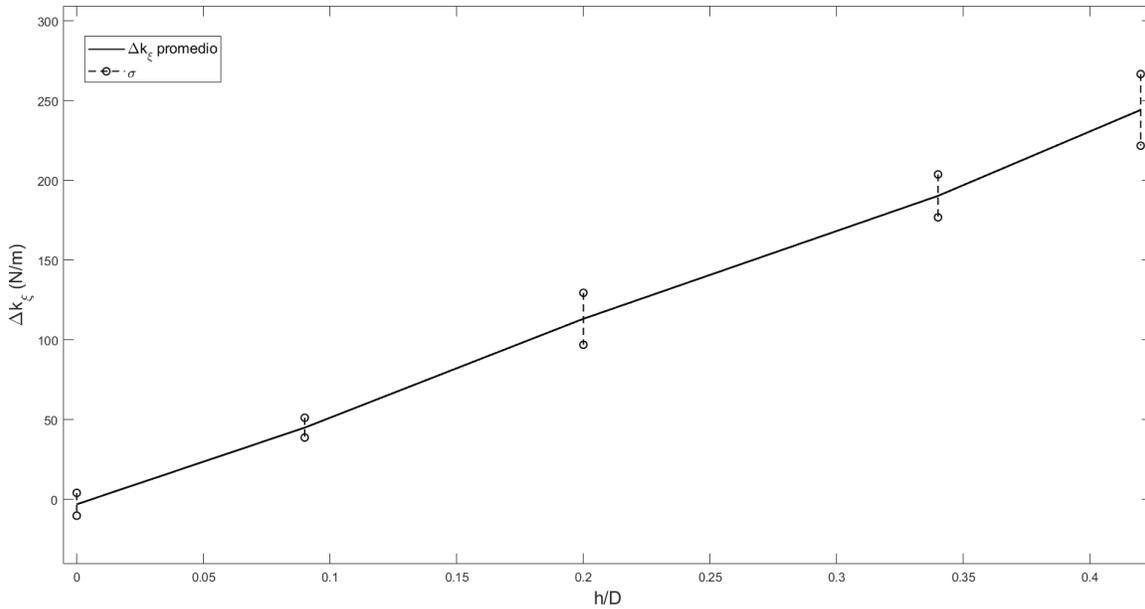


Figura 6.55 Desviación estándar (σ) de los valores identificados correspondientes a Δk_ξ en función de la profundidad h/D , Caso 2.

De la figura 6.55, se puede observar que el cambio de rigidez Δk_ξ que experimenta el rotor en función de la profundidad h/D de la grieta, presenta un comportamiento lineal, además de que los valores de la desviación estándar σ es un indicativo de la repetitividad de los datos obtenidos de forma experimental. Adicionalmente, en la figura 6.56 se muestra un ajuste de tipo lineal y su comparación con el comportamiento promedio de Δk_ξ de los valores identificados.

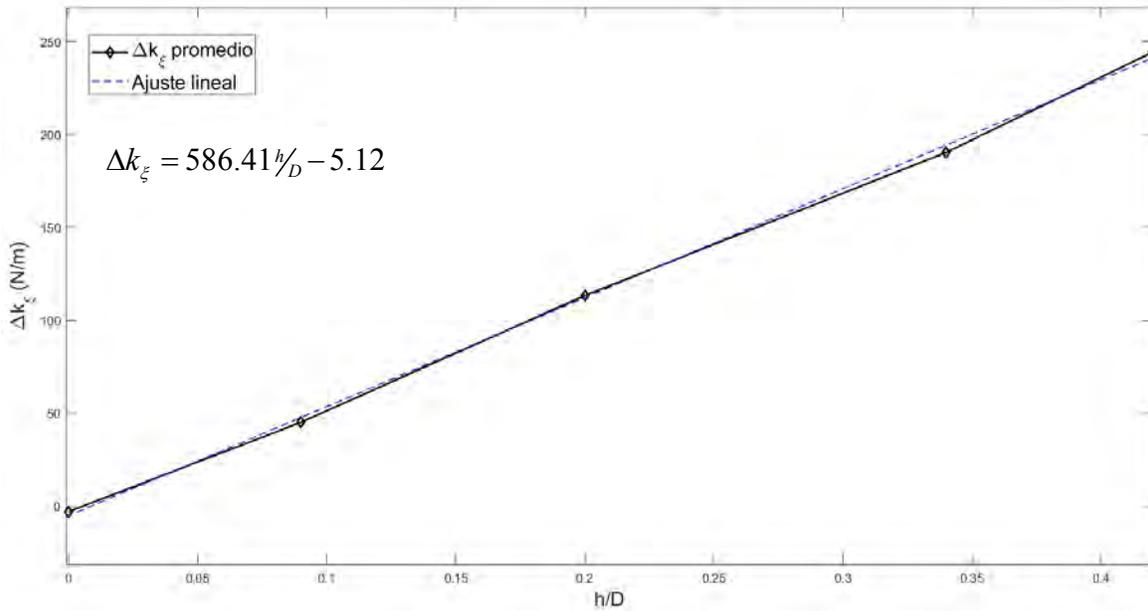


Figura 6.56 Ajuste lineal del comportamiento de Δk_{ξ} promedio en función de h/D , Caso 2.

6.3.3 Diagramas de Bode del rotor agrietado experimentales Vs numéricos

Con el objetivo de validar los cambios de rigidez del rotor Δk_{ξ} estimados con el identificador propuesto, se comparó la respuesta de vibración experimental del rotor con grieta con rampa de excitación (Diagrama de Bode experimental), con la respuesta de vibración obtenida de forma numérica (Diagrama de Bode numérico).

Para la simulación numérica del comportamiento vibratorio del rotor con grieta, se utilizaron los datos del rotor reportados en la tabla 6.2 y los valores de Δk_{ξ} o k_p identificados presentados en las tablas 6.8 y 6.9 respectivamente, así como, una rampa de excitación de tipo lineal idéntica a la utilizada en la parte experimental y un desbalance conocido con posición angular $\beta = 0^\circ$ igual a la utilizada experimentalmente.

Por tanto, los diagramas de Bode numéricos se obtuvieron a partir de la señal filtrada al resolver el modelo matemático del rotor agrietado, considerando una grieta abierta, es decir, $\psi(t) = 1$. Es importante mencionar que la amplitud de la subresonancia se ve afectada únicamente por los valores Δk_{ξ} identificados en la parte experimental, parámetro que se tomó como dato de entrada en el modelo matemático del rotor con grieta.

En las figuras 6.57 a la 6.66 se muestra la comparación de los diagramas de Bode obtenidos de forma experimental con los diagramas de Bode obtenidos de forma numérica.

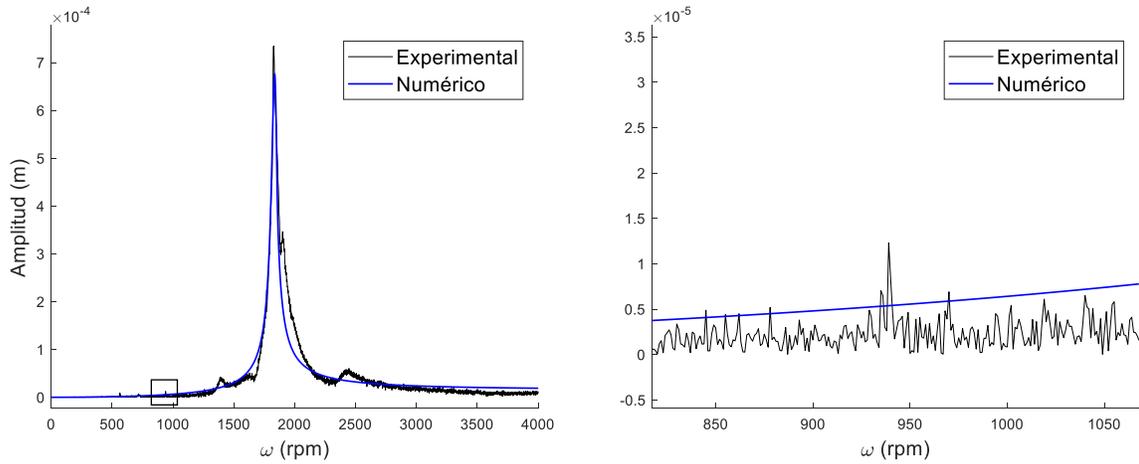


Figura 6.57 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0$ con $m_d e = 1.413(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 1.07 \text{ rad/s}^2$.

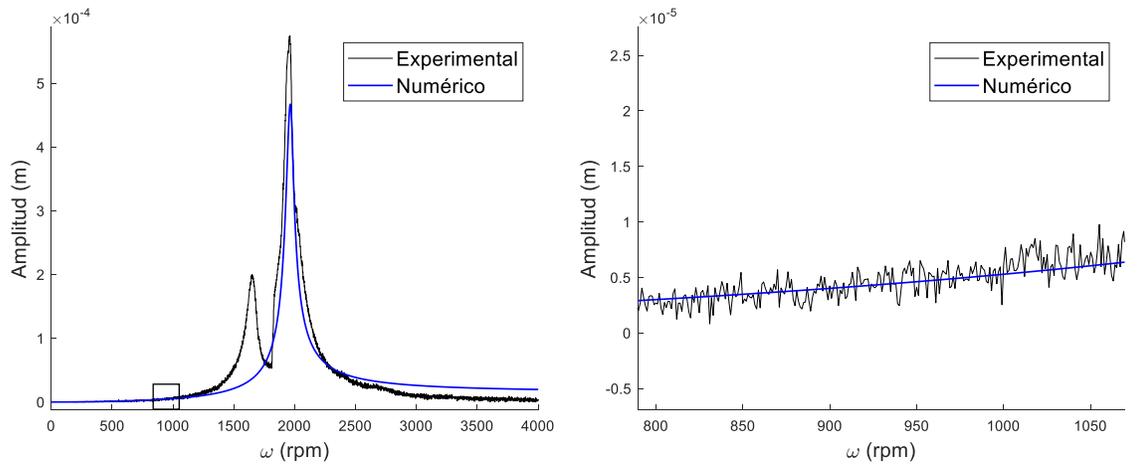


Figura 6.58 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0$ con $m_d e = 1.413(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 1.07 \text{ rad/s}^2$.

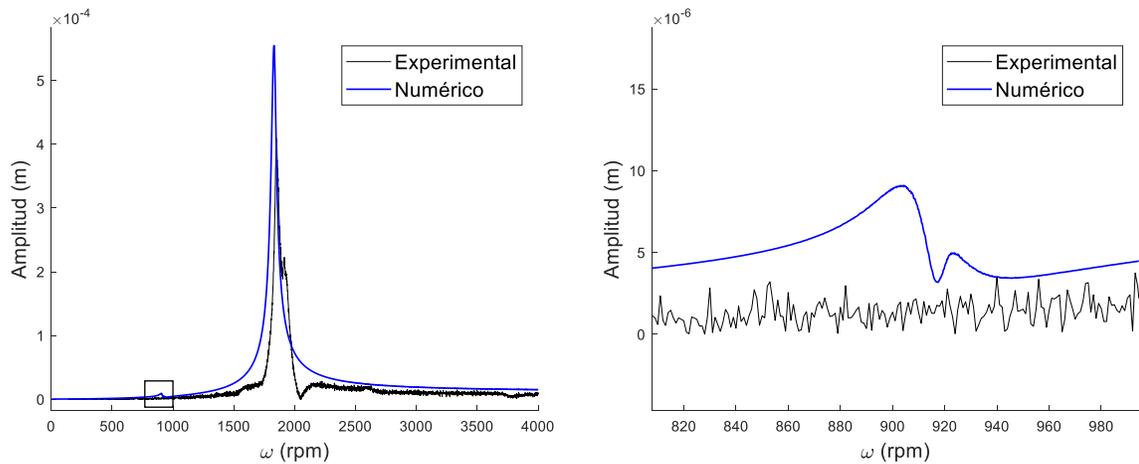


Figura 6.59 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.09$ con $m_d e = 1.143(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.37 \text{ rad/s}^2$.

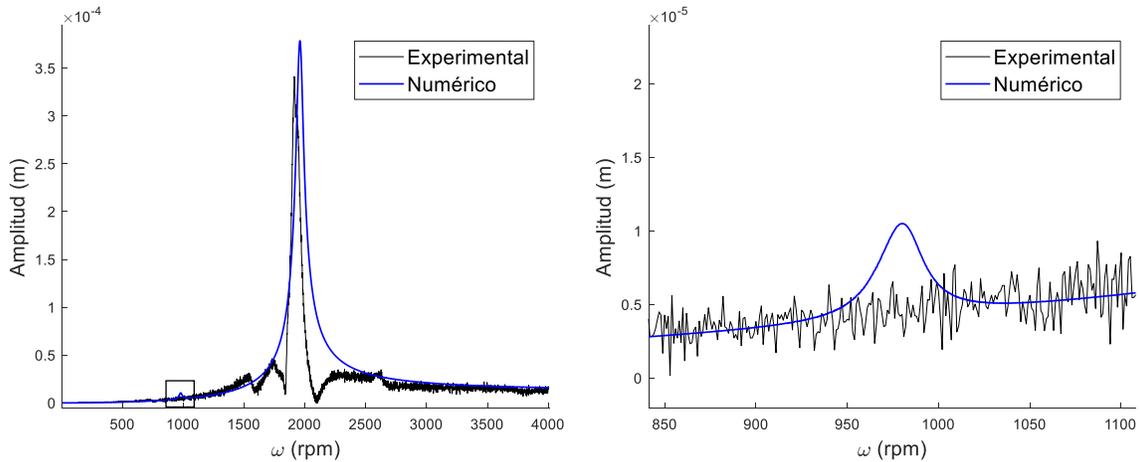


Figura 6.60 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.09$ con $m_d e = 1.143(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.37 \text{ rad/s}^2$.

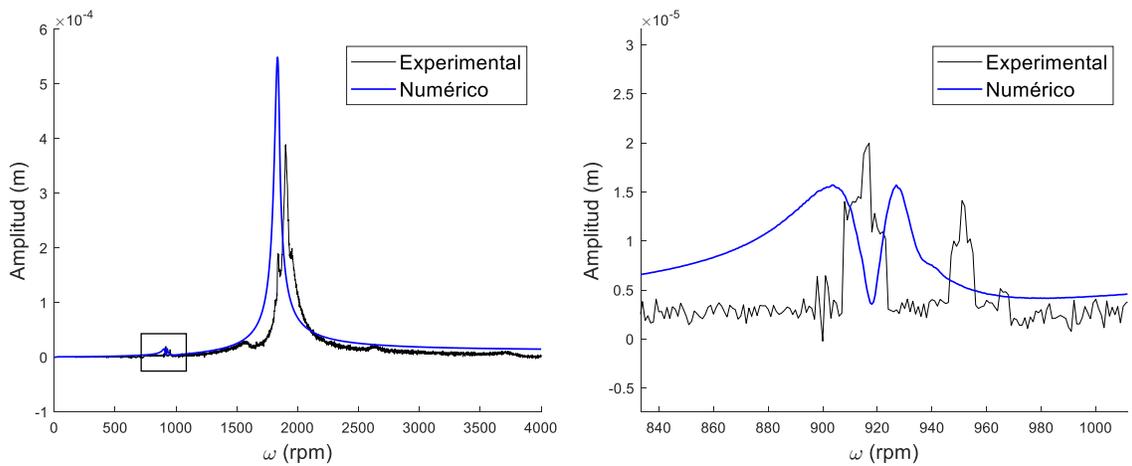


Figura 6.61 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.20$ con $m_d e = 1.143(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.96 \text{ rad/s}^2$.

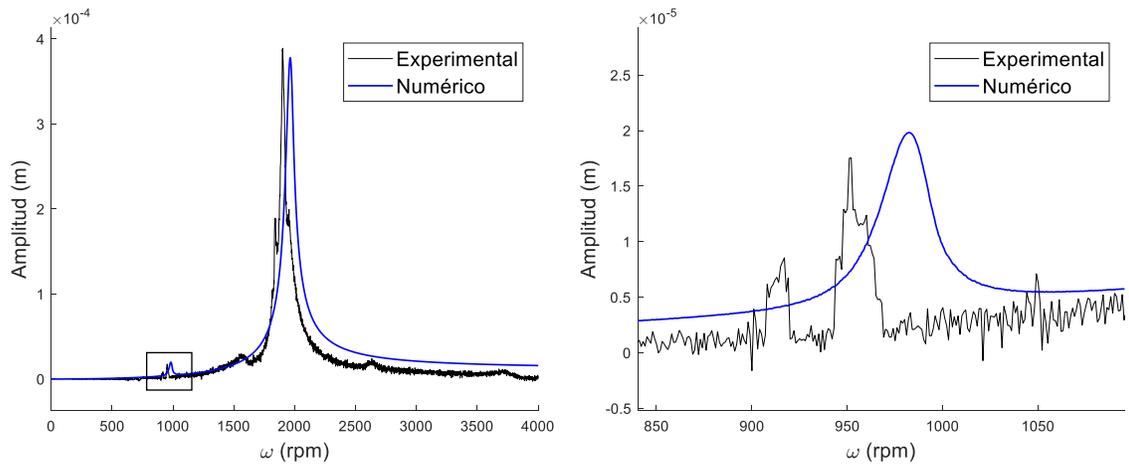


Figura 6.62 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.20$ con $m_d e = 1.143(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.96 \text{ rad/s}^2$.

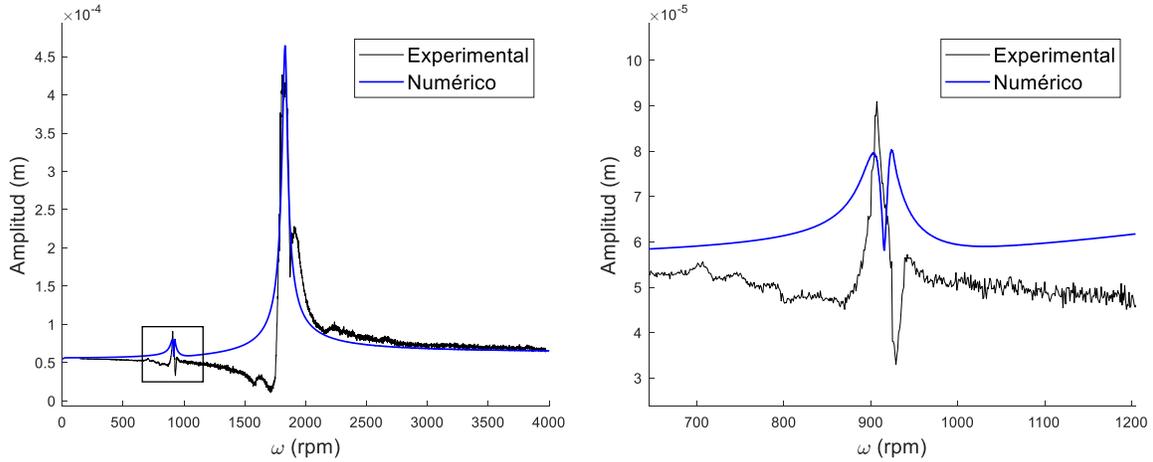


Figura 6.63 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.34$ con $m_d e = 8.43(10)^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.47 \text{ rad/s}^2$.

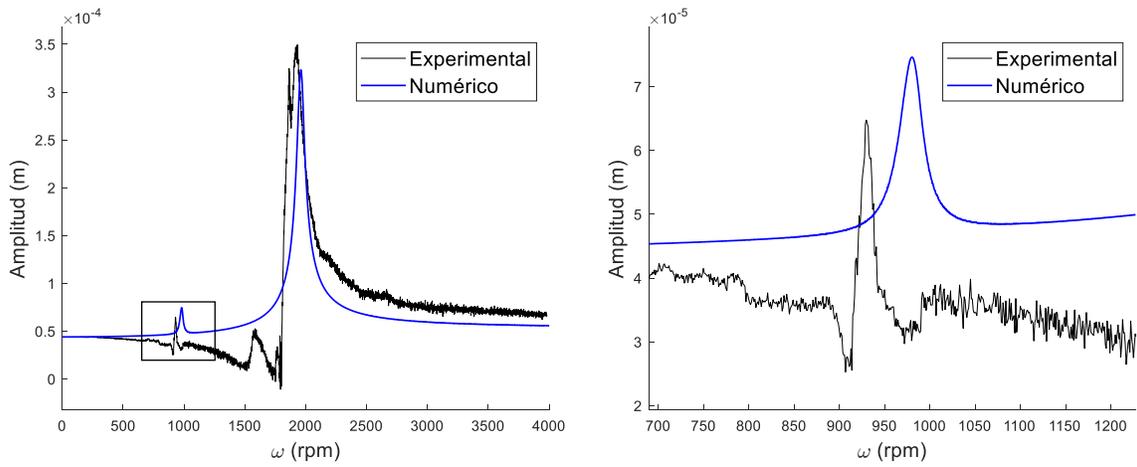


Figura 6.64 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.34$ con $m_d e = 8.43(10)^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.47 \text{ rad/s}^2$.

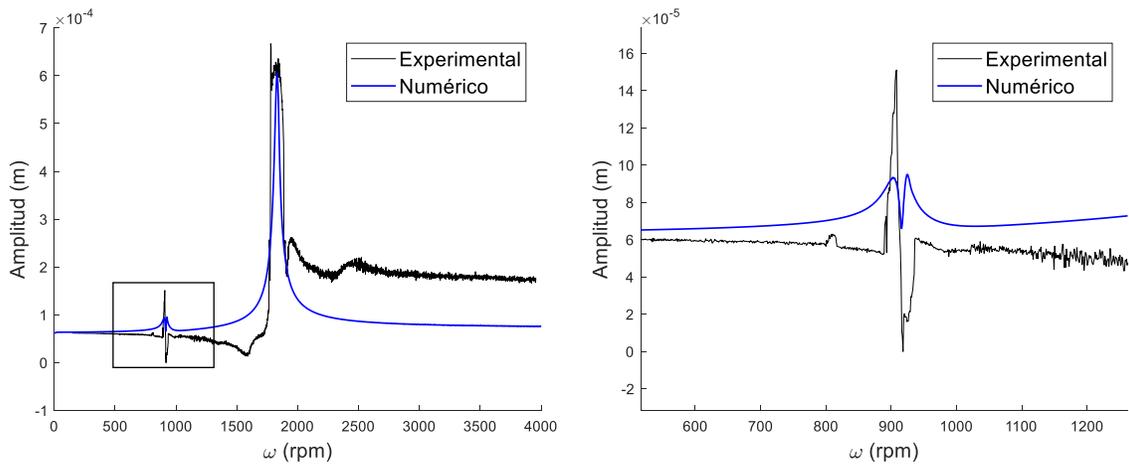


Figura 6.65 Comparación del diagrama de Bode eje y del rotor experimental para $h/D = 0.42$ con $m_d e = 1.122(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.55 \text{ rad/s}^2$.

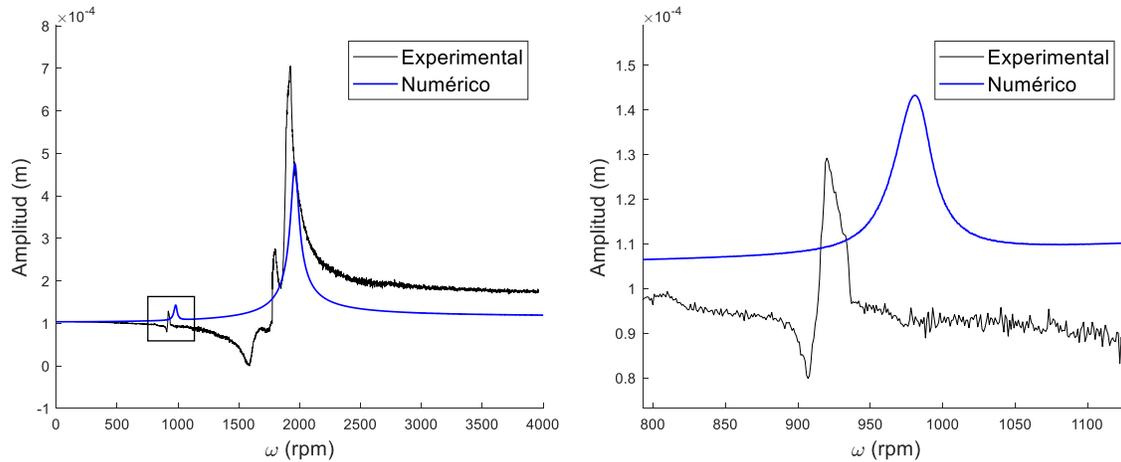


Figura 6.66 Comparación del diagrama de Bode eje x del rotor experimental para $h/D = 0.42$ con $m_d e = 1.122(10)^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $\alpha = 0.55 \text{ rad/s}^2$.

De la comparación de los diagramas de Bode experimentales y numéricos de las figuras 6.57 a la 6.66 se puede observar que la respuesta de vibración del rotor con grieta obtenido de forma numérica, presenta un comportamiento tanto cualitativo como cuantitativo muy similar respecto al de la respuesta de vibración del rotor con grieta experimental. Asimismo, se puede observar que conforme se incrementa la profundidad de la grieta, la amplitud de la subresonancia $\frac{1}{2} \omega_n$ (ω_n primera frecuencia natural del rotor) también se incrementa. Es importante observar que tanto numérica como experimentalmente solo se presenta una subresonancia $\frac{1}{2} \omega_n$, donde se concluye que la grieta inducida en la flecha experimental del rotor presenta un comportamiento dinámico donde la grieta siempre está abierta, tal y como se consideró en la parte numérica para $\psi(t) = 1$.

De acuerdo con los resultados presentados, se concluye que los valores identificados de pérdida o cambio de rigidez Δk_ξ y profundidad k_p del rotor con grieta experimental, son correctos, ya que, al tomar estos valores identificados como datos de entrada en el modelo matemático del comportamiento dinámico del rotor agrietado, éste es capaz de reproducir la respuesta del rotor experimental.

Por otra parte, en la figura 6.67 y 6.68 se muestra el comportamiento de los diagramas de Bode experimentales en función de las profundidades h/D consideradas en este caso. De los diagramas de Bode se pueden observar los cambios en las amplitudes de vibración en la frecuencia natural ω_n y la subresonancia $\frac{1}{2} \omega_n$ en función de la profundidad de la grieta h/D . Nótese que el comportamiento de los diagramas de Bode de las figuras 6.67 y 6.68 es el mismo que se presentó en la parte numérica, sección 4.2, Capítulo 4.

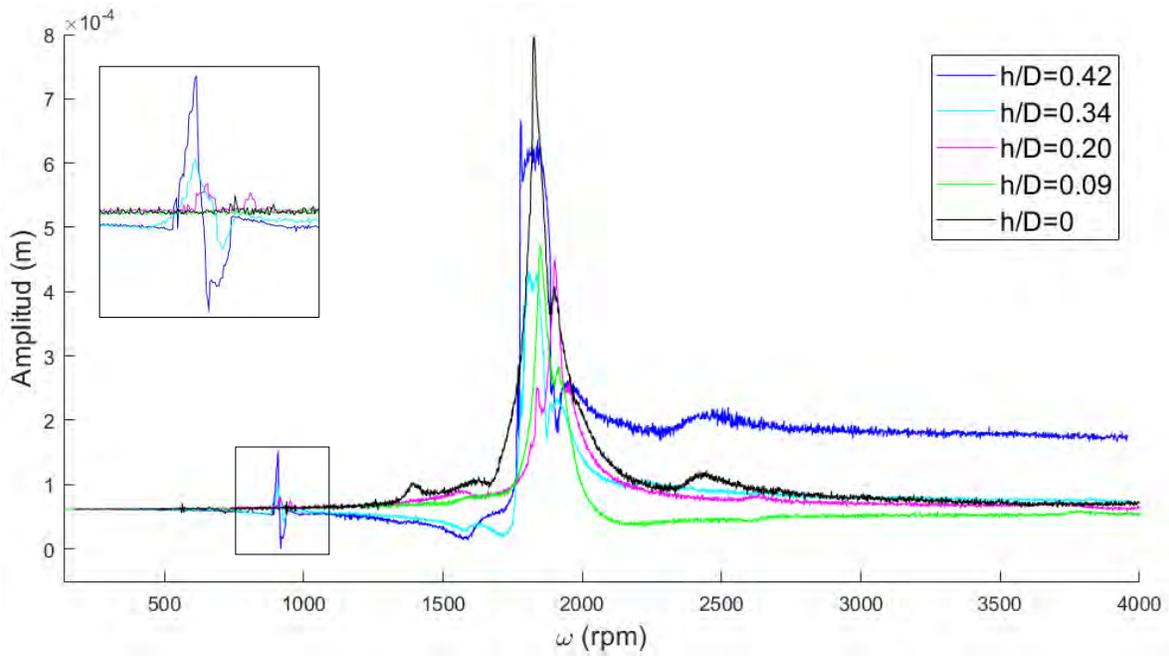


Figura 6.67 Evolución del diagrama de Bode eje y en función de la profundidad h/D .

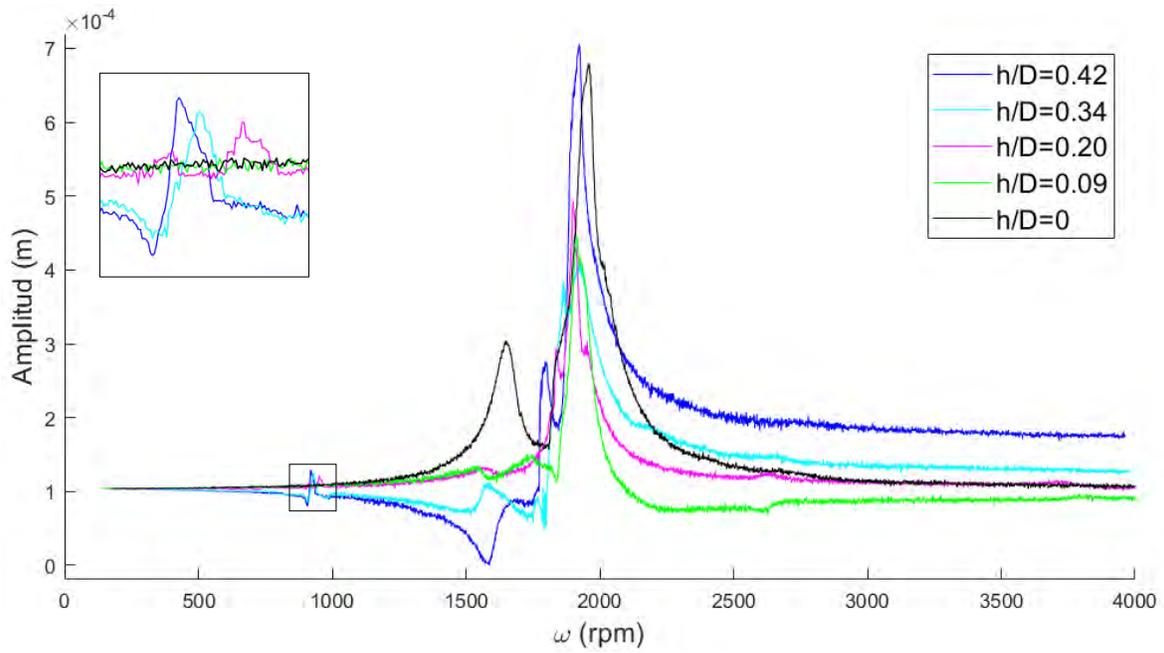


Figura 6.68 Evolución del diagrama de Bode eje x en función de la profundidad h/D .

6.4 Comportamiento de Δk_ξ en función de la profundidad h/D

En la figura 6.69 se compara el comportamiento del parámetro Δk_ξ identificado de forma experimental correspondiente al Caso 1 (figura 6.27) y al Caso 2 (figura 6.56) con una ecuación de tipo lineal, la ecuación lineal corresponde al valor promedio de las ecuaciones lineales propuestas en las figuras 6.27 y 6.56, Caso 1 y Caso 2 respectivamente. De los resultados mostrados en la figura 6.69 se puede observar que la ecuación lineal propuesta, reproduce sin mucho margen de error el comportamiento obtenido de forma experimental de la variación de rigidez Δk en función de la profundidad de la fractura h/D .

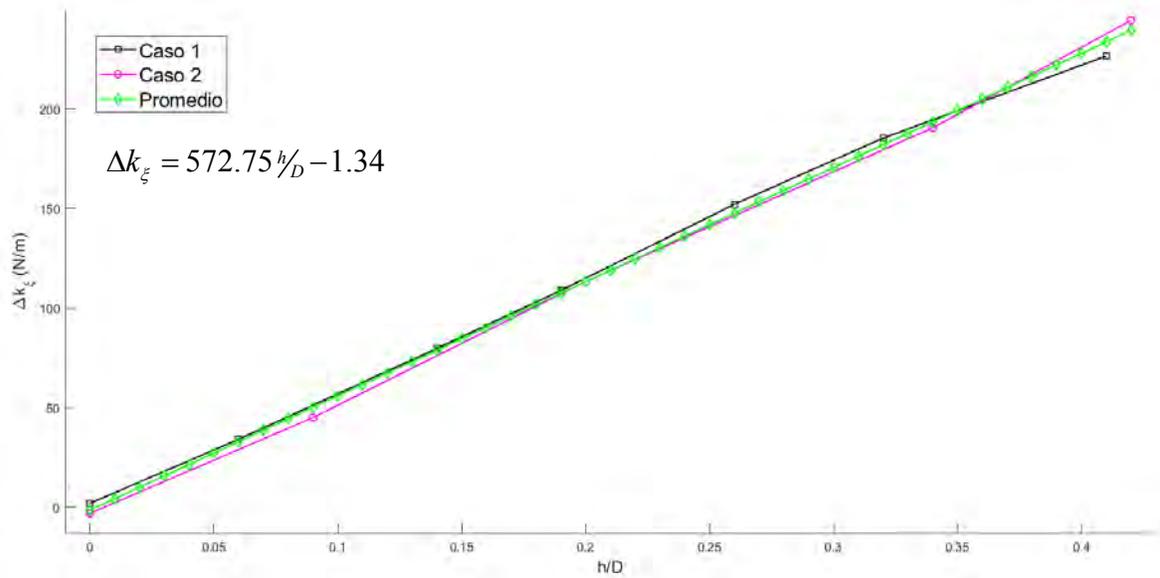


Figura 6.69 Comportamiento de Δk_ξ para el Caso 1, Caso 2 y Ecuación de tipo lineal $Vs h/D$.

Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se llevó a cabo un estudio numérico-experimental para la estimación de parámetros propios de una grieta transversal presente en un sistema rotor-cojinete, considerando un rotor tipo Jeffcott. Para este fin, se seleccionó un modelo de la literatura de un rotor Jeffcott de dos grados de libertad con una grieta transversal. Dicho modelo presenta como fuentes de excitación la pérdida de rigidez atribuible a la grieta transversal y la fuerza de excitación debida al desbalance del sistema. El modelo se resolvió por el método de integración directa de Newmark en tiempo discreto, el cual se validó de forma numérica al compararse la respuesta del mismo utilizando datos reportados en la literatura. Una vez obtenida la respuesta numérica del modelo matemático, se analizó el comportamiento de forma numérica del rotor agrietado para el caso de una grieta transversal respiratoria y una grieta siempre abierta. De acuerdo con esto, se observó que las características dinámicas de un rotor con una grieta respiratoria es que excita distintas armónicas en la respuesta ($1X$, $2X$, $3X$, ..., nX), mientras que, para una grieta siempre abierta, se excita únicamente la segunda armónica ($2X$). Asimismo, a partir de la respuesta al desbalance de un rotor agrietado, se observó que una masa de desbalance añadida al sistema afecta únicamente a la componente fundamental ($1X$) o resonancia para ambos casos de tipo de grieta. Las armónicas presentes en el sistema a causa de una grieta, ya sea respiratoria o abierta, se pueden observar en el diagrama de Bode en forma de subresonancias. Estas subresonancias se presentan a $\frac{1}{2}\omega_n$, $\frac{1}{3}\omega_n$, $\frac{1}{5}\omega_n$ y $\frac{1}{7}\omega_n$ para el caso de una grieta que abre y cierra en función de giro del rotor (respiratoria), mientras que, para una grieta siempre abierta, la única subresonancia excitada es a $\frac{1}{2}\omega_n$. Además, se observó que, una grieta respiratoria también afecta la amplitud de la resonancia, mientras que en el caso de una agrieta siempre abierta esto no ocurre.

La técnica de identificación algebraica fue aplicada al modelo del rotor agrietado seleccionado de la literatura. A partir de este modelo fue posible desarrollar un nuevo modelo el cual permite estimar el parámetro de profundidad de la grieta k_p , o bien, la pérdida de rigidez Δk_ξ . Estos parámetros son función de las frecuencias naturales del rotor con y sin grieta. El identificador propuesto se desarrolló para dos casos: velocidad angular constante y velocidad angular variable, considerando únicamente rampas de excitación de tipo lineal. La principal ventaja del modelo de identificación propuesto, es que permite estimar el parámetro de profundidad de la grieta, o bien la pérdida de rigidez, únicamente a partir de la respuesta vibratoria del sistema. Sin embargo, este modelo de identificación requiere como datos de entrada los parámetros del sistema, tales como masa, amortiguamiento y rigidez del sistema. Los modelos de identificación propuestos se validaron de forma numérica al introducir los parámetros del rotor y la respuesta vibratoria del mismo (vector de desplazamientos) como datos de entrada. Las pruebas numéricas demuestran la rápida convergencia del identificador (0.1 s) para estimar la profundidad de manera precisa para ambos casos (velocidad constante y variable). Adicionalmente, se realizó un análisis de robustez del identificador a velocidad constante, cuyas pruebas se realizaron sin considerar la fuerza de excitación del desbalance, además se agregó un vector de fuerzas de tipo asíncronas, las cuales emulan perturbaciones, es decir, producen armónicas en el sistema. Las pruebas numéricas de robustez demuestran

que, a pesar de estas perturbaciones, el identificador es capaz de estimar el valor correcto de profundidad.

Las pruebas experimentales se realizaron para dos casos. En tales casos se utilizaron profundidades de la grieta (h/D) distintas. Estas pruebas experimentales estuvieron limitadas para el caso de un rotor con grieta siempre abierta. La plataforma computacional se validó de manera experimental al calcular los parámetros del rotor (masa, amortiguamiento y rigidez) en ambos casos. De estas comparaciones, se concluye que la plataforma computacional (solución del modelo matemático) es capaz de reproducir la dinámica del rotor Jeffcott experimental. Los parámetros estimados de manera experimental de profundidad fueron obtenidos para distintos rangos de velocidades en ambos casos. Se trató de calcular profundidad k_p experimental considerada en el modelo matemático, sin embargo, debido a limitaciones del equipo de laboratorio, se concluye que no es posible medir dicho valor. A partir de las pruebas experimentales realizadas, se observó que el comportamiento del identificador algebraico es similar tanto de manera numérica como experimental.

Utilizando los valores de profundidad estimados, o bien pérdida de rigidez Δk_ξ , se comparó la señal del rotor experimental respecto a la simulada numéricamente. Las comparaciones demuestran que los resultados obtenidos experimentalmente y los simulados son similares tanto en comportamiento como en amplitud, por lo cual se puede concluir que la plataforma computacional arroja valores correctos para la estimación experimental de la profundidad k_p , o bien Δk_ξ . Por otro lado, se llevaron a cabo pruebas de fatiga en un eje de aluminio con el fin de implementar un banco de pruebas experimentales para un rotor Jeffcott con grieta respiratoria. Sin embargo, debido a la configuración utilizada para la iniciación de la grieta transversal en el rotor, se concluye que no es posible utilizar dicha configuración, ya que se generan múltiples grietas en la sección del rotor, además de que la muesca genera una asimetría que enmascara el efecto de respiro de la grieta transversal, además de que el modelo matemático está limitado a un eje circular (rotor simétrico). La principal aportación del presente trabajo, es el estudio experimental del comportamiento de un rotor agrietado, así como la implementación de la técnica de identificación algebraica para este fenómeno, la cual puede ser extendida para modelos más complejos.

Recomendaciones y trabajos futuros

Para trabajos e investigaciones futuras, se recomienda realizar las siguientes actividades:

- Elegir una configuración para la generación de la grieta transversal en un eje circular, sin que afecten la dinámica correspondiente a un rotor simétrico.
- Realizar un análisis experimental por fatiga con diversas probetas con el fin de tener un control de la profundidad de la grieta transversal.
- Se recomienda dar seguimiento al estudio de Zhongyi [3] con el fin de ajustar los estados de respiro reales reportados respecto a los encontrados en la literatura.

Dentro de los trabajos futuros a desarrollarse están los siguientes:

- Realizar un estudio numérico-experimental para un rotor simétrico que permita identificar la posición nodal de la grieta transversal en la sección longitudinal del eje del rotor y la profundidad dimensional, implementándose una o múltiples grietas en el sistema.
- Modelado de la matriz de rigidez de un elemento agrietado para el caso de un rotor asimétrico de múltiples grados de libertad.
- Análisis de la respuesta vibratoria de un rotor con un eje agrietado generado por fatiga, considerando distintas velocidades de operación y rampas de excitación.

Referencias

- [1] R. Tiwari, *Rotor Systems: Analisis and Identification*, Florida, EUA: Taylor & Francis Group, 2018.
- [2] G. Sabnavis, G. Kirk, M. Kasarda y D. Quinn, «Cracked Shaft Detection and Diagnostics: A Literature Review,» *The Shock and Vibration Digest*, pp. 287-296, 2004.
- [3] C. Zhongyi, «Vibration diagnosis of elastic shafts with a transverse crack,» Edith Cowan University, Perth, Australia, 2011.
- [4] N. Bachschmid, P. Pennacchi y E. Tanzi, *Cracked rotors*, Berlín: Springer, 2010.
- [5] J. Wauer, «On the dynamics of cracked rotors: A literature survey,» *ASME Book No AMR067*, vol. 43, nº 1, pp. 13-17, 1990.
- [6] H. H. Jeffcott, «The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighbourhood of a Whirling Speed,» pp. 304-314, 1919.
- [7] I. W. Mayes y W. G. R. Davies, «Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor,» *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, pp. 139-145, 1984.
- [8] J. Wauer, «Modelling and formulation of equations of motion for cracked rotating shafts,» *Int. J. Solid Structures*, vol. 26, nº 8, pp. 901-914, 1990.
- [9] K. R. Collins, R. H. Plaut y J. Wauer, «Detection of Cracks in Rotating Timoshenko Shafts Using Axial Impulses,» *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 113, pp. 74-78, 1991.
- [10] O. S. Jun y H. J. Eun, «Modelling and vibration analysis of a simple rotor with a breathing crack,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 155, nº 2, pp. 273-290, 1992.
- [11] R. Gasch, «A survey of the dynamics behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack,» *Journal of sound and vibration*, vol. 160, nº 2, pp. 313-332, 1993.
- [12] M. A. Al-Shudeifal y E. A. Butcher, «New breathing functions for the transverse breathing crack of the cracked rotor system: Approach for critical and subcritical harmonic analysis,» *Journal of Sound and Vibration*, pp. 1-19, 2010.
- [13] A. Dimarogonas, «Vibration of crackes structures: A state of art review,» *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 55, nº 5, pp. 831-857, 1996.
- [14] B. Grabowski, «The vibrational behavior of a turbine rotor containing a transverse crack,» *Journal of Mechanical Design*, pp. 140-146, 1980.
- [15] D. B. Bently y A. Muszynska, «Detection of rotor cracks,» *Proceedings of the fifteenth turbomachinery symposium*, pp. 129-139, 1986.
- [16] C. A. Papadoupolos y A. D. Dimarogonas, «Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack,» *Journal of Sound and Vibrurion*, vol. 17, nº 1, pp. 81-93, 1987.
- [17] D. M. Rajab y A. Al-Sabeeh, «Vibrational characteristics of cracked shafts,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 147, nº 3, pp. 465-473, 1991.
- [18] A. S. Sekhar y S. Prabhu, «Crack detection and vibration characteristics of cracked shafts,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 157, nº 2, pp. 375-381, 1992.

-
- [19] O. A. Sámano, «Detección de fracturas a través de vibraciones mecánicas,» CENIDET, Cuernavaca, Morelos, 1996.
- [20] A. Blanco-Ortega, «Detección de fracturas mediante el análisis armónico de la respuesta del rotor,» CENIDET, Cuernavaca, Morelos, 2001.
- [21] A. S. Sekhar y B. S. Prabhu, «Condition monitoring of cracked rotors through transient response,» *Mech. Mach. Theory*, vol. 33, nº 8, pp. 1167-1175, 1998.
- [22] P. Goldman, A. Muszynska, D. Bently y K. Dayton, «Application of perturbation methodology and directional filtering for early rotor crack detection,» de *International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition*, Indianapolis, Indiana, EUA, 1999.
- [23] A. S. Sekhar, «Crack detection through Wavelet transform for a run-up rotor,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 259, nº 2, p. 461-472, 2003.
- [24] A. S. Sekhar, «Identification of a Crack in a Rotor System Using a Model-based Wavelet Approach,» *Structural Health Monitoring*, vol. 2, nº 4, p. 293-308, 2003.
- [25] J.-J. Sinou, «Detection of cracks in rotor based on the 2X and 3X super-harmonic frequency components and the crack-unbalance interactions,» *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, vol. 13, pp. 2024-2040, 2008.
- [26] D. A. Estrada Rodas, «Caracterización Dinámica de Rotores Fracturados mediante Transformada Wavelet,» CENIDET, Cuernavaca, Morelos, 2009.
- [27] I. Imam, S. H. Azzaro, R. J. Bankert y J. Scheibel, «Development of an on-line rotor crack detection and monitoring system,» *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, pp. 241-250, 1989.
- [28] N. Bachschmid, P. Pennacchi, E. Tanzi y A. Vania, «Identification of Transverse Crack Position and Depth in Rotor Systems,» *Meccanica*, vol. 35, p. 563-582, 2001.
- [29] P. Pennacchi, N. Bachschmid y A. Vania, «A model-based identification method of transverse cracks in rotating shafts suitable for industrial machines,» *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 20, p. 2112-2147, 2006.
- [30] P. Popaleny y N. Petón, «Gas turbine with rotor crack vibration diagnostics,» de *46th Turbomachinery & Pump symposia*, Houston, Texas, 2017.
- [31] M. Arias-Montiel, F. Beltrán-Carbajas y G. Silva-Navarro, «On-line algebraic identification of eccentricity parameters in active rotor-bearing systems,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 85, pp. 152-159, 2014.
- [32] F. Beltrán-Carbajal, G. Silva Navarro, H. Sira-Ramírez y A. Blanco Ortega, «Active Vibration Control Using On-line Algebraic Identification and Sliding Modes,» *Computación y Sistemas*, vol. 13, nº 3, pp. 313-330, 2008.
- [33] L. Ljung, *Systems Identification: Theory for the User*, New Jersey: 1987, Prentice-Hall.
- [34] T. Soderstrom y P. Stoica, *System Identification*, New York: Prentice-Hall, 1989.
- [35] S. Sagara y Z. Y. Zhao, «Recursive identification of transfer function matrix in continuous systems via linear integral filter,» *International Journal of Control*, vol. 50, nº 2, pp. 457-477, 1989.
- [36] S. Sagara y Z. Y. Zhao, «Numerical integration approach to on-line identification of continuous systems,» *Automatica*, vol. 26, nº 1, pp. 63-74, 1990.
- [37] M. Fliess y H. Sira-Ramírez, «An algebraic framework for linear detection,» *ESAIM*
-

CONTR. OPT. CALC. VARIAT, vol. 9, pp. 1-18, 2003.

- [38] F. Beltran-Carbajal y M. Arias-Montiel, «Active Unbalance Control of Rotor Systems Using On-line Algebraic identification methods,» *Asian Journal of Control*, vol. 15, n° 6, p. 627–1637, 2013.
- [39] J. G. Mendoza-Larios, «Identificador Algebraico en Línea del Desbalance para un Sistema rotodinámico,» CENIDET, Cuernavaca, Morelos, 2016.
- [40] M. Nango Blanco, «Identificación Algebraica en Línea de Parámetros para el Balanceo de Rotores Asimétricos,» CENIDET, Cuernavaca, Morelos , 2015.
- [41] S. J. Landa-Damas, «Identificación algebraica de coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada,» Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, 2017.
- [42] J. T. Sawicki, X. Wu, G. Y. Baaklini y A. L. Gyekenyesi, «Vibration-based crack diagnosis in rotating shafts during acceleration through resonance,» de *Proceedings of SPIE vol 5046*, 2003.
- [43] M. Lalanne y G. Ferraris, *Rotordynamics prediction in engineering*, Chichester, England: John Wiley and sons, 1998.
- [44] S. S. Rao, *Mechanical vibrations*, NJ, EUA: Prentice Hall, 2011.
- [45] N. Dumitru, E. Secara y M. Mihalca, «Study of rotor-bearing systems using campbell diagram,» de *Proceedings of the 1st conference on manufacturing engineering, quality and production systems (Volume II)*.
- [46] K.-J. Bathe, *Finite element procedures*, 2a Ed., Watertown, MA: Prentice Hall, 2014.
- [47] A. S. Sekhar, «Crack detection though wavelet transform for a run-up rotor,» *Journal of sound and vibration*, vol. 259(2), pp. 461-472, 2003.
- [48] A. C. Papadopoulos y A. D. Dimarogonas, «Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 117, pp. 81-93, 1987.
- [49] K. E. Atkinson, *An introduction to numerical analysis*, 2da Ed., Canadá: John Wiley & sons, 1988.
- [50] G. A. Papagiannopoulos y G. D. Hatzigeorgiou, «On the use of the half-power bandwidth method to estimate damping in building structures,» *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 31, p. 1075–1079, 2011.
- [51] J. Mayen, S. A. Serna, B. Campillo y A. Flores, «Short crack initiation and growth kinetics analysis in a microalloyed steel plate using rotating bending fatigue modified notched specimens,» *Materials Science & Engineering A*, vol. 582, pp. 22-28, 2013.

Apéndice A: Implementación del banco de pruebas con grieta inducida por fatiga

Con el objetivo de implementar una grieta transversal por fatiga en el eje del rotor experimental, se utilizó la configuración propuesta por Mayen *et al.* [51], quien generó grietas transversales en un eje circular por fatiga. La configuración propuesta por Mayen *et al.* asegura que la grieta generada por fatiga será del tipo transversal, tipo de grieta que se considera en el modelo matemático del identificador propuesto.

La principal diferencia de una grieta generada por fatiga a una realizada de manera artificial mediante un corte, es que no existe una pérdida de material al generarse la grieta. En el desarrollo de las pruebas experimentales de la sección 6.1, se utilizó una herramienta de corte con el fin de generar una grieta en el sistema rotor-cojinete; sin embargo, el comportamiento dinámico exhibido por el rotor demostró que correspondía al de un rotor con una grieta siempre abierta (ver sección 4.2). Por otra parte, la característica principal de una grieta transversal respiratoria es que excita distintas armónicas, en la sección 4.2, se demostró que ésta excita a la respuesta del rotor principalmente a las componentes $1X$, $2X$, ..., nX , las cuales corresponden a la resonancia (ω_n) y a las subresonancias $\frac{1}{2}\omega_n$, $\frac{1}{3}\omega_n$, ..., $\frac{1}{n}\omega_n$.

De acuerdo con lo anterior, el objetivo de generar una grieta por fatiga, es que esta se comporte como una grieta respiratoria durante el comportamiento dinámico del rotor, ya que este es el fenómeno que se reporta en la literatura para un rotor real.

De acuerdo con Mayen *et al.* [51], la configuración de la probeta utilizada se muestra en la figura A.1.

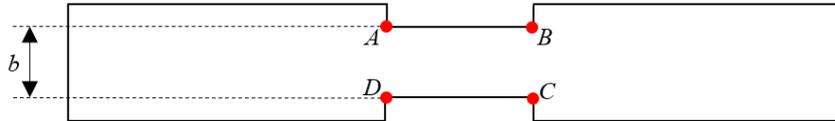


Figura A.1 Configuración de las probetas utilizadas para las pruebas de fatiga.

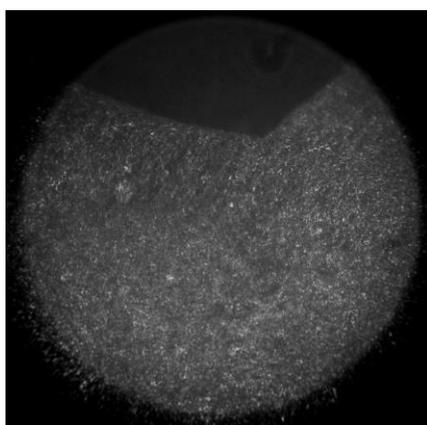
De acuerdo con Mayen *et al.* [51], las esquinas ABCD son las zonas con mayor concentración de esfuerzos y las secciones AD y BC son las zonas en donde se propaga la grieta. La configuración mostrada en la figura A.1 asegura que el crecimiento de la grieta será de forma transversal al eje longitudinal de la probeta. Para estas pruebas, se utilizó un eje de aluminio 7075-T651, el cual cuenta con un módulo de elasticidad de $E = 72(10)^3 \text{ Mpa}$ y una densidad de $\rho = 2.80 \text{ gr/cm}^3$. La selección de este material se basó en la facilidad de fatigar este material, a diferencia del eje de acero utilizado para las pruebas experimentales descritas en la sección 6.1. En la figura A.2 se muestra la configuración de la máquina de fatiga rotatoria utilizada para la implementación de la grieta en la parte media de la flecha del rotor.

El objetivo principal fue inducir una grieta transversal generada por fatiga en la flecha del rotor experimental, controlando el número de ciclos y tener control de la longitud de la grieta inducida, posteriormente montar la flecha en el rotor experimental, medir la respuesta de vibración e identificar la grieta en función de la profundidad. Una vez realizada la identificación se desmonta nuevamente la flecha y se somete nuevamente a fatiga controlando otra vez el número de ciclos y así incrementar la longitud de la grieta, se mide la longitud de la grieta y se monta en el rotor experimental para medir la respuesta de vibración e identificar la grieta en función de la nueva profundidad, este proceso se repite hasta llegar a la fractura de la flecha o alcanzar una profundidad de grieta de $h/b=0.45$. El número de ciclos para llegar a la fractura de la flecha fue de $n = 145617$ ciclos. En la figura A.4 se muestra la fractura de la flecha.

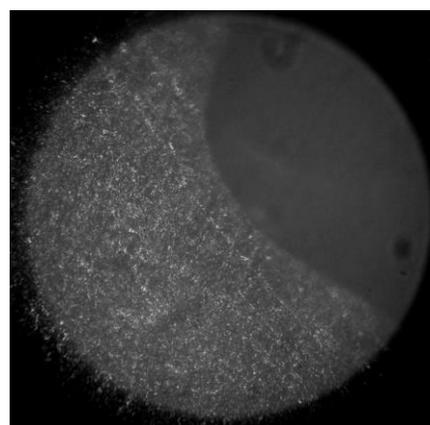


Figura A.4 Fractura de la flecha de aluminio para $n = 145617$ ciclos.

En las figuras A.5 a la A.7 se muestran las fotografías de la evolución de la grieta para diferentes ciclos de carga aplicados a la flecha de aluminio. Las fotografías se obtuvieron a través del microscopio MVK-H21 y la cámara Moticam5.



a)



b)

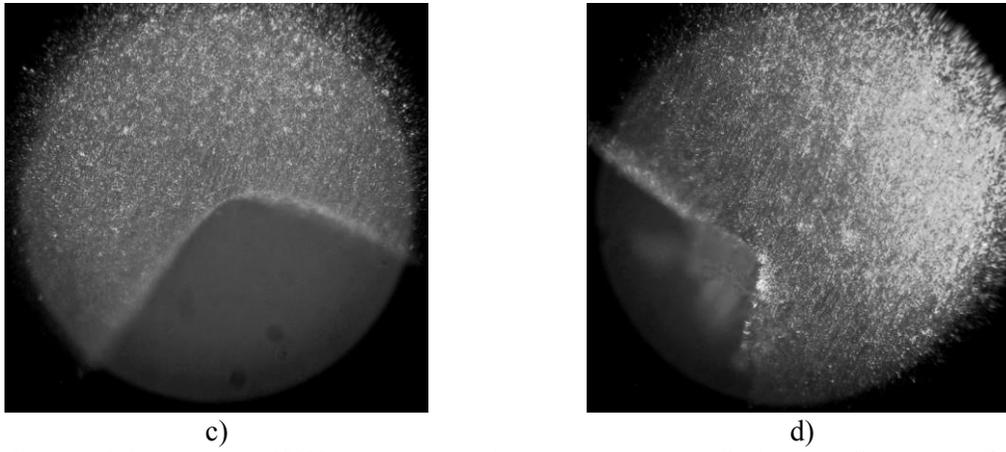


Figura A.5 Flecha con $n = 50611$ ciclos de carga a) esquina A, b) esquina B, c) esquina C, d) esquina D.

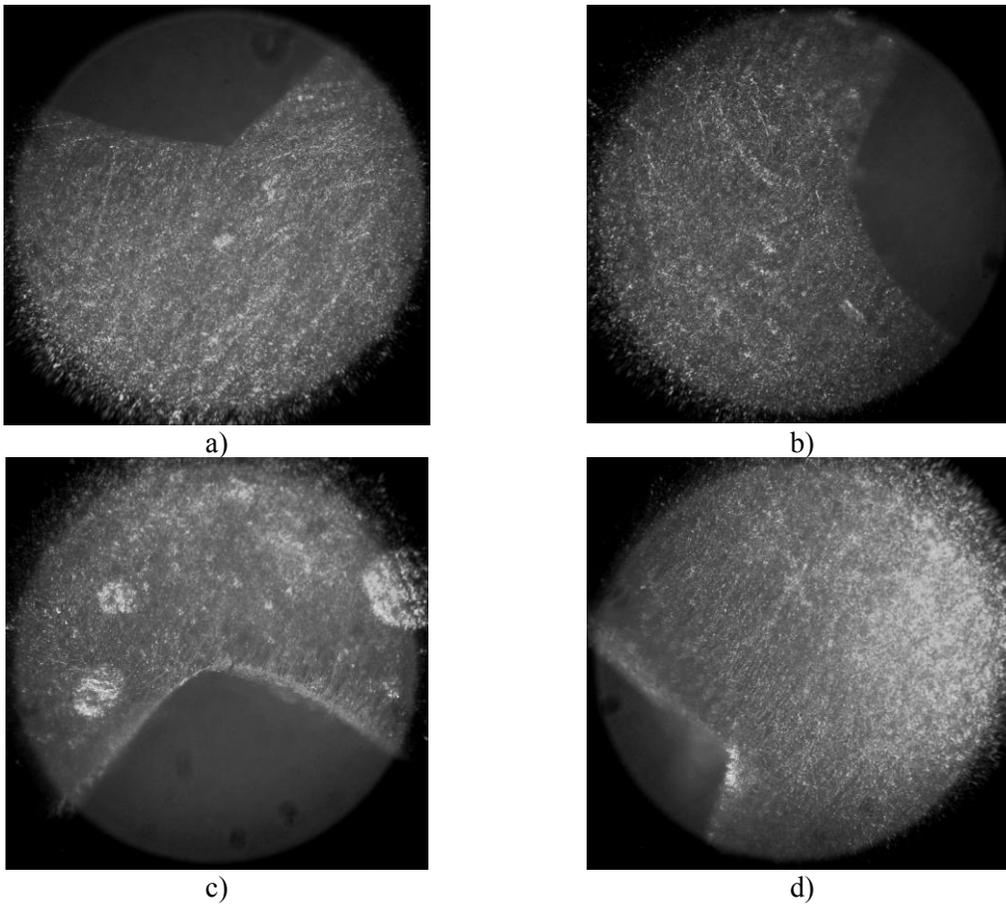


Figura A.6 Flecha con $n = 90342$ ciclos de carga (sin grieta) a) esquina A, b) esquina B, c) esquina C, d) esquina D.

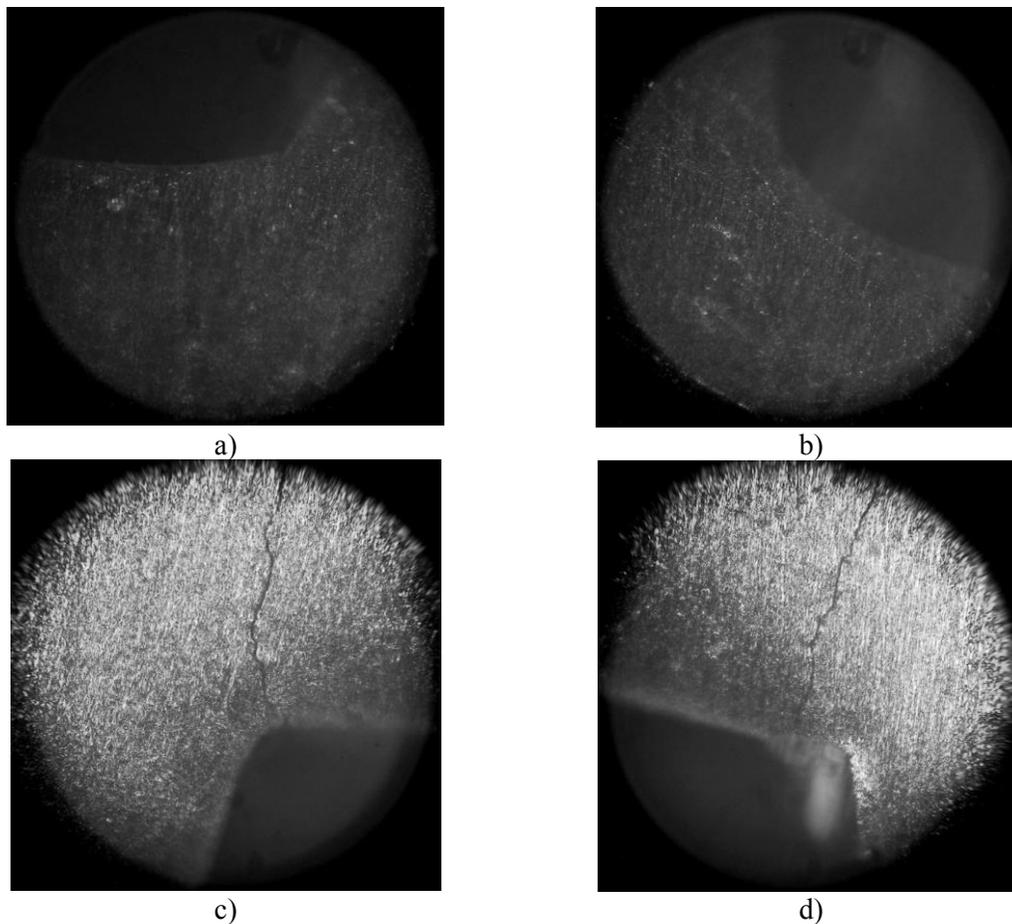


Figura A.7 Flecha con $n = 130172$ ciclos de carga a) esquina A sin grieta, b) esquina B sin grieta, c) esquina C con grieta, d) esquina D con grieta.

De acuerdo con las figuras A.5 y A.7, se puede observar que para $n = 90342$ ciclos de carga no hay presencia de grieta en la sección transversal de la flecha. En contraste, para $n = 130172$ ciclos de carga existen la presencia de dos grietas con inicio en las esquinas C y D respectivamente (ver figura A.7).

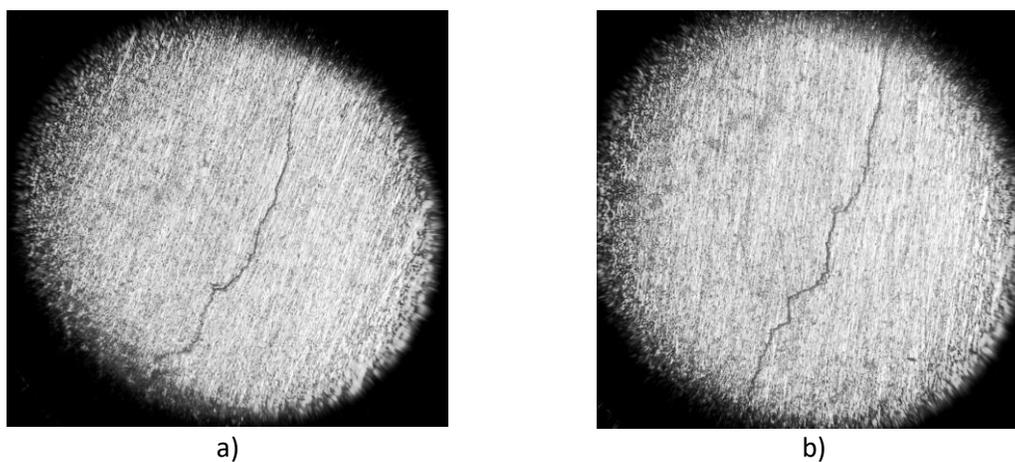


Figura A.8 Grieta transversal en la sección del eje $n = 130172$ ciclos de carga a) sección C-B, b) sección D-A.

En la figura A.8 se muestra un zoom de la grieta transversal en ambas esquinas incrementando su longitud en la zona de las líneas de C-B y D-A.

Por otro lado, en la figura A.9, se muestra la terminación de la grieta transversal para ambas secciones. La relación de profundidad de la grieta corresponde a $h/b=0.38$ y $h/b=0.34$ correspondiente a la sección C-B y D-A respectivamente, donde b denota al ancho de la cara y h la profundidad de la grieta.

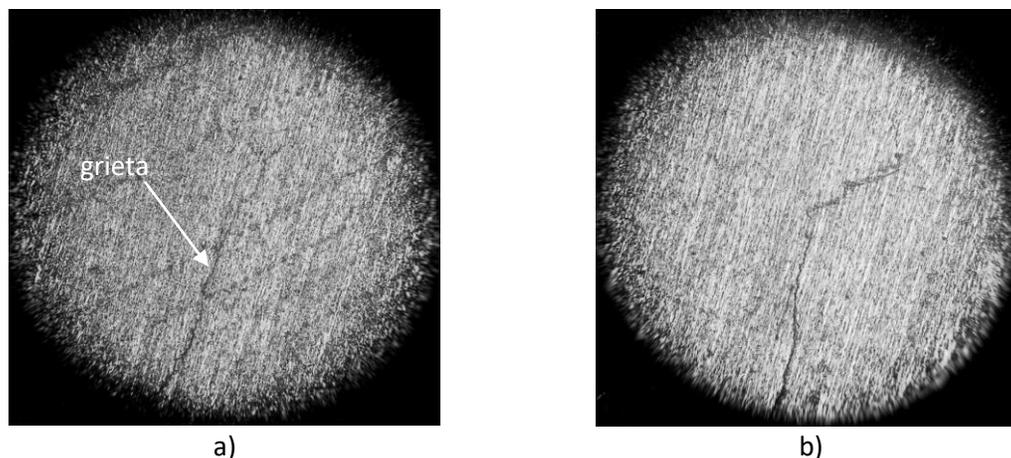


Figura A.9 Terminación de la grieta en la sección transversal del eje generada con $n = 130172$ ciclos de carga a) sección C-B, b) sección D-A.

Como se mencionó anteriormente, la configuración de la flecha mostrada en la figura A.1 fue implementada con el fin de asegurar la propagación de una grieta transversal sobre la sección del eje rotatorio, además de poder medir la profundidad relativa h/b ; sin embargo, a causa de la configuración geométrica utilizada para inducir la grieta, se pueden generar múltiples grietas en las esquinas de la sección transversal de la flecha. Sin embargo, se observó que es necesario realizar la muesca (asimetría) sobre la sección de la flecha con el fin de concentrar los esfuerzos sobre las esquinas y de esta forma asegurar la aparición de una grieta transversal.

A causa de que la flecha experimental del rotor se consideró de aluminio, ésta presenta mayor flexibilidad que una flecha de acero, por lo que las amplitudes de vibración cerca de la resonancia son muy grandes, lo que impide que se pueda superar la primera velocidad crítica del rotor. Una vez que la flecha presentó grietas la inestabilidad del rotor fue mayor.

En la figura A.10 se muestra la comparación de la respuesta de vibración (diagrama de Bode) para un rotor sin grieta, un rotor con muesca sin grieta y un rotor con muesca con grieta. En la figura se presenta la respuesta de vibración para los ejes y y x que se denotan por los incisos a) y b) respectivamente. Como no se pudo superar la primera velocidad crítica del sistema, el diagrama de Bode se presenta hasta una velocidad de rotación de 1000 rpm, el cual fue medido directamente en la ubicación de la grieta.

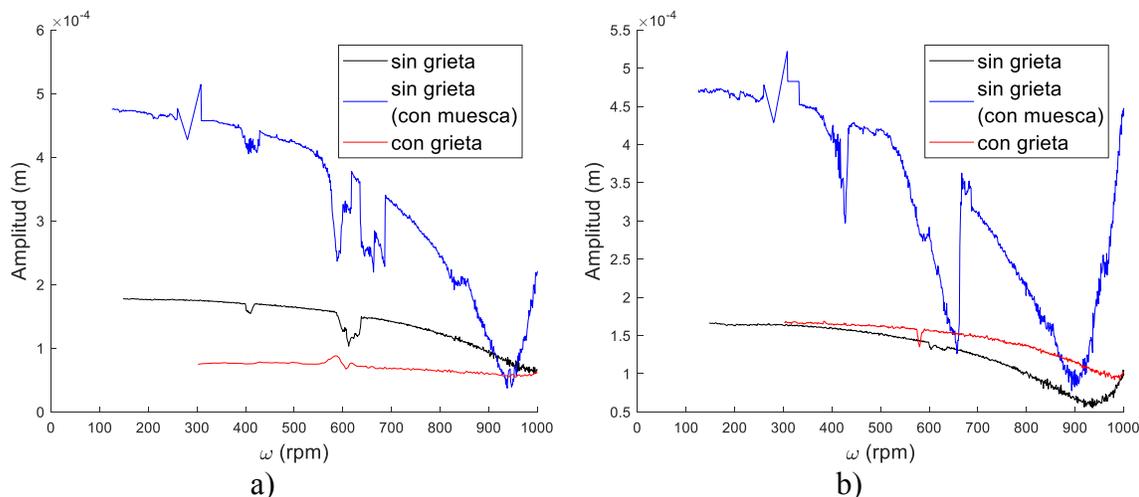
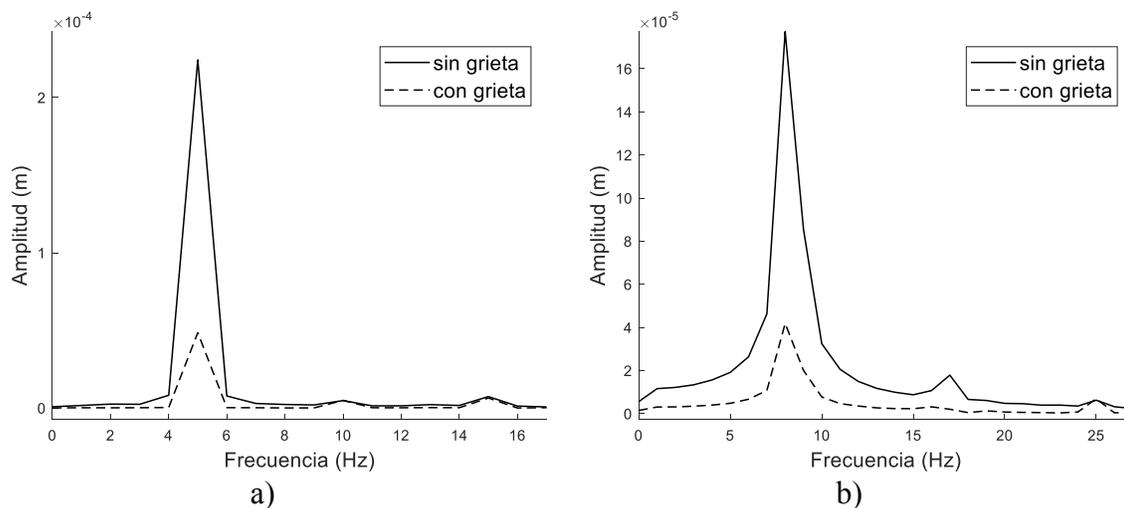


Figura A.10 Diagrama de Bode del rotor con eje de aluminio a) eje y, b) eje x.

De la figura A.10 se puede observar que la respuesta de vibración para caso del rotor sin grieta ya con la muesca, presenta subresonancias, mientras que la respuesta del rotor sin grieta (sin muesca) y con grieta (ya con muesca) es muy similar, ambas presentan una sola subresonancia. Como se mencionó anteriormente, la muesca se realizó con el fin de asegurar la concentración de esfuerzos y generar la grieta transversal, sin embargo, se observa claramente (ver figura A.10) que los efectos de la muesca predominan en la respuesta de vibración del rotor, lo cual enmascara los efectos generados por la grieta(s) inducida en el rotor.

En las figuras A.11 y A.12 se muestra la comparación de las transformadas de Fourier para la respuesta de vibración del rotor con muesca sin grieta y el rotor con muesca con grieta para cuatro velocidades diferentes del rotor 300, 500, 800 y 1000 rpm. En la figura A.11 se muestran las respuestas de vibración en el eje y, mientras que en figura A.12 se muestran las respuestas de vibración en el eje x.



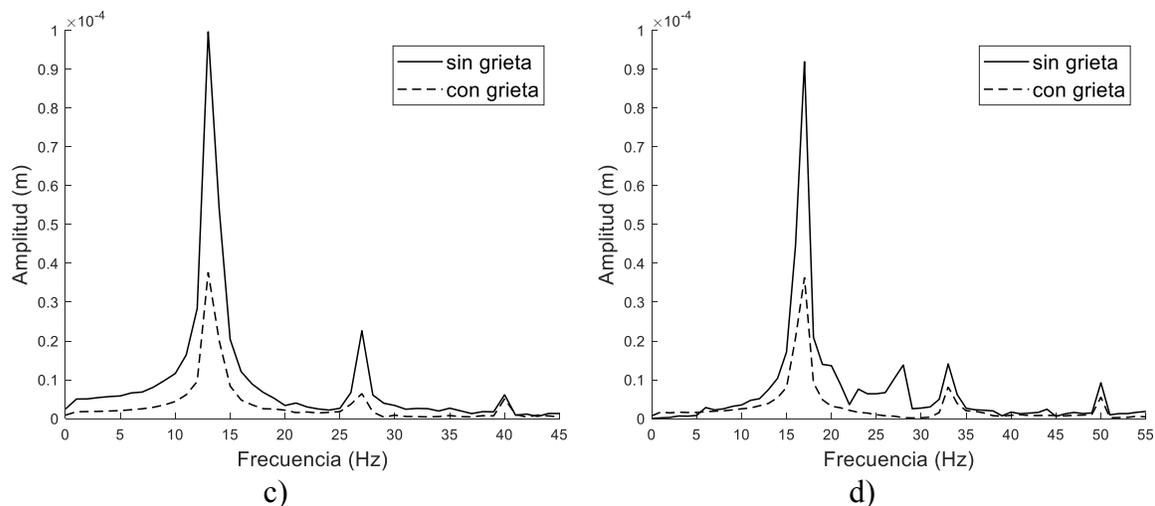


Figura A.11 Comparación de la amplitud de los armónicos de la respuesta en el eje y , a) 300 rpm b) 500 rpm c) 800 rpm d) 1000 rpm.

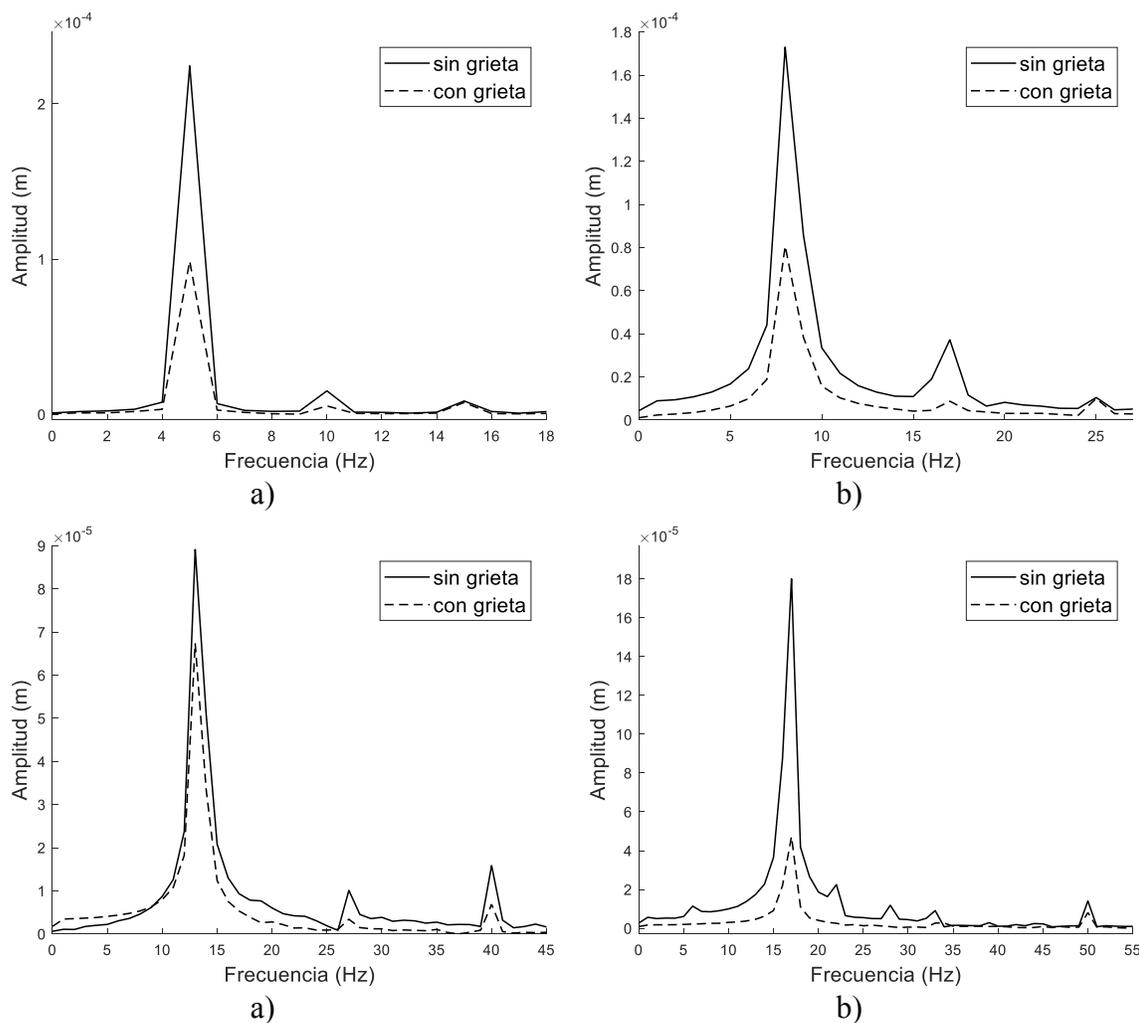


Figura A.12 Comparación de la amplitud de los armónicos de la respuesta en el eje x , a) 300 rpm b) 500 rpm c) 800 rpm d) 1000 rpm.

Se puede observar que para todos los casos presentados en las figuras A.11 y A.12 predomina la respuesta de vibración del rotor con muesca sin grieta sobre la respuesta de vibración del rotor con muesca con grieta, es decir presenta mayor amplitud de vibración en todo el espectro, además de que presenta más armónicas en comparación con la respuesta de vibración de un rotor con muesca con grieta.

En las figuras A.13 a A.15 se muestra el comportamiento del identificador algebraico al introducir la señal experimental del rotor como dato de entrada correspondiente al rotor con grieta inducida por fatiga. A partir de esta prueba, se puede observar que el identificador no converge a un valor real de pérdida de rigidez Δk_{ξ} . Cabe recalcar que para esta prueba se utilizó la función de respiro (ecuación 3.11) del rotor descrita en el Capítulo 3, sección 3.1.1.

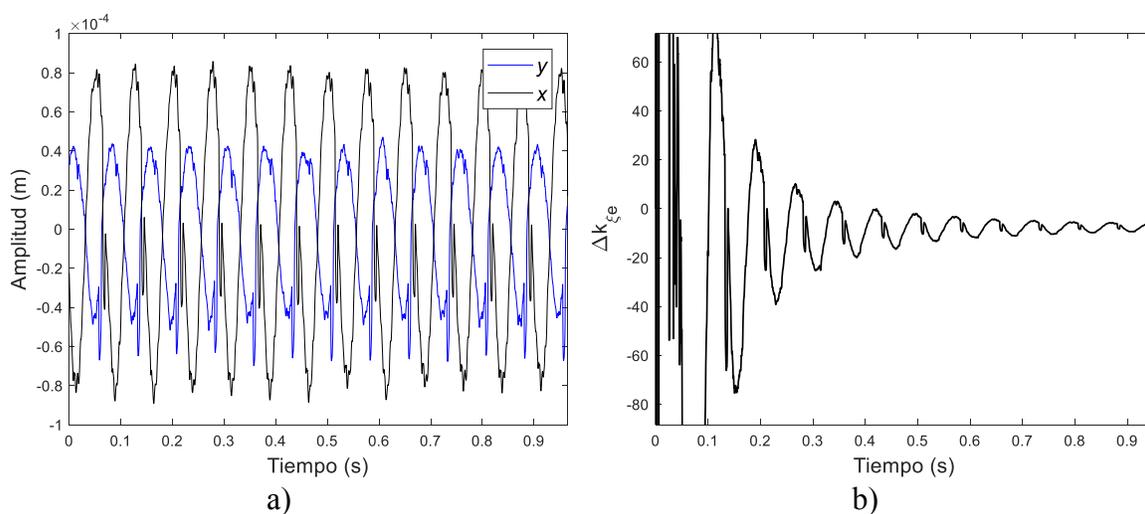


Figura A.13 Prueba, $\omega = 800$ rpm, a) señal experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez del rotor.

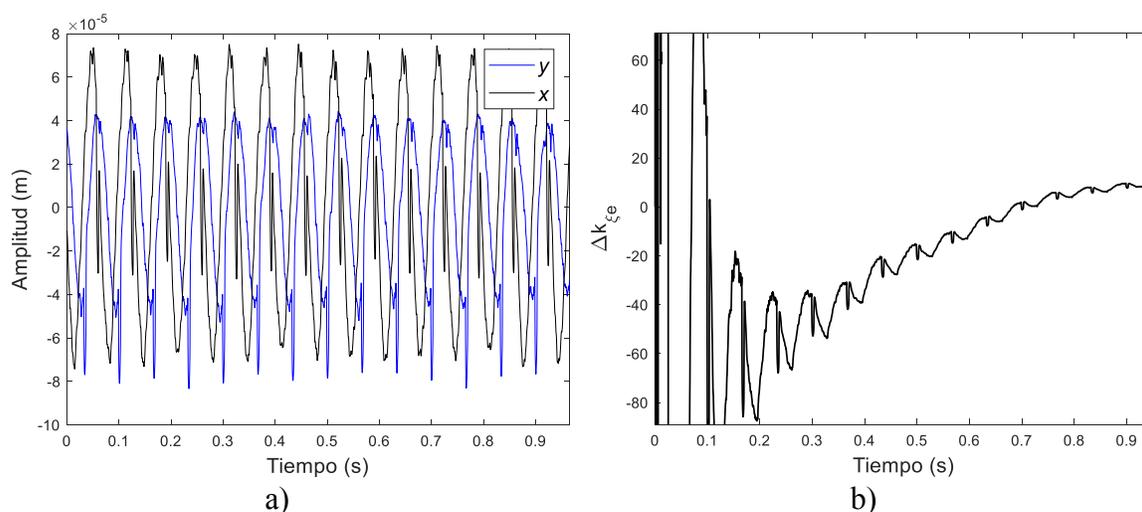


Figura A.14 Prueba, $\omega = 900$ rpm, a) señal experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez del rotor.

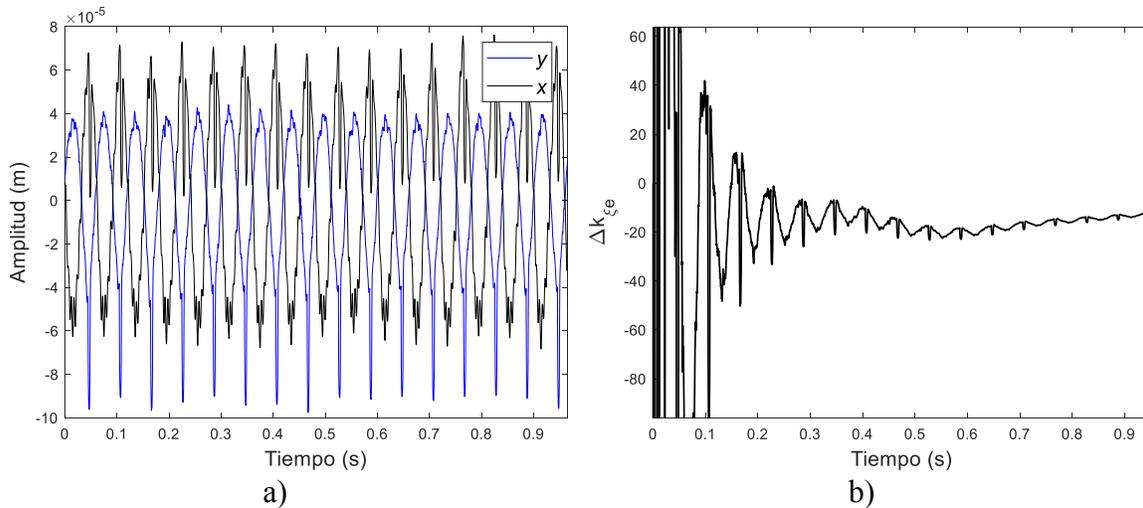


Figura A.15 Prueba, $\omega = 1000$ rpm, a) señal experimental del rotor, b) identificación de la pérdida de rigidez del rotor.

De acuerdo con lo anterior, se concluye que no fue posible realizar la identificación de la grieta, debido a que el comportamiento dinámico del rotor con muesca es similar al de un rotor asimétrico, ya que éste presenta una sección asimétrica en la parte central de la flecha. Por otra parte, no es posible desarrollar un modelo matemático de dos grados de libertad de este tipo, por lo que sería necesario desarrollar un modelo matemático de múltiples grados de libertad y tomando como base éste, desarrollar el identificador de la grieta. En consecuencia, no es posible identificar la grieta en este tipo de rotores ya que el modelo del identificador propuesto está limitado a un rotor con grieta siempre abierta.



**TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO**