

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MEXICO

Tecnológico Nacional de México

**Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico**

Tesis de Maestría

**Diseño y construcción de un sistema de
amortiguamiento con inersor y fluido reológico**

presentada por

Ing. Cuauhtémoc Mazón Valdez

como requisito para la obtención del grado de
**Maestro en Ciencias en Ingeniería
Mecánica**

Director de tesis

Dr. Jorge Colín Ocampo

Codirector de tesis

Dr. Andrés Blanco Ortega

Cuernavaca, Morelos, México. Julio de 2019.



"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor., 25/junio/2019

OFICIO No. DIM/179/2019

Asunto: Aceptación de documento de tesis

C. DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del estudiante Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez, con número de control MI7CE024 de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Diseño y construcción de un sistema de amortiguamiento con inersor y fluido reológico" hemos encontrado que se han atendido todas las observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

DR. JORGE COLÍN OCAMPO
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
4694783

REVISOR 1

DR. WILBERTH MELCHOR ALCOCER R.
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecatrónica
10458247

REVISOR 2

DR. ARTURO ABUNDEZ PLIEGO
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
6801139

REVISOR 3

DR. ELADIO MARTÍNEZ RAYÓN
Doctor en Ciencias en Ing. Mecánica
8500740

C.p. Guadalupe Garrido Rivera Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Cuauhtémoc Mazón Valadez Estudiante
Expediente

AAP/mrsr



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor. 26 de junio de 2019
OFICIO No. SAC/233/2019

Asunto: Autorización de impresión de tesis

ING. CUAUHTÉMOC MAZÓN VALADEZ
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
P R E S E N T E

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Diseño y construcción de un sistema de amortiguamiento con inersor y flujo reológico", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



SEP TecNM
CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico que me aportaron para continuar con mi desarrollo profesional.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), por darme la oportunidad de mejorar profesionalmente gracias a la enseñanza y consejo de los doctores de esta institución.

A mis asesores el Dr. Jorge Colín Ocampo y el Dr. Andrés Blanco Ortega por el apoyo, amistad y enseñanza brindada durante el transcurso de esta etapa profesional.

A mi familia en general principalmente a mis padres Elena Valadez Comparán y Juan Manuel Mazón Gonzales por el apoyo incondicional y la motivación para desarrollarme profesionalmente. A mis hermanos Juan Carlos Mazón Valadez y Ernesto Edgar Mazón Valadez por orientarme a seguir en la búsqueda del conocimiento y apoyarme económicamente para terminar mis estudios.

A mis compañeros de generación: Yael González López, Aldair Reyes Contreras, Eric Sauvain Vélez y Joel del Ángel Morales Pérez por su amistad y compañerismo que me ofrecieron. Pero sobre todo por el apoyo incondicional para cumplir esta meta.

A mis compañeros de laboratorio Saulo, Tadeo, Erasmo y Joel, les agradezco sus comentarios, ideas y críticas en el proceso de este proyecto.

Resumen

El inersor es un dispositivo mecánico análogo a un condensador (capacitor). Su principal característica es que puede modificar la frecuencia natural y disminuir la amplitud de vibración del sistema al agregar masa al sistema, sin aumentar considerablemente el peso de las estructuras. Por esta razón, su implementación en sistemas de amortiguamiento ha sido investigada en los últimos años, sin embargo, hasta la fecha los estudios de la implementación de este dispositivo utilizando fluido reológico son limitados. En este trabajo se presenta una configuración de control pasivo de vibración basada en inersor y fluido reológico, para suprimir las amplitudes de vibración de una estructura tipo viga. Se muestra el desarrollo del modelo matemático de la estructura tipo viga conectada al control de vibración basado en el inersor (IDVA) y se analiza la respuesta de vibración en función de la frecuencia considerando una fuerza de excitación de tipo armónica e inercial. Asimismo, se presentan los parámetros óptimos del sistema, al minimizar el valor máximo de la respuesta en función de la frecuencia en un intervalo completo de la frecuencia de operación del sistema. De los resultados obtenidos de forma numérica, se concluye que el control pasivo de vibraciones basado en inersor y fluido reológico es una alternativa que puede ofrecer mejores resultados que un absorbedor de vibraciones dinámico tradicional (DVA).

Adicionalmente se muestra el dimensionamiento de un prototipo de inersor con fluido magnetorreológico (MR), donde se consideró los parámetros óptimos obtenidos en el análisis numérico de la estructura tipo viga conectada al control de vibración basado en inersor (IDVA). Se determinó la fuerza de amortiguamiento del inersor con fluido magnetorreológico considerando diferentes intensidades de corriente para generar el campo magnético hasta llegar a la saturación del fluido. Para caracterizar el inersor se utilizó una máquina universal marca SHIMADZU y un fluido magnetorreológico de la empresa Lord Corporation tipo MRF-122EG, se analizó un ciclo cerrado de desplazamiento, donde el pistón del inersor se desplazó 70 mm en modo tensión, con una velocidad constante de 800 mm/min, posteriormente, el pistón retornó a su posición original a una velocidad constante de 500 mm/min. Los resultados obtenidos muestran un incremento en la energía de disipación del dispositivo conforme se incrementa la corriente eléctrica del sistema, asimismo, se observó que es necesario una fuerza de 10 N para que el inersor pueda activarse de manera correcta.

Abstract

The inerter is a mechanical device that is analogous to an electric capacitor, its main feature is that it can modify the natural frequency and decreasing the vibration amplitude of a system when it is added mass to it without increase considerably the structure weight. For this reason, the implementation into damping systems has been investigating in the last years. However, studies about the utilization of these kinds of devices with rheological fluids are very limited. In this work is presented a vibration passive control configuration based on both a inerter and a rheological fluid working together to avoid the vibrational amplitudes of a beam structure. Also, is shown a mathematical model development of a beam structure connected to control based on a vibrational inerter (IDVA) and analyzed the vibrational response in function of the frequency considering both harmonic and inertial excitation forces. Likewise, are presented optimum system parameters, minimizing the maximum frequency response value into a full system work frequency interval. From of numeric results is concluded that vibrational passive control based on an inerter and a rheological fluid is a viable way that offers better results than a traditional dynamic vibrational absorber (DVA).

Additionally, is shown a prototype developing of an inerter and a magnet-rheological fluid, where it is considered optimal numeric analysis parameters of a beam structure connected to a control based on a vibrational inerter (IDVA). It was determined the inerter magnet-rheological fluid damping force considering all different current intensities to generate the magnetic field until the saturation of the fluid. To characterize the inerter, a universal machine from SHIMADZU and a magnet-rheological fluid MRF-122EG from Lord Corporation were used to evaluate the displacement of a close cycle. Where the inerter piston is displaced 70 mm by applying a constant velocity of 800 mm/min into a tension mode, later the piston is returned to its original position at a constant speed of 500 mm/min. The obtained results show that there is a dissipation energy increment above the device according to electric current system increment. Likewise, is observed that is necessary a force equal to 10N to that the inersor can work properly.

Tabla de contenido

Resumen	i
Abstract	ii
Tabla de contenido	iii
Nomenclatura (alfabeto)	vi
Nomenclatura (alfabeto griego)	viii
Índice de figuras	ix
Capítulo 1: Introducción.....	1
1.1 Planteamiento del problema y Justificación	2
1.2 Objetivo general	5
1.3 Objetivos particulares.....	5
1.4 Alcances y limitaciones	5
Capítulo 2: Estado del arte	7
2.1 Sistemas de amortiguamiento en estructuras	7
2.2 Sistemas de amortiguamiento con inersores	8
2.3 Sistemas de amortiguamiento reológico	9
2.4 Sistemas de amortiguamiento con inersor y fluido MR.....	10
2.5 Investigaciones realizadas en el CENIDET.....	10
2.6 Conclusiones del estado del arte.....	11
Capítulo 3: Marco teórico.....	13
3.1 Vibraciones mecánicas	13
3.1.1 Sistema con excitación armónica	14
3.1.2 Sistemas con desbalance rotatorio	15
3.1.3 Método de separación de variables para ecuaciones diferenciales parciales en estructuras.....	17
3.1.4 Ecuación de Lagrange.....	18
3.1.5 Análisis modal.....	19
3.1.6 Impedancia mecánica.....	20
3.1.7 Aisladores dinámicos de vibración.....	21
3.2 Optimización.....	22
3.2.1 Metodología de optimización del punto fijo.....	24
3.2.2 Extensión de la metodología del punto fijo	28
3.3 Mecánica de fluidos	31
Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico	iii

3.3.1	Ley de la conservación de la masa respecto a un volumen de control	32
3.3.2	Viscosidad.....	32
3.3.3	Ley de Poiseuille	33
3.4	Electromagnetismo.....	33
3.4.1	Campo magnético	34
3.4.2	Permeabilidad magnética	34
3.4.3	Dominios magnéticos.....	35
3.4.4	Circuito magnético	36
3.4.5	Circuito magnético con entrehierro (electroimán).....	37
3.5	Características del fluido magnetorreológico MR.....	39
3.5.1	Métodos de aplicación de los fluidos magnetorreológicos MR.....	40
3.5.2	Características del fluido MRF-122EG	42
Capítulo 4:	Modelado matemático y computacional.....	45
4.1	Modelo matemático IDVA y la obtención de sus parámetros óptimos.....	45
4.1.1	Modelado matemático del sistema viga - IDVA.....	45
4.1.2	Optimización IDVA.....	50
4.1.3	Validación del modelo matemático del sistema viga-IDVA y los parámetros óptimos... ..	59
4.2	Modelo matemático del inersor con fluido.....	62
4.3	Análisis de la válvula MR.	67
Capítulo 5:	Análisis experimental.....	73
5.1	Construcción del banco de pruebas experimental.....	73
5.1.1	Diseño y construcción del inersor con fluido	75
5.1.2	Construcción de la válvula MR.....	81
5.1.3	Absorbedor dinámico de vibración con inersor IDVA	82
5.2	Comportamiento dinámico del banco experimental	84
5.2.1	Comportamiento dinámico del banco de pruebas con y sin el IDVA	86
5.2.2	Comportamiento dinámico considerando al sistema como configuración viga en cantiléver	92
5.3	Comportamiento del inersor con fluido MR en pruebas de tensión y compresión	94
Conclusiones y trabajos futuros.....		101
Conclusiones		101
Trabajos futuros.....		102

Bibliografía	103
Apéndice A: Modelo matemático de viga empotrada con IDVA	107
Apéndice B: Optimización del IDVA.....	112
Apéndice C: Modelado inersor con fluido.....	117
Apéndice D: Simulaciones por el software FEMM 4.2	121
Apéndice E: Planos de diseño.....	135
Apéndice F: Análisis adicionales.....	156
Apéndice G: Señales del banco experimental	160

Nomenclatura (alfabeto)

<i>a</i>	<i>Ubicación del sistema de aislamiento dinámico de vibración.</i>
<i>a</i>₁, <i>a</i>₂, <i>a</i>₃, <i>a</i>₄ y <i>a</i>₅	<i>Términos independientes del polinomio.</i>
<i>A</i>	<i>Área de la sección transversal de la viga.</i>
<i>A</i>_{<i>i</i>}	<i>Área de la sección transversal del núcleo.</i>
<i>A</i>_{<i>g</i>}	<i>Área de la sección transversal del entrehierro.</i>
<i>b</i>	<i>Inertancia.</i>
<i>B</i>	<i>Flujo magnético.</i>
<i>c</i>	<i>Constante de amortiguamiento.</i>
<i>c</i>_{<i>c</i>}	<i>Amortiguamiento crítico del sistema.</i>
<i>d</i>	<i>Relación de masa de la inertancia respecto a la masa del DVA.</i>
<i>d</i>_{opt}	<i>Relación de masa óptima de la inertancia respecto a la masa del DVA.</i>
$\frac{du}{dy}$	<i>Deformación.</i>
<i>DVA</i>	<i>Aislador dinámico de vibración.</i>
<i>e</i>	<i>Excentricidad.</i>
<i>e</i>^{<i>iωt</i>}	<i>Excitación armónica con respecto del tiempo.</i>
<i>E</i>	<i>Módulo de Young (elasticidad).</i>
<i>ER</i>	<i>Electrorreológico.</i>
(<i>E. C.</i>)	<i>Energía cinética.</i>
(<i>E. P.</i>)	<i>Energía potencial.</i>
(<i>E. D.</i>)	<i>Energía de disipación.</i>
<i>f</i>	<i>Función de la respuesta del sistema.</i>
<i>f</i>(<i>x</i>)	<i>Fuerza constante.</i>
<i>f</i>(<i>x, t</i>)	<i>Fuerza distribuida.</i>
<i>fmm</i>	<i>Fuerza magnetomotriz.</i>
<i>F</i>	<i>Fuerza aplicada.</i>
<i>g</i>(<i>t</i>)	<i>Fuerza respecto del tiempo.</i>
<i>G</i>	<i>Gauss unidad de flujo magnético.</i>
<i>GDL</i>	<i>Grados de libertad.</i>
<i>h</i>	<i>Impedancia mecánica.</i>
<i>h</i>_{<i>h</i>}	<i>Separación de las vueltas del canal helicoidal</i>
<i>H</i>	<i>Intensidad de flujo magnético.</i>
<i>H</i>_{<i>m</i>}	<i>Magnitud de la respuesta del sistema.</i>
<i>H</i>_{<i>m,opt</i>}	<i>Magnitud de la respuesta del sistema óptima.</i>
<i>I</i>	<i>Momento de área de la sección trasversal.</i>
<i>I</i>_{<i>c</i>}	<i>Intensidad de corriente eléctrica.</i>
<i>IDVA</i>	<i>Aislador dinámico de vibración con inersor.</i>
<i>I</i>_{<i>I</i>}	<i>Matriz identidad.</i>
<i>j</i>	<i>Numero imaginario.</i>
<i>J</i>_{<i>I</i>}	<i>Momento de inercia del fluido en el canal helicoidal.</i>
<i>k</i>	<i>Rigidez.</i>
<i>l</i>_{<i>c</i>}	<i>Longitud de contacto del fluido.</i>
<i>lg</i>	<i>Longitud del entrehierro.</i>
<i>l</i>_{<i>h</i>}	<i>Longitud del canal helicoidal.</i>
<i>li</i>	<i>Longitud media del núcleo ferromagnético.</i>
<i>l</i>_{<i>0</i>}	<i>Longitud de las entradas del inersor.</i>

l_T	<i>Longitud de trabajo del cilindro.</i>
l_s	<i>Longitud del solenoide.</i>
L	<i>Función del lagrangeano.</i>
L_v	<i>Longitud de la viga.</i>
m	<i>Masa del sistema.</i>
m_d	<i>Masa de desbalance.</i>
m_f	<i>Masa del fluido.</i>
m_M	<i>Masa del motor.</i>
m_a	<i>Masa del aislador de vibraciones.</i>
m_{eq}	<i>Masa equivalente de la estructura.</i>
m_v	<i>Masa del elemento viga.</i>
m_0	<i>Denominador de la respuesta de estado estable.</i>
M	<i>Momento flexionante.</i>
MR	<i>Magnetorreológico.</i>
MUL	<i>Masa por unidad de longitud.</i>
n	<i>Número de vueltas del canal helicoidal.</i>
N	<i>Número de vueltas del solenoide por unidad de longitud.</i>
n_0	<i>Numerador de la respuesta de estado estable.</i>
$q_d(t)$	<i>Desplazamiento de la masa del aislador de vibración.</i>
q_i	<i>Desplazamiento lineal o angular con respecto de un marco de referencia.</i>
Q	<i>Efecto cortante.</i>
$Q_d(\omega)$	<i>Comportamiento en función de la frecuencia de la masa del DVA.</i>
$Q_i(\omega)$	<i>Comportamiento en función de la frecuencia de la viga.</i>
Q_m	<i>Carga magnética total.</i>
r_1	<i>Radio del eje del pistón.</i>
r_2	<i>Radio de trabajo del pistón.</i>
r_3	<i>Radio de la sección transversal del canal helicoidal.</i>
r_4	<i>Radio de la circunferencia del canal helicoidal.</i>
$R(s)$	<i>Respuesta adimensional del sistema dinámico (excitación armónica simple).</i>
$R_a(s)$	<i>Respuesta adimensional del sistema dinámico (excitación inercial).</i>
S	<i>Área.</i>
S_1	<i>Área efectiva de trabajo de la sección transversal de trabajo del pistón.</i>
S_2	<i>Área del canal helicoidal.</i>
$S_a(a, \Omega)$	<i>Respuesta del sistema con dimensiones reales (excitación inercial).</i>
t	<i>Tiempo.</i>
T	<i>Teslas unidad de flujo magnético.</i>
u	<i>Velocidad media.</i>
V	<i>Volumen.</i>
V_{medida}	<i>Voltaje medido con el campo magnético.</i>
V_0	<i>Voltaje inicial.</i>
x	<i>Desplazamiento.</i>
\dot{x}	<i>Velocidad.</i>
\ddot{x}	<i>Aceleración.</i>
X	<i>Amplitud.</i>
$y(x, t)$	<i>Desplazamiento de estructura tipo viga respecto del tiempo.</i>
z	<i>VARIABLES del sistema.</i>

Nomenclatura (alfabeto griego)

α, β, γ y δ	<i>Raíces características del polinomio.</i>
β_i	<i>Valores propios respecto a la condiciones de frontera.</i>
γ_i	<i>Relación de frecuencias naturales.</i>
Δp	<i>Diferencia de presión.</i>
η	<i>Relación de frecuencia del lado izquierdo con la primera frecuencia natural.</i>
η_{opt}	<i>Relación de frecuencia óptima del lado izquierdo con la primera frecuencia natural.</i>
θ	<i>Movimiento angular.</i>
λ_i	<i>Raíz característica.</i>
μ	<i>Relación de masa respecto a la masa de la viga.</i>
μ_f	<i>Viscosidad del fluido.</i>
μ_m	<i>Permeabilidad magnética del material.</i>
μ_r	<i>Permeabilidad relativa.</i>
μ_0	<i>Permeabilidad del vacío.</i>
ξ	<i>Relación de amortiguamiento.</i>
ξ_{opt}	<i>Relación de amortiguamiento óptima.</i>
ρ	<i>Densidad del material.</i>
τ	<i>Esfuerzo cortante.</i>
T	<i>Relación de frecuencia del lado derecho con la primera frecuencia natural.</i>
T_{opt}	<i>Relación de frecuencia óptima del lado derecho con la primera frecuencia natural.</i>
ϕ	<i>Ángulo de fase.</i>
Φ_B	<i>Densidad de flujo magnético.</i>
$\Phi_i(x)$	<i>Función modal del i-ésimo modo de vibración.</i>
ψ	<i>Relación de masa respecto al inersor.</i>
ω	<i>Frecuencia (velocidad angular).</i>
ω_{ni}	<i>Frecuencia natural del i-ésimo modo de vibración.</i>
ω_n	<i>Frecuencia natural.</i>
Ω	<i>Relación de frecuencia.</i>
\mathfrak{R}	<i>Reluctancia magnética.</i>
\mathfrak{R}_T	<i>Reluctancia magnética total.</i>

Índice de figuras

Figura 1-1. a) Síntesis de la red eléctrica y la mecánica, b) Diagrama de cuerpo libre [1].....	2
Figura 1-2. Tipos de inersor. a) Cremallera-engranes-volante de inercia [1], b) Tornillo-volante de inercia, c) Inersor con fluido [6].....	3
Figura 1-3. Configuración mecánica del inersor.	3
Figura 1-4. Comportamiento del fluido reológico [3].....	4
Figura 3-1. Comportamiento vibratorio de un sistema de un grado de libertad con excitación armónica. a) Diagrama de Bode, b) Diagrama de fase [34].	15
Figura 3-2. Sistema vibratorio con excitación inercial [34].	16
Figura 3-3. Comportamiento de un sistema vibratorio de un grado de libertad con excitación inercial. a) Diagrama de Bode, b) Diagrama de fase [34].....	17
Figura 3-4. Elemento diferencial de la viga y su diagrama de esfuerzos [35].	17
Figura 3-5. Modos de vibración normalizados de una estructura tipo viga empotrada.....	19
Figura 3-6. Configuraciones mecánicas con sus impedancias mecánicas [15].	21
Figura 3-7. Aislador de vibración clásico [34].	21
Figura 3-8. Comportamiento dinámico del sistema con DVA vs sin DVA [34].....	22
Figura. 3-9. Mínimo y máximo de una función [36].....	23
Figura 3-10. Sistema tipo viga conectada a un IDVA [18].	24
Figura 3-11. Comportamiento dinámico del sistema. P1 y P2 puntos invariantes del sistema.	25
Figura 3-12. Comportamiento dinámico del sistema considerando las variables óptimas.	27
Figura 3-13. Comportamiento dinámico del sistema con $\psi_{\text{ópt}}$, $T_{\text{ópt}}$ y $\xi_{\text{ópt}}$ vs comportamiento dinámico del sistema con relaciones de amortiguamiento diferentes al óptimo.	27
Figura 3-14. Configuración de un sistema DVA y su respuesta optimizada [19].....	28
Figura 3-15. Frecuencias invariantes: $\Omega_1, \xi \rightarrow \infty, \Omega_0, \xi \rightarrow 0$ y $\Omega_2, \xi \rightarrow \infty$ en función de la relación de amortiguamiento [19].....	29
Figura 3-16. Deflexión de los valores propios de la matriz Hessiana [19].	30
Figura 3-17. Comportamiento de los fluidos newtonianos y no newtonianos [38].	31
Figura 3-18. Sistema gobernado por un volumen de control [38].	32
Figura 3-19. Campo magnético generado por un imán.....	34
Figura 3-20. Clasificación de materiales magnéticos, a) Ferromagnéticos, b) Diamagnéticos, c) Paramagnéticos [31].	35
Figura 3-21. a) Circuito magnético, b) Circuito eléctrico.....	37
Figura 3-22. Circuito magnético con entrehierro [31].....	37
Figura 3-23. Comportamiento del fluido MR [43].	40
Figura 3-24. Método de válvula [3].....	41
Figura 3-25. Modo de corte [3].	41
Figura 3-26. Modo de aplicación compresión-tensión [3].	42
Figura 3-28. Propiedades magnéticas y de esfuerzo del fluido MRF-122EG [45].	42
Figura 4-1. Configuración de la viga Euler-Bernoulli con el IDVA propuesto.....	46
Figura 4-2. Desplazamiento transversal de la viga considerando una fuerza de excitación armónica simple.	49
Figura 4-3. Desplazamiento transversal de la viga considerando una fuerza de excitación inercial.	50
Figura 4-4. Sustitución inversa para simplificar las expresiones óptimas.	53
Figura 4-5. Desplazamiento transversal de la viga con los parámetros óptimos de IDVA, $\mu = 0.4$ (excitación inercial).....	54
Figura 4-6. Respuesta óptima del sistema con IDVA, $\mu = 0.4$ (excitación inercial).....	54
Figura 4-7. Tendencias de las variables óptimas en función de la relación de masa μ (excitación inercial).....	55
Figura 4-8. Desplazamiento transversal de la viga con los parámetros óptimos del IDVA (excitación armónica simple).....	56

<i>Figura 4-9. Respuesta óptima del sistema con IDVA (excitación armónica simple).</i>	56
<i>Figura 4-10. Tendencia de las variables óptimas en función de μ (excitación armónica simple).</i>	57
<i>Figura 4-11. Eigenvalores de la matriz Hessiana para los parámetros óptimos para cada frecuencia invariante (excitación inercial).</i>	57
<i>Figura 4-12. Eigenvalores de la matriz Hessiana para los parámetros óptimos para cada frecuencia invariante (excitación armónica simple).</i>	58
<i>Figura 4-13. Configuración de la viga Euler-Bernoulli con el IDVA propuesto por Jin [18].</i>	59
<i>Figura 4-14. Comportamiento óptimo Viga-IDVA vs comportamiento Viga-IDVA con ξ diferentes al óptimo, $\mu = 0.1$, Jin [18].</i>	60
<i>Figura 4-15. Comportamiento óptimo Viga-IDVA vs comportamiento Viga-IDVA con ξ diferentes al óptimo, $\mu = 0.1$ (deducción propia).</i>	61
<i>Figura 4-16. Vibración transversal de la Viga-IDVA con parámetros óptimos. Jin [18] vs deducción propia.</i>	62
<i>Figura 4-17. Inersor con fluido propuesto por Smith [16].</i>	62
<i>Figura 4-18. Comportamiento del flujo en el canal helicoidal.</i>	64
<i>Figura 4-19. Comparación del comportamiento de la fuerza de amortiguamiento del inersor en función de la velocidad.</i>	66
<i>Figura 4-20. Configuración de núcleo que se implementaron en las simulaciones numéricas.</i>	67
<i>Figura 4-21. Simulaciones con las configuraciones de núcleo correspondientes a los modelos 4 y 5 respectivamente.</i>	68
<i>Figura 4-22. Comparación de la simulación de las configuraciones del núcleo correspondientes a los modelos 4 y 5.</i>	69
<i>Figura 4-23. Núcleo para la validación del software FEMM 4.2.</i>	70
<i>Figura 4-24. Colocación del sensor en el núcleo.</i>	71
<i>Figura 4-25. Simulación para la validación de software FEMM 4.2.</i>	72
<i>Figura 5-1. Diseño del banco de pruebas experimental.</i>	73
<i>Figura 5-2: Desglose de componentes del banco experimental.</i>	74
<i>Figura 5-3. Esquema del prototipo del inersor con fluido MR.</i>	75
<i>Figura 5-4. Velocidad de vibración del sistema Viga-IDVA. Simulada.</i>	77
<i>Figura 5-5. Comportamiento de la Ec. (5.7) y (5.8) en función de longitud del canal helicoidal para una velocidad $x = 1.145 \times 10^{-4}$ m/s.</i>	78
<i>Figura 5-6. Comportamiento de la Ec. (5.7) y (5.8) en función de longitud del canal helicoidal, para una velocidad $x = 392$ m/s.</i>	78
<i>Figura 5-7. Vista preliminar del inersor con fluido considerando la válvula MR.</i>	80
<i>Figura 5-8. Prototipo físico del inersor con fluido MR.</i>	81
<i>Figura 5-9. Válvula MR adaptable al inersor con fluido.</i>	81
<i>Figura 5-10. Análisis de rigidez de los resortes 028 y 038 respectivamente.</i>	82
<i>Figura 5-11. Configuración final de IDVA.</i>	83
<i>Figura 5-12. Banco experimental de pruebas con el IDVA.</i>	84
<i>Figura 5-13. Motor y disco utilizados para inducir una fuerza de excitación inercial al sistema.</i>	84
<i>Figura 5-14. Variador de voltaje de corriente directa e interfaz de computadora.</i>	85
<i>Figura 5-15. Diagrama de conexiones para la adquisición de señales.</i>	85
<i>Figura 5-16. Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=26.69612$</i>	87
<i>Figura 5-17. Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=69.8262$</i>	87
<i>Figura 5-18. Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=264.77$ g-mm.</i>	87
<i>Figura 5-19. Rampas de excitación tipo lineal del control del motor, estructura sin IDVA para cada desbalance reportado en la tabla 13.</i>	88
<i>Figura 5-20. Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance $MUL=26.69612$</i>	88
<i>Figura 5-21. Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance $MUL=69.8262$</i>	88

<i>Figura 5-22. Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance rotatorio $MUL=264.77$ g-mm.</i>	89
<i>Figura 5-23. Respuesta de la vibración. Viga con IDVA vs viga sin IDVA. $MUL = 26.69612$ g-mm.</i>	89
<i>Figura 5-24. Respuesta de la vibración. Viga con IDVA vs viga sin IDVA. $MUL = 69.8262$ g-mm.</i>	89
<i>Figura 5-25. Respuesta de la vibración. Viga con IDVA vs viga sin IDVA. $MUL = 264.77$ g-mm.</i>	90
<i>Figura 5-26. Configuración del banco experimental con el inersor como amortiguador reológico.</i>	90
<i>Figura 5-27. Respuesta del sistema como Viga-IDVA, Viga-Inersor (sin fluido), Viga-Inersor (con fluido sin campo magnético). $MUL=69.8262$ g-mm.</i>	91
<i>Figura 5-28. Respuesta del sistema como Viga-IDVA, Viga-Inersor (sin fluido), Viga-Inersor (con fluido sin campo magnético). $MUL=264.77$ g-mm.</i>	91
<i>Figura 5-29. Configuración de viga en cantiléver del banco experimental.</i>	92
<i>Figura 5-30. Respuesta de vibración. Viga en cantiléver, viga en cantiléver-IDVA y viga en cantiléver-Inersor. $MUL=26.6961$ g-mm.</i>	93
<i>Figura 5-31. Respuesta de vibración. Viga en cantiléver, viga en cantiléver-IDVA y viga en cantiléver-Inersor. $MUL=69.8262$ g-mm.</i>	93
<i>Figura 5-32. Respuesta de vibración del sistema viga en cantiléver-inersor variando la intensidad de corriente en la válvula MR. $MUL= 78.8832$ g-mm.</i>	94
<i>Figura 5-33: a) Aditamento mecánico de sujeción, b) montaje del inersor MR.</i>	95
<i>Figura 5-34: Pruebas de tensión-compresión del inersor MR.</i>	95
<i>Figura 5-35. Fuerza del Inersor sin fluido MR.</i>	96
<i>Figura 5-36. Fuerza promedio, inersor sin fluido MR.</i>	96
<i>Figura 5-37. Fuerza del Inersor con fluido MR.</i>	96
<i>Figura 5-38. Fuerza promedio, inersor con fluido MR.</i>	96
<i>Figura 5-39. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 0.5$ amp.</i>	96
<i>Figura 5-40: Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 0.5$ amp.</i>	96
<i>Figura 5-41. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 1$ amp.</i>	97
<i>Figura 5-42. Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 1$ amp.</i>	97
<i>Figura 5-43. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 1.5$ amp.</i>	97
<i>Figura 5-44. Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 1.5$ amp.</i>	97
<i>Figura 5-45. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 2$ amp.</i>	97
<i>Figura 5-46. Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 2$ amp.</i>	97
<i>Figura 5-47. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 2.5$ amp.</i>	98
<i>Figura 5-48. Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 2.5$ amp.</i>	98
<i>Figura 5-49. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 3$ amp.</i>	98
<i>Figura 5-50. Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 3$ amp.</i>	98
<i>Figura 5-51. Comportamiento de la fuerza del inersor para los diferentes casos de la intensidad de corriente.</i>	99
<i>Figura 5-52. Comportamiento de la fuerza del inersor a causa del fluido MR.</i>	99
<i>Figura 5-53. Energía de disipación.</i>	100

Índice de tablas

<i>Tabla 1. Propiedades del líquido portador [43].</i>	40
<i>Tabla 2. Propiedades del fluido magnetorreológicos Lord Corporation [45].</i>	42
<i>Tabla 3. Parámetros óptimos variando la relación de masa μ.</i>	53
<i>Tabla 4: Parámetros de diseño de un prototipo de inersor con fluido [6].</i>	66
<i>Tabla 5. Resultado de las simulaciones por elemento finito, software FEMM 4.2.</i>	69
<i>Tabla 6. Porcentaje de error en el flujo magnético.</i>	72
<i>Tabla 7. Geometría y propiedades de la viga de acero 1018.</i>	74
<i>Tabla 8: Propiedades ideales del sistema para una relación de masa $\mu = 0.4$.</i>	76
<i>Tabla 9. Dimensiones efectivas del inersor con fluido MR.</i>	79
<i>Tabla 10. Comportamiento del flujo magnético en el centro del entrehierro.</i>	82
<i>Tabla 11. Resultados del análisis de compresión de los resortes.</i>	83
<i>Tabla 12. Propiedades del motor.</i>	84
<i>Tabla 13. MUL para la fuerza de excitación inercial.</i>	86

Capítulo 1: Introducción

La mitigación de vibraciones no deseadas en las estructuras, es una parte importante del proceso de diseño, especialmente para estructuras que pueden ser sujetas a una fuerza de excitación externa. Cuando una fuerza de excitación externa coincide con la frecuencia natural de la estructura se dice que entra en resonancia, lo que genera un incremento en la amplitud de vibración del sistema provocando un daño en la estructura. Para evitar el daño estructural, se implementan sistemas que disminuyen la amplitud de la vibración, conocidos como sistemas de amortiguamiento. Entre éstos, se encuentran topes de impacto, amortiguadores viscosos, absorbedores dinámicos de vibración, inersores, amortiguadores con fluidos inteligentes, entre otros.

A lo largo de los años, se han realizado estudios acerca de los sistemas de amortiguamiento, para mejorar la respuesta de vibración del sistema optimizando los parámetros de su diseño implementando nuevos dispositivos y materiales inteligentes, ofreciendo así un mejor rendimiento en intervalos más extensos de frecuencias de operación. Entre estos dispositivos, se encuentra el inersor que de acuerdo con Smith [1] se define como un dispositivo mecánico que absorbe las vibraciones y las disipa por medio de volantes de inercia (discos inerciales), modificando las frecuencias naturales de los sistemas, dónde la fuerza aplicada en sus terminales de entrada y salida, es proporcional a la aceleración relativa entre ellas [1]. El inersor ha sido investigado en diversas áreas como la industria automotriz, absorbedores de vibración y sistemas de amortiguamiento.

Uno de los materiales inteligentes que han impactado en los sistemas de amortiguamiento de vibraciones, son los fluidos magnetorreológicos o fluidos MR [2], fluidos que tienen la propiedad de cambiar sus propiedades reológicas cuando éstos se someten a la acción de un campo magnético. Los fluidos MR están diseñados con micro-partículas magnéticas que están suspendidas en un líquido portador con baja viscosidad para su mejor funcionamiento [3], [4]. Existen muchos estudios relevantes acerca de estos fluidos aplicados en sistemas de amortiguamiento, así como otras aplicaciones donde sus propiedades reológicas son importantes, sin embargo, en la literatura se han encontrado pocos casos de investigación acerca de la configuración del inersor con fluidos MR, es por ello que este trabajo se basa en estudiar el comportamiento de esta nueva configuración de sistemas de amortiguamiento.

1.1 Planteamiento del problema y Justificación

El principal problema de los sistemas mecánicos y estructurales son las “fallas”, estas interrumpen momentáneamente el funcionamiento correcto de los sistemas y en ocasiones provocan un daño irreversible en la maquinaria y las estructuras, esto se debe a diversas causas: su tiempo de vida útil, desperfectos en su diseño, agentes externos e internos que afecten a los sistemas, entre otros problemas. En los sistemas estructurales, las principales causas que originan una falla son: los desperfectos de diseño de la estructura, su construcción y las fuerzas de excitación externa como los fenómenos naturales, por ejemplo: la fuerza de excitación por el movimiento de las placas tectónicas puede coincidir con la frecuencia natural de la estructura generando la máxima amplitud de vibración. Para disminuir la amplitud de vibración, se implementan sistemas de amortiguamiento que generan fuerzas que actúan en contra de las fuerzas de excitación externa. Por ejemplo, el aislador dinámico de vibración, es un dispositivo pasivo para el control de vibraciones que disminuye la amplitud de vibración de una estructura por medio del movimiento de una masa sujeta a diferentes configuraciones de dispositivos mecánicos como: resortes y amortiguadores de tipo viscoso, sin embargo, actualmente existe otro dispositivo mecánico que se puede agregar a está configuración, el cual se denomina inersor y fue propuesto por Smith [1], este dispositivo agrega una masa adicional al sistema mediante un momento de inercia a través de un sistema de engranajes o también al hacer circular un fluido por una tubería.

El descubrimiento del inersor, mejoró la transición entre la síntesis de la red eléctrica y mecánica [5], de acuerdo con la literatura, cada componente mecánico tiene una equivalencia eléctrica como se muestra en la figura 1-1a. El inersor simula de una manera correcta el comportamiento de su equivalencia eléctrica el capacitor, esto se debe a las terminales de esté componente mecánico y su versatilidad de conexión respecto a un eje de referencia dinámico a diferencia de su predecesor la masa dinámica (sistema masa-resorte) la cual forzosamente una de sus terminales esta fija con respecto a un eje de referencia dinámico.

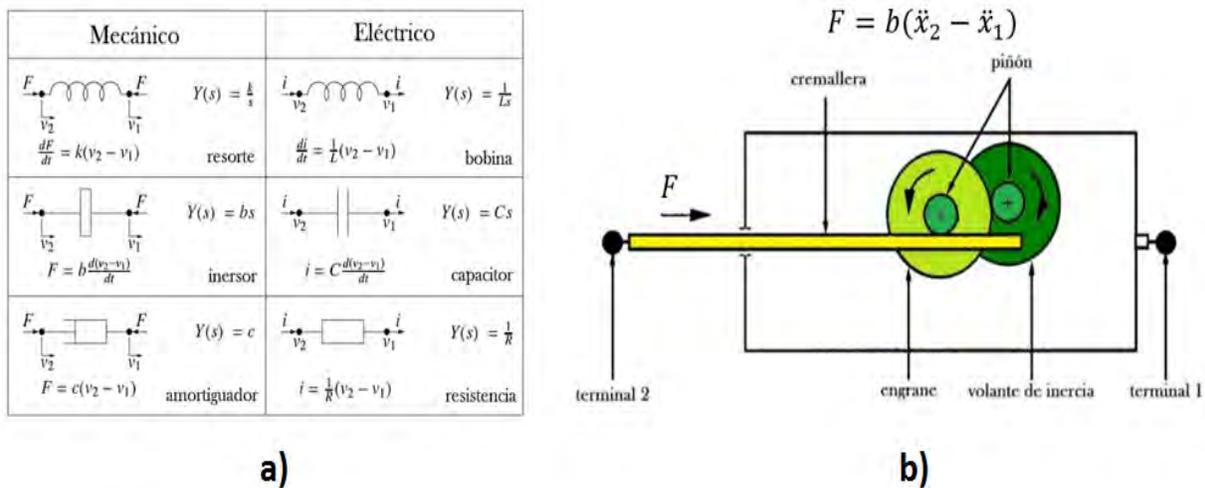


Figura 1-1. a) Síntesis de la red eléctrica y la mecánica, b) Diagrama de cuerpo libre [1].

En la figura 1-1b, se muestra el comportamiento dinámico del inersor al aplicarle una fuerza determinada F en la terminal de entrada 2, donde b es una constante de proporcionalidad denominada inercancia cuyas unidades son en kilogramos. Existen tres tipos de inersores, éstos se muestran en la figura 1-2.

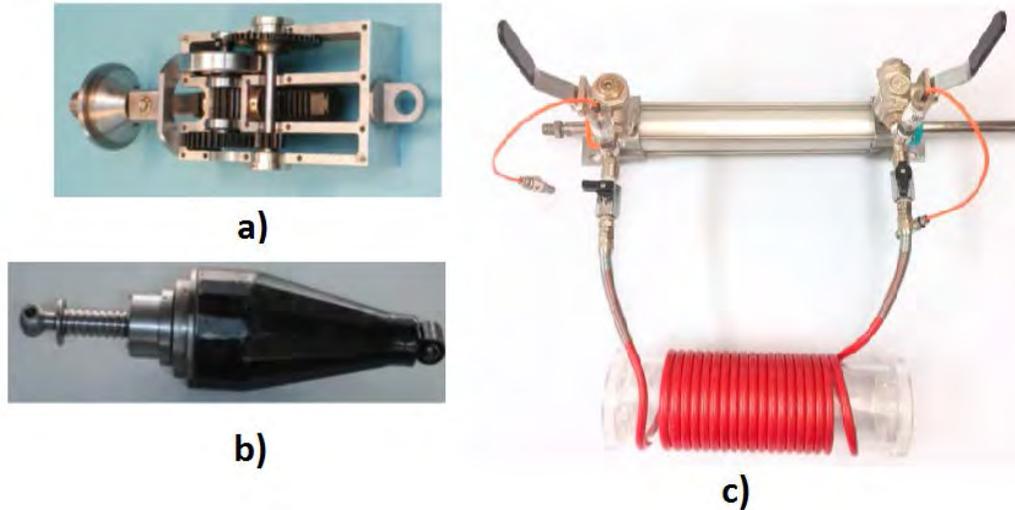


Figura 1-2. Tipos de inersor. a) Cremallera-engranes-volante de inercia [1], b) Tornillo-volante de inercia, c) Inersor con fluido [6].

Los inersores descritos en las figuras 1-2a y 1-2b generan la inercia mediante una configuración de dispositivos mecánicos como; engranes, cremalleras, tornillos y volantes de inercia [1]. El último dispositivo es diferente a los anteriores, éste se basa en técnicas alternativas de transferencia de energía mediante fluidos, donde la resistencia del fluido al recircular en un canal, produce el momento de inercia [6]. Estos dispositivos en la práctica, a causa de la fricción entre sus componentes mecánicos o la resistencia del fluido generan un efecto de amortiguamiento adicional a la inercancia, por lo tanto, el inersor experimental es una configuración mecánica paralela de la inercancia y el amortiguamiento. Ver figura 1-3.

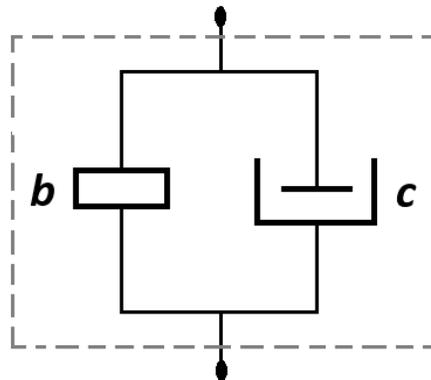


Figura 1-3. Configuración mecánica del inersor.

Un inersor con fluido, se le puede implementar cualquier fluido para generar su inertancia, en este trabajo, se implementó un fluido MR, fluido catalogado como inteligente y que cambia sus propiedades reológicas cuando está expuesto a un campo electromagnético, ver figura 1-4. En la figura 1-4b se observa el comportamiento de la fuerza de un amortiguador MR controlado. De acuerdo con la literatura, los fluidos reológicos han cambiado a los sistemas convencionales de amortiguamiento convirtiéndolos en sistemas semi-activos capaces de proveer un rango de amortiguamiento cambiando el campo magnético suministrado al fluido reológico [3].

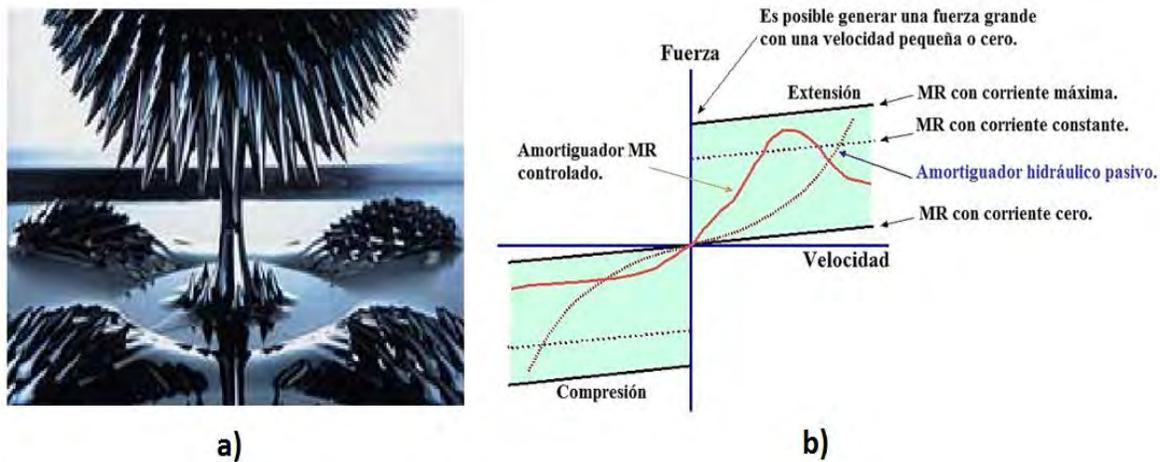


Figura 1-4. Comportamiento del fluido reológico [3].

Conforme a lo anterior, en este trabajo se analiza el comportamiento del fluido MR en el inersor y sus efectos en los parámetros de amortiguamiento e inertancia del dispositivo mecánico. Por lo tanto, se presentan los siguientes objetivos y limitaciones que se tomaron en cuenta para esta investigación.

1.2 Objetivo general

- Diseñar y construir un sistema de amortiguamiento con inersor y fluido reológico.

1.3 Objetivos particulares

- Desarrollar el modelo matemático del comportamiento dinámico del sistema basado en los aisladores dinámicos de vibración (IDVA).
- Optimizar los parámetros para el diseño del dispositivo IDVA.
- Diseñar y construir el sistema de amortiguamiento (inersor, amortiguador reológico).
- Caracterizar experimentalmente el comportamiento del inersor con fluido reológico.

1.4 Alcances y limitaciones

Alcances:

- Modelado matemático del comportamiento del sistema.
- Diseñar y construir un inersor con fluido reológico.
- Realizar un banco de pruebas experimental.

Limitaciones:

- Utilización de un solo fluido MR.
- Utilizar un sistema de amortiguamiento con una sola configuración de inersor y amortiguador reológico.
- Control on-off del amortiguador reológico.

Capítulo 2: Estado del arte

En este capítulo se describen los antecedentes que se tomaron en cuenta para esta investigación, enfatizando en las estructuras tipo viga y los sistemas de amortiguamiento con base a los aisladores dinámicos de vibración. Asimismo, también se muestran los precedentes del inersor y los fluidos magnetorreológicos descritos en la literatura y en los trabajos realizados en CENIDET que ayudaron a fundamentar la investigación y las bases para seleccionar los aspectos teóricos del siguiente capítulo.

2.1 Sistemas de amortiguamiento en estructuras

En la literatura han existido estudios posteriores a la implementación de los sistemas de amortiguamiento en estructuras, una de estas investigaciones fue Hartong [7], quien realizó una técnica de optimización para los aisladores dinámicos de vibración (DVA) tradicionales. Su técnica se basó en puntos fijos o puntos invariantes con respecto a la relación de amortiguamiento. Con base en estos puntos, determinó expresiones matemáticas óptimas para los parámetros del DVA mejorando la respuesta dinámica de estos sistemas.

Con la construcción de estructuras elevadas, se inició la introducción de los sistemas de aislamiento o de amortiguamiento, de tal forma, que en 1969 se implementó el primer sistema de aislamiento de vibración en una estructura (World Trade Center). En ese mismo año, los sistemas de amortiguamiento se comenzaron a implementar también en el área automotriz, básicamente en el sistema de suspensión. En 1977 Jacquot [8] inició el estudio de los sistemas de aislamiento de vibración, tomó como base los DVA y desarrolló técnicas para eliminar la vibración excesiva de la respuesta de una viga en cantiléver sujeta a una fuerza armónica. Jacquot, se dio cuenta que la ubicación del aislador dinámico de vibración generaba un pequeño cambio en la frecuencia natural del sistema, esto a causa del cambio de la ubicación de la masa del sistema dinámico.

Por otra parte, a principios de la década de los 80's se inició la implementación de sistemas de amortiguamiento modificando las estructuras existentes e implementados en las nuevas edificaciones [9]. En 1991 Manikanahally [10] investigó los modos de vibración de una viga en cantiléver sometida a una carga armónica distribuida con aisladores dinámicos de vibración, asimismo, desarrolló un procedimiento de diseño para la fabricación del sistema de aislamiento para determinar el número y la ubicación de los aisladores de vibración conforme a los modos de vibración de la viga. En su estudio, minimizó la respuesta de la viga a una distribución de cargas armónicas y sentó bases para optimizar el diseño de los absorbedores dinámicos de vibración. En 1996 Yadav [11] realizó un análisis dinámico en vigas de sección transversal no uniforme, para

su estudio utilizó diversas masas de prueba y cargas puntuales a lo largo de la viga, demostró el cambio de amortiguamiento histerético en función de la rigidez de la sección transversal de la viga, concluyendo, que las frecuencias naturales de las vigas con sección transversal no uniforme sometidas a vibración forzada son muy sensibles a los cambios de carga y de masa distribuida.

Por su parte, Raymond [12] consideró un sistema de amortiguamiento viscoso en una viga en cantiléver excitada por una fuerza armónica que fue colocada en diferentes puntos a lo largo de la longitud de la viga. El objetivo del estudio de Raymond, fue determinar la ubicación óptima del sistema de amortiguamiento, para cada punto donde se colocó la fuerza de excitación del sistema. De los resultados obtenidos, concluyó que la mejor posición para la ubicación del sistema de amortiguamiento, es en el 70% de la longitud de la viga tomando como referencia el extremo empotrado de la viga.

2.2 Sistemas de amortiguamiento con inersores

El inersor convencional fue propuesto por Smith en 2001, este dispositivo mecánico agrega una masa adicional a un sistema sujeto a vibración forzada mediante la transformación de energía cinética a un momento inercial a través de un sistema de engranajes. Por esa razón, ha sido ampliamente investigado en las últimas décadas, principalmente en sistemas de amortiguamiento [1]. Existen varios sistemas teóricos y experimentales basados en este nuevo dispositivo mecánico, tales como: suspensiones automotrices y absorbedores dinámicos de vibración [13], [14], [15]. Estos dispositivos demostraron que las configuraciones con inersor reducen las frecuencias naturales de los sistemas y agregan un efecto adicional de amortiguamiento. Asimismo, en el 2013, Smith presentó un modelado con una nueva configuración de inersor generando el efecto de la inercia mediante el movimiento de un fluido. El inersor de fluido, presenta una configuración helicoidal que mediante una válvula restringe el flujo del fluido generando inercia y amortiguamiento al mismo tiempo [16].

En 2015 Hu [15] considerando los efectos del inersor, realizó el análisis de cinco configuraciones de aisladores dinámicos de vibración con inersor (IDVA) mediante un sistema de un grado de libertad (GDL). Consideró los efectos de transmisión de fuerza en una estructura simple y mediante el análisis por impedancia mecánica determinó la resistencia a la vibración del aislador mediante un modelado matemático. Posteriormente, optimizó los parámetros de las cinco configuraciones de IDVA's utilizando las técnicas de optimización de H_∞ y H_2 , asimismo, comparó el comportamiento dinámico de las cinco configuraciones de IDVA's con los aisladores tradicionales de vibración DVA's, concluyendo que el mejor desempeño fue para los IDVA's. Más tarde, Shen [17] propuso un modelo matemático de inersor con fluido donde incluyó los efectos de las fuerzas de fricción y de amortiguamiento. Adicionalmente, desarrolló un modelo dinámico para una suspensión automotriz basado en el inersor, para determinar los parámetros de diseño para la suspensión mecánica implementó la metodología de optimización de algoritmos

genéticos, dando como resultado un mejor sistema de amortiguamiento no lineal que los convencionales anteriores a ese año. En ese mismo año, Jin [18] realizó la optimización de los parámetros de dos configuraciones de IDVA's mediante un análisis numérico de minimización de la respuesta máxima de vibración en función de la frecuencia de una viga empotrada en los dos extremos. Comparó el comportamiento dinámico de los IDVA's propuestos con el comportamiento dinámico de un absorbedor dinámico de vibración tradicional DVA, concluyendo que las configuraciones basadas en el inersor presentaron mayor atenuación de vibración del sistema comparado con el resultado obtenido con el DVA.

En 2018, Barredo [19] presentó una técnica de optimización basado en los IDVA. Para su estudio tomo como base la teoría de optimización de los puntos fijos propuesta por Den Hartong optimizando los parámetros de tres configuraciones de IDVA's, proponiendo expresiones matemáticas óptimas de las variables del sistema IDVA en función de la relación de masa. Barredo, corroboró su metodología mediante el cálculo de los valores propios de la matriz Hessiana formada por las variables de sus sistema, posteriormente, comparó sus resultados con la metodología de H_∞ , concluyendo un desempeño eficiente de su metodología.

2.3 Sistemas de amortiguamiento reológico

Durante los últimos años los fluidos electrorreológicos y magnetorreológicos se han investigado exhaustivamente en los sistemas de amortiguamiento por su comportamiento reológico. Sin embargo, los fluidos electrorreológicos cuentan con bajo desempeño mecánico al estar expuestos al campo eléctrico y los sistemas son relativamente grandes para el uso práctico. Por lo tanto, desde el punto de vista técnico, los fluidos magnetorreológicos o fluidos MR son considerados la mejor opción [20]. Los fluidos MR fueron descubiertos a finales de la década de los cuarenta por el ingeniero e inventor Jacob Rabinow en *US National Bureau of Standards*, donde demostró la funcionalidad de los fluidos MR, al suspender a una joven por medio de un dispositivo mecánico con fluido MR [21]. El inicio de los sistemas de amortiguamiento con fluidos MR surge a partir de finales de la década de los noventa, en aparatos de ejercicios.

En 1996, Carlson [4] en conjunto con la empresa *Lord Corporation* diseñaron y construyeron el primer sistema de amortiguamiento con fluido MR para una suspensión de automóvil. En ese mismo año Dyke [22] realizó un análisis con base a la implementación de los sistemas de amortiguamiento MR con control semi-activo, enfatizó en la precisión y características sobresalientes de los amortiguadores MR en dispositivos sísmicos [22].

En 2004, Yang [23] señaló la importancia de los sistemas de amortiguamiento con fluido MR por su mitigación estructural de vibración, simplicidad mecánica, alto rango dinámico, bajos requerimientos de energía, gran capacidad de fuerza y robustez, concluyendo que estos fluidos

MR tienen propiedades para acoplarse bien con las demandas y las restricciones de las aplicaciones de la ingeniería de terremotos y de viento. En 2007, Maslanka [24] realizó una investigación experimental de un cable con suspensión de fluido MR conectado perpendicularmente cerca de un soporte. Maslanka propuso el amortiguamiento del fluido MR como amortiguamiento viscoso y un algoritmo para el sistema de control, mejorando la atenuación de la amplitud en un alto rango de respuesta vibratoria.

En 2012, Parlak [25] realizó un análisis por elemento finito para optimizar el diseño de los sistemas de amortiguamiento con fluido MR. Para su estudio consideró dos objetivos principales, la fuerza de amortiguamiento y la intensidad máxima de flujo magnético. Realizó dos diseños de amortiguadores MR y los analizó experimentalmente en una máquina de impacto, obteniendo una disminución en la amplitud de vibración conforme al incremento de la intensidad del campo magnético.

2.4 Sistemas de amortiguamiento con inersor y fluido MR

En la literatura existen pocos precedentes acerca de sistemas de amortiguamiento con la configuración de fluido MR e inersor, sin embargo, investigaciones han demostrado que el inersor puede estar compuesto por un fluido en lugar de los sistemas de engranaje y cremalleras convencionales. Smith en su patente nombrada “*Damping and inertial hydraulic device*”, propuso dos inersores helicoidales por medio de un fluido, remarcando la posibilidad de utilizar los fluidos MR para ajustar la viscosidad del fluido por medio de un campo magnético, proporcionando un mayor efecto inercial [26].

Partiendo de la patente de Smith, en marzo del 2018, Matthew Tipuric [27], realizó un modelo cuasiestático, mediante la combinación de un modelo existente del inersor con fluido con modelos simplificados para los fluidos MR, exploró el rendimiento del inersor y su amortiguamiento por medio de una válvula MR, asimismo, lo implementó en un sistema de control de compuerta inercial de disposición paralela, demostrando que el modelo funcionaba para un tamaño específico y velocidad dependientes del fluido MR. De su estudio concluyó, que las válvulas MR son ideales para controlar el flujo del fluido en el inersor y así obtener un efecto significativo en este dispositivo mecánico.

2.5 Investigaciones realizadas en el CENIDET

En el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) existen trabajos posteriores donde se propone la utilización y aplicación de los fluidos inteligentes, tales como, los fluidos electrorreológicos (ER) y magnetorreológicos (MR). En el 2011, Guzmán [28] realizó

el diseño y la construcción de un amortiguador ER, analizó su comportamiento de manera experimental variando el suministro de voltaje, la separación entre placas y la concentración de nanopartículas de plata. De los resultados obtenidos, observó que a mayor voltaje existía un incremento en el amortiguamiento y que las nanopartículas de plata se mantenían cargadas eléctricamente por un tiempo determinado. En ese mismo año, Murrieta [29] realizó el diseño y la construcción de un embrague ER implementando el mismo fluido ER que Guzmán. Un líquido a base de glicerol y las nanopartículas de plata. Murrieta, analizó la transferencia de torque producido por el contacto del fluido ER en el eje de entrada y la salida. De los resultados obtenidos, concluyó que el torque transmitido por el fluido ER era considerablemente pequeño, en comparación con los torques requeridos por la industria automotriz. En el 2015, Enciso [30] fue uno de los primeros en utilizar los fluidos MR en el CENIDET. Enciso para su estudio utilizó el fluido MRF-122 fabricado por la empresa Lord Corporation y realizó el diseño y construcción de una chumacera MR analizando de manera numérica y experimental el comportamiento de la misma. Demostró de manera experimental, que al incorporar la chumacera en un rotor asimétrico su comportamiento se veía afectado por el fluido MR y que el efecto dependía de la exposición del fluido a la intensidad del campo magnético. Por su parte, en 2017, Espinosa [31] realizó el diseño y la construcción de un embrague con fluido MR, diseñó el embrague mediante simulaciones de elemento finito con el software FEMM 4.2. Posteriormente, analizó la transferencia de torque del dispositivo con el fluido MR de manera numérica y experimental, obteniendo un pequeño porcentaje de error por las condiciones del banco de pruebas experimental.

El único antecedente del inersor en el CENIDET, es el realizado por Barredo en el 2016 [32], el realizó el análisis teórico de un inersor con cremallera conectado a un sistema masa resorte de uno y dos grados de libertad, en su estudio consideró la fricción entre los componentes mecánicos del dispositivo. Barredo mediante la técnica de optimización del punto fijo, determinó expresiones matemáticas para las variables adimensionales óptimas del modelo de dos grados de libertad. Finalmente, de los resultados obtenidos de forma numérica, construyó un prototipo tomando como base los parámetros óptimos del inersor.

2.6 Conclusiones del estado del arte

- En la literatura existen varios sistemas de amortiguamiento que atenúan las vibraciones provocadas por una fuerza de excitación interna o externa. en las áreas de rotodinámica, industria automotriz y en general donde sea necesario el control de vibraciones.
- Los sistemas de amortiguamiento con fluido MR pueden cambiar el factor de amortiguamiento mediante un sistema de control eléctrico relativamente simple.

haciendo estos dispositivos ideales para la atenuación de un rango de frecuencias de vibración de una manera óptima.

- Los sistemas de amortiguamiento con inersor tienen una masa pequeña o insignificante en comparación con los sistemas de amortiguamiento tradicionales DVA (absorbedores dinámicos de vibraciones). Además, reducen las amplitudes de vibración en las frecuencias naturales del sistema. De acuerdo con lo anterior, el inersor ha sido ampliamente investigado y aplicado en varios sistemas de suspensión automotriz, estructurales y en la construcción de sistemas de dirección de motocicleta entre otros.
- En la literatura se han propuesto varias configuraciones de sistemas con el inersor, basadas principalmente en absorbedores de vibración y sistemas de aislamiento. Sin embargo, hasta la fecha han existido limitaciones de estudio en la exploración de la combinación de inersor con dispositivos semi-activos como el caso de los sistemas de amortiguamiento con fluidos magnetorreológicos.
- El inersor es un dispositivo versátil que puede estar compuesto por fluido sustituyendo a los sistemas o configuraciones de engranes, volantes de inercia y correderas. Por tanto, es posible implementar el fluido magnetorreológico en un inersor con fluido.
- En el CENIDET se han realizado trabajos con los fluidos inteligentes basados en sistemas de amortiguamiento y de transferencia de torque, lo que comprueban la funcionalidad de los fluidos reológicos. Asimismo, se ha estudiado el inersor en esta institución de manera teórica. Estos trabajos sirvieron como punto de partida para esta investigación.

Capítulo 3: Marco teórico

En este capítulo se describen las teorías y principios necesarios que se implementaron para la realización de este trabajo. Partiendo de la teoría de vibraciones mecánicas enfatizando en el modelado matemático para las fuerzas de excitación armónica e inercial, análisis modal y los aisladores dinámicos de vibración, así como, la teoría de mecánica de fluidos para la realización de los análisis matemáticos. Asimismo, se describe la metodología de optimización que se implementó para la obtención de los parámetros óptimos del IDVA, la teoría de electromagnetismo para el diseño de la válvula MR y el principio de funcionamiento de los fluidos MR, sus formas de aplicación y las características del fluido utilizado en esta investigación.

3.1 Vibraciones mecánicas

Los sistemas de ingeniería que tienen masa y elasticidad pueden tener un movimiento relativo, si el movimiento de estos sistemas se repite después de un intervalo de tiempo, el movimiento se conoce como vibración periódica. La vibración en general es una forma de energía disipada y en muchos casos perjudicial para los sistemas.

Existen dos tipos de vibraciones mecánicas, la vibración libre y la vibración forzada [33], la vibración libre, es un movimiento periódico que ocurre cuando un sistema en equilibrio estático se le aplica una carga generando un desplazamiento inicial del sistema, donde al liberar la carga, el sistema experimenta una oscilación periódica que decrece con respecto del tiempo en función del amortiguamiento. En una vibración libre, el sistema tenderá a vibrar a su frecuencia natural.

En contraste, la vibración forzada ocurre cuando una fuerza de excitación externa actúa sobre el sistema, por lo general, es una fuerza armónica. En una vibración forzada, el sistema tenderá a vibrar a la frecuencia de la fuerza de excitación sin importar sus condiciones iniciales ni la frecuencia natural del sistema.

Para disminuir las oscilaciones provocadas por las vibraciones, se desarrollan modelos matemáticos para predecir el comportamiento dinámico del sistema, donde se idealiza y simplifica el sistema en elementos de masa, resortes y amortiguadores, elementos que representan las propiedades inerciales, elásticas y amortiguamiento del sistema, respectivamente. En términos generales, de la solución del modelo matemático desarrollado se obtiene la respuesta de vibración del sistema ya sea en función del tiempo o frecuencia, así como las formas modales y frecuencias naturales (eigenvalores y eigenvectores) [34].

3.1.1 Sistema con excitación armónica

El más simple de los movimientos periódicos es el movimiento armónico simple, como por ejemplo: el movimiento de un péndulo y de una leva. Este movimiento considera que la aceleración respecto a un eje de referencia, es proporcional al desplazamiento en función del tiempo [33]. Tomando en cuenta una fuerza de excitación armónica compleja [34], la ecuación que rige el comportamiento dinámico de un sistema de un grado de libertad se puede expresar como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{i\omega t} \quad (3.1)$$

Donde:

- m Masa del sistema (kg).
- c Coeficiente de amortiguamiento (kg/s).
- k Rigidez del sistema (N/m).
- F Magnitud de la fuerza de excitación (N).
- $e^{i\omega t}$ Comportamiento armónico con respecto del tiempo.

Considerando una solución particular de la Ec. (3.1), de la forma:

$$x_p(t) = Xe^{i\omega t} \quad (3.2)$$

Sustituyendo (3.2) en la Ec. (3.1), se encuentra la solución del sistema:

$$X = \frac{F}{(k-m\omega^2)+ic\omega}; \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right) \quad (3.3)$$

Donde:

- X Desplazamiento del sistema o amplitud (m).
- ϕ Ángulo de fase ($grados$).
- ω Velocidad angular (rad/s).
- t Tiempo (s).

La Ec. (3.3) representa el comportamiento del sistema y nos proporciona la amplitud de vibración del sistema en función del tiempo o frecuencia, así como, el ángulo de fase entre la respuesta de vibración y la fuerza de excitación.

Por otra parte, de forma adimensional, la Ec. (3.3) se puede expresar como:

$$H(i\omega) = \frac{kX}{F} = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+(2\xi\Omega)^2}}; \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi\Omega}{1-\Omega^2}\right) \quad (3.4)$$

Donde:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

Siendo:

Ω	Relación de frecuencias.
ω_n	Frecuencia natural del sistema.
ξ	Relación de amortiguamiento.
c_c	Amortiguamiento crítico.

En la figura 3-1, se muestra el comportamiento de un sistema de un grado de libertad para diferentes relaciones de amortiguamiento en función de la frecuencia de excitación. La gráfica 3-1a se le conoce como factor de amplificación o diagrama de Bode de amplitud, mientras que la gráfica 3-1b es el diagrama de fase que muestra el ángulo de atraso de la respuesta de vibración del sistema con respecto a la fuerza de excitación.

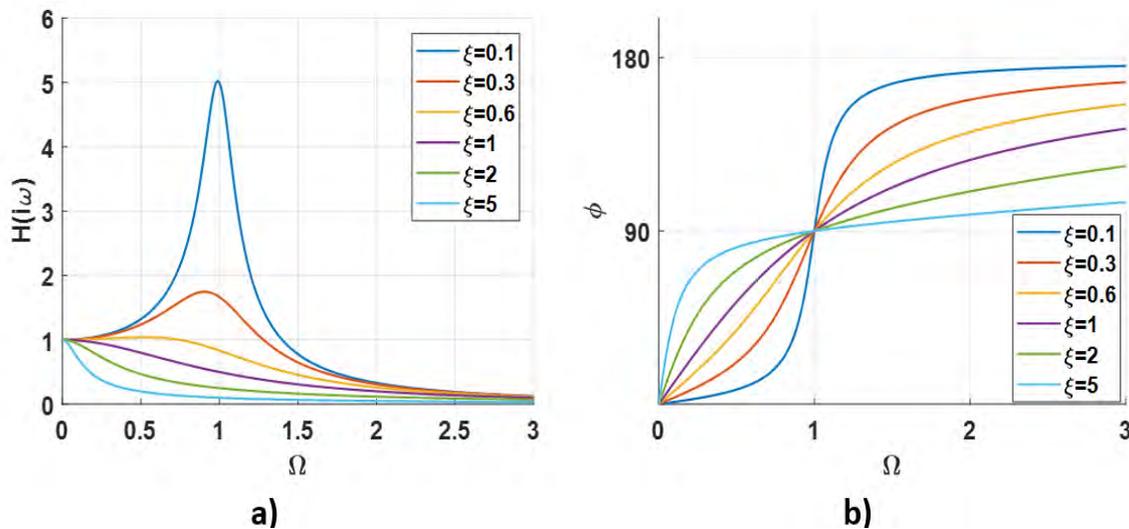


Figura 3-1. Comportamiento vibratorio de un sistema de un grado de libertad con excitación armónica. a) Diagrama de Bode, b) Diagrama de fase [34].

3.1.2 Sistemas con desbalance rotatorio

Una de las causas principales de vibración, es el desbalance rotatorio. El desbalance rotatorio, ocurre cuando el centro de gravedad de la parte rotatoria no coincide con el centro geométrico del sistema, lo que genera una fuerza de excitación armónica inercial en función de la velocidad de rotación del sistema ω . Un ejemplo común de estos sistemas, es un motor con una masa de desbalance, ver figura 3-2, donde la cantidad de desbalance, se expresa como $m_d e$ que es la

masa de desbalance multiplicada por la excentricidad. La ecuación característica del sistema de la figura 3-2, se puede expresar como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_d e \omega^2 \sin \omega t \quad (3.5)$$

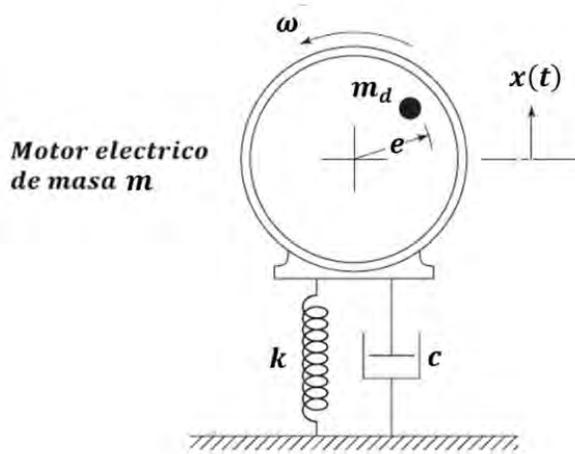


Figura 3-2. Sistema vibratorio con excitación inercial [34].

Donde:

- k Rigidez del sistema.
- c Coeficiente de amortiguamiento del sistema.
- e Excentricidad.
- m_d Masa de desbalance.
- ω Velocidad de rotación.

La solución parcial de la ecuación diferencial (3.5) es:

$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (3.6)$$

Sustituyendo (3.6) en la Ec. (3.5) y resolviendo para X , se obtiene:

$$X = \frac{m_d e \omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}; \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) \quad (3.7)$$

La Ec. (3.7) se puede expresar de forma adimensional en el dominio de la frecuencia, donde $\xi = \frac{c}{c_c}$, $\Omega = \omega/\omega_n$.

$$H(i\omega) = \frac{mX}{m_d e} = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}}; \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi\Omega}{1 - \Omega^2} \right) \quad (3.8)$$

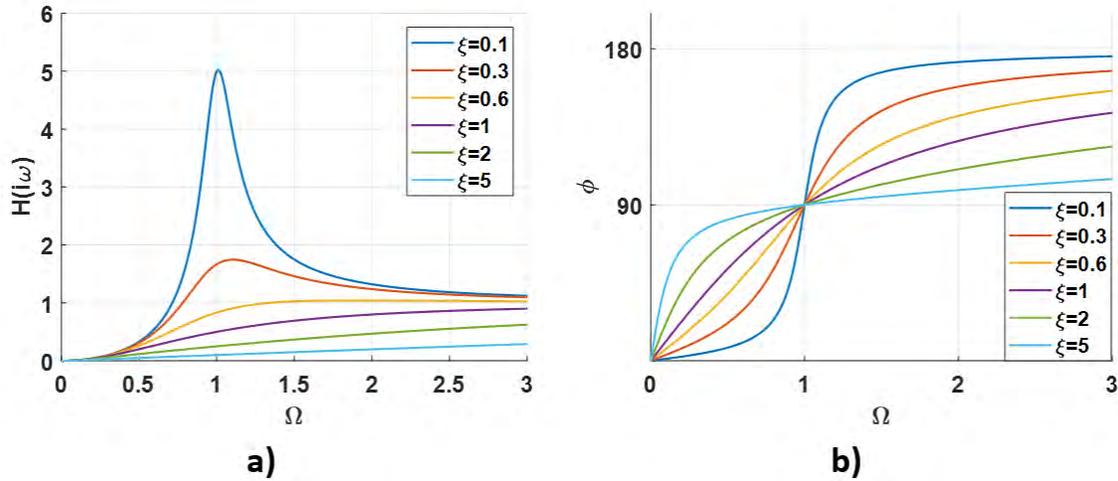


Figura 3-3. Comportamiento de un sistema vibratorio de un grado de libertad con excitación inercial. a) Diagrama de Bode, b) Diagrama de fase [34].

En la figura 3-3 se muestra el comportamiento de un sistema vibratorio de un grado de libertad con excitación inercial, se puede observar que el desplazamiento vibratorio de un sistema con excitación inercial se obtiene al multiplicar por Ω^2 (relación de frecuencias) la amplitud de vibración de un sistema con excitación armónica [34]. En otras palabras, el desplazamiento de un sistema con excitación inercial, es igual a la aceleración de un sistema con excitación armónica simple.

3.1.3 Método de separación de variables para ecuaciones diferenciales parciales en estructuras

El método de separación de variables para ecuaciones diferenciales es útil para representar modelos matemáticos de estructura como vigas, placas y tensores. Por ejemplo, considérese el diagrama dinámico de una sección diferencial de una viga bajo una carga $f(x, t)$, tal y como se muestra en la figura 3-4, a causa de la fuerza de excitación $f(x, t)$, el elemento diferencial experimenta un efecto cortante Q y momento flexionante M .

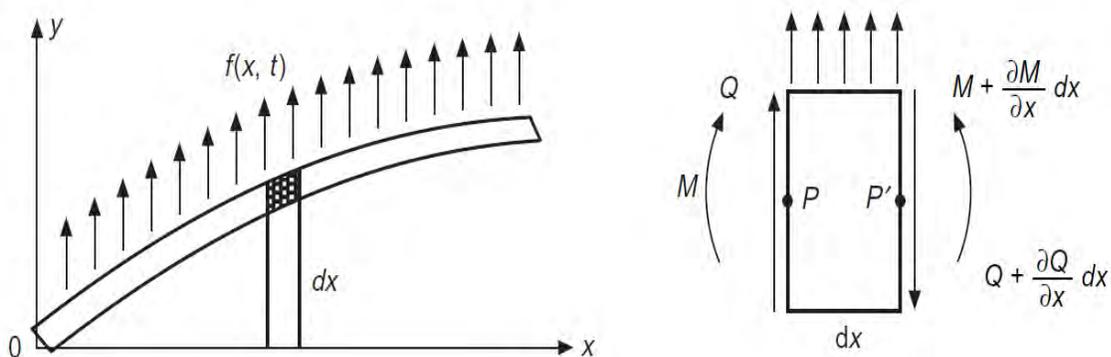


Figura 3-4. Elemento diferencial de la viga y su diagrama de esfuerzos [35].

La figura 3-4, describe una estructura tipo viga sometida a una carga y su diagrama dinámico [35]. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la ecuación del momento con respecto al eje y se puede expresar como:

$$Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) + f(x, t) dx = dx \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

Simplificando la Ec. (3.9):

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = f(x, t) \quad (3.10)$$

Donde ρ es la densidad del material y A es el área de la sección transversal. De la misma manera, se puede determinar el momento que pasa por el punto P' obteniendo:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q \quad (3.11)$$

De acuerdo con la teoría básica de vigas existe una relación entre el momento y la flexión de una viga expresada como:

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.12)$$

Donde I es el segundo momento de área de la sección trasversal de la viga y E es el módulo de elasticidad o de Young del material. Sustituyendo (3.11) en la Ec. (3.10), se tiene que:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = f(x, t) \quad (3.13)$$

La Ec. (3.13) representa el modelo matemático del comportamiento vibratorio de una viga sometida a una fuerza de excitación $f(x, t)$.

3.1.4 Ecuación de Lagrange

La ecuación de Lagrange o lagrangiano, toma como base el principio de D' Alembert que es una extensión de la metodología del trabajo virtual para el análisis dinámico de un sistema [35]. Para determinar la ecuación característica de un sistema, la ecuación de Lagrange se basa principalmente en el cálculo de la energía cinética (E.C.) y potencial (E.P.) presentes en el sistema. El uso del lagrangiano producirá directamente, tantas ecuaciones de movimiento como grados de libertad tenga el sistema [33]. Para un sistema conservativo la ecuación de Lagrange se define como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial (E.D.)}{\partial q_i} = F \quad (3.14)$$

Donde q_i es la coordenada generalizada del sistema, $(E.D.)$ denota la energía de disipación, mientras que L es el lagrangiano del sistema. El lagrangiano del sistema se define como la diferencia de la energía cinética y la energía potencial, es decir:

$$L = (E.C.) - (E.P.) \quad (3.15)$$

3.1.5 Análisis modal

El análisis modal, se basa en que la respuesta vibratoria de un sistema dinámico lineal se puede representar por la combinación lineal de una serie de movimientos armónicos simples, denominados modos de vibración. Los modos de vibración son realmente importantes para un sistema dinámico, debido a que representan la forma de deflexión de un cuerpo de acuerdo a la frecuencia natural en la que se encuentra. Por ejemplo los modos de vibración de un sistema tipo viga empotrada se observan en la figura 3-5. Los modos de vibración, también dependen de las propiedades físicas del sistema (masa, rigidez y amortiguamiento), donde cada modo de vibración es función de una masa, rigidez y amortiguamiento modal (parámetros modales) [35]. Tomando como referencia el sistema coordinado de la figura 3-10 y con base al análisis modal, el desplazamiento lineal del sistema se puede representar por una serie de potencia, la cual se representa en forma matemática como:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(x) \quad (3.16)$$

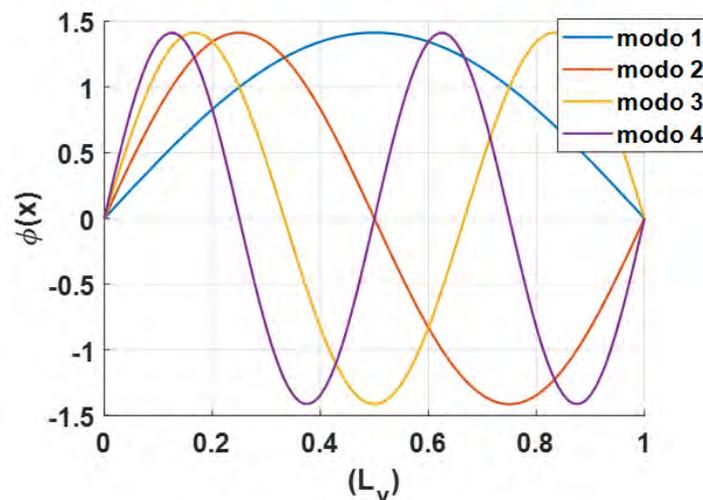


Figura 3-5. Modos de vibración normalizados de una estructura tipo viga empotrada.

Donde $\phi_i(x)$ es la función del i -ésimo modo de vibración y puede determinarse mediante la obtención de los valores propios del sistema y sus condiciones de frontera [18]. Tomando por ejemplo una estructura tipo viga empotrada, ver figura 3-10, las ecuaciones que satisfacen las condiciones de frontera son las siguientes.

$$\int_0^{L_v} \phi_i(x)\phi_i(x)dx = L_v; \quad \frac{d^4\phi_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4\phi_i(x) \quad (3.17)$$

Donde L_v es la longitud de la viga y β_i es el valor propio de la ecuación característica del sistema tipo viga. Considerando las condiciones de frontera de la estructura tipo viga doblemente empotrada la expresión de la función modal es:

$$\phi_i(x) = \sqrt{2} \sin(x\beta_i) \quad (3.18)$$

De la misma manera, para los valores propios:

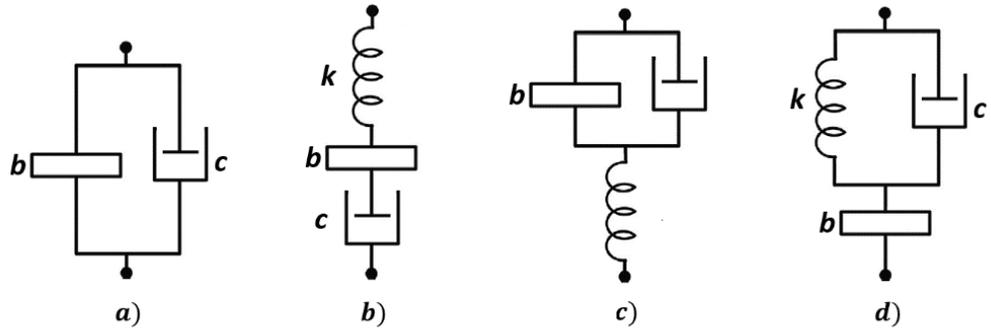
$$\beta_i = \frac{i\pi}{L_v} \quad (3.19)$$

3.1.6 Impedancia mecánica

Este método sirve para determinar la vibración de un sistema en estado estable en el dominio de la frecuencia. Se basa en la representación vectorial de las funciones armónicas [33]. Considérese un vector de fuerza de excitación armónica $F = e^{i\omega t}$, donde la respuesta en estado estable presenta un ángulo de fase ϕ con respecto a la fuerza de excitación, de acuerdo con esto, el vector del desplazamiento del sistema se puede expresar como $x = Xe^{i(\omega t - \phi)}$, por tanto, el vector de velocidad se puede representar como $\dot{x} = X\omega e^{i(\omega t - \phi + \pi/2)}$ o $\dot{x} = i\omega x$, finalmente, el vector de aceleración entonces se representa como $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Por lo tanto, los términos del sistema dinámico se pueden reescribir como:

- Fuerzas inerciales = $m\ddot{x} = -m\omega^2 x$
- Fuerzas de amortiguamiento = $c\dot{x} = ic\omega x$
- Fuerzas elásticas = $kx = kx$

Donde i denota un número complejo, siendo $i = \sqrt{-1}$. Otra de las aplicaciones de la impedancia mecánica es la obtención de la resistencia mecánica resultante de configuraciones en serie, paralelo y serie-paralelo de los componentes mecánicos [15]. Para realizar esto, se divide la masa, amortiguamiento y la rigidez entre la velocidad angular ($i\omega$), para poder sumar todos los componentes mecánicos conforme a su configuración. En la figura 3-6, se muestra algunas configuraciones basadas en los efectos de los componentes mecánicos como la inercia, la rigidez y el amortiguamiento con su respectiva impedancia mecánica.



Impedancia mecánica

$$\begin{aligned}
 a) &= i\omega b + c & b) &= \frac{1}{\frac{i\omega}{k} + \frac{1}{i\omega b} + \frac{1}{c}} & c) &= \frac{1}{\frac{1}{i\omega b + c} + \frac{i\omega}{k}} & d) &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{k}{i\omega} + c} + \frac{1}{i\omega b}}
 \end{aligned}$$

Figura 3-6. Configuraciones mecánicas con sus impedancias mecánicas [15].

3.1.7 Aisladores dinámicos de vibración

El absorbedor dinámico de vibración (DVA) es un dispositivo mecánico utilizado para la atenuación de vibraciones. Este dispositivo, supone una masa adicional a la del sistema al igual que efectos de rigidez y de amortiguamiento para disminuir la amplitud de vibración [34]. Por lo tanto, al anexar una masa adicional a la masa de un sistema de un grado de libertad, su comportamiento será de un sistema de dos GDL, ver figura 3-7. Los aisladores de vibración operan a una velocidad constante y es ideal solo para un rango de frecuencias. Los absorbedores dinámicos de vibración se diseñan para que las frecuencias naturales resultantes se alejen de la frecuencia de excitación.

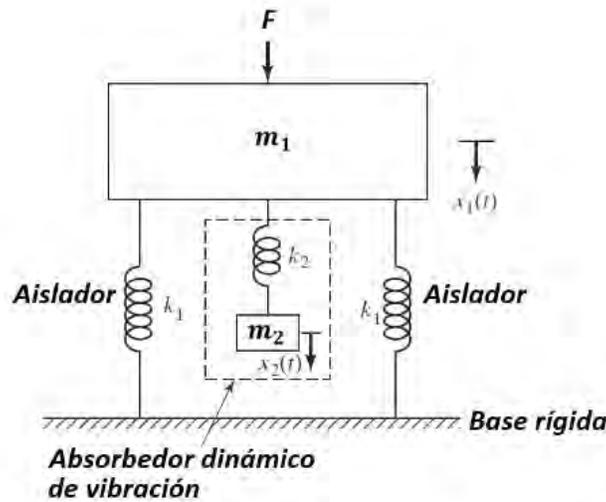


Figura 3-7. Aislador de vibración clásico [34].

En la figura 3-7, se muestra un sistema masa-resorte con un aislador dinámico de vibración, para este sistema la ecuación diferencial de movimiento se puede expresar como:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= F \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Donde, la solución de forma adimensional de la Ec. (3.20) en estado estable en el dominio de la frecuencia es:

$$\begin{aligned} \frac{X_1 k_1}{F} &= \frac{1 - \Omega_2^2}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \Omega_1^2\right] \left[1 - \Omega_2^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \\ \frac{X_2 k_1}{F} &= \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \Omega_1^2\right] \left[1 - \Omega_2^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Siendo Ω_1 y Ω_2 la relación de frecuencias de la primera y segunda frecuencia natural respectivamente, dadas por $\omega_{n1} = \sqrt{k_1/m_1}$ y $\omega_{n2} = \sqrt{k_2/m_2}$. En la figura 3-8, se muestra el comportamiento de la Ec. (3.21), comparado con el comportamiento del mismo sistema sin el DVA. De la figura 3-8 se puede observar que el sistema presenta una frecuencia natural adicional como resultado de la inclusión del DVA, así como un desfase en la frecuencia natural.

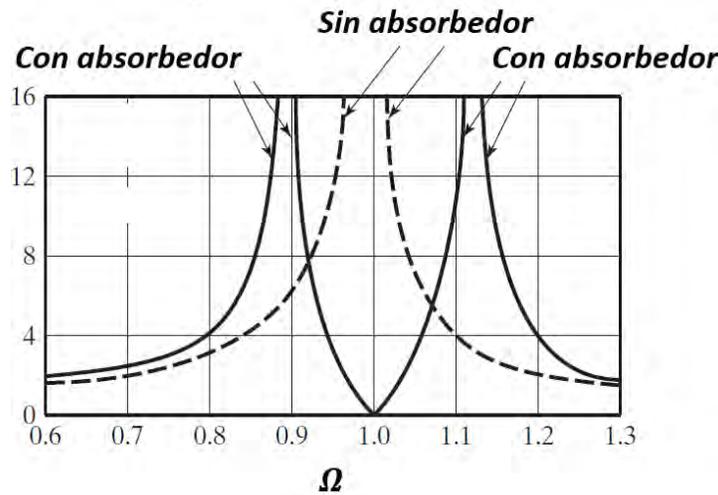


Figura 3-8. Comportamiento dinámico del sistema con DVA vs sin DVA [34].

3.2 Optimización

La optimización se define como el proceso para encontrar las condiciones que dan la respuesta máxima o mínima de una función [36]. Por ejemplo, considérese una función $f(x)$ tal y como se muestra en la figura 3-9, aquí el punto p corresponde al valor mínimo de $f(x)$, para la misma

función pero negativa el punto p corresponde al valor máximo. Por lo tanto, la optimización puede ser interpretada como una metodología de minimización dado que se puede determinar el punto máximo de una función, buscando el punto mínimo de la misma expresión negativa.

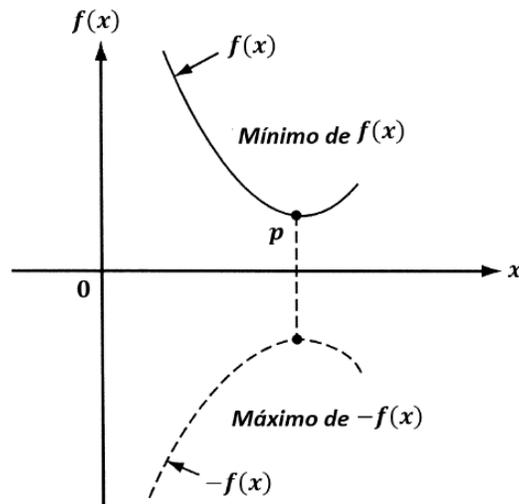


Figura. 3-9. Mínimo y máximo de una función [36].

En la literatura [36, 7, 37] existen muchos métodos para realizar la optimización, estos métodos se dividen principalmente en métodos clásicos y métodos modernos. Los métodos clásicos son útiles para determinar soluciones óptimas de las funciones continuas y diferenciales. Estos métodos son analíticos e implementan técnicas de cálculo diferencial para localizar los puntos óptimos. Las técnicas de optimización clásicas tienen un alcance limitado en la aplicación práctica, sin embargo, el estudio de los métodos por medio de cálculo de optimización, formó las bases para el desarrollo de la mayoría de técnicas numéricas de optimización, la teoría de los puntos fijos o Den Hartong, es una de estas teorías clásicas. En el subtema siguiente, se hablara más a respecto sobre ella. Los métodos modernos son métodos numéricos basados en características y comportamientos biológicos, moleculares, sistemas neurobiológicos entre otros aspectos. Algunos de los métodos son los siguientes:

- Algoritmos genéticos.
- Optimización de enjambre de partículas.
- Optimización de colonia de hormigas.
- Optimización difusa.
- Métodos basados en redes neuronales.

Estos métodos se han desarrollado en los últimos años y se han popularizado para resolver problemas de ingeniería complejos únicamente implementando la función a analizar. Para realizar la optimización de un sistema, se debe determinar la función objetivo, esta función se rige por la naturaleza del problema, abarcando las variables necesarias para realizar la minimización de la función. Sin embargo, en un problema práctico, las variables de diseño no

pueden ser elegidas arbitrariamente; están restringidas por las restricciones que representan limitaciones físicas de diseño. En los subtemas siguientes, se presentan las metodologías de optimización que fueron base para este trabajo haciendo énfasis en los IDVA.

3.2.1 Metodología de optimización del punto fijo

La metodología de optimización del punto fijo, minimiza la amplitud máxima de la respuesta en frecuencia normalizada o adimensional de un sistema, esta teoría se basa en determinar mediante la respuesta en estado estable “puntos fijos” o puntos invariantes conforme a la relación de amortiguamiento, estos puntos se toman como base para optimizar las variables adimensionales del sistema, disminuyendo la amplitud de resonancia y mejorando la respuesta en frecuencia del sistema [32]. En la literatura esta metodología es una de las más utilizadas para optimizar las variables de los sistemas con DVA y con IDVA.

Como ejemplo, considérese una estructura tipo viga conectada a un IDVA, tal y como se muestra en la figura 3-10.

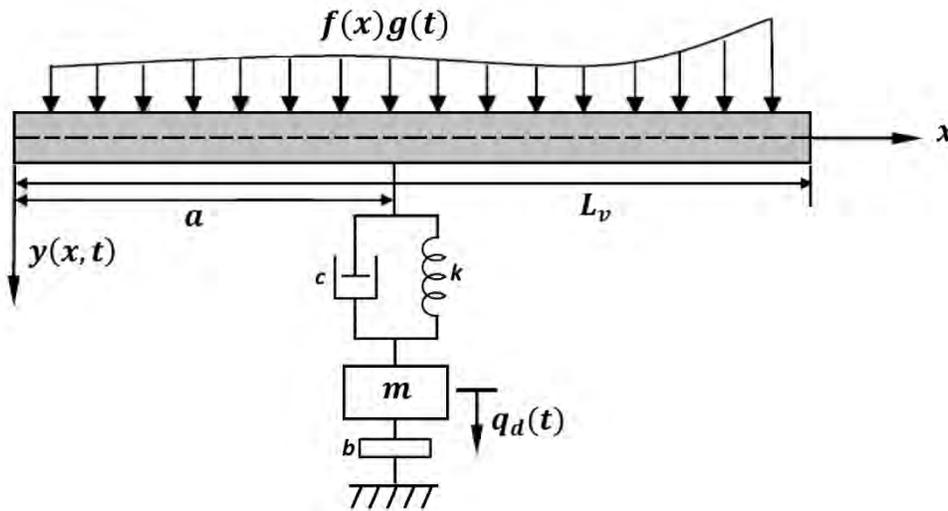


Figura 3-10. Sistema tipo viga conectada a un IDVA [18].

Donde $y(x, t)$, $q_d(t)$ y a son el desplazamiento de la viga, desplazamiento de la masa y la ubicación del sistema del IDVA respectivamente. Para el sistema de la figura 3-10, la función de respuesta adimensional en el dominio de la frecuencia se puede expresar como:

$$R(S) = \frac{(\psi\Omega^2 - T^2 + \Omega^2)^2 - (2\xi T\Omega)^2}{\sqrt{(\psi\Omega^2 - \psi\Omega^4 + T^2\Omega^2 - T^2 + \Omega^2 - \Omega^4 + \Phi_1^2(a)T^2\Omega^2\mu + \Phi_1^2(a)T^2\psi\Omega^2\mu)^2 + (2\xi(T\Omega^3 - T\Omega + \Phi_1^2(a)T\Omega^3\mu + \Phi_1^2(a)T\psi\Omega^3\mu))^2}} \quad (3.22)$$

Donde $\psi = \frac{b}{m}$, $\mu = \frac{m}{\rho AL_v}$, $T = \frac{\sqrt{k/m}}{\omega_n}$ y $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$, son la relación de masa respecto al inersor, la relación de masa respecto a la viga, la relación de frecuencia respecto de la rigidez y la relación de amortiguamiento respectivamente.

En la figura 3-11, se presenta el comportamiento dinámico del sistema obtenido de la Ec. (3.22) para los valores de $T = 0.8$, $\psi = 0.2$, y $\mu = 0.1$ variando la relación de amortiguamiento ξ . Del comportamiento del sistema mostrado en la figura 3-11, se observa que existen dos puntos donde la relación de amortiguamiento no afecta al comportamiento del sistema P_1 y P_2 y se conocen como puntos invariantes [7]. La finalidad de la metodología de optimización del punto fijo, es optimizar la respuesta en estos puntos para evitar cambios bruscos de la respuesta cuando el sistema entra en resonancia.

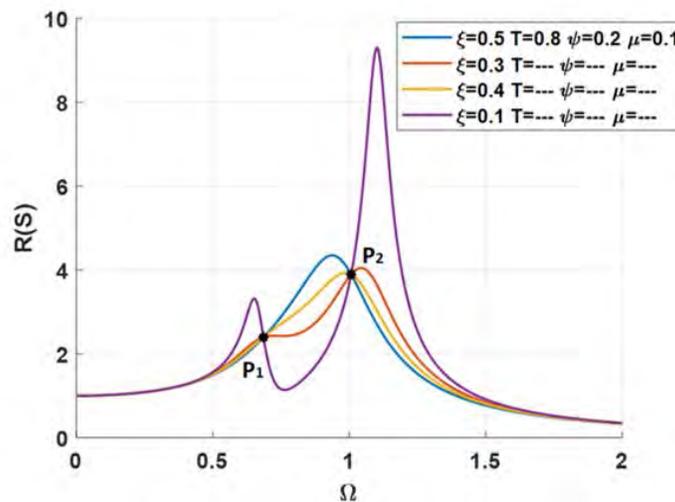


Figura 3-11. Comportamiento dinámico del sistema. P_1 y P_2 puntos invariantes del sistema.

Para minimizar la respuesta del sistema, se plantea el problema de optimización utilizando la Ec. (3.22) como la función objetivo, para poder determinar expresiones de las variables ψ, T, ξ en función de las variables μ y $\phi_i(a)$ que corresponden a la relación de masa con respecto a la masa de la viga y el modo de vibración a analizar. De acuerdo con lo anterior, el problema de optimización, se puede expresar de la siguiente manera.

$$\min_{\psi, T, \xi} \left(\max_{\Omega \in [\Omega_1, \Omega_2]} R(s) \right)$$

Para determinar las funciones de las variables óptimas, se consideran ciertas restricciones; El rango de análisis en relación de Ω y restricciones de diseño para que el dispositivo se pueda fabricar. Por lo tanto, las variables óptimas del sistema deben de ser soluciones reales y positivas. Tomando como base la Ec. (3.22), la solución del problema de optimización se puede expresar como:

$$m_o \frac{\partial n_o}{\partial \Omega^2} - n_o \frac{\partial m_o}{\partial \Omega^2} = 0 \quad \therefore R(S)^2 = \frac{n_o}{m_o} \quad (3.23)$$

Para resolver la Ec. (3.23), se deben determinar los puntos invariantes de la respuesta en frecuencia. Se supone, que estos puntos son independientes de la relación de amortiguamiento. Por lo tanto, una manera fácil de determinarlos es graficando el comportamiento del sistema para cuando la relación de amortiguamiento es $\xi = 0$ y $\xi = \infty$. De acuerdo con las relaciones de amortiguamiento anteriores, la Ec. (3.22) se reescribe como:

$$R(S)_{\xi \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{A}{C}}; \quad R(S)_{\xi \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{-B}{D}} \quad (3.24)$$

Donde:

$$A = (\psi \Omega^2 - T^2 + \Omega^2)^2$$

$$B = (2T\Omega)^2$$

$$C = (\psi \Omega^2 - \psi \Omega^4 + T^2 \Omega^2 - T^2 + \Omega^2 - \Omega^4 + \Phi_1^2(a) T^2 \Omega^2 \mu + \Phi_1^2(a) T^2 \psi \Omega^2 \mu)^2$$

$$D = 2\xi(T\Omega^3 - T\Omega + \Phi_1^2(a) T \Omega^3 \mu + \Phi_1^2(a) T \psi \Omega^3 \mu)^2$$

Igualando las expresiones para los dos casos de amortiguamiento, se obtienen dos soluciones de forma polinomial, donde una de las soluciones es trivial, resolviendo el polinomio restante, se obtiene la ecuación de la ubicación de los puntos invariantes, que está dado por:

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\mu T^2 (1+\psi) \Phi_1^2(a) + T^2 + \psi + 1}{(\psi+1)(2+\mu(1+\psi)\Phi_1^2(a))} \mp \frac{\sqrt{(\Phi_1^2(a)\psi\mu + \Phi_1^2(a)\mu+1)^2 T^4 + (-2\psi-2)T^2 + (1+\psi)^2}}{(\psi+1)(2+\mu(1+\psi)\Phi_1^2(a))} \quad (3.25)$$

Para poder optimizar las variables se requiere que los puntos invariantes tengan la misma amplitud de respuesta. Por lo tanto, $\Omega_1^2 = \Omega_2^2$. En consecuencia, mediante operaciones matemáticas, se obtienen las expresiones matemáticas para las variables óptimas en función de μ y $\phi_i(a)$.

$$T_{\delta pt} = \sqrt{\frac{(\psi+1)}{(1+\mu(\psi+1)\Phi_1^2(a))^2}}; \quad \psi_{\delta pt} = \frac{1}{4} \frac{(-\sqrt{\Phi_1^2(a)\mu^2+8}) + (-\mu-4)\Phi_1(a)}{\Phi_1(a)} \quad (3.26)$$

Para una relación de masas de $\mu = 0.1$ y el valor de $\phi_i(a)$ obtenido de la Ec. (3.18) para el primer modo de vibración, de la Ec. (3.26) se obtiene $\psi_{\delta pt}$, posteriormente ésta se sustituye en la Ec. (3.26) para obtener $T_{\delta pt}$. Variando la relación de amortiguamiento ξ , en la figura 3-12, Se muestra la respuesta de frecuencia del sistema obtenida de la Ec. (3.22) con las variables adimensionales óptimas y con una relación de masas $\mu = 0.1$. En la gráfica de la figura 3-12 se puede apreciar que los puntos invariantes convergen en la misma amplitud de la respuesta del sistema independientemente de la relación de amortiguamiento ξ del sistema.

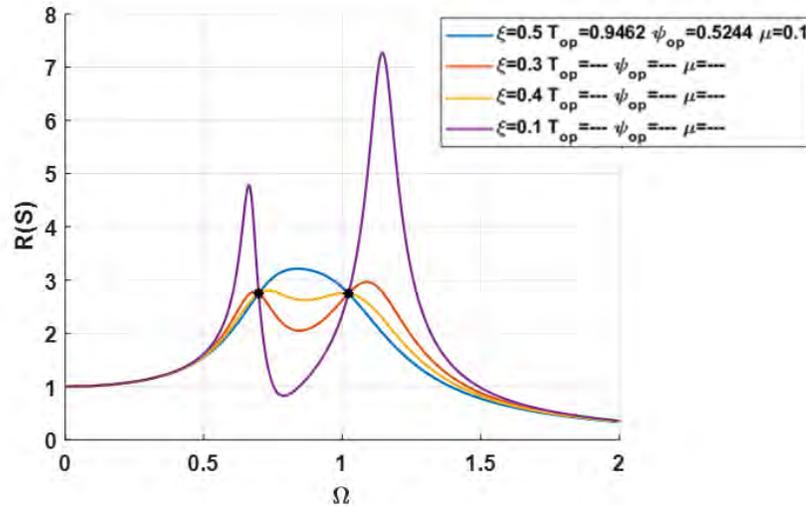


Figura 3-12. Comportamiento dinámico del sistema considerando las variables óptimas.

Para una relación de amortiguamiento óptima, la respuesta dinámica del sistema en función de la frecuencia deberá ser lo más plana posible tomando como referencia los puntos invariantes [7]. Considerando las variables $\psi_{\text{ópt}}$, $T_{\text{ópt}}$ y retomando la solución del problema de optimización descrita en la Ec. (3.23), se determinan las derivadas parciales de la respuesta del sistema, obteniendo una solución de ξ para cada punto invariante. De acuerdo con lo anterior, la relación de amortiguamiento óptima se determina con la siguiente expresión:

$$\xi_{\text{ópt}} = \sqrt{\frac{\xi_{p1}^2 - \xi_{p2}^2}{2}} \tag{3.27}$$

En la figura 3-13 se compara el comportamiento dinámico del sistema cuando se utilizan las variables óptimas $\psi_{\text{ópt}}$, $T_{\text{ópt}}$ y $\xi_{\text{ópt}}$ del IDVA con el comportamiento dinámico cuando se utilizan relaciones de amortiguamiento diferentes al óptimo.

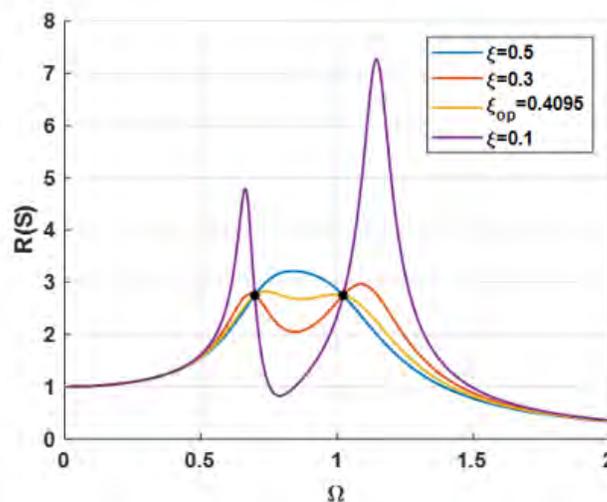


Figura 3-13. Comportamiento dinámico del sistema con $\psi_{\text{ópt}}$, $T_{\text{ópt}}$ y $\xi_{\text{ópt}}$ vs comportamiento dinámico del sistema con relaciones de amortiguamiento diferentes al óptimo.

En la figura 3-13 se puede observar que el comportamiento dinámico del sistema con los valores óptimos, presenta un mejor comportamiento, es decir la respuesta de vibración es plana en todo el intervalo de frecuencias.

3.2.2 Extensión de la metodología del punto fijo

Esta metodología, es una extensión de la teoría de Den Hartong descrita por Barredo en 2018 [19]. Esta metodología se puede implementar para sistemas con DVA más complejos o con más grados de libertad, ver figura 3-14. Esta técnica se basa en modificar los puntos invariantes mediante la obtención de las variables óptimas respecto a las raíces características de los polinomios de la respuesta del sistema $R(s)$ y su magnitud H_m .

$$R(s) = H_m \tag{3.28}$$

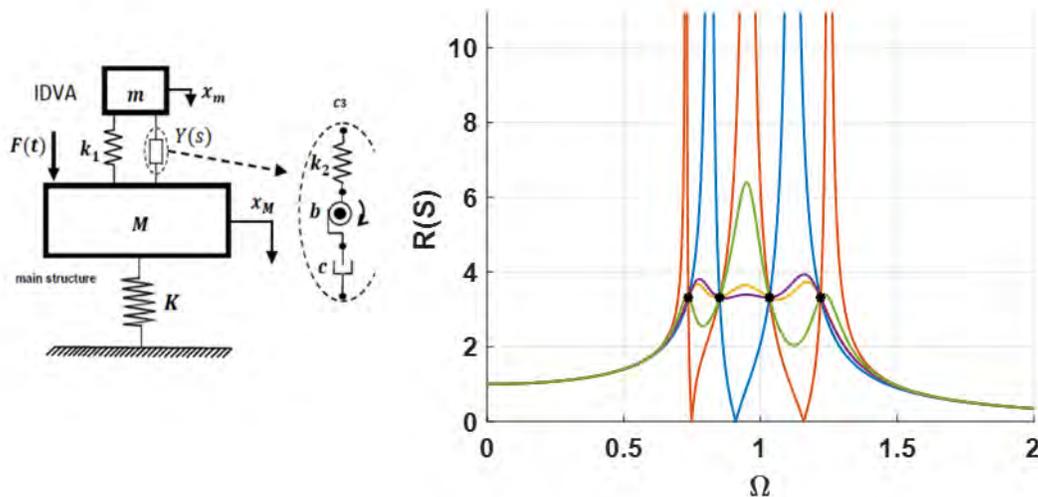


Figura 3-14. Configuración de un sistema DVA y su respuesta optimizada [19].

De acuerdo a la respuesta de estado estable de la configuración de la figura 3-14, se obtienen dos polinomios, estos polinomios dependen de la cantidad de desplazamientos de la configuración a analizar, en este caso en particular los polinomios de la respuesta del sistema y la magnitud son de cuarto grado, lo que complica la obtención de sus raíces características de forma analítica. Sin embargo, existen métodos para encontrar estas raíces con base a los términos independientes del polinomio, uno de estos métodos es mediante la aplicación de las fórmulas de Vieta. Estas fórmulas, determinan respecto al grado y los términos independientes de un polinomio sus raíces características. Considérese un polinomio de cuarto grado como se observa en la Ec. (3.29).

$$a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0 \tag{3.29}$$

Donde a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 son los términos independientes del polinomio. De acuerdo a las formulas Vieta, las posibles soluciones de la Ec. (3.29) se presentan a continuación.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{a_2}{a_1} \quad (3.30)$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \beta\gamma = \frac{a_3}{a_1} \quad (3.31)$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{a_4}{a_1} \quad (3.32)$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = \frac{a_5}{a_1} \quad (3.33)$$

Donde: α, β, γ y δ son las raíces características del polinomio. Al implementar estas fórmulas en la Ec. (3.28) se puede determinar cuatro soluciones para la magnitud H_m . Se igualan las soluciones obteniendo tres soluciones para cada una de las variables del sistema y así sucesivamente, hasta determinar las expresiones para las variables adimensionales óptimas. Posteriormente, se determina una expresión para la relación de amortiguamiento considerando la teoría de Krenk. Esta teoría consiste en determinar tres frecuencias invariantes en función del amortiguamiento cuando éste es $\xi = 0$ y $\xi = \infty$, tal y como se muestra en la figura 3-15.

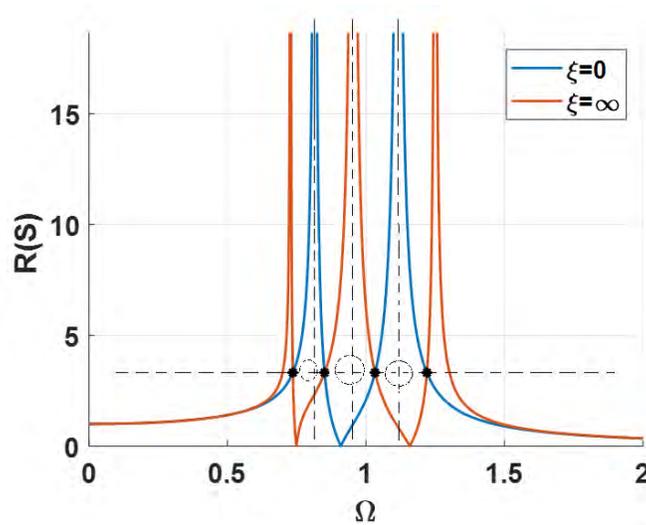


Figura 3-15. Frecuencias invariantes: $\Omega_{1,\xi \rightarrow \infty}, \Omega_{0,\xi \rightarrow 0}$ y $\Omega_{2,\xi \rightarrow \infty}$ en función de la relación de amortiguamiento [19].

Conocidas las tres frecuencias invariantes del sistema se determina la relación de amortiguamiento óptima mediante la siguiente expresión matemática.

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{\xi_{\Omega_{1,\xi \rightarrow \infty}}^2 + \xi_{\Omega_{2,\xi \rightarrow \infty}}^2 + \xi_{\Omega_{0,\xi \rightarrow 0}}^2}{3}} \quad (3.34)$$

Una de las maneras de verificar la metodología de optimización, es mediante el cálculo de los valores propios del sistema, esto se logra mediante la formación de una matriz respecto de las

variables adimensionales óptimas del sistema y la respuesta en estado estable, la matriz resultante se denomina matriz Hessiana.

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_n \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_n \partial z_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_n^2} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Donde:

- f Función de la respuesta del sistema.
- z Variables del sistema.

La expresión para calcular los valores propios de una matriz está dada por.

$$|\lambda_i I_I - H(f)| = 0 \quad (3.36)$$

Donde λ_i es la raíz característica y I_I la matriz identidad.

Los valores propios de la matriz Hessiana describen la deflexión de la respuesta en frecuencia de las variables óptimas del sistema respecto a la variable gobernante μ , si la deflexión con respecto a esta variable tiende a cero el análisis de optimización es congruente y la respuesta vibratoria del sistema se comportará en condiciones óptimas de diseño. Ver figura 3-16.

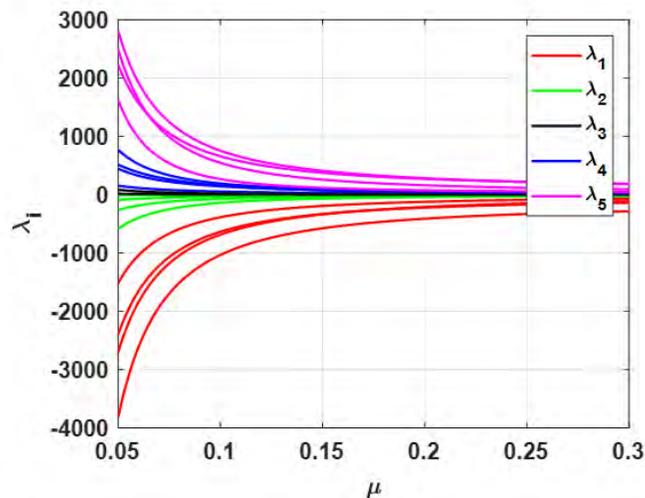


Figura 3-16. Deflexión de los valores propios de la matriz Hessiana [19].

3.3 Mecánica de fluidos

La mecánica de fluidos describe el comportamiento dinámico de un fluido gracias al entendimiento de sus propiedades físicas como la densidad y su viscosidad. Un fluido es una sustancia que se deforma continuamente cuando está sometido a un esfuerzo cortante, sin importar qué tan pequeño sea ese esfuerzo [38], lo que provoca, que su representación analítica, en ocasiones sea muy compleja. Sin embargo, en casos prácticos un fluido se puede analizar idealmente excluyendo algunas de sus propiedades físicas y sus condiciones de operación simplificando el análisis de su comportamiento. Un fluido se clasifica como newtoniano o no newtoniano, los fluidos que entran en la primera clasificación tienen un comportamiento lineal respecto al esfuerzo cortante τ aplicado y su deformación $\frac{du}{dy}$, ver figura 3-17. Por su parte, los fluidos no newtonianos describen un comportamiento no lineal respecto a su esfuerzo cortante y su deformación.

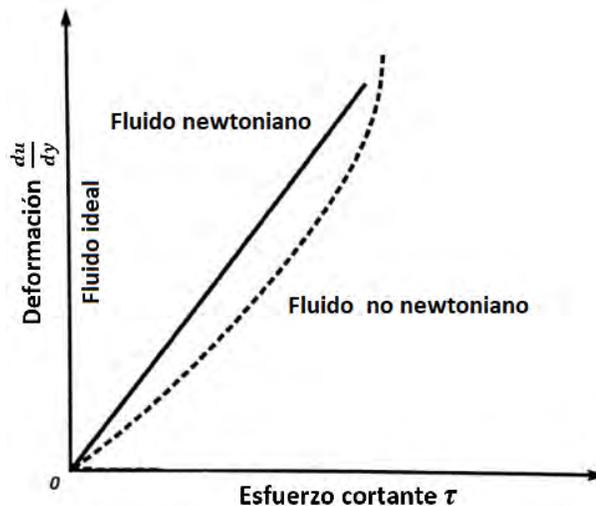


Figura 3-17. Comportamiento de los fluidos newtonianos y no newtonianos [38].

Sin importar su clasificación un fluido en movimiento se rige por las siguientes relaciones:

- Las leyes de movimiento de Newton.
- La ley de conservación de la masa.
- La conservación de la masa en mezclas internas del fluido.
- La primera y la segunda ley de la termodinámica.
- Condiciones de frontera.

3.3.1 Ley de la conservación de la masa respecto a un volumen de control

El volumen de control es un espacio arbitrario respecto al análisis de un sistema y sus condiciones de frontera, esto quiere decir, que es un espacio donde la masa de un sistema permanece constante. Cuando un fluido fluye por un volumen de control, la masa que ingresa es la misma que sale del volumen, ver figura 3-18.

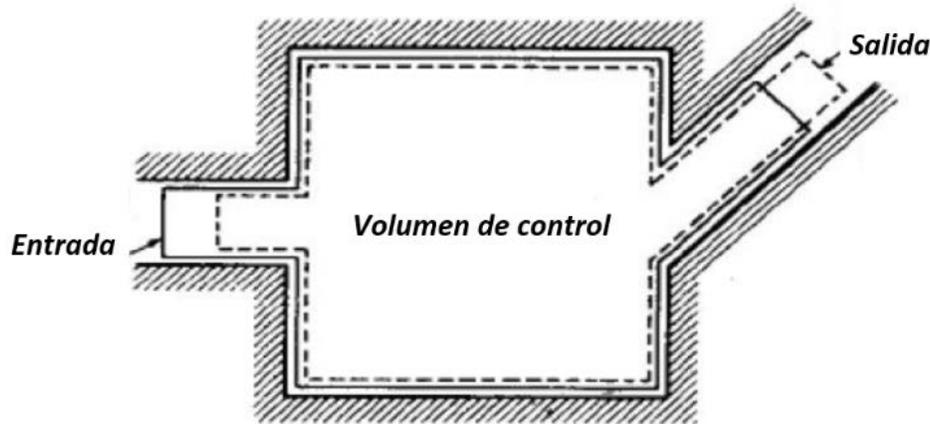


Figura 3-18. Sistema gobernado por un volumen de control [38].

La conservación de la masa en un sistema se expresa.

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (3.37)$$

De acuerdo con Streeter [38] el flujo con densidad constante, permanente o no permanente se expresa como:

$$\int V dS = 0 \quad (3.38)$$

La Ec. (3.38) es considerada la ecuación de la conservación de la masa para un volumen de control que establece que el flujo que pasa por un volumen es cero, esto implica que la cantidad de líquido que entra al volumen de control es la misma cantidad que sale de éste cumpliendo la ley de la conservación de la masa.

3.3.2 Viscosidad

La viscosidad es la resistencia que tienen las moléculas que contienen un fluido en movimiento para separarse unas de otras, es decir, es la oposición del fluido a la deformación debido a las fuerzas de adhesión de sus moléculas o esfuerzo cortantes. Por lo tanto, la viscosidad se define como.

$$\mu_f = \frac{Fl_c}{Su} \quad (3.39)$$

Donde:

μ_f	Viscosidad.
l_c	Longitud de contacto del fluido.
u	Velocidad media.
S	Área de contacto del fluido.
F	Fuerza de adhesión.

3.3.3 Ley de Poiseuille

Esta ley sirve para determinar el flujo total que pasa por un canal en función del tiempo y se determina por la siguiente expresión matemática.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi r^4}{8 \mu_f l_t} p_2 - p_1 \quad (3.40)$$

Donde:

p_1	Presión del punto de inicio de la tubería.
p_2	Presión del punto final de la tubería.
r	Radio de la sección transversal del canal.
l_t	Longitud de la tubería.
μ_f	Viscosidad.

3.4 Electromagnetismo

El electromagnetismo es una rama de la física que estudia el comportamiento de los fenómenos eléctricos y magnéticos en una sola teoría de campos. Se basa en magnitudes físicas vectoriales o tensoriales dependientes de la posición en el espacio y el tiempo. El electromagnetismo describe los fenómenos físicos macroscópicos involucrados con las cargas eléctricas en movimiento y en reposo [39].

3.4.1 Campo magnético

Un campo magnético es una región en el espacio donde están presentes fuerzas magnéticas que atraen o repelen a un material. Estas fuerzas son producidas por medio de una carga puntual o un conjunto de cargas en movimiento, es decir, por una corriente eléctrica inducida por el material o externo a éste. El campo magnético se compone principalmente por dos polos opuestos entre sí, también llamado dipolo magnético [40]. Los polos magnéticos tienen una relación geográfica relacionada con el hecho de que la Tierra se comporta como un enorme imán. Como por ejemplo, una brújula que indica los polos terrestres que se encuentran próximos a los polos sur y norte geográficos respectivamente. Por tal motivo, el polo de la brújula que se orienta hacia el Norte terrestre se denomina polo Norte y el opuesto, polo Sur. Tal distinción entre polos magnéticos se puede extender a cualquier tipo de imanes. En la figura 3-19 se muestra el campo magnético generado por un imán, también se muestra el campo magnético generado por la tierra.

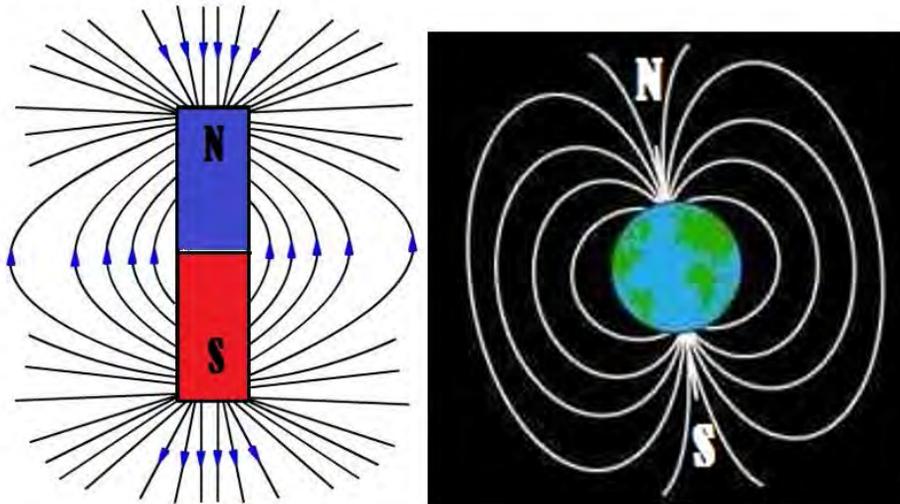


Figura 3-19. Campo magnético generado por un imán.

3.4.2 Permeabilidad magnética

La permeabilidad magnética es la capacidad de las sustancias o medio para asimilar la formación de un campo magnético a través de él. La permeabilidad está dada por la relación del flujo magnético B con la intensidad de flujo magnético H propio del material [40]. El grado de magnetización de un material en respuesta a un campo magnético se denomina permeabilidad absoluta y se suele representarse por μ_m .

Las sustancias pueden clasificarse en términos de cómo se compara su permeabilidad magnética μ_m con la constante de la permeabilidad del vacío $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Wb/A} \cdot \text{m}$. Por lo general, la

mayoría de los materiales presentan baja permeabilidad magnética muy cercana a la permeabilidad del vacío, estos materiales se les conoce como diamagnéticos y paramagnéticos. Sin embargo, en los materiales ferromagnéticos la permeabilidad puede ser muy grande y es conveniente caracterizar los materiales con una permeabilidad relativa, que es la relación de la permeabilidad del material con la permeabilidad del vacío $\mu_r = \mu_m/\mu_0$.

3.4.3 Dominios magnéticos

Todos los materiales con permeabilidad relativa magnética, tienen un comportamiento diferente cuando están expuestos a un campo magnético, este comportamiento se clasifica en tres principales categorías. Estas clasificaciones se basan, por una parte, en los momentos dipolares magnéticos de sus átomos, y por la otra, en sus interacciones entre estos últimos cuando están expuestos a un campo magnético. Ver Figura 3-20.

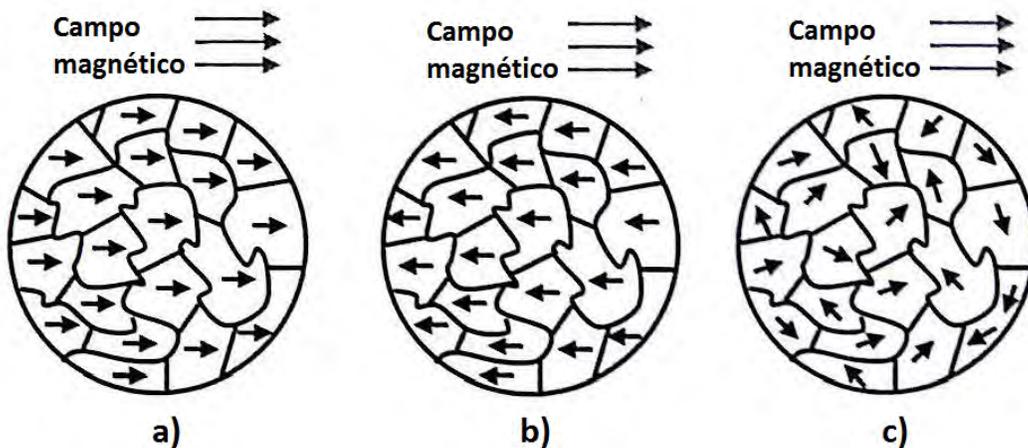


Figura 3-20. Clasificación de materiales magnéticos, a) Ferromagnéticos, b) Diamagnéticos, c) Paramagnéticos [31].

- Materiales ferromagnéticos: estos materiales cuando son expuestos a un campo magnético, direccionan las líneas de flujo en dirección de este campo. Esto se debe a que se produce un ordenamiento de los momentos magnéticos del material en la misma dirección y sentido que el campo exterior. Si retiramos el material de la acción del campo, conservara durante un tiempo las propiedades magnéticas adquiridas. Aquí la permeabilidad magnética es claramente superior a la del vacío. Los tres materiales ferromagnéticos por excelencia son hierro, cobalto y níquel [41].
- Materiales diamagnéticos: Cuando estos materiales son sometidos a la acción de un campo magnético, las líneas de fuerza de éste son repelidas hacia el exterior, o dicho de

otro modo, un material diamagnético sería repelido permanentemente por cualquier polo de un imán, porque el flujo magnético disminuye notablemente. Asimismo, estos materiales se magnetizan débilmente en sentido opuesto al campo magnético aplicado y son repelidos levemente por los imanes. Su magnetismo no se mantiene si el campo magnético es retirado, y su permeabilidad magnética es inferior que la del vacío, pues ofrecen mayor resistencia a la propagación del campo magnético. Algunos materiales diamagnéticos son el bismuto, el hidrógeno, los gases nobles, cloruro de sodio, germanio, grafito, etcétera [41].

- **Materiales paramagnéticos:** estos materiales se caracterizan por ser levemente atraídos por los campos magnéticos, es decir, si colocamos un material paramagnético cerca de un campo magnético atraerá hacia sí las líneas de fuerza del campo. Si retiramos el cuerpo de la acción del campo, a diferencia de los ferromagnéticos, estos no retendrán sus propiedades magnéticas. La permeabilidad magnética en estos materiales es superior a la del vacío y a la del aire, respectivamente. Por otra parte, los materiales paramagnéticos tienen una cualidad particular del resto de los materiales expuestos a campos magnéticos, tiene el mismo tipo de atracción y repulsión que los imanes normales cuando son impulsados por un campo magnético. Sin embargo, al retirar el campo magnético esta condición desaparece porque el alineamiento magnético no está más favorecido energéticamente. Ejemplos de estos materiales son: magnesio, titanio, wolframio, etcétera [41].

3.4.4 Circuito magnético

Existe una analogía entre un circuito magnético con un circuito eléctrico, ver figura 3-21. El circuito magnético es un arreglo en el cual las líneas de campo magnético se encuentran canalizadas en un camino cerrado. Comúnmente, para fabricar este arreglo se implementan materiales ferromagnéticos que tiene una permeabilidad magnética muy superior a la permeabilidad del vacío, esto con el objetivo de que el campo magnético circule dentro del material [39]. Cuando se genera un campo magnético en un circuito magnético cerrado, existe una resistencia al circular las líneas de campo magnético denominada como reluctancia magnética, esta puede definirse por la siguiente expresión.

$$\text{Reluctancia } \mathfrak{R} = \frac{fmm}{\phi_B} = \frac{NI_c}{\phi_B} \quad (3.41)$$

Donde:

fmm Fuerza magnetomotriz.

N Número de vueltas de la bobina.

I_c Intensidad de corriente eléctrica
 ϕ_B Densidad de flujo magnético

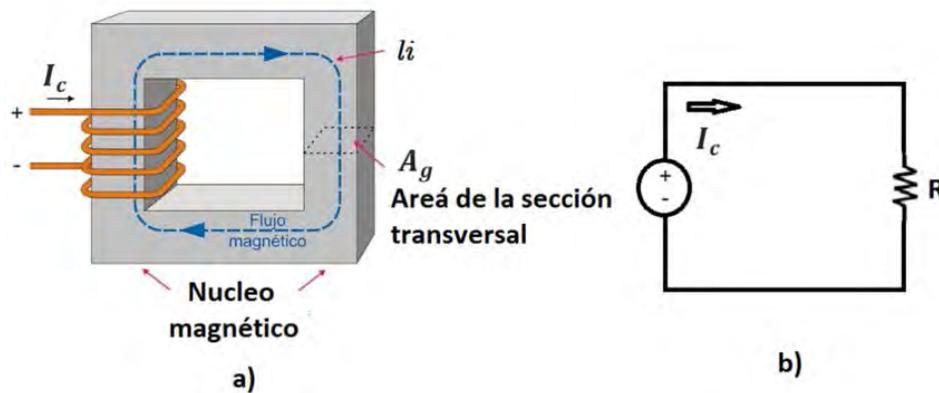


Figura 3-21. a) Circuito magnético, b) Circuito eléctrico.

Estos circuitos magnéticos pueden ser:

- Homogéneos: Un solo material, sección uniforme y sometida a igual inducción en todo su recorrido.
- Heterogéneos: Varios materiales, distintas secciones o inducciones, o coincidencia de estas condiciones. Éstos pueden tener o no entrehierros.

3.4.5 Circuito magnético con entrehierro (electroimán)

Un circuito magnético con entrehierro es la combinación de un núcleo con propiedades ferromagnéticas con un solenoide (bobina). Al suministrar una corriente eléctrica al solenoide se genera un campo magnético presentando una caída de fuerza magnetomotriz en el entrehierro. Esta configuración también se conoce como electroimán como se aprecia en la figura 3-22.

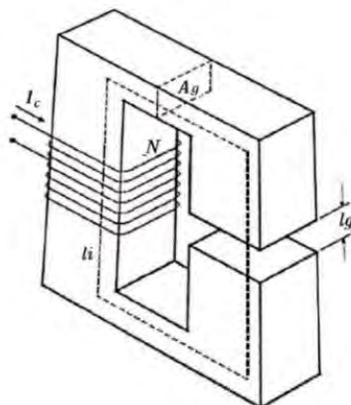


Figura 3-22. Circuito magnético con entrehierro [31].

Donde:

A_g	Área de la sección transversal del núcleo.
l_i	Longitud media del núcleo ferromagnético.
l_g	Longitud del entrehierro.
I_c	Intensidad de corriente eléctrica.
N	Número de espiras de la bobina.

Existen diferentes maneras de calcular el flujo magnético en el entrehierro. En este documento se describen dos casos particulares para este análisis, por la ley del Kirchhoff y por la ley de Hopkinson.

Caso 1:

Parte de la ley de Kirchhoff [40].

$$fmm = \phi_B \mathfrak{R} = \phi_B \text{ resistencia del entre hierro.} \quad (3.42)$$

$$fmm = \phi_B \left(\frac{l_i}{\mu_m A_i} + \frac{l_g}{\mu_0 A_g} \right)$$

Si el área de la sección transversal del núcleo es igual al del entrehierro la Ec. (3.42) se puede reducir.

$$fmm = \frac{\phi_B}{\mu_0} \left(\frac{l_i}{\mu_r} + l_g \right)_{A_i=A_g} = \frac{B}{\mu_0} \left(\frac{l_i}{\mu_r} + l_g \right) \quad (3.43)$$

Al despejar el flujo magnético B de la Ec. (3.43) se obtiene:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\frac{l_i}{\mu_r} + l_g} \quad (3.44)$$

Donde la fuerza magnetomotriz está dada por el número de vueltas y la intensidad de corriente eléctrica. En la mayoría de las geometrías prácticas del entrehierro $\frac{l_i}{\mu_r} \ll l_g$. Es por ello que se puede obtener el flujo magnético mediante una expresión reducida.

$$B = \frac{\mu_0 N I_c}{l_g} \quad (3.45)$$

Caso 2:

Este caso se basa en la ley de Hopkinson o conocida también como ley general del circuito magnético, la cual se basa en el cálculo del flujo magnético por medio de la suma de las reluctancias magnéticas que se encuentran en el circuito [42].

$$\phi_B = \frac{fmm}{\mathfrak{R}} = \frac{NI_c}{\mu_m A_i} \quad (3.46)$$

Al aplicar la ley general del circuito magnético el circuito con entrehierro se convierte en un circuito magnético en serie cuya reluctancia magnética total es la suma de todas las reluctancias del circuito.

$$\mathfrak{R}_T = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 \dots + \mathfrak{R}_n = \frac{l_{i1}}{\mu_1 A_{i1}} + \frac{l_{i2}}{\mu_2 A_{i2}} + \dots + \frac{l_{in}}{\mu_n A_{in}} \quad (3.47)$$

De acuerdo a la teoría de electromagnetismo la densidad de flujo magnético $\phi_B = BA$ esta expresión se puede sustituir en la Ec. (3.46) obteniendo la siguiente expresión matemática.

$$BA_i = \frac{NI_c}{\mathfrak{R}_T} \therefore B = \frac{NI_c}{\mathfrak{R}_T A_i} \quad (3.48)$$

3.5 Características del fluido magnetorreológico MR

Los fluidos MR se componen principalmente de tres componentes:

- Partículas.
- Líquido portador.
- Aditivos.

Las partículas son de material susceptible a campos magnéticos con un punto alto de saturación magnética. Tienen un tamaño aproximado de 1 a 100 μm , con una concentración del 50% del fluido real, lo que provoca que en condiciones iniciales el fluido tenga viscosidad [3], por esta razón, se implementa un líquido portador con un punto de viscosidad bajo, para que el efecto del cambio de sus propiedades reológicas sea el más alto.

El líquido portador es el principal componente del fluido MR. Cuya concentración es del 50 al 80% de fluido real. El líquido debe de tener un punto de viscosidad bajo y estar casi independiente de la temperatura. Los líquidos utilizados son principalmente aceites minerales, sintéticos y de silicona [43]. Algunas propiedades de estos fluidos están descritos en la tabla 1.

Tabla 1. Propiedades del líquido portador [43].

Properties	Mineral Oil	Synthetic Oil	Silicone Oil
Viscosity 40 °C (Pa-s)	0.028	0.1068	0.11
Flash point °C	171-185	230	>300
Fire point °C	260-330	350	~500
Specific gravity	0.818-0.95	0.817	0.9124
Density at 25 °C (kg/m ³)	825	873-894	760
Pour point °C	(-25) to (-50)	(-30) - 50	-50
Cloud point °C	-15	-20	-20
Market cost/litre (RS)	~80	~800	~900

En condiciones iniciales el líquido MR debe tener un punto bajo de viscosidad, lo que puede provocar la sedimentación de las micro-partículas. Para evitar el proceso de sedimentación se implementan aditivos altamente viscosos como grasas o materiales isotrópicos [3], lo que evita la sedimentación mejorando la dispersión de las micro-partículas para que el fluido sea homogéneo. El principio fundamental de los fluidos MR se basa en la interacción con un campo magnético. Cuando el fluido es expuesto a dicho agente, sus partículas se polarizan creando dipolos magnéticos. Estas partículas se atraen opuestamente a sus polos magnéticos formando cadenas que incrementan la viscosidad del fluido MR hasta un estado quasi-sólido que es proporcional a la intensidad de campo magnético. En la figura 3-23. Se describe el comportamiento del fluido MR, cuando es expuesto a un campo magnético.

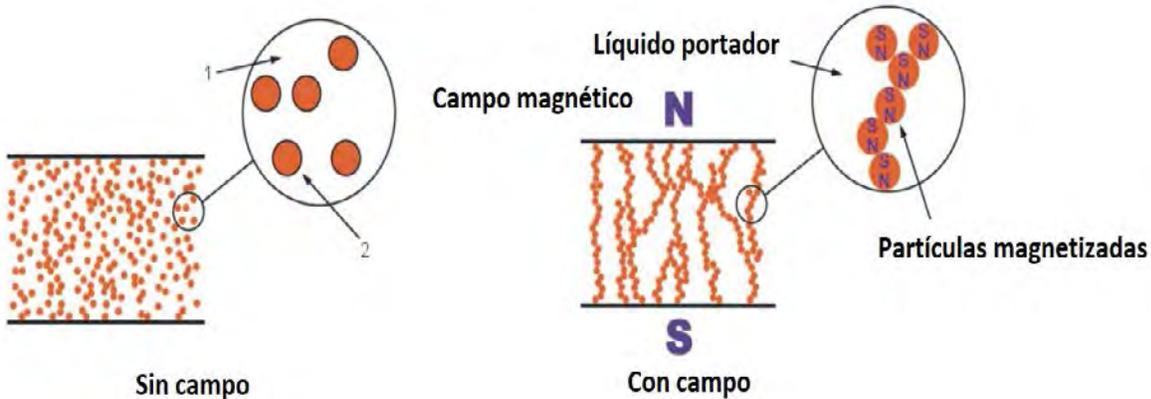


Figura 3-23. Comportamiento del fluido MR [43].

3.5.1 Métodos de aplicación de los fluidos magnetorreológicos MR

Los fluidos MR tienen tres modos de aplicación: modo de presión o de válvula; modo de corte o cizallamiento y modo compresión-tensión (squeeze mode). Algunos dispositivos tienen una combinación de estos modos de aplicación dependiendo de las necesidades y diseño del dispositivo.

En el modo de presión (o de válvula) el fluido MR fluye en un orificio por medio de una presión ejercida sobre éste. Cuando no existe un campo magnético el fluido MR fluye sin oponer resistencia. Este modo de aplicación controla la resistencia al flujo mediante la intensidad del campo magnético como se describe en la figura 3-24. Los dispositivos que implementan éste modo de aplicación son sistemas de amortiguadores y servo válvulas.

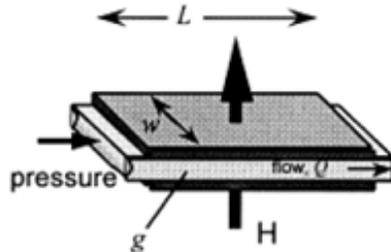


Figura 3-24. Método de válvula [3]

En el modo de corte (cizallamiento) el fluido MR actúa entre dos placas magnéticas en movimiento rotacional o lineal. Cuando el fluido está expuesto al campo magnético forma cadenas perpendiculares a las placas magnéticas y a su vez genera una resistencia elástica al desplazamiento de estas placas, tal y como se muestra en la figura 3-25. Éste modo de aplicación se implementa en sistemas de embragues, frenos, amortiguadores y en dispositivos de sujeción y de bloqueo [44].

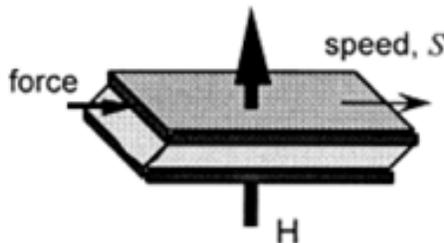


Figura 3-25. Modo de corte [3].

El modo de compresión-tensión funciona cuando se aplica una fuerza a las placas en la misma dirección de las líneas de campo magnético o perpendicular a las placas magnéticas, tal y como se muestra en la figura 3-26. Para reducir o expandir la distancia entre las placas, el fluido MR está sujeto a cargas dinámicas (alternas entre tensión y compresión) o estáticas (tensión o compresión individualmente). A medida que el campo magnético forma cadenas de partículas el fluido experimenta cambios rápidos de rigidez y viscosidad. Los desplazamientos que se realizan en el modo de compresión-tensión son relativamente muy pequeños (pocos milímetros) pero requieren grandes fuerzas.

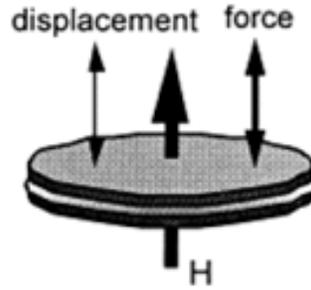


Figura 3-26. Modo de aplicación compresión-tensión [3].

3.5.2 Características del fluido MRF-122EG

El fluido que se implementó en este trabajo es LORD MRF-122EG fluido a base de hidrocarburos formulado para su uso en sistemas de amortiguamiento y sistemas de frenado controlables. Sus principales características se describen en la tabla 2.

Tabla 2. Propiedades del fluido magnetorreológicos Lord Corporation [45].

Propiedades típicas del fluido MRF-122EG	
Fluido base	Aceite de hidrocarburo
Rango de operación en temperatura °C.	-40 a 130
Viscosidad Pa-s.	0.042 ± 0.020
Densidad g/ cm ^3.	2.28-2.48
% de partículas en el fluido.	72
Saturación magnética (teslas).	0.7
Apariencia	Líquido gris oscuro

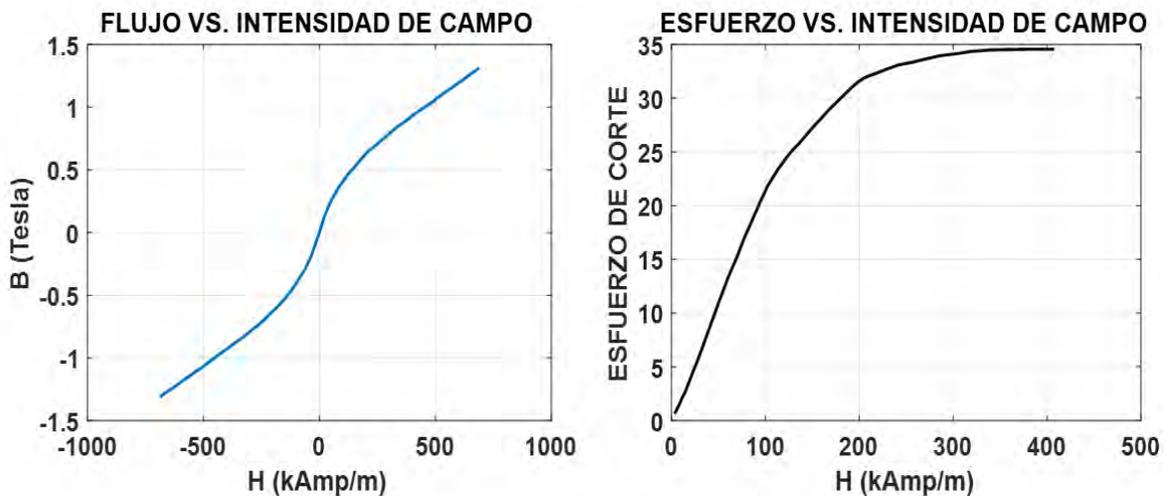


Figura 3-27. Propiedades magnéticas y de esfuerzo del fluido MRF-122EG [45].

En la figura 3-27 se describe el comportamiento del fluido MR a la exposición al campo magnético y a relación respecto al esfuerzo cortante necesario para realizar la simulación del comportamiento del fluido MR. En el siguiente capítulo se implementaron todos los principios y conceptos de este capítulo para realizar el modelado matemático del banco de pruebas y el inersor con fluido MR. Así como también, el análisis para el diseño de la válvula MR.

Capítulo 4: Modelado matemático y computacional

En este Capítulo, se implementaron los aspectos teóricos descritos en el Capítulo 3. Se describe como se realizó el modelado matemático de la estructura tipo viga con el sistema IDVA, la implementación de la metodología de optimización para obtener las variables óptimas del sistema y la corroboración de este modelo respecto de la literatura. Posteriormente, se describe como se determinó el modelo matemático del inersor con fluido corroborando el modelo con modelos existentes en la literatura. Finalmente, se describe como se determinó el diseño para la válvula MR mediante simulaciones de elemento finito con el software FEMM 4.2, se realizó la validación de las simulaciones por medio del análisis matemático y en análisis experimental.

4.1 Modelo matemático IDVA y la obtención de sus parámetros óptimos

En esta sección, se describe el desarrollo del modelo matemático del sistema vibratorio (estructura tipo viga doblemente empotrada) con la implementación del IDVA, así como, la obtención de sus parámetros óptimos a través de las teorías descritas en este documento, asimismo, se validó el modelado matemático desarrollado comparando los resultados obtenidos con resultados reportados en la literatura.

4.1.1 Modelado matemático del sistema viga - IDVA

Conforme a la revisión de la literatura y la teoría, el inersor con fluido es una configuración en paralelo de la inercia y el amortiguamiento. Para el desarrollo del modelo matemático, se consideró una viga Euler-Bernoulli de longitud L_v sujeta a una carga distribuida $f(x)g(t)$, donde $f(x)$ es una función distribuida en el espacio y $g(t)$ una función determinística en el tiempo. Asimismo, se propone la configuración de un sistema de control de vibración basado en el inersor (IDVA) montado en el punto $x = a$. En la figura 4-1 se muestra la configuración de la viga analizada.

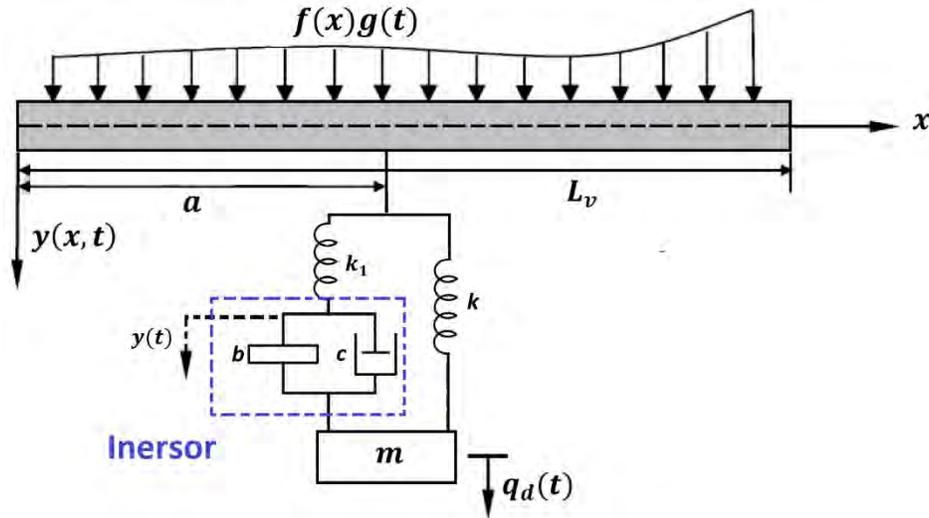


Figura 4-1. Configuración de la viga Euler-Bernoulli con el IDVA propuesto.

Donde:

$f(x) g(t)$	Carga distribuida.
$y(x, t)$	Desplazamiento de la vibración transversal de la viga.
a	Ubicación del IDVA.
L_v	Longitud total de elemento viga.
k	Resorte en paralelo con el inersor y k_1 .
k_1	Resorte en serie con el inersor.
$y(t)$	Desplazamiento del inersor.
b	Inercia del inersor.
c	Amortiguamiento del IDVA.
m	Masa del IDVA.
$q_d(t)$	Desplazamiento de la masa del IDVA.

Tomando como base el trabajo desarrollado por Jin [18], se determinó la ecuación de movimiento dinámico del sistema. En el apéndice A, se describe la deducción matemática completa, por tanto, ésta puede escribirse como:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x) g(t) + \{-m\ddot{q}_d(t)\}\delta(x - a) \quad (4.1)$$

Donde la expresión $\delta(x - a)$, es la función delta de Dirac.

Haciendo uso del análisis modal, el desplazamiento de la vibración transversal de la viga $y(x, t)$, se puede aproximar mediante una serie de la forma:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(x) \quad (4.2)$$

Donde $\phi_i(x)$ corresponde a la función modal del i -ésimo modo y puede determinarse solucionando el sistema como un problema de eigenvalores, satisfaciendo que $\int_0^{L_v} \phi_i(x) \phi_j(x) dx = L_v \delta_{ij}$ y $d^4 \phi_i(x) / dx^4 = \beta_i^4 \phi_i(x)$, donde δ_{ij} corresponde a una función delta Kronecker y β_i denota el eigenvalor del sistema. Sustituyendo (4.2) en la ecuación (4.1) y posteriormente multiplicando por $\phi_i(x)$ e integrando la ecuación resultante con respecto a x en los límites de 0 a L_v , la ecuación (4.1) puede reescribirse como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho A \phi_i(x) \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + \sum_{i=0}^{\infty} EI q_i(t) \beta_i^4 \phi_i(x) = f(x)g(t) + \{-m\ddot{q}_d(t)\} \delta(x-a) \quad (4.3)$$

Para determinar la respuesta del sistema en función de la frecuencia se consideró el caso donde el sistema se encuentra sujeto a excitación armónica, de acuerdo con lo anterior, se supone que $g(t) = e^{j\omega t}$, por lo tanto, como el sistema es lineal, entonces, $q_i(t) = Q_i(\omega)e^{j\omega t}$ y $q_d(t) = Q_d(\omega)e^{j\omega t}$, donde $Q_i(\omega)$ y $Q_d(\omega)$ denotan la respuesta en función de la frecuencia de la viga y del IDVA respectivamente, mientras que j denota un parámetro imaginario. De acuerdo con lo anterior, entonces la respuesta en función de la frecuencia del desplazamiento transversal de la viga se puede expresar como:

$$y(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega) \phi_i(x) = G_2(x, \omega) - G_1(x, \omega)H(\omega)y(a, \omega) \quad (4.4)$$

Donde:

$$G_1(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(a)}{L_v[EI\beta_i^4 - \omega^2\rho A]}; \quad G_2(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i\phi_i(x)}{L_v[EI\beta_i^4 - \omega^2\rho A]}; \quad H(\omega) = \frac{-\omega^2 m(k+j\omega h)}{((k-\omega^2 m)+j\omega h)};$$

$$h = \frac{j\omega b k_1 + c k_1}{-\omega^2 b + j\omega c + k_1}; \quad y(a, \omega) = \frac{G_2(a, \omega)}{1 + G_1(a, \omega)H(\omega)}; \quad a_i = \int_0^{L_v} f(x) \phi_i(x) dx$$

Para la solución de la Ec. (4.4), se proponen las siguientes variables de forma adimensional:

$$\mu = \frac{m}{\rho A L_v}; \quad d = \frac{b}{m}; \quad \omega_{ni}^2 = \frac{EI\beta_i^4}{\rho A}; \quad \gamma_i = \frac{\omega_{ni}}{\omega_{n1}}; \quad \eta = \frac{\sqrt{k_1/m}}{\omega_{n1}}; \quad T = \frac{\sqrt{k/m}}{\omega_{n1}}; \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_{n1}}$$

Donde:

- μ Relación de masa del IDVA y la estructura.
- d Relación de masa de la inercia respecto a la masa del IDVA.
- ω_{ni} Frecuencia natural del i -ésimo modo de vibración.
- γ_i Relación de frecuencias naturales.
- η Relación de frecuencia del lado izquierdo con la primera frecuencia natural.

T	Relación de frecuencia del lado derecho con la primera frecuencia natural.
ξ	Relación de amortiguamiento.
Ω	Relación de frecuencia.

Sustituyendo las variables adimensionales en la Ec. (4.4), ésta se puede reescribir como:

$$S(x, \Omega) = \frac{1}{\rho AL_v \omega_{n1}^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \left[\frac{a_i}{\gamma_i^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu a_i \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu \phi_i^2(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} + \frac{1}{J_1}} \right) \right] \quad (4.5)$$

Donde:

$$J_1 = - \frac{\Omega^2 (-\Omega^2 d T^2 + T^2 \eta^2 - \Omega^2 d \eta^2 + j 2 \xi \Omega T (T^2 + \eta^2))}{(\Omega^2 d T^2 + T^2 \eta^2 + \Omega^4 d - \Omega^2 \eta^2 - \Omega^2 d \eta^2) + j 2 \xi \Omega T (T^2 - \Omega^2 + \eta^2)}$$

La Ec. (4.5) representa la función de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal de la viga cuando se tiene una excitación de tipo armónica.

Por otra parte, la función de respuesta en frecuencia de la aceleración transversal de la viga cuando se tiene una excitación de tipo armónica, se puede expresar como:

$$S_a(x, \Omega) = -\omega_{n1}^2 \Omega S(x, \Omega) \quad (4.6)$$

Nótese que la Ec. (4.6) también es la respuesta en frecuencia del desplazamiento de la viga cuando se considera una excitación de tipo inercial.

Si se considera únicamente el primer modo de vibración del sistema de la figura 4-1, la Ec. (4.5) se simplifica, obteniendo la respuesta en dominio de la frecuencia de forma compleja. Posteriormente, se determina el valor absoluto de la respuesta compleja obteniendo la respuesta adimensional del sistema en el dominio de la frecuencia, la cual se puede expresar como:

$$R(S) = \frac{S(a, \Omega) \rho AL_v \omega_{n1}^2}{a_1 \phi_1(a)} = \sqrt{\frac{B_1^2 + B_2^2}{B_3^2 + B_4^2}} \quad (4.7)$$

Donde:

$$B_1 = (-\Omega^4 d + (T^2 d + \eta^2 (d + 1) \Omega^2 - T^2 \eta^2))$$

$$B_2 = (2T\Omega^3 - 2\Omega T (T^2 + \eta^2)) \xi$$

$$B_3 = (d\Omega^6 + ((-\phi_1(a))^2 \mu - 1) d T^2 + (-\phi_1(a))^2 d \mu - d - 1) \eta^2 - d) \Omega^4 + (((\phi_1(a))^2 \mu + 1) \eta^2 + d) T^2 + \eta^2 (d + 1) \Omega^2 - T^2 \eta^2$$

$$B_4 = (-2T\Omega^5 + 2(((\phi_1(a))^2 \mu + 1) T^2 + 1 + ((\phi_1(a))^2 \mu + 1) \eta^2) T \Omega^3 - 2\Omega T (T^2 + \eta^2)) \xi$$

En la figura 4-2 se muestra el desplazamiento transversal de la viga considerando una fuerza de excitación armónica obtenido de la Ec. (4.7), para el caso donde $\eta = 0.8$, $d = 0.6$, $T = 1$, $\mu =$

0.1 variando valores de la relación de amortiguamiento ξ . Cabe hacer notar que los valores de las variables fueron seleccionados aleatoriamente, el objetivo es observar el comportamiento vibratorio del sistema. De la figura 4-2, se observa que para algunos casos de relación de amortiguamiento, el comportamiento del sistema es inestable, esto se debe a que los valores de las variables que se utilizaron no son los ideales para la estructura tipo viga con IDVA, por lo que es necesario implementar una metodología de optimización de parámetros para mejorar el comportamiento de la respuesta del sistema.

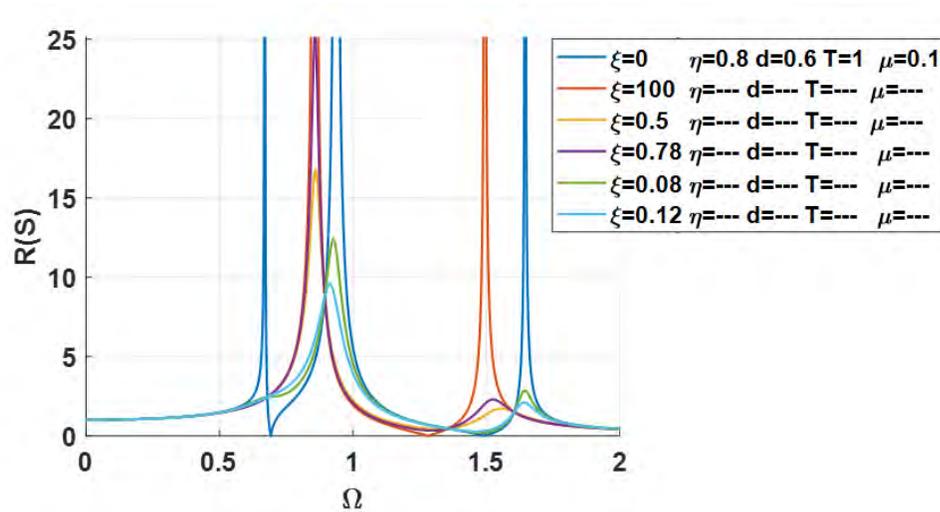


Figura 4-2. Desplazamiento transversal de la viga considerando una fuerza de excitación armónica simple.

Por otra parte, partiendo de la Ec. (4.6), la respuesta adimensional del sistema en el dominio de la frecuencia, para el desplazamiento de la viga sometida a una fuerza de excitación de tipo inercial, se puede expresar como:

$$R_a(S) = \frac{S_a(a,\Omega)\rho AL_v}{a_1\phi_1(a)} = \sqrt{\frac{C_1^2+C_2^2}{C_3^2+C_4^2}} \quad (4.8)$$

Donde:

$$C_1 = 2\Omega^2 \left(\frac{1}{2}\Omega^4 d + \left(-\frac{1}{2}dT^2 - \frac{1}{2}\eta^2(d+1) \right) \Omega^2 + \frac{1}{2}T^2\eta^2 \right).$$

$$C_2 = 2\Omega^2 (-T\Omega^3 + \Omega T(T^2 + \eta^2))\xi$$

$$C_3 = d\Omega^6 + ((-\phi_1(a))^2\mu - 1)dT^2 + (-\phi_1(a))^2d\mu - d - 1)\eta^2 - d)\Omega^4 + (((\phi_1(a))^2\mu + 1)\eta^2 + d)T^2 + \eta^2(d+1)\Omega^2 - T^2\eta^2$$

$$C_4 = (-2T\Omega^5 + 2(((\phi_1(a))^2\mu + 1)T^2 + 1 + ((\phi_1(a))^2\mu + 1)\eta^2)T\Omega^3 - 2\Omega T(T^2 + \eta^2))\xi$$

En la figura 4-3 se muestra el desplazamiento transversal de la viga considerando una fuerza de excitación de tipo inercial obtenido por la Ec. (4.8), para el caso donde $\eta = 0.4880$, $T = 0.7715$, $\mu = 0.1$ y $d = 0.2041$ variando valores de la relación de amortiguamiento ξ . Cabe hacer

notar que los valores de las variables fueron seleccionados aleatoriamente, el objetivo es observar el comportamiento vibratorio del sistema. De la figura 4-3, se observa que para algunos casos de relación de amortiguamiento, el comportamiento del sistema es inestable, esto se debe a que los valores de las variables que se utilizaron no son los ideales para la estructura tipo viga con IDVA, por lo que es necesario implementar una metodología de optimización de parámetros para mejorar el comportamiento de la respuesta del sistema.

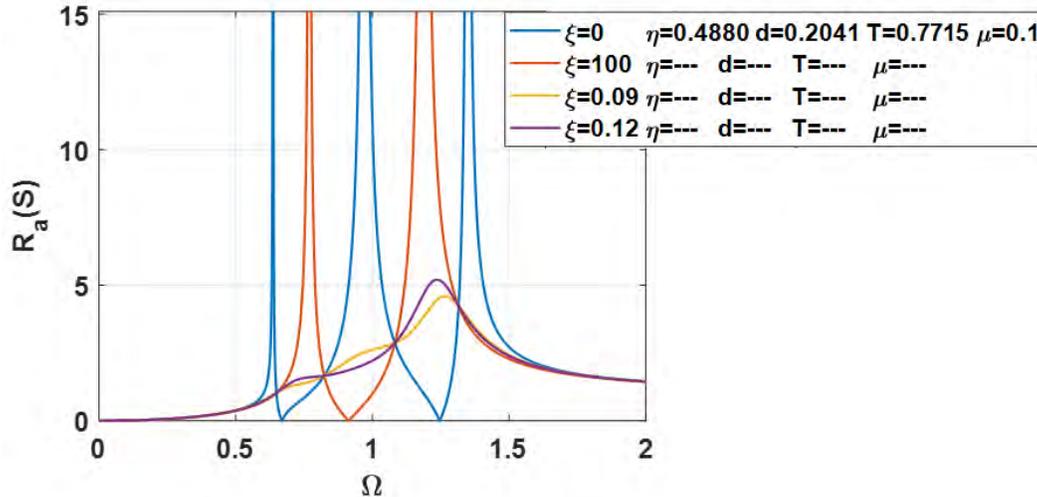


Figura 4-3. Desplazamiento transversal de la viga considerando una fuerza de excitación inercial.

Al observar el desplazamiento transversal de la viga para los casos donde se considera excitación armónica simple e inercial, figuras 4-2 y 4-3 respectivamente, se aprecia que para algunos casos de relación de amortiguamiento el sistema presenta inestabilidad, sin embargo, nótese que existen puntos invariantes, puntos que serán utilizados como base para la optimización de los parámetros del IDVA.

En el siguiente subtema se describe cómo se obtuvieron las expresiones óptimas para cada una de las variables adimensionales del IDVA, así como, la comprobación de la optimización realizada para el sistema con excitación armónica simple e inercial.

4.1.2 Optimización IDVA

Tomando como base la metodología propuesta por Barredo [19], se realizó la optimización del IDVA propuesto considerando como excitación una fuerza armónica simple y una fuerza de tipo inercial. En el apéndice B se describe el análisis completo de la optimización de parámetros para el sistema con una fuerza de excitación de tipo inercial.

De la Ec. (4.8) sistema con excitación inercial, se determinan los polinomios de la respuesta dinámica $R_a(S)$ y su magnitud H_m . El primer polinomio se obtiene tomando en cuenta las tendencias de la respuesta de vibración en función de la relación de amortiguamiento

$(R_a(S)_{\xi \rightarrow \infty} = R_a(S)_{\xi \rightarrow 0})$, mientras que el segundo toma en cuenta la respuesta de vibración del sistema cuando la relación de amortiguamiento tiende a infinito ($H_m^2 = (R_a(S)_{\xi \rightarrow 0})^2$). Para la respuesta del sistema $R_a(S)$ el polinomio resultante se describe a continuación.

$$R_1\Omega^8 + R_2\Omega^6 + R_3\Omega^4 + R_4\Omega^2 + R_5 = 0 \quad (4.9)$$

Donde:

$$R_1 = 2d.$$

$$R_2 = (-2((\phi_1(a))^2 d\mu - 4d - 2)\eta^2 - 2d(1 + ((\phi_1(a))^2 \mu + 2)T^2))$$

$$R_3 = \left((2(\phi_1(a))^2 d\mu + (\phi_1(a))^2 \mu + 2d + 2)\eta^4 + ((4(\phi_1(a))^2 d\mu + 2(\phi_1(a))^2 \mu + 4d + 4)T^2 + 4d + 2)\eta^2 + 2(2 + ((\phi_1(a))^2 \mu + 1)T^2)dT^2 \right)$$

$$R_4 = \left((-2(\phi_1(a))^2 \mu - 2)T^2 - 2d - 2)\eta^4 - 2(((\phi_1(a))^2 \mu + 1)T^2 + 2d + 2)T^2\eta^2 - 2T^4 d \right).$$

$$R_5 = 2T^4\eta^2 + 2T^2\eta^4$$

El polinomio de la magnitud H_m es.

$$H_1\Omega^8 + H_2\Omega^6 + H_3\Omega^4 + H_4\Omega^2 + H_5 = 0 \quad (4.10)$$

Donde:

$$H_1 = (H_m^2 - 1)$$

$$H_2 = (H_m^2(-2((\phi_1(a))^2 \mu + 1)T^2 - 2 - 2((\phi_1(a))^2 \mu + 1)\eta^2))$$

$$H_3 = \left(H_m^2 \left(2T^2 + 2\eta^2 + (((\phi_1(a))^2 \mu + 1)T^2 + 1 + ((\phi_1(a))^2 \mu + 1)\eta^2) \right)^2 \right)$$

$$H_4 = 2H_m^2(-T^2 - \eta^2)((\phi_1(a))^2 \mu + 1)T^2 + 1 + ((\phi_1(a))^2 \mu + 1)\eta^2$$

$$H_5 = H_m^2(-T^2 - \eta^2)^2$$

Tomando como base el teorema de Vieta, se igualan las raíces características de los dos polinomios de las Ecs. (4.9) y (4.10) con base a los términos independientes de los polinomios, como resultado se obtienen cuatro expresiones para calcular la magnitud H_m y se pueden escribir como:

$$H_m^2 = \frac{-QT^2d - Qd\eta^2 - \eta^2 - d}{QT^2d + Qd\eta^2 - \eta^2 + d}$$

$$H_m^2 = \frac{(-2Qd - Q - 2)\eta^4 + ((-4QT^2 - 4)d - 2QT^2 - 4T^2 - 2)\eta^2 - 2T^2d(QT^2 + 2)}{((2Q^2 + 2Q)d - Q - 2)\eta^4 + (4(Q + 1)(QT^2 + 1)d - 2QT^2 - 4T^2 - 2)\eta^2 + 2(Q^2T^4 + QT^2(T^2 + 2) + 2T^2 + 1)d}$$

$$H_m^2 = \frac{(-d - 1 + (-Q)T^2)\eta^4 - ((Q + 1)T^2 + 2d + 2)T^2\eta^2 - T^4d}{((-Q - 1)T^2 + 2Qd + d - 1)\eta^4 + ((-Q - 1)T^4 + (4Qd + 2d - 2)T^2 + 2d)\eta^2 + 2\left(\left(Q + \frac{1}{2}\right)T^2 + 1\right)T^2d}$$

$$H_m^2 = -\frac{T^2\eta^2}{-T^2\eta^2 + T^2d - d\eta^2}$$
(4.11)

Donde $Q = \phi_1^2(a) \mu$.

Se igualan las posibles soluciones de la magnitud correspondientes a la Ec. (4.11). De lo anterior, se obtienen tres posibles soluciones para la variable adimensional η .

$$\eta^2 = \frac{-2(QT^2 + \frac{1}{2})(T^2 - d) \pm \sqrt{4Q^2T^8 + 4QT^6 - 4QT^4d + T^4 - 6T^2d + d^2}}{-2 + 4Q(T^2 - \frac{1}{2}d)}$$

$$\left((Q^2 + 2Q)T^2 - 1 - Q\left(d + \frac{1}{2}\right)\right)\eta^6 + \left((2Q^2 + 4Q)T^4 + \left(1 - 3Q\left(d - \frac{1}{6}\right)\right)T^2 - 2d - 1\right)\eta^4 + T^2\left((Q^2 + 2Q)T^4 + \left(2 - 3Q\left(d - \frac{1}{3}\right)\right)T^2 - 4d\right)\eta^2 - T^4d(QT^2 + 2) = 0 \quad (4.12)$$

$$\eta^2 = -\frac{(QT^2 + T^2 - 2d)T^2 \pm T^2\sqrt{(Q+1)^2T^4 - 4d}}{(2Q+2)T^2 - 2d - 2}$$

Posteriormente, se igualan las expresiones de la Ec. (4.12), para determinar posibles soluciones para la variable T , para esta variable existen ocho posibles soluciones, sin embargo, las soluciones deben de ser reales y positivas. Por lo tanto, solo se consideran las siguientes dos soluciones que cumplen con los criterios de optimización.

$$T^2 = \frac{Q - 3 - \sqrt{Q^2 + (8d+2)Q - 8d+1}}{4Q-4}$$

$$Qd(Q+1)^2T^8 + \left(-Qd(Q+1)\sqrt{(Q+1)^2T^4 - 4d} + (-Q^3 - 5Q^2 - 4Q)d + \frac{5}{2}Q - \frac{1}{2}Q^3 + 2\right)T^6 + \left(\left(Q^2 + 4Q\right)d + \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^2 + 2\right)\sqrt{(Q+1)^2T^4 - 4d} + \left(-\frac{3}{2}Q + \frac{3}{2}Q^2 - 1\right)d^2 + \left(\frac{9}{2}Q + \frac{9}{2}Q^2 - 6\right)d - Q - 1\right)T^4 + \left(\left(d^2 - 6d - \frac{3}{2}Qd - \frac{3}{2}Qd^2 - 1\right)\sqrt{(Q+1)^2T^4 - 4d} - 3Qd^2 - 3Qd + 10d^2 - 2d\right)T^2 + (2d^2 + 2d)\sqrt{(Q+1)^2T^4 - 4d} - 2d^3 + 2d = 0 \quad (4.13)$$

Igualando las expresiones de la Ec. (4.13) se encuentra la función para la variable adimensional d , ésta se puede expresar como:

$$d = -\frac{2Q(Q-1)}{(Q+1)^2} \quad (4.14)$$

De acuerdo con la figura 4-4, se realiza la sustitución inversa para cada una de las soluciones de las variables adimensionales, asimismo, se sustituye la variable Q por $\phi_1^2(a) \mu$, de esta manera se obtienen expresiones reducidas de las variables adimensionales óptimas dependientes de la función modal y la relacion de masa del IDVA con respecto a la masa de la estructura, de tal forma que estas expresiones se pueden expresar como:

$$d_{\acute{o}pt} = -\frac{2(\phi_1(a))^2\mu((\phi_1(a))^2\mu-1)}{((\phi_1(a))^2\mu+1)^2}$$

$$T_{\acute{o}pt} = \frac{1}{\sqrt{(\phi_1(a))^2\mu+1}}$$

$$\eta_{\acute{o}pt} = \sqrt{-\frac{2(\phi_1(a))^2\mu}{(\phi_1(a))^4\mu^2-1}}$$

$$H_{m,\acute{o}pt} = \sqrt{\frac{1}{(\phi_1(a))^2\mu}} \quad (4.15)$$

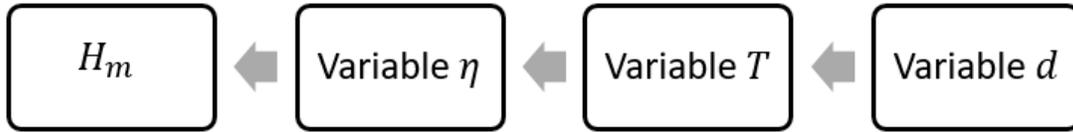


Figura 4-4. Sustitución inversa para simplificar las expresiones óptimas.

Una vez conocidos los parámetros óptimos, éstos se sustituyen en la Ec. (4.8), obteniendo la siguiente expresión:

$$R_a(S) = \frac{\Omega^4 \mu^2 (\phi_1(a))^4 (1 + ((\phi_1(a))^2 \mu - 1)^2 \Omega^4 - 2\Omega^2)^2 ((\phi_1(a))^2 \mu + 1) + \Omega^6 \xi^2 ((\phi_1(a))^2 \mu + 1)^4 (1 + ((\phi_1(a))^2 \mu) \Omega^2)^2}{\sqrt{(\phi_1(a))^4 \mu^2 (-1 + ((\phi_1(a))^2 - 1)^2 \Omega^6 + ((\phi_1(a))^2 \mu - 3) \Omega^4 + ((\phi_1(a))^2 \mu + 3) \Omega^2)^2 ((\phi_1(a))^2 \mu + 1) + \Omega^2 \xi^2 (-1 + ((\phi_1(a))^2 \mu - 1) \Omega^4 + 2\Omega^2)^2 ((\phi_1(a))^2 \mu + 1)^4}} \quad (4.16)$$

Igualando la magnitud $H_{m,opt}$ de la respuesta con la Ec. (4.16) y despejando la relación de amortiguamiento se tiene que.

$$\xi^2 = - \frac{(\phi_1(a))^4 \mu^2 ((\phi_1(a))^4 \mu^2 \Omega^4 - 2(\phi_1(a))^2 \mu \Omega^4 - 2(\phi_1(a))^2 \mu \Omega^2 + \Omega^4 - 2\Omega^2 + 1)}{\Omega^2 ((\phi_1(a))^6 \mu^3 + 3(\phi_1(a))^4 \mu^2 + 3(\phi_1(a))^2 \mu + 1)} \quad (4.17)$$

Conforme a la teoría de Krenk se determinan las frecuencias invariantes $\Omega_{1,\xi \rightarrow \infty}$, $\Omega_{0,\xi \rightarrow 0}$ y $\Omega_{2,\xi \rightarrow \infty}$, sin embargo, son expresiones muy extensas y difíciles de manipular, por lo tanto, el análisis para determinar la función de la relación de amortiguamiento óptimo se realizó mediante un análisis simbólico con el apoyo del software matlab, al final del apéndice **B**, se describe el programa que se implementó para obtener una solución numérica. En la tabla 3, se muestran los valores óptimos para los diferentes parámetros en función de la primera forma modal $\phi_1(a)$ para diferentes relaciones de masa μ .

Tabla 3. Parámetros óptimos variando la relación de masa μ .

Parámetros óptimos					
$\phi_1(a)$	μ	η_{opt}	T_{opt}	d_{opt}	ξ_{opt}
1.4142	0.05	0.4495	0.9535	0.1488	0.0547
1.4142	0.1	0.6455	0.9129	0.2222	0.1356
1.4142	0.15	0.812	0.8771	0.2485	0.2205
1.4142	0.2	0.9759	0.8452	0.2449	0.3031
1.4142	0.25	1.1547	0.8165	0.2222	0.3807
1.4142	0.3	1.3693	0.7906	0.1875	0.4526
1.4142	0.35	1.6568	0.767	0.1453	0.5183
1.4142	0.4	2.1081	0.7453	0.0988	0.5778
1.4142	0.45	3.0777	0.7255	0.0499	0.6306

En la figura 4-5, se muestra la repuesta de la estructura tipo viga con el IDVA con los valores óptimos de las variables adimensionales, para una relación de masa de $\mu = 0.4$ y una fuerza de excitación inercial. La respuesta de la estructura tipo viga con el IDVA con los valores óptimos de las variables adimensionales se compara con la respuesta obtenida con diferentes valores de

relación de amortiguamiento. Se observa que el comportamiento vibratorio se estabiliza de acuerdo a los puntos invariantes del sistema y a la relación de amortiguamiento óptimo.

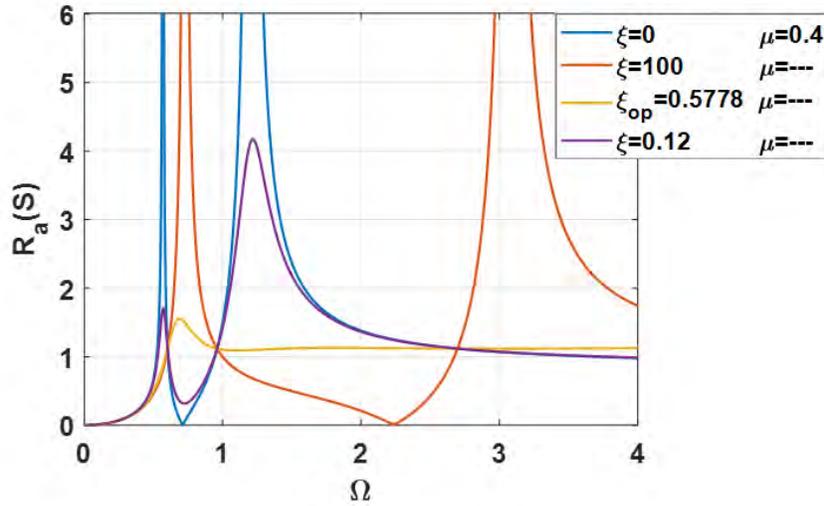


Figura 4-5. Desplazamiento transversal de la viga con los parámetros óptimos de IDVA, $\mu = 0.4$ (excitación inercial).

En la figura 4-6, se muestra la respuesta del sistema con los parámetros óptimos del IDVA, se aprecia que la amplitud de vibración disminuye considerablemente y tiene un comportamiento estable, sin grandes fluctuaciones de vibración.

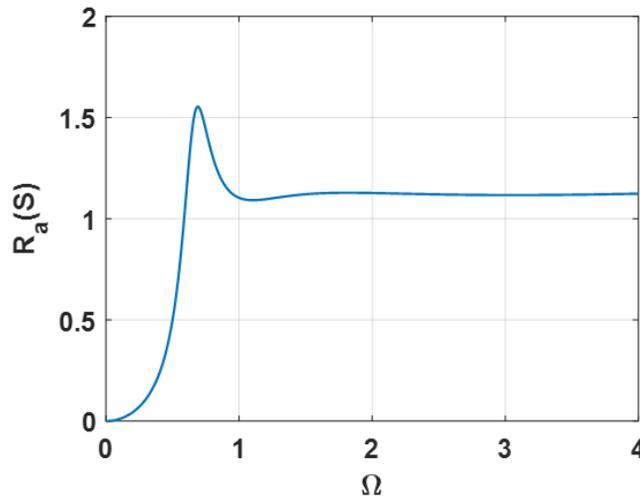


Figura 4-6. Respuesta óptima del sistema con IDVA, $\mu = 0.4$ (excitación inercial).

Por otra parte, en la figura 4-7, se muestra el comportamiento de las variables óptimas en función de la relación de masa μ . En la figura 4-7, se observa que las funciones que se determinaron son válidas para $\mu \leq 4.5$ después de ese punto, las expresiones se vuelven incongruentes y no cumplen con los criterios de optimización.

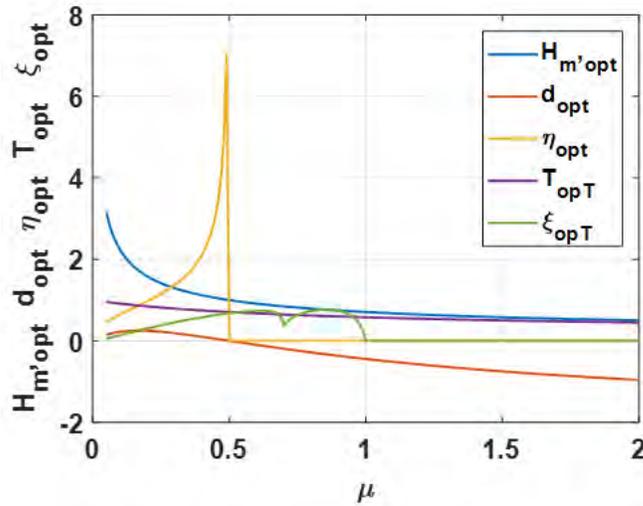


Figura 4-7. Tendencias de las variables óptimas en función de la relación de masa μ (excitación inercial).

Siguiendo la misma metodología para el sistema con fuerza de excitación armónica simple se obtuvieron las funciones de las variables óptimas.

$$\begin{aligned}
 d_{opt} &= \frac{2(\phi_1(a))^2 \mu}{(\phi_1(a))^2 \mu + 1} \\
 T_{opt} &= \frac{1}{\sqrt{(\phi_1(a))^4 \mu^2 + 2(\phi_1(a))^2 \mu + 1}} \\
 \eta_{opt} &= \frac{\sqrt{2} \sqrt{\frac{(\phi_1(a))^2 \mu}{(2(\phi_1(a))^2 \mu + 1)^2}}}{(\phi_1(a))^2 \mu + 1} \\
 \xi_{opt} &= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2} \mu^{3/2} (\phi_1(a))^3 \sqrt{52(\phi_1(a))^2 \mu + 45}}{(2(\phi_1(a))^2 \mu + 1)^{3/2} \sqrt{4(\phi_1(a))^2 \mu + 3}}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

En la figura 4-8, se muestra la repuesta de la estructura tipo viga con el IDVA con los valores óptimos de las variables adimensionales y una fuerza de excitación armónica simple. La repuesta de la estructura tipo viga con el IDVA con los valores óptimos de las variables adimensionales se compara con la repuesta obtenida con diferentes valores de relación de amortiguamiento. Se observa que el comportamiento vibratorio se estabiliza de acuerdo a los puntos invariantes del sistema y a la relación de amortiguamiento óptimo

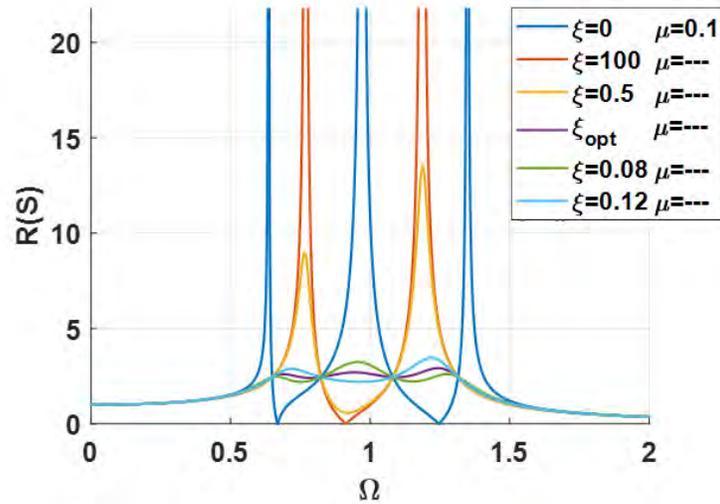


Figura 4-8. Desplazamiento transversal de la viga con los parámetros óptimos del IDVA (excitación armónica simple).

En la figura 4-9, se muestra la respuesta del sistema con los parámetros óptimos del IDVA, se aprecia que la amplitud de vibración disminuye considerablemente y tiene un comportamiento estable, sin grandes fluctuaciones de vibración.

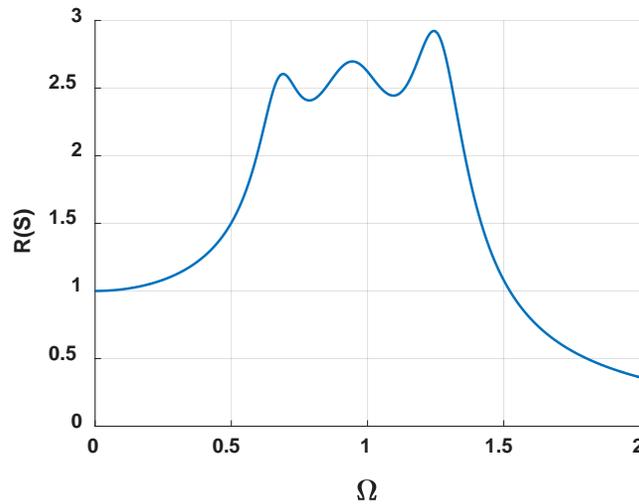


Figura 4-9. Respuesta óptima del sistema con IDVA (excitación armónica simple).

Por otra parte, en la figura 4-10, se muestra el comportamiento de las variables óptimas en función de la relación de masa μ . En la figura 4-10, se observa que las funciones que se determinaron son válidas para todo el rango establecido de μ , es decir todas las variables óptimas cumplen con los criterios de optimización.

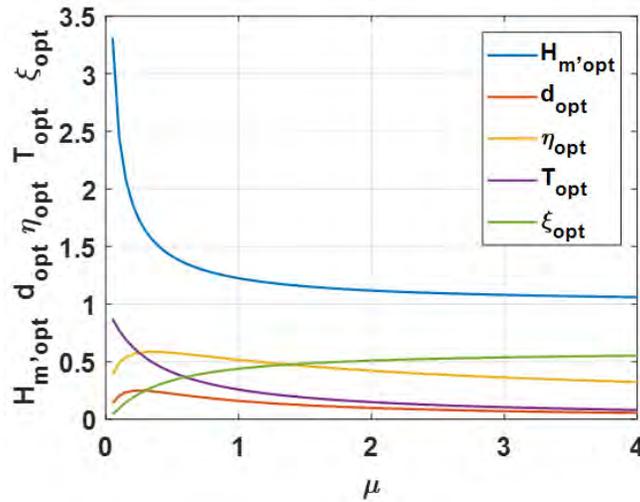


Figura 4-10. Tendencia de las variables óptimas en función de μ (excitación armónica simple).

Como se mencionó en la Sección 3.2.2, Ec. (3.35) la solución obtenida para el sistema de la viga con IDVA considerando los parámetros óptimos tomando como referencia las frecuencias invariantes, se puede validar mediante la matriz Hessiana.

En las figuras 4-11 y 4-12 se muestra el comportamiento de los eigenvalores dados por los parámetros óptimos para cada frecuencia invariante, para los casos donde se consideró en el sistema una fuerza de excitación inercial y de tipo armónica respectivamente.

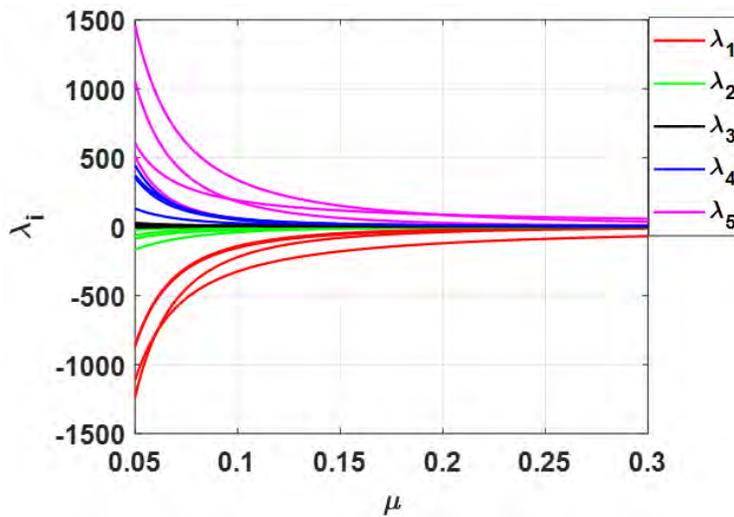


Figura 4-11. Eigenvalores de la matriz Hessiana para los parámetros óptimos para cada frecuencia invariante (excitación inercial).

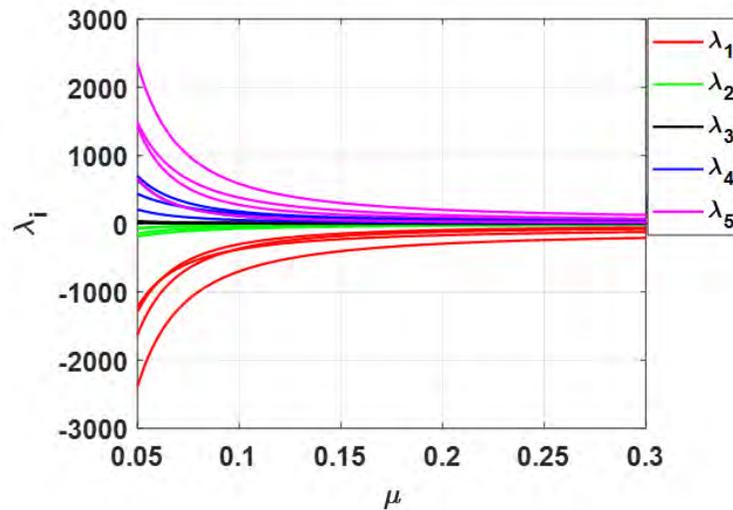


Figura 4-12. Eigenvalores de la matriz Hessiana para los parámetros óptimos para cada frecuencia invariante (excitación armónica simple).

Los valores propios de la matriz Hessiana describen la deflexión de la respuesta en las frecuencias invariantes considerando las variables óptimas del sistema respecto a la variable gobernante μ , si la deflexión con respecto a esta variable tiende a cero el análisis de optimización es congruente y la respuesta vibratoria del sistema se comportará en condiciones óptimas de diseño.

En la figura 4-11 y 4-12 se muestra la deflexión de los valores propios que indica la reducción de magnitud de vibración del sistema con IDVA respecto a las frecuencias invariantes. Lo anterior es un indicativo de que los análisis de optimización se realizaron de una manera correcta.

4.1.3 Validación del modelo matemático del sistema viga-IDVA y los parámetros óptimos

Tomando como base el trabajo realizado por Jin [18], se corroboró el modelado matemático desarrollado en la sección 4.1.1. Para lo anterior, se consideró la configuración del sistema viga-IDVA que se muestra en la figura 4-13.

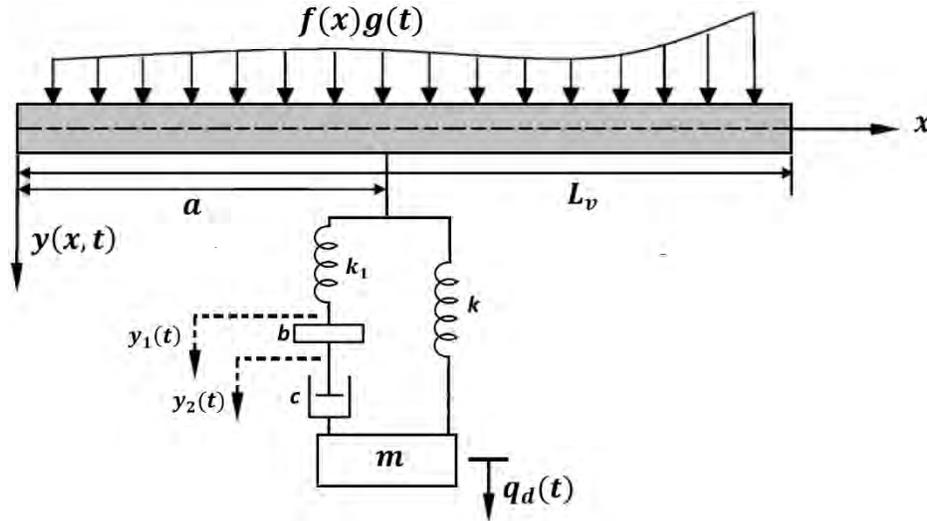


Figura 4-13. Configuración de la viga Euler-Bernoulli con el IDVA propuesto por Jin [18].

De acuerdo con la configuración del sistema de la figura 4-13, el modelo matemático para i -ésimo modo de vibración del sistema considerando una fuerza de excitación armónica simple y considerando las mismas variables adimensionales del sistema de la figura 4-1 se puede escribir como:

$$S(x, \Omega) = \frac{1}{\rho AL_v \omega_{n1}^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \left[\frac{a_i}{\gamma_i^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu a_i \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu \phi_i^2(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} + \frac{1}{J_1}} \right) \right] \quad (4.19)$$

Donde:

$$J_1 = - \frac{\Omega^2 T^2 [-d\Omega\eta^2 T + 2j\xi(\eta^2 T^2 - \Omega^2 - \Omega^2 \eta^2 d)]}{-T^3 d\Omega\eta^2 + \Omega^3 d\eta^2 T + 2j\xi(T^4 \eta^2 - T^2 \Omega^2 - T^2 \Omega^2 \eta^2 + \Omega^4 - dT^2 \Omega^2 \eta^2)} \quad (4.20)$$

Jin realizó la optimización de la configuración de la viga-IDVA de la figura 4-13, de sus análisis determinó los valores óptimos para cada una de las variables del sistema, siendo estos: $d_{\text{opt}} = 0.4081$, $\eta_{\text{opt}} = 1.0935$, $T_{\text{opt}} = 0.8325$ y $\xi_{\text{opt}} = 0.2251$, lo anterior para una relación de masas $\mu = 0.1$ y considerando el primer modo de vibración.

En la figura 4-14 se muestra el desplazamiento transversal de la viga conectada al IDVA cuando se utilizan los parámetros óptimos reportados por Jin y cuando se utilizan relaciones de amortiguamiento diferentes a la relación de amortiguamiento óptima ξ_{opt} .

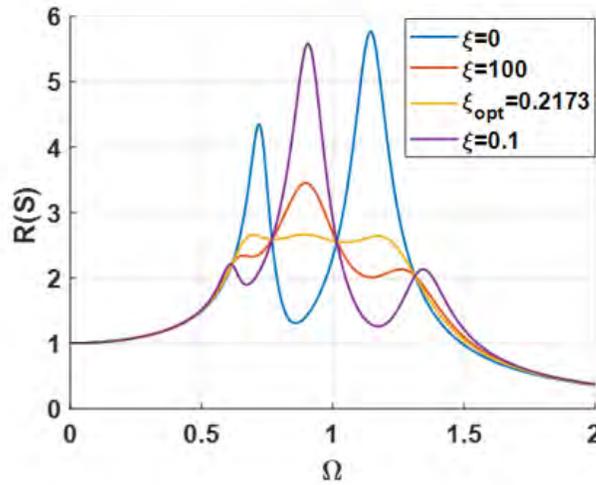


Figura 4-14. Comportamiento óptimo Viga-IDVA vs comportamiento Viga-IDVA con ξ diferentes al óptimo, $\mu = 0.1$, Jin [18].

Se puede observar que el modelo desarrollado por Jin Ec. (4.19) y el modelo desarrollado en el presente trabajo en la Sección 4.1.1, Ec. (4.5) presentan la misma expresión matemática, la diferencia radica en la función J_1 que es directamente dependiente de la impedancia mecánica que se proponga para el IDVA, es decir, el modelo matemático de la Ec. (4.4), se puede utilizar para distintas configuraciones de aisladores dinámicos de vibración, requiriendo únicamente analizar por separado la impedancia mecánica para determinar la función J_1 .

De acuerdo con lo anterior, el autor del presente trabajo, analizó la impedancia propuesta por Jin y determino la función J_1 para la configuración del IDVA de la figura 4-13, encontrando que éste se puede expresar como:

$$J_1 = - \frac{\Omega^2 [2\xi T (-T^2 d\Omega^2 - d\eta^2 \Omega^2 + T^2 \eta^2) + j\Omega dT^2 \eta^2]}{2\xi T (-T^2 d\Omega^2 - d\eta^2 \Omega^2 + d\Omega^4 + T^2 \eta^2 - \eta^2 \Omega^2) + j(T^2 d\eta^2 \Omega - d\eta^2 \Omega^2)} \quad (4.21)$$

De la comparación de la función J_1 obtenida por Jin Ec. (4.20) y la obtenida por el autor del presente trabajo Ec. (4.21), se puede observar que son funciones diferentes, por lo tanto, los parámetros óptimos reportados por Jin [18] no son aplicables a la función J_1 de la Ec. (4.21), de acuerdo con lo anterior, es necesario la optimización de los parámetros del sistema considerando la nueva función J_1 correspondiente a la Ec. (4.21).

Siguiendo la metodología de optimización descrita en la Sección 4.1.2, se determinó las expresiones matemáticas que proporcionan los valores óptimos para cada una de las variables

adimensionales, éstas se obtuvieron en función de la relación de masa μ y la función modal $\phi_1(a)$ considerando el primer modo de vibración del sistema y se expresan como:

$$\begin{aligned}
 d_{opt} &= \frac{2(\phi_1(a))^2\mu}{(\phi_1(a))^2\mu+1} \\
 T_{opt} &= \sqrt{\frac{1}{(\phi_1(a))^4\mu^2+2(\phi_1(a))^2\mu+1}} \\
 \eta_{opt} &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{(\phi_1(a))^2\mu}{((\phi_1(a))^2\mu+1)^2}} \\
 \xi_{opt} &= \frac{1}{6} \frac{\phi_1(a)\sqrt{157(\phi_1(a))^2\mu+672\sqrt{\mu}}}{\sqrt{(\phi_1(a))^2\mu+1}\sqrt{15(\phi_1(a))^2\mu+64}}
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

En la figura 4-15 se muestra la repuesta de la estructura tipo viga con el IDVA (figura 4-13) con los valores óptimos de las variables adimensionales obtenidos de la Ec. (4.22). Aquí, la respuesta de la estructura tipo viga con el IDVA con los valores óptimos de las variables adimensionales se compara con la respuesta obtenida con diferentes valores de relación de amortiguamiento. Se observa que el comportamiento vibratorio se estabiliza de acuerdo a los puntos invariantes del sistema y a la relación de amortiguamiento óptimo.

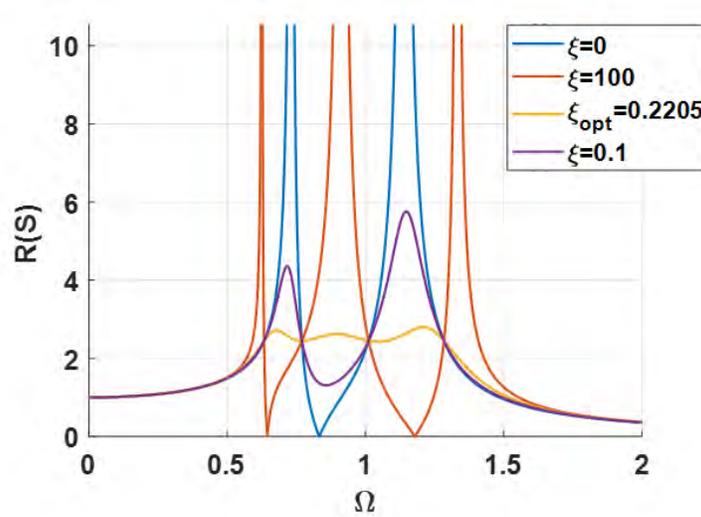


Figura 4-15. Comportamiento óptimo Viga-IDVA vs comportamiento Viga-IDVA con ξ diferentes al óptimo, $\mu = 0.1$ (deducción propia).

Finalmente en la figura 4-16, se muestra la comparación de la respuesta dinámica de la estructura tipo viga con el IDVA propuesto por Jin y sus parámetros óptimos con la respuesta de la misma viga, con los valores óptimos de las variables adimensionales obtenidos de las Ecs. (4.22). se puede observar que ambas respuestas de vibración del sistema son similares, de lo que se concluye, que el modelo matemático desarrollado, así como, la metodología seguida en este trabajo para la optimización de parámetros del IDVA son correctos.

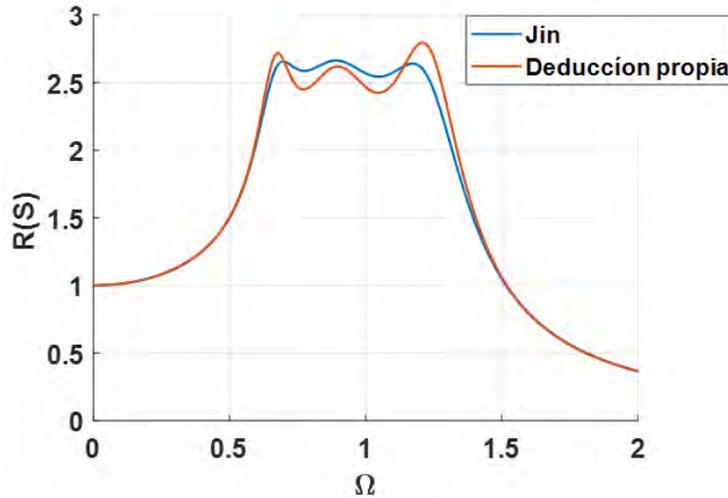


Figura 4-16. Vibración transversal de la Viga-IDVA con parámetros óptimos. Jin [18] vs deducción propia.

4.2 Modelo matemático del inersor con fluido

En la figura 4-17, se presenta el esquema conceptual de un inersor con fluido propuesto por Smith [16], el inersor de la figura 4-17 fue seleccionado para implementarse en el IDVA propuesto en el presente trabajo, ya que el fluido en este tipo de inersores proporciona a la vez inercia y fuerzas de amortiguamiento al sistema. En el apéndice C, se describe el modelado matemático completo.

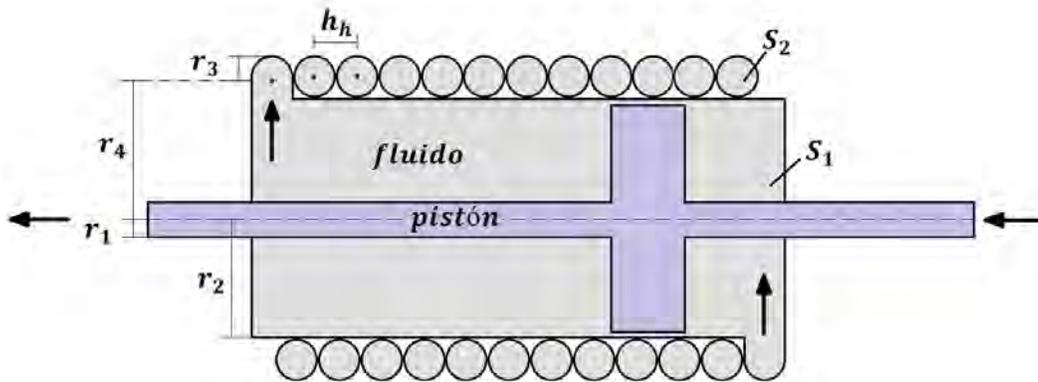


Figura 4-17. Inersor con fluido propuesto por Smith [16].

Donde:

- r_1 Radio de eje del pistón.
- r_2 Radio interno del cilindro respecto del eje central.
- r_3 Radio de la sección trasversal del canal helicoidal.
- r_4 Radio de la circunferencia del canal helicoidal.

h_h	Separación de las espiras del canal helicoidal.
S_1	Área de trabajo de la cara del pistón.
S_2	Área de la sección transversal del canal helicoidal.

De acuerdo con Smith [16], al provocar un desplazamiento al pistón del inersor, se genera un flujo que provoca que el fluido recircule por el canal helicoidal y regrese a la cámara del cilindro, esto provoca que se genere un momento de inercia que puede ser representado por una inercia. Para el cálculo de la inercia proporcionada por el inersor, se tomó en cuenta la longitud media del canal helicoidal. Considerando el número de vueltas n y la separación entre ellas h_h se tiene que la longitud del canal helicoidal está dada por.

$$l_h = n \sqrt{h_h^2 + (2\pi r_4)^2} + 2l_0 \quad (4.23)$$

Donde l_0 es la longitud de la entrada o la salida del canal helicoidal. En el inersor de la figura 4-17 el fluido experimenta dos movimientos principales, el primero, es el movimiento lineal x en la cámara del cilindro provocado por el desplazamiento del pistón, mientras que el segundo, es el movimiento angular θ cuando circula el fluido en el canal helicoidal. Considerando que el sistema está completamente lleno de fluido, se puede demostrar que la cantidad de masa en la entrada del canal helicoidal, es la misma cantidad de masa en la salida del mismo. De acuerdo con lo anterior, al aplicar la ley de conservación de masa en un volumen de control se tienen que.

$$\theta = \frac{2\pi(r_2^2 - r_1^2)}{r_3^2 \sqrt{h_h^2 + (2\pi r_4)^2}} x \quad (4.24)$$

Al circular el fluido en el canal helicoidal se genera un efecto inercial, de acuerdo con la ley de la conservación de la energía, este efecto inercial puede ser representado por una masa equivalente o inercia y se puede expresar como:

$$\frac{1}{2} b \dot{x}^2 = \frac{1}{2} J_I \dot{\theta}^2 \quad (4.25)$$

Donde J_I es el momento de inercia provocado por la masa del fluido m_f y el radio r_4 de la circunferencia del canal helicoidal respecto del eje del pistón. Integrando la Ec. (4.25) y sustituyendo el resultado en la Ec. (4.24), se obtiene la expresión de la inercia del inersor con fluido.

$$b = \frac{m_f}{1 + \left(\frac{h_h}{2\pi r_4}\right)^2} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad (4.26)$$

En la Ec. (4.26) S_1 y S_2 denotan el área de trabajo del pistón y del canal helicoidal respectivamente. La solución de la Ec. (4.26) es una solución aproximada a la expresión descrita por Smith [16], es decir:

$$b = \frac{m_f}{1 + \left(\frac{h_h}{2\pi r_4}\right)^2} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \approx \frac{\rho l_h S_1^2}{S_2} \quad (4.27)$$

Donde ρ es la densidad del fluido.

Para obtener la expresión para el amortiguamiento del inersor, se analizó el flujo del fluido analizando la diferencia de presión en la entrada, la salida y dentro del canal helicoidal. Considerando que la velocidad de flujo es laminar en el canal helicoidal, la velocidad es distinta en los puntos de la sección transversal del canal, tal y como lo dice la ley de Hagen-Poiseuille. La velocidad máxima del fluido se encuentra en el centro del canal helicoidal, y empieza a decrecer conforme se acerca a las paredes de la tubería, asimismo, existen dos presiones dentro del canal, una en dirección del flujo y la otra en contra, estas presiones ejercen un apoyo al flujo y una resistencia respectivamente. Ver Figura 4-18.

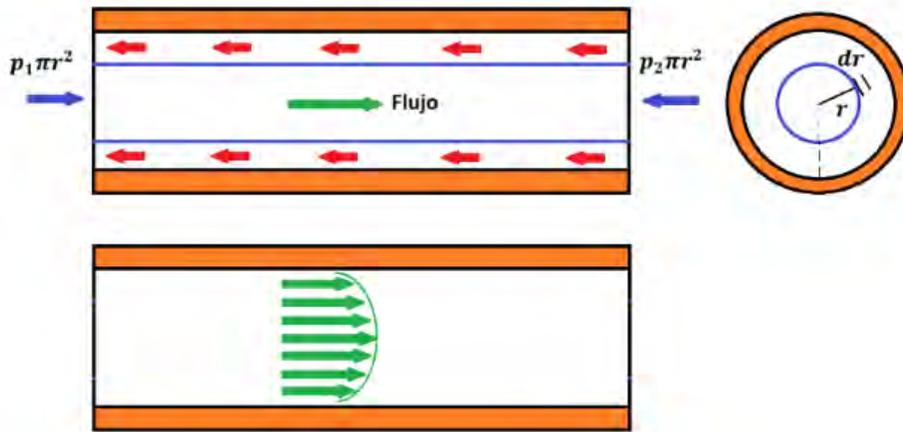


Figura 4-18. Comportamiento del flujo en el canal helicoidal.

Conforme a la velocidad del fluido y la diferencia de presión Δp , la fuerza ejercida en el canal helicoidal se puede expresar como:

$$F = -\mu_f 2\pi r_3 l_h \frac{du}{dr_3} \quad (4.28)$$

Donde μ_f es la viscosidad de fluido y el signo negativo representa la resistencia del flujo en el canal helicoidal. Considerando que la velocidad decrece cuando el flujo se aproxima a las paredes de la tubería mostrando un comportamiento parabólico, la velocidad del flujo puede ser calculada mediante una integral definida, obteniendo una expresión de la forma:

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu_f} (R_3^2 - r_3^2) \quad (4.29)$$

De la Ec. (4.29) se determina el flujo por unidad de tiempo, que puede expresarse como:

$$Q_p = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi r_3^4}{8\mu_f l_h} (\Delta p) \quad (4.30)$$

Por otra parte, considerando que la velocidad media del canal helicoidal es:

$$u = \frac{Q_p}{S_2} \quad (4.31)$$

Sustituyendo la Ec. (4.31) en (4.30) se obtiene la siguiente expresión:

$$u = \frac{r_3^2 \Delta p}{8\mu_f l_h} \quad (4.32)$$

Considerando la ley de conservación de masa en un volumen de control junto con la Ec. (4.32) se determina la diferencia de presión en el canal helicoidal y se puede expresar como:

$$\Delta p = \frac{8\mu_f l_h S_1}{r_3^2 S_2} \dot{x} \quad (4.33)$$

La diferencia de presión en la entrada y la salida del canal helicoidal, se pueden expresar respectivamente como:

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= 0.5 \frac{\rho u^2}{2} \\ \Delta p_2 &= \frac{\rho u^2}{2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Considerando la ley de conservación de masa para un volumen de control, se obtienen.

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= \frac{\rho S_1^2}{4 S_2^2} \dot{x}^2 \\ \Delta p_2 &= \frac{\rho S_1^2}{2 S_2^2} \dot{x}^2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Del análisis de la diferencia de presión en el sistema, se tiene que la fuerza de amortiguamiento generada en el inersor con fluido, es la suma de la presión de entrada, presión de salida y presión en el interior de canal helicoidal. Sin embargo, conforme a la teoría para un volumen de control, es necesario considerar que el inersor siempre está lleno de fluido y por lo tanto, el flujo es generado por el movimiento del pistón, de acuerdo con esto, la fuerza de amortiguamiento generada por el inersor se puede expresar como:

$$F_c = \frac{8\mu_f l_h S_1^2}{r_3^2 S_2} \dot{x} + \frac{3\rho S_1^3}{4S_2^2} \dot{x}^2 \quad (4.36)$$

Finalmente, se tiene que el modelo matemático que representa el comportamiento dinámico del inersor considerando la inercia y el efecto de amortiguamiento se puede expresar como:

$$F = \frac{m_f}{1 + \left(\frac{l_h}{2\pi r_4}\right)^2} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \ddot{x} + \frac{8\mu_f l_h S_1^2}{r_3^2 S_2} \dot{x} + \frac{3\rho S_1^3}{4S_2^2} \dot{x}^2 \quad (4.37)$$

Posteriormente, se comparó el comportamiento del modelo matemático de la Ec. (4.36) con el comportamiento presentado por modelos matemáticos del inersor con fluido reportados en la literatura. Para lo anterior, se consideró el modelo propuesto por Smith [16], Shen [46] y Xiaofu [6]. En la tabla 4 se muestran los valores de los parámetros de diseño de un prototipo de inersor propuestos por Shen, parámetros usados en el presente proyecto para la simulación del comportamiento del inersor.

Tabla 4: Parámetros de diseño de un prototipo de inersor con fluido [6].

Descripción.	Valores.	Unidades.
Área del canal helicoidal. (S_2)	2.83E-05	(m^2)
Área de trabajo del pistón. (S_1)	1.10E-03	(m^2)
Diámetro de canal helicoidal. (D_1)	0.006	(m)
Longitud del canal helicoidal. (l_h)	5.22	(m)
Densidad del fluido. (ρ)	999	($kg \cdot m^{-3}$)
Viscosidad del fluido. (μ_f)	0.001	($Pa \cdot s$)
Radio de la circunferencia del canal helicoidal. (r_4)	0.0415	(m)

Utilizando las expresiones matemáticas deducidas por cada autor. En la figura 4-19, se puede apreciar que el comportamiento del inersor tomando en cuenta únicamente la fuerza de amortiguamiento en la Ec (4.36), es similar al comportamiento reportado por Smith [16], Shen [46] y Xiaofu [6] de lo que se puede concluir, que la Ec. (4.36), emula de manera confiable el comportamiento del inersor con fluido.

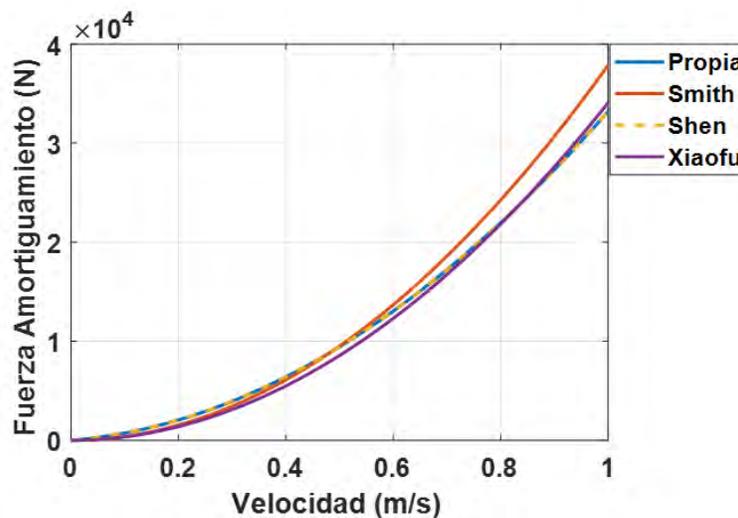


Figura 4-19. Comparación del comportamiento de la fuerza de amortiguamiento del inersor en función de la velocidad.

4.3 Análisis de la válvula MR.

Una manera de simplificar el análisis de un sistema es mediante simulaciones computacionales. En esta ocasión se implementó el software FEMM 4.2 para realizar simulaciones de elemento finito y observar el comportamiento magnético de la válvula MR y así obtener un diseño adecuado. La válvula MR, es un electroimán de corriente directa que se compone principalmente de un núcleo de material ferromagnético y una bobina. Para determinar la forma ideal del núcleo, se realizaron cinco diseños de núcleo magnético, considerando los núcleos existentes en el mercado y pequeñas modificaciones de éstos. En la figura 4-20, se muestran las diferentes configuraciones de los núcleos magnéticos que se implementaron en las simulaciones de elemento finito, para el análisis se consideró el mismo tamaño de bobina a distintas separaciones de entrehierro y las propiedades del fluido MR tipo MRF-122EG.

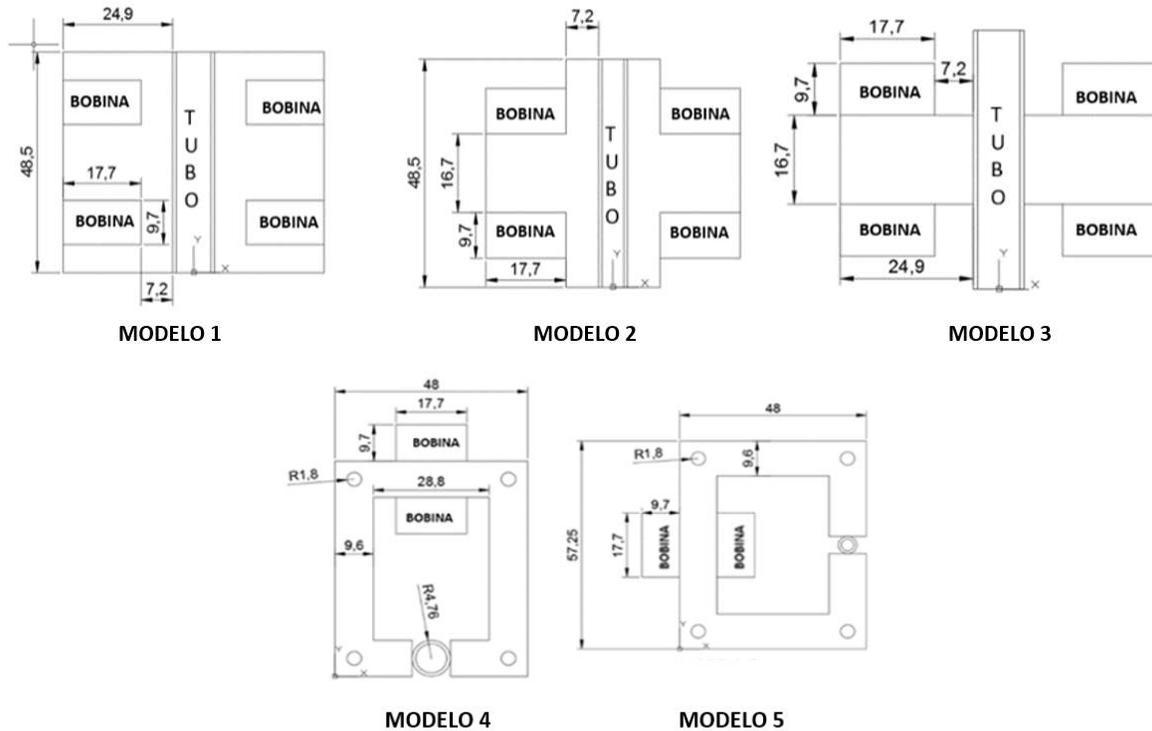


Figura 4-20. Configuración de núcleo que se implementaron en las simulaciones numéricas.

Para las simulaciones, se consideró una tubería del canal helicoidal de cobre y dentro de la tubería el fluido magnetorreológico tipo MRF-122EG de la empresa Lord Corporation. Su comportamiento se simuló mediante la respuesta magnética del fluido descrita en la figura 3-27 de la sección 3.5.2 del Capítulo 3, asimismo, se consideraron los siguientes parámetros de la válvula MR para las simulaciones.

- Número de vueltas en la bobina= 231 vueltas.
- Intensidad de corriente eléctrica= 5 amperes (Amp).

- Calibre del alambre magneto = 20 awg.
- Materiales de los núcleos de transformador: ferrita, hierro puro, hierro laminado.
- Diámetros de la tubería de cobre para el entrehierro: 3/8, 5/16, 1/4, 3/16 pulgadas.

En la figura 4-21, se describe el comportamiento magnético en el núcleo y el entrehierro de los modelos 4 y 5 respectivamente. Se observa que las líneas del campo magnético se compactan en el entrehierro, esto se debe a las propiedades ferromagnéticas del fluido MR, asimismo, también se muestran las gráficas de flujo magnético en el centro de la sección transversal de la tubería de cobre donde se encuentra el fluido MR. En el apéndice **D**, se presentan las simulaciones realizadas para cada configuración del núcleo variando el tamaño de la tubería de cobre, el entrehierro y el volumen de fluido MR.

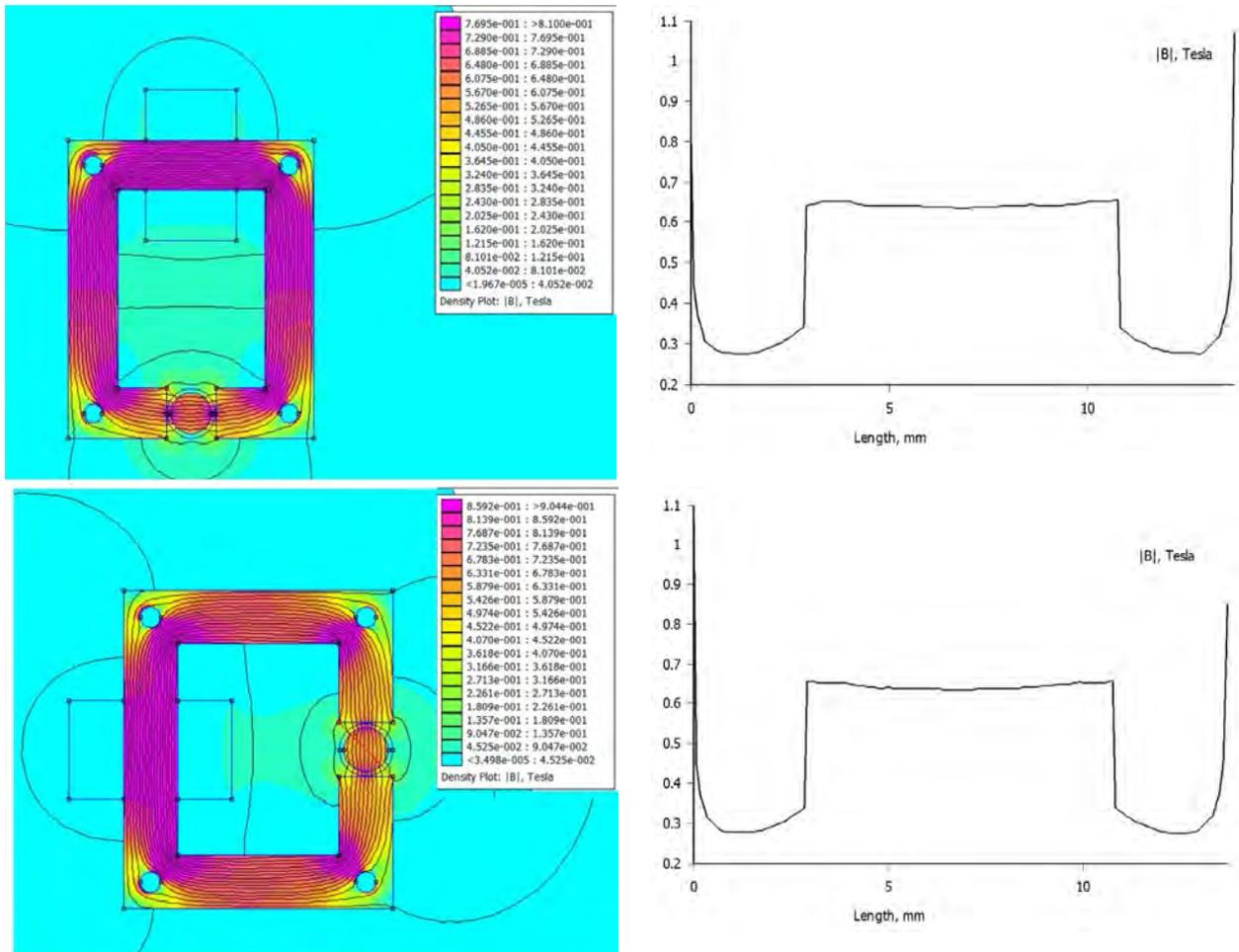


Figura 4-21. Simulaciones con las configuraciones de núcleo correspondientes a los modelos 4 y 5 respectivamente.

En la tabla 5, se muestran los valores máximos del flujo magnético en el punto central del entrehierro para cada una de las simulaciones que se realizaron.

Tabla 5. Resultado de las simulaciones por elemento finito, software FEMM 4.2.

flujo magnético (unidades Teslas).												
Material del núcleo	Ferrita magnética.				Hierro puro.				Acero laminado 18 In. de esperor.			
Diseño.	Diámetro de la tubería de cobre											
	3/8 In.	5/16 In.	1/4 In.	3/16 In.	3/8 In.	5/16 In.	1/4 In.	3/16 In.	3/8 In.	5/16 In.	1/4 In.	3/16 In.
MODELO 1	1.62E-02	1.66E-02	1.75E-02	1.78E-02	7.76E-03	7.91E-03	7.95E-03	8.23E-03	-	-	-	-
MODELO 2	2.29E-02	2.33E-02	2.38E-02	2.43E-02	2.22E-02	2.26E-02	2.31E-02	2.35E-02	-	-	-	-
MODELO 3	9.05E-02	9.33E-02	9.60E-02	9.69E-02	9.06E-02	9.34E-02	9.61E-02	9.71E-02	-	-	-	-
MODELO 4	-	-	-	-	-	-	-	-	6.46E-01	6.98E-01	7.89E-01	8.87E-01
MODELO 5	-	-	-	-	-	-	-	-	6.46E-01	6.98E-01	7.89E-01	8.87E-01

Conforme a los resultados de las simulaciones, se determinó la configuración del núcleo que ofrece mayor flujo magnético. De acuerdo con los resultados obtenidos, la forma simple del núcleo con entrehierro de los modelos 4 y 5, ofrecen una menor resistencia al flujo magnético, por lo tanto, son las mejores opciones de diseño del núcleo, sin embargo, es importante considerar la ubicación de la bobina de la válvula MR. De acuerdo con la ubicación de la bobina, el flujo magnético tiene un comportamiento diferente, en la figura 4-22, se muestra la comparación de los modelos 4 y 5, demostrando que las líneas del campo magnético son más compactas en el modelo 4, lo que indica que este modelo tiene una menor área de afectación por el campo magnético idóneo para evitar afectaciones a otros agentes externos al inersor con fluido. Por lo tanto, el modelo 4 es la opción más confiable para el diseño de la válvula MR.

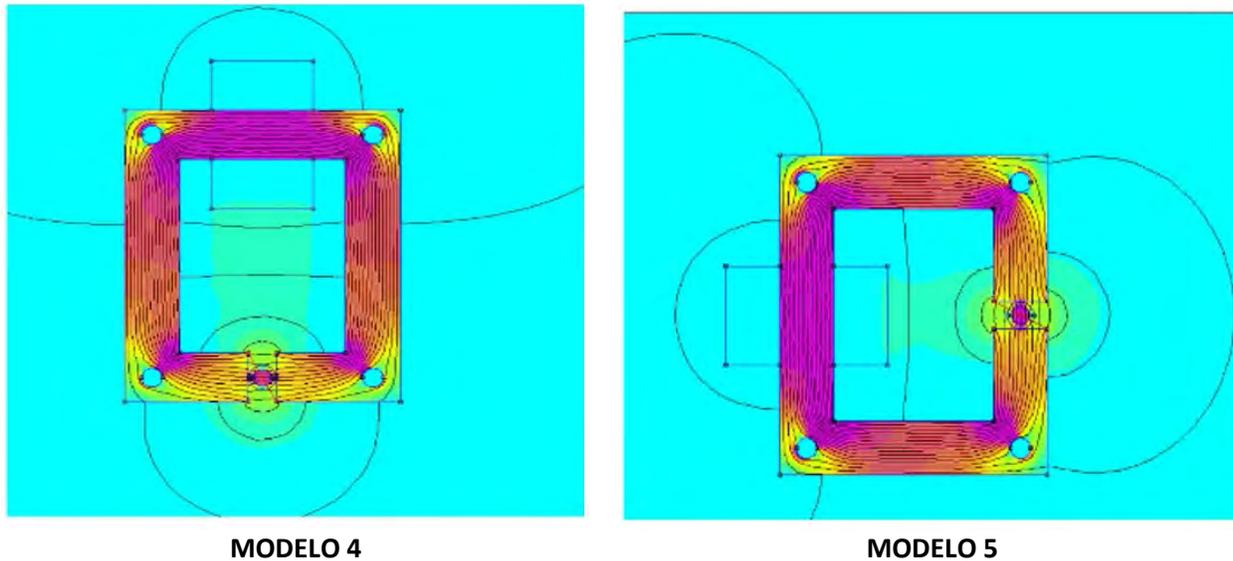


Figura 4-22. Comparación de la simulación de las configuraciones del núcleo correspondientes a los modelos 4 y 5.

Para validar las simulaciones que se realizaron con el software FEMM 4.2, se tomó como referencia la configuración de núcleo correspondiente al modelo 4 para realizar la construcción del núcleo y validar los resultados obtenidos en la simulación con resultados experimentales y teóricos. En la figura 4-23, se observan las dimensiones y geometría del prototipo de la válvula MR.

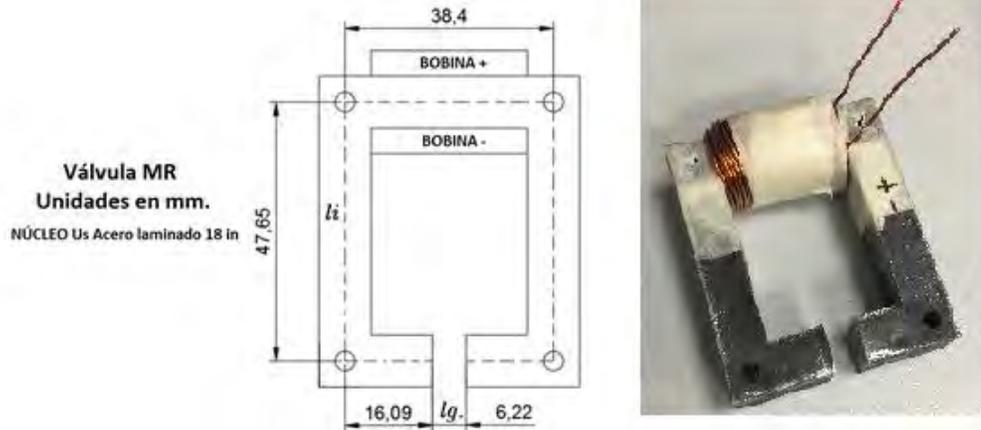


Figura 4-23. Núcleo para la validación del software FEMM 4.2.

Los parámetros que se tomaron en cuenta para el análisis de la validación del software son los siguientes:

- Número de vueltas en la bobina= 110 vueltas.
- Intensidad de corriente eléctrica= 3 amperes.
- Calibre del alambre magneto = 20 awg.
- Material del núcleo: Acero laminado 18 pulgadas de espesor.
- No se tomó en cuenta la tubería de cobre ni el fluido MR.

Conforme a la teoría de electromagnetismo, existen varias formas de calcular el flujo magnético B . En este caso en particular, se realizó el análisis por la ley de Kirchhoff y la ley de Hopkinson descritas en las Ecs. (3.45) y (3.48) de la sección 3.4.5, Capítulo 3 respectivamente. Considerando la válvula MR como un núcleo con entrehierro, el flujo magnético determinado por la ley de Kirchhoff es el siguiente:

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} (110)(3)}{6.22 \times 10^{-3}} = 0.066 \text{ Teslas.} \tag{4.38}$$

Conforme a la ley de Hopkinson primero se determina la reluctancia magnética de entrehierro y el núcleo magnético respectivamente.

$$\mathfrak{R}_T = \frac{0.1655}{(9400)(1.530 \times 10^{-4})} + \frac{6.22 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(1.530 \times 10^{-4})} = 32351102.93 \text{ H}^{-1} \tag{4.39}$$

Posteriormente, se puede determinar el flujo magnético.

$$B = \frac{(110)(3)}{(32351102.93)(1.530 \times 10^{-4})} = 0.066 \text{ Teslas.} \tag{4.40}$$

Por otra parte, el flujo magnético se determinó de manera experimental, para esto se implementó un sensor de efecto Hall SS49E entre el entrehierro, ver figura 4-24. El sensor mide el flujo magnético que fluye de manera frontal a éste, la lectura de salida es en voltaje y es proporcional al producto de la fuerza del campo magnético y la corriente.



Figura 4-24. Colocación del sensor en el núcleo.

De acuerdo a la hoja de datos del sensor de efecto Hall SS49E, el flujo magnético se puede determinar utilizando la siguiente expresión matemática:

$$B = \left(\frac{V_{medido} - V_0}{sensibilidad} / 2 \right) 0.0001 \quad (4.41)$$

Donde:

V_{medido} Voltaje medido cuando el núcleo magnético genera el campo.
 V_0 Voltaje de referencia de sensor de efecto Hall.
sensibilidad del sensor 1.4 mV/Gauss.

Por último, se realizó el análisis por elemento finito con el software FEMM 4.2, considerando los mismos parámetros para la simulación que se utilizaron en el análisis teórico y experimental. Ver figura 4-25.

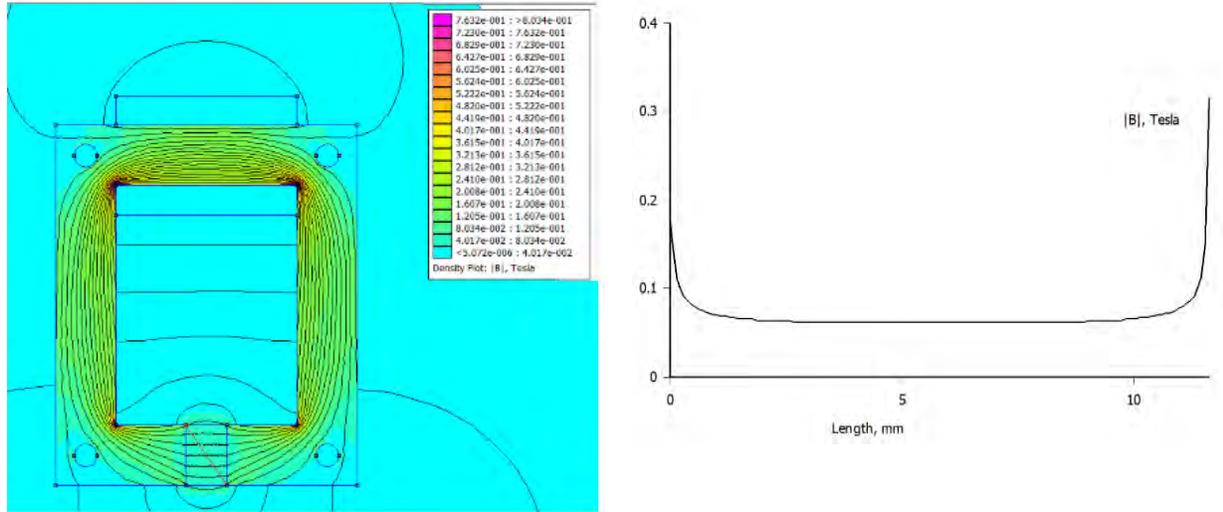


Figura 4-25. Simulación para la validación de software FEMM 4.2.

En la tabla 6, se muestran los resultados de la validación con su respectivo porcentaje de error respecto del análisis teórico.

Tabla 6. Porcentaje de error en el flujo magnético.

Flujo magnético (Teslas).				
Análisis.				
MODELO 4.	Teórico Ec. (4.38)	Teórico Ec. (4.40)	Experimental	FEMM 4.2
	0.0666	0.0666	0.0648	0.0661
% de error.	0	0	2.7027	0.7507

Con base a los resultados mostrados en la tabla 6, se concluye que los resultados obtenidos del flujo magnético mediante las simulaciones con el software FEMM 4.2 presentan un error por debajo del 1% comparado con los valores de flujo obtenidos de forma teórica y experimental, por lo tanto, el software es de utilidad para mejorar el diseño de la válvula MR del inersor con fluido, de tal forma, que se pueda adaptar de manera eficiente al dispositivo final.

Capítulo 5: Análisis experimental

Tomando como base el análisis realizado en el Capítulo 4, se llevó a cabo la construcción de un banco de pruebas experimentales el cual consiste en una estructura tipo viga conectada a un IDVA. Asimismo, se propone una metodología para diseñar y construir el inersor con fluido con base en las funciones óptimas de los parámetros del IDVA. Con el objetivo de tener un intervalo máximo de variación del campo magnético y lograr la saturación magnética del fluido magnetorreológico tipo MRF-122EG se diseñó y construyó una válvula magnetorreológica que se conectó en la entrada del fluido del inersor. Finalmente, considerando resortes de tipo comercial con rigidez diferentes a los parámetros óptimos se construyó un prototipo de IDVA que se utilizó para el desarrollo de las pruebas experimentales.

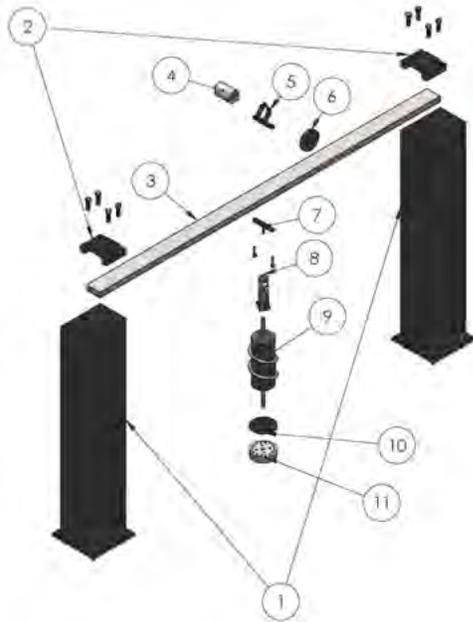
5.1 Construcción del banco de pruebas experimental

Considerando una viga doblemente empotrada, se realizó el diseño del banco de pruebas experimental, en la figura 5-1 se muestra la configuración del banco, mientras que en el apéndice E se muestran los planos correspondientes.



Figura 5-1. Diseño del banco de pruebas experimental.

En la figura 5-1 se puede observar que el banco de pruebas experimental consta de dos soportes anclados al suelo que mediante abrazaderas sujetan los extremos del elemento viga, asimismo, en la parte central de la viga se colocó un motor que se utiliza como excitador que genera una fuerza de excitación de tipo inercial, así como, el sistema de control de vibración basado en inersor (IDVA). En la figura 5-2 se muestra la descripción y partes principales del banco experimental.



Descripción		
Componente	Pza.	Cantidad
1	Soporte estructural.	2
2	Abrazadera.	2
3	Viga.	1
4	Motor.	1
5	Acoplamiento motor-viga-inersor part. 1.	1
6	Disco de desbalance.	1
7	Acoplamiento motor-viga-inersor part. 2.	1
8	Configuración de resortes.	1
9	Inersor.	1
10	Acoplamiento.	1
11	Masa.	1

Figura 5-2: Desglose de componentes del banco experimental.

Para el banco experimental de la figura 5-2, se utilizó una viga de acero 1018, en la tabla 7 se muestran las dimensiones, así como, sus propiedades de acuerdo a la literatura o datos comerciales.

Tabla 7. Geometría y propiedades de la viga de acero 1018.

Propiedades del elemento tipo viga.		
Material.	Acero 1018.	
Características.	Valores.	Unidades.
Dimensiones.	5.08 x 1.905 x 130	(cm)
Módulo de elasticidad. (E)	127.501	(GPa)
Segundo momento de área (I)	2.99E-08	(m ⁴)
Densidad. (ρ)	7762.377	(kg/m ³)
Masa total de la viga. (m_v)	10.0911	(kg)

Con el objetivo de corroborar con datos experimentales las propiedades del elemento viga se realizó un análisis con carga a flexión a tres puntos a tres probetas de la misma viga. Para las pruebas se utilizó una maquina universal marca SHIMADZU. En el Apéndice F se presenta el desarrollo de las pruebas realizadas.

Por otra parte, se determinó las frecuencias naturales del banco experimental, para lo anterior se utilizó un martillo de impacto (marca KISTLER modelo: 9722A2000). Para el análisis, la viga se discretizó en 53 nodos, donde, Para la medición de las FRF's (Frequency Response Function), se colocó un acelerómetro marca **KISTLER** con una sensibilidad de 101.5 mV/g en el nodo 48 y se procedió a golpear con el martillo de impacto al resto de los nodos. En el Apéndice F se presenta el desarrollo del análisis realizado.

De las pruebas realizadas se obtuvo las siguientes frecuencias naturales de la viga:

- Primer modo de vibración, frecuencia natural 56.5 Hz.
- Segundo modo de vibración, frecuencia natural 167 Hz.

Los datos de las frecuencias naturales es de importancia para poder dimensionar el inersor con fluido.

5.1.1 Diseño y construcción del inersor con fluido

De acuerdo con el análisis de optimización y del modelo matemático del inersor con fluido reportado en las secciones 4.1.2 y 4.2 del Capítulo 4, se determinó las dimensiones del prototipo del inersor con fluido MR. El prototipo manufacturado se basa en el diseño propuesto por Smith [16]. En la figura 5-3, se muestra el esquema preliminar para la construcción del prototipo.



Figura 5-3. Esquema del prototipo del inersor con fluido MR.

Para dimensionar el prototipo del inersor con fluido, se partió de las variables adimensionales optimizadas reportadas en la tabla 3, donde éstas son función de $\phi_1(a)$ y μ , parámetros que corresponden a la función modal evaluada en el punto a donde está colocado el IDVA en la viga y a la relación de masas respectivamente. Considerando el primer modo vibración del arreglo estructural de la figura 4-1, se tiene que $\phi_1(a) = 1.4142$. De la expresión en forma adimensional de la relación de masa μ , se tiene que:

$$\mu = \frac{m}{\rho A(x)L_v} \quad (5.1)$$

Donde m es la masa del IDVA y ρAL_v es la masa del elemento viga. Nótese que el arreglo de la estructura experimental, cuenta con una masa adicional correspondiente al motor de excitación. Por lo tanto, considerando la masa de motor, la Ec (5.1) se puede reescribir de la siguiente forma.

$$\mu = \frac{m}{m_{eq}} \quad (5.2)$$

Donde m_{eq} corresponde a la masa efectiva de la viga más la masa del motor y se puede escribir como:

$$m_{eq} = 0.375m_v + m_M \quad (5.3)$$

De acuerdo con lo anterior, para obtener m_{eq} se implementó la siguiente ecuación reportada en la literatura [47].

$$\omega_{n1} = 14 \sqrt{\frac{EI}{L_v^3(m_M+0.375m_v)}} \quad (5.4)$$

Donde:

- L_v Longitud de la viga.
- m_M Masa del motor.
- E Módulo de elasticidad.
- I Segundo momento de área de la viga.
- m_v Masa del elemento viga.

Sustituyendo los datos descritos en la tabla 7 en la Ec. (5.4) se tiene que:

$$m_{eq} = \frac{EI(196)}{\omega_{n1}^2 L_v^3} = 3.9546 \text{ kg.} \quad (5.5)$$

Con la masa equivalente m_{eq} y la Ec. (5.2) se puede calcular la masa m del inersor. Considerando una relación de masa $\mu = 0.4$ se tiene que:

$$\mu = \frac{m}{m_{eq}} \therefore m = \frac{m_{eq}}{\mu} = 1.5818 \text{ kg.} \quad (5.6)$$

Conocidos los valores de m , μ y $\phi_1(a)$ se calcula la inertancia b , rigidez de los resortes k_1 , k y amortiguamiento del IDVA, ésto a partir de los valores óptimos reportados en la tabla 3 para el caso donde $\phi_1(a) = 1.4142$ y $\mu = 0.4$. En la tabla 8, se muestran los resultados de los parámetros obtenidos.

Tabla 8: Propiedades ideales del sistema para una relación de masa $\mu = 0.4$.

Variables adimensionales		Propiedades del sistema	
η_{opt}	2.1081	Rigidez resorte 1(k_1)	885.9122 N/mm
T_{opt}	0.7453	Rigidez resorte (k)	110.73 N/mm
d_{opt}	0.0988	Inertancia (b)	0.1562 kg
ξ_{opt}	0.5778	Amortiguamiento(c)	483.64 kg/s

De las Ecs. (4.26) y (4.36) que corresponden a la inertancia y la fuerza de amortiguamiento del inersor, se encontró que el área de trabajo del pistón S_1 y el área del canal helicoidal S_2 en función de la longitud media del canal helicoidal, se pueden expresar por las siguientes relaciones:

$$S_1 = \frac{1}{8} \frac{b \left(3xb + \sqrt{512 \pi c l_h^3 \mu_f + 9b^2 x^2} \right)}{c l_h^2 \rho} \quad (5.7)$$

$$S_2 = \frac{1}{64} \frac{b \left(3xb + \sqrt{512 \pi c l_h^3 \mu_f + 9b^2 x^2} \right)^2}{c l_h^2 \rho} \quad (5.8)$$

Se puede observar que las Ecs (5.7) y (5.8) son función de la velocidad del sistema. Para determinar las áreas del pistón S_1 y el canal helicoidal S_2 se determinó el desplazamiento transversal de la viga para una excitación de tipo inercial, derivando el desplazamiento transversal de la viga, es decir, multiplicando el desplazamiento por la frecuencia de excitación, se obtiene la respuesta del sistema en términos de la velocidad de la vibración. Para lo anterior, se consideró las propiedades físicas de la estructura descritas en la tabla 7 y 8, una masa equivalente de la estructura $\mu = 0.4$ y las funciones óptimas de la Ec. (4.15) de la Sección 4.1.2, Capítulo 4.

En la figura 5-4 se muestra la respuesta del sistema en términos de la velocidad de vibración transversal de la viga. Para dimensionar el inersor, se seleccionó la velocidad de vibración en la frecuencia de 60 Hz, frecuencia cercana a la primera frecuencia natural del sistema (56.5 Hz).

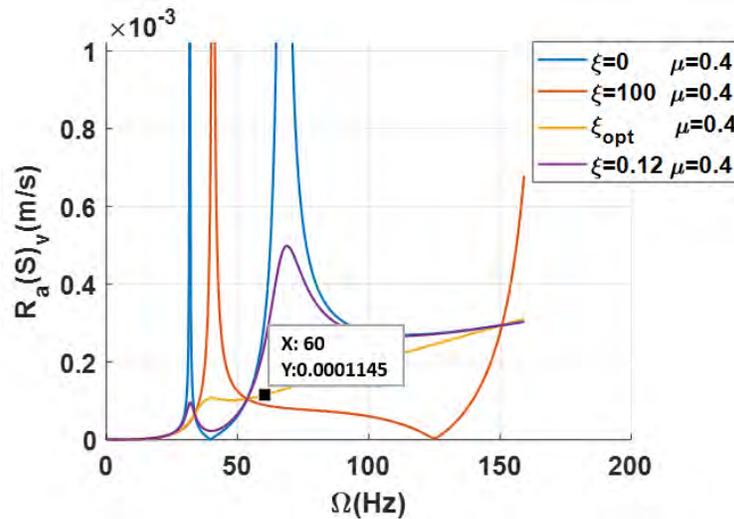


Figura 5-4. Velocidad de vibración del sistema Viga-IDVA. Simulada.

Una vez conocidos los parámetros óptimos de inercia b , coeficiente de amortiguamiento c del inersor reportados en la tabla 8, junto con las propiedades del fluido MR descritas en la sección 3.5.2, Capítulo 3 y la velocidad de vibración del sistema en la frecuencia de excitación de 60 Hz, se sustituyen en las Ecs. (5.7) y (5.8) obteniendo el comportamiento de las áreas transversales del pistón y del canal helicoidal respectivamente en función de la longitud de éste último.

En la figura 5-5 se muestra el comportamiento de las Ecs. (5.7) y (5.8) en función de la longitud del canal helicoidal para una velocidad $\dot{x} = 1.145 \times 10^{-4} m/s$.

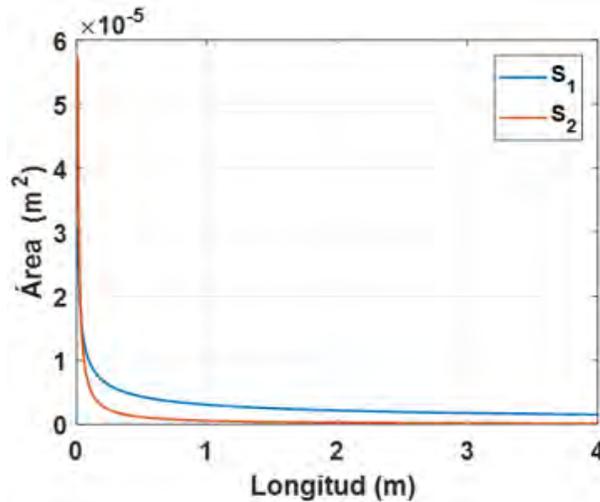


Figura 5-5. Comportamiento de la Ec. (5.7) y (5.8) en función de longitud del canal helicoidal para una velocidad $\dot{x} = 1.145 \times 10^{-4} \text{ m/s}$.

En la figura 5-5 se puede observar que las áreas del pistón S_1 y el canal helicoidal S_2 son muy pequeñas y son imposibles de conseguir en un sistema real. También se puede observar, que conforme la longitud del canal helicoidal se incrementa, el área S_1 y S_2 decrece. De acuerdo con lo anterior, no es posible dimensionar el inersor, por lo que se propone una velocidad \dot{x} de forma aleatoria que nos proporcione áreas del pistón S_1 y el canal helicoidal S_2 congruentes.

Por otra parte, en la figura 5-6 se muestra el comportamiento de las Ecs. (5.7) y (5.8) en función de la longitud del canal helicoidal para una velocidad propuesta de $\dot{x} = 392 \text{ m/s}$.

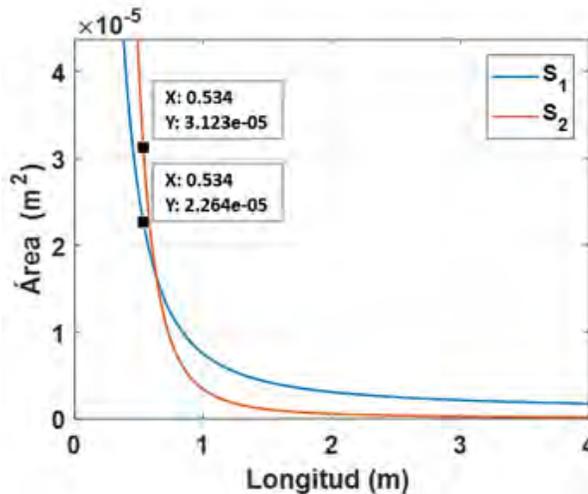


Figura 5-6. Comportamiento de la Ec. (5.7) y (5.8) en función de longitud del canal helicoidal, para una velocidad $\dot{x} = 392 \text{ m/s}$.

Del comportamiento que se presenta en la figura 5-6 de las áreas transversales S_1 y S_2 , se seleccionó tubería de cobre comercial con un diámetro de 5/16" para la manufactura del canal

helicoidal, cuya área efectiva es $S_1 = 3.123 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ y una longitud $l_h = 0.534 \text{ m}$. Asimismo, el área efectiva del pistón se consideró de $S_2 = 2.264 \times 10^{-5} \text{ m}^2$.

Por otra parte, es importante conocer la separación de las espiras del canal helicoidal y ésta se puede calcular como:

$$h_h = \frac{\sqrt{-4\pi^2 n^2 r_4^2 l_h^2 - 4l_h l_0 + 4l_0^2}}{n} \quad (5.9)$$

Se puede observar, que la Ec. (5.9) es función del número de espiras n , el radio de la circunferencia formado por las espiras del canal helicoidal r_4 y sus longitudes l_h y l_0 . Para poder obtener las dimensiones faltantes del inersor, se restringió el radio de la circunferencia formado por las espiras del canal helicoidal $r_4 = 0.0365 \text{ m}$, posteriormente, utilizando r_4 y la longitud del canal helicoidal l_h , se determinó la longitud l_0 , longitud de la entrada o salida del cilindro al canal helicoidal. Finalmente, restringiendo el número de vueltas del canal helicoidal a 2 espiras, se obtiene la separación de las vueltas del canal helicoidal y la longitud de trabajo del cilindro del pistón.

En la tabla 9, se presentan las dimensiones finales del inersor con fluido MR, asimismo, en la figura 5-7, se muestra una vista explosionada de los componentes del prototipo del inersor con la válvula MR. El diseño y la construcción de la válvula MR se realizó por separado y su diseño se describe en la sección 5.1.2.

Tabla 9. Dimensiones efectivas del inersor con fluido MR.

Dimensiones de trabajo del prototipo de inersor con fluido MR.		
Sección del inersor	Valores	Unidades
Área del trabajo de la cara del pistón (S_1)	2.26E-05	(m^2)
Área de la sección transversal del canal helicoidal (S_2)	3.12E-05	(m^2)
Longitud del canal helicoidal (l_h)	0.534	(m)
Separación de las espiras del canal helicoidal (h_h)	0.0526	(m)
Número de vueltas de canal helicoidal (n)	2	Vueltas
Radio de giro de del canal helicoidal (r_4)	0.0365	(m)
Longitud de la entrada o salidas del cilindro (l_0)	0.03172	(m)
Longitud de trabajo del cilindro (l_t)	0.1314	(m)

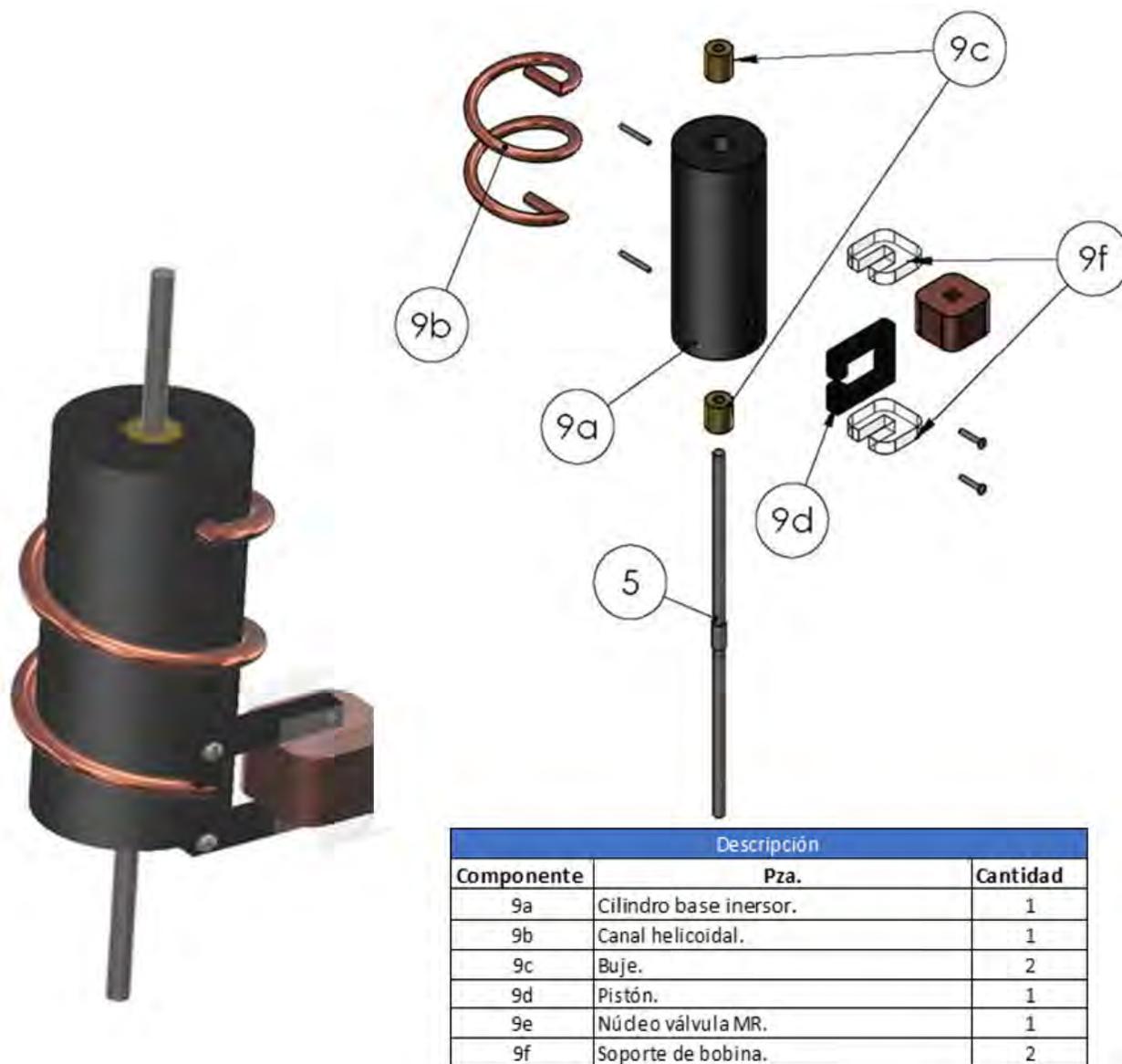


Figura 5-7. Vista preliminar del inertor con fluido considerando la válvula MR.

Para no perjudicar el comportamiento del fluido MR, la selección de los materiales para la construcción del inertor, se realizó con base a las propiedades magnéticas de los materiales. Por lo tanto, los materiales seleccionados son materiales diamagnéticos, tales como: aluminio, cobre, acero inoxidable serie 300, latón y nylomaq, siendo éste último un polímero con propiedades antimagnéticas. En la figura 5-8, se muestra el prototipo de inertor construido.



Figura 5-8. Prototipo físico del inersor confluido MR.

5.1.2 Construcción de la válvula MR

La válvula MR, se construyó tomando como base el diseño del núcleo (modelo 4) presentado de en la Sección 4.3, Capítulo 4. Se construyó el núcleo con un entrehierro, donde se inserta la entrada del canal helicoidal de diámetro 5/16 pulgadas del inersor. Asimismo, para el embobinado del núcleo se consideró alambre magneto calibre 17 awg. Para lograr una intensidad de corriente de 5 amperes, la bobina cuenta con 270 vueltas o espiras. En la figura 5-9 se muestra la válvula MR construida. En el apéndice E se reportan las dimensiones del núcleo magnético y los soportes de la bobina.

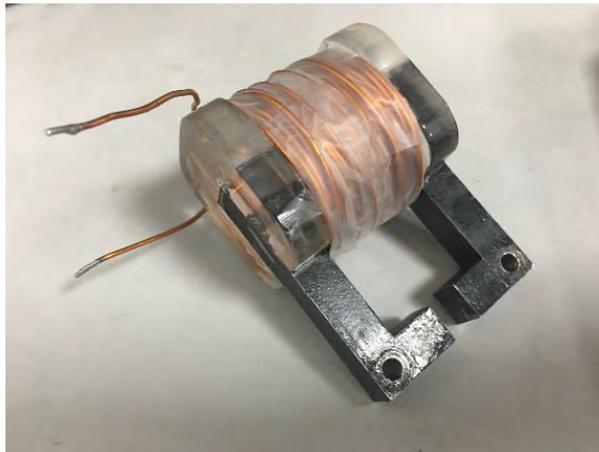


Figura 5-9. Válvula MR adaptable al inersor con fluido.

Con el objetivo de observar el comportamiento del flujo magnético en el entrehierro de la válvula MR, se colocó la entrada del canal helicoidal del inersor en el entrehierro y se varió la corriente de la bobina en un intervalo $0.5 \leq I \leq 5$ amperes con incrementos de 0.5 amperes. En la tabla 10 se muestran los datos del flujo magnético obtenido para cada intensidad de corriente eléctrica, el

flujo magnético reportado se obtuvo en el centro de la sección transversal del canal helicoidal donde se encuentra el fluido MR.

Tabla 10. Comportamiento del flujo magnético en el centro del entrehierro.

Intensidad de corriente eléctrica (amperes)	Flujo magnético (Teslas)
0.5	7.73E-02
1	1.55E-01
1.5	2.33E-01
2	3.11E-01
2.5	3.89E-01
3	4.65E-01
3.5	5.43E-01
4	6.22E-01
4.5	6.95E-01
5	7.76E-01

De acuerdo con los resultados reportados en la tabla 10, se puede observar que con una intensidad de corriente entre 4.5 y 5 amperes, es posible generar un flujo magnético promedio en el entrehierro de 0.73 Teslas, flujo magnético necesario para lograr la saturación magnética del fluido MR tipo MRF-122EG.

5.1.3 Absorbedor dinámico de vibración con inersor IDVA

Para lograr la configuración del IDVA propuesto en la figura 4-1, es necesario que el resorte de rigidez k_1 esté en serie con el inersor y éstos en paralelo con el resorte principal de rigidez k . Cabe mencionar que la rigidez de los resortes seleccionados no cumple con los valores optimizados del sistema reportados en la tabla 10, ya que éstos no son comerciales. En su lugar, se seleccionaron dos resortes comerciales de baja rigidez, cuya nomenclatura se especifica como 028 y 038 para k y k_1 respectivamente, donde $k_1 = 770.81 \text{ N/m}$ y $k = 451.99 \text{ N/m}$. Para calcular la rigidez de los resortes, se realizaron pruebas a compresión utilizando la máquina universal marca SHIMADZU. Ver figura 5-10. Para el análisis, se realizaron 5 pruebas de compresión para cada resorte.



Figura 5-10. Análisis de rigidez de los resortes 028 y 038 respectivamente.

En la tabla 11, se muestran los valores de rigidez obtenidos.

Tabla 11. Resultados del análisis de compresión de los resortes.

Análisis #	Resorte 028	Resorte 038	Unidades
1	464.325	756.574	N/m
2	425.308	777.691	N/m
3	451.224	786.115	N/m
4	456.987	762.141	N/m
5	462.136	771.547	N/m
Promedio	451.996	770.8136	N/m

En la figura 5-11, se muestra la configuración final del IDVA propuesto, así como, cada uno de sus elementos principales.

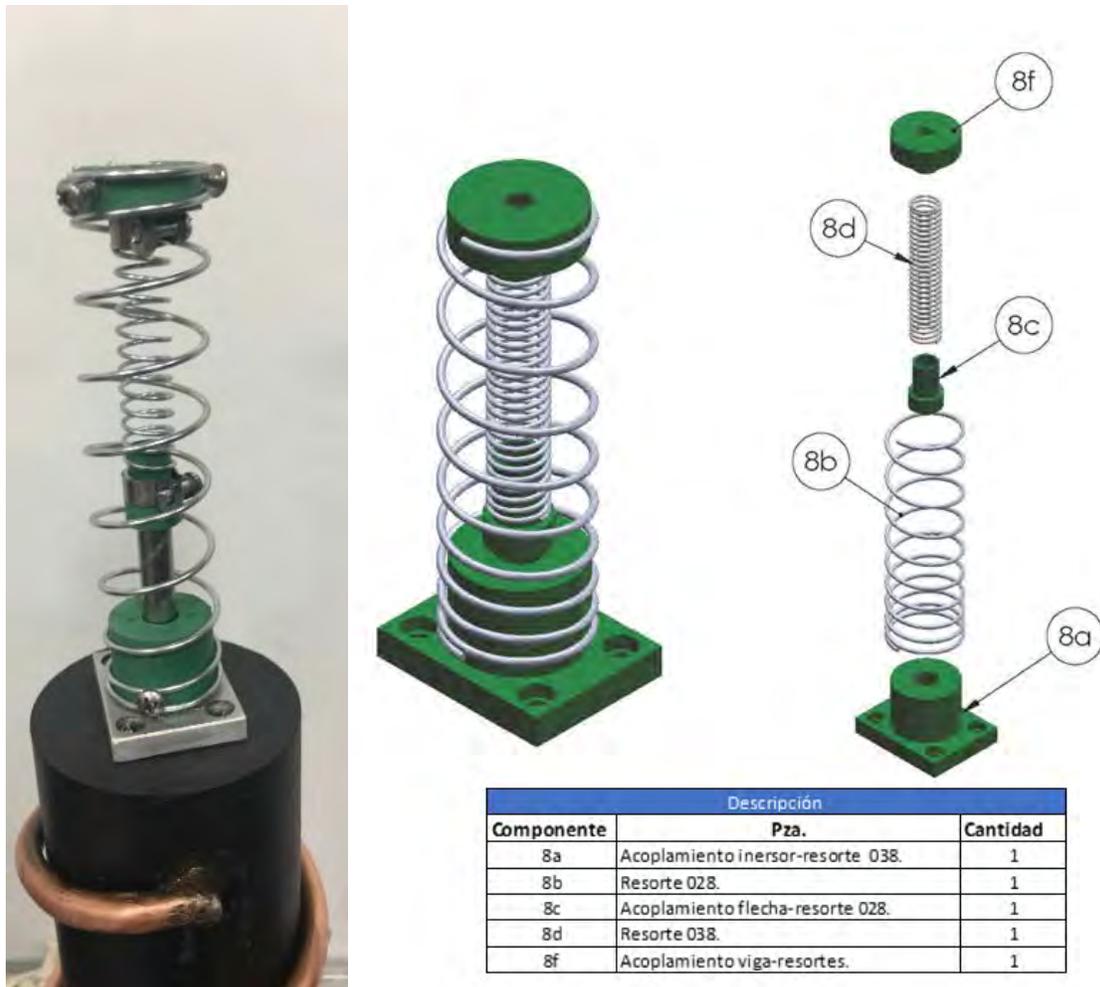


Figura 5-11. Configuración final de IDVA.

Por otra parte en la figura 5-12, se muestra el IDVA propuesto montado en el banco experimental.

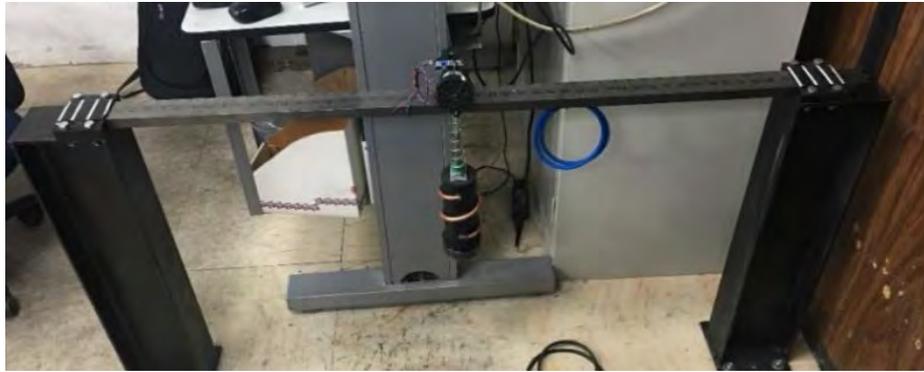


Figura 5-12. Banco experimental de pruebas con el IDVA.

5.2 Comportamiento dinámico del banco experimental

Con el objetivo de inducir una fuerza de excitación de tipo inercial en el banco experimental, se utilizó un motor con un disco inercial donde se coloca una masa de desbalance con una excentricidad controlada. En la figura 5-13, se muestra la fotografía del motor y el disco utilizado.



Figura 5-13. Motor y disco utilizados para inducir una fuerza de excitación inercial al sistema.

Las características del motor de la figura 5-13 se muestran en la tabla 12.

Tabla 12. Propiedades del motor.

Globe Motors		
	Valor	Unidades
Número de serie	403A692	--
Voltaje	24	Volts
Intensidad de corriente sin carga	0.125	Amperes
Intensidad de corriente máxima	1	Amperes
Velocidad	5200	RPM

Para el control del motor, se seleccionó un variador de voltaje comercial de corriente directa modelo DPS8005-USB, que a través de una interface de computadora se realiza un barrido de voltaje que se suministra al motor, generando un incremento constante en su velocidad de giro. En la figura 5-14, se muestra el variador *DC* y la interface de computadora.

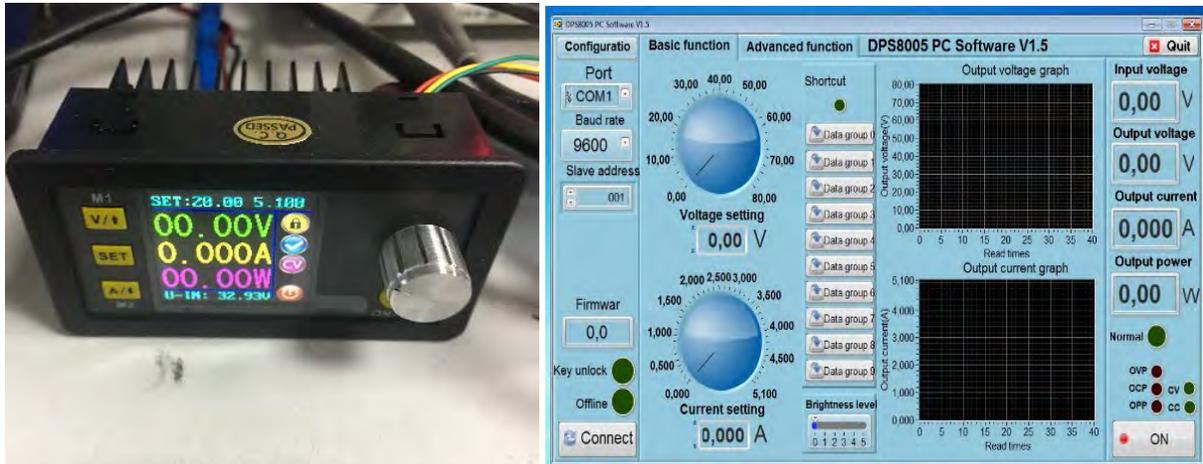


Figura 5-14. Variador de voltaje de corriente directa e interfaz de computadora.

Por otra parte, para la adquisición de datos, se utilizó una tarjeta marca National Instruments modelo 6009. Para medir la respuesta de vibración de la viga, se utilizó un desplazómetro con una sensibilidad de 200 mV/mils y un sensor óptico de seguimiento de línea en el motor para adquirir la velocidad de giro. En la figura 5-15, se muestra el diagrama de las conexiones principales, así como, la ubicación del sensor de desplazamiento.

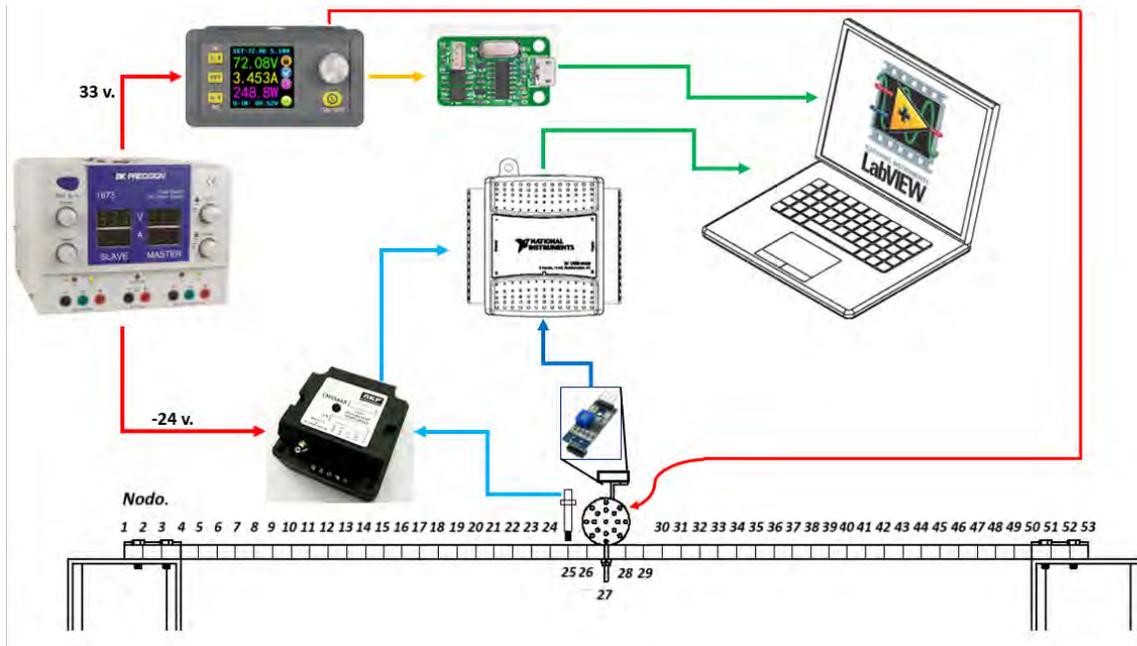


Figura 5-15. Diagrama de conexiones para la adquisición de señales.

5.2.1 Comportamiento dinámico del banco de pruebas con y sin el IDVA

Con el objetivo de analizar el comportamiento dinámico del banco de pruebas, se analizó la respuesta de vibración para diferentes masas de desbalance ($m_d e$), en la tabla 13 se muestran los datos de las 11 diferentes masas de desbalance utilizadas. Donde MUL es la masa por unidad de longitud.

Tabla 13. MUL para la fuerza de excitación inercial.

Masa y excentricidad del disco de desbalance					
Número	Material		Masa (g)	Excentricidad (mm)	MUL.(g-mm)
	Tornillo	Tuerca			
1	Aluminio	Aluminio	1.462	18.26	26.69612
2	Aluminio	Acero Inox.	2.21	18.26	40.3546
3	Aluminio	Latón	2.425	18.26	44.2805
4	Latón	Aluminio	3.078	18.26	56.20428
5	Acero Inox.	Aluminio	3.573	18.26	65.24298
6	Latón	Acero Inox.	3.824	18.26	69.82624
7	Latón	Latón	4.041	18.26	73.78866
8	Acero Inox.	Acero Inox.	4.32	18.26	78.8832
9	Acero Inox.	Latón	4.531	18.26	82.73606
10	Galvanizado	Galvanizado	11.363	18.26	207.48838
11	Galvanizado	Latón	14.5	18.26	264.77

En el apéndice G, se muestran los diagramas de Bode experimentales obtenidos para los diferentes desbalances reportados en la tabla 13 para la viga sin IDVA.

Por otra parte, en las figuras 5-16 a 5-18 se muestra la respuesta de vibración (desplazamiento) del sistema para los desbalances número 1, 6 y 11 reportados en la tabla 13. En estas figuras se compara la respuesta obtenida de forma experimental con la obtenida de forma teórica, se puede observar que la respuesta obtenida de forma teórica presenta un comportamiento similar a la respuesta del sistema obtenida de forma experimental. Cabe mencionar, que para la respuesta teórica se utilizó un modelo matemático de múltiples grados de libertad desarrollado en elemento finito.

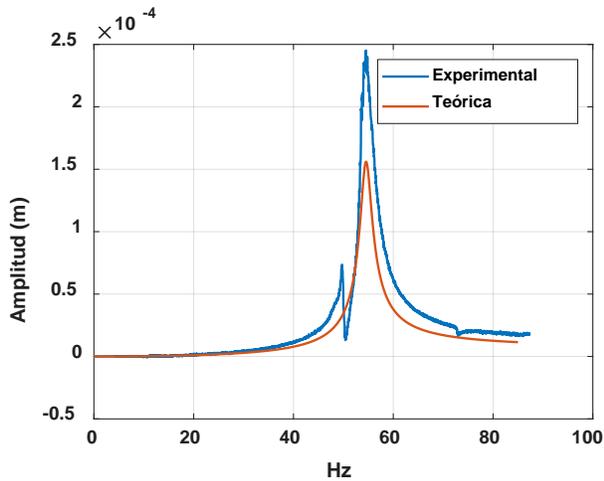


Figura 5-16. Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=26.69612$ g-mm.

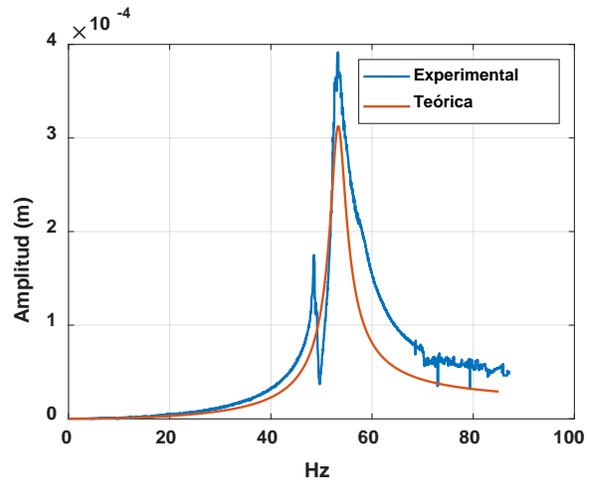


Figura 5-17. Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=69.8262$ g-mm.

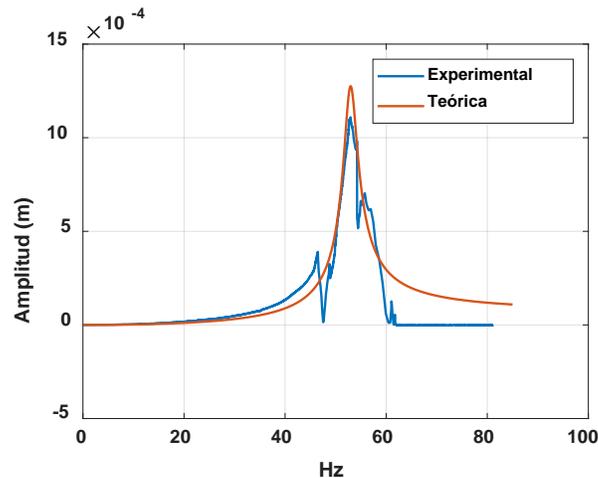


Figura 5-18. Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=264.77$ g-mm.

De las figuras 5-16 a la 5-18 se puede observar que conforme se incrementa la masa del desbalance, también se incrementa la amplitud de vibración, sin embargo, cuando al sistema se le coloca una masa de desbalance $MUL \geq 78.88$ g-mm, la respuesta de vibración se vuelve inestable en la zona de resonancia en el intervalo de 50 a 60 Hz, esto es a causa del control del motor, es decir, el control está en función de la intensidad de corriente eléctrica que demanda el motor, de tal forma, que cuando el sistema se encuentra cerca de la resonancia, el motor entra en resonancia junto con el sistema, generando amplitudes de vibración del sistema que rebasa un límite, lo que provoca que el motor demande más corriente superando la intensidad de corriente con la que trabaja nominalmente. En consecuencia, se genera inestabilidad en el control del motor que se ve reflejado en la respuesta de vibración de la viga. Una forma simple de corroborar lo anterior, es mediante el análisis de la rampa de excitación de tipo lineal del motor, de tal forma, que cuando la rampa de excitación presenta un comportamiento lineal, el motor trabaja normalmente y el incremento de velocidad es constante. Por el contrario, si la rampa de

excitación presenta un comportamiento no lineal el incremento de la velocidad no es constante y provoca inestabilidad en el sistema. El comportamiento antes descrito, se puede observar en la figura 5-19.

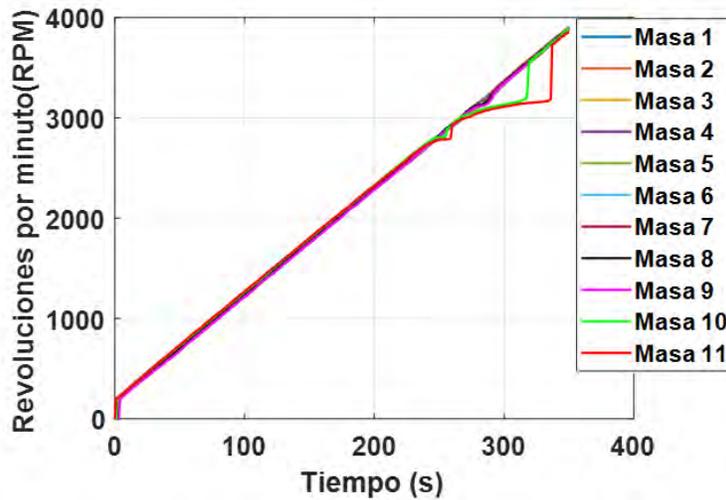


Figura 5-19. Rampas de excitación tipo lineal del control del motor, estructura sin IDVA para cada desbalance reportado en la tabla 13.

De manera similar, se analizó la respuesta de vibración de la viga del banco de pruebas con el IDVA montado, tal y como se muestra en la figura 5-12. En el apéndice G, se muestran los diagramas de Bode experimentales obtenidos para los diferentes desbalances reportados en la tabla 13, para la viga conectada al IDVA. Para lo anterior se utilizó el fluido reológico tipo MRF-122EG, como fluido para el inersor.

Por otra parte, en las figuras 5-20 a 5-22 se muestra la respuesta de vibración (desplazamiento) del sistema para los desbalances número 1, 6 y 11 reportados en la tabla 13.

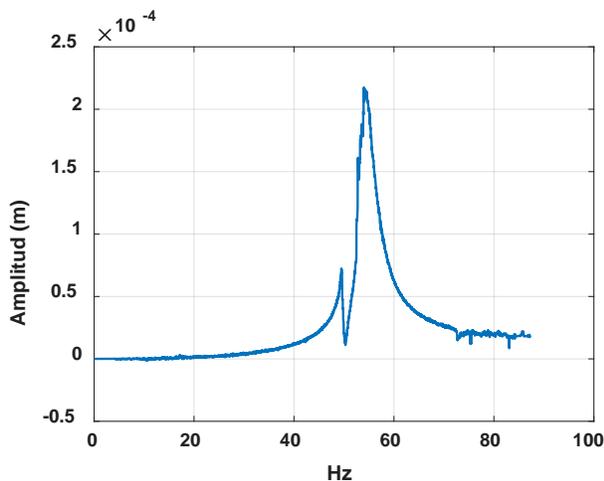


Figura 5-20. Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance MUL=26.69612 g-mm.

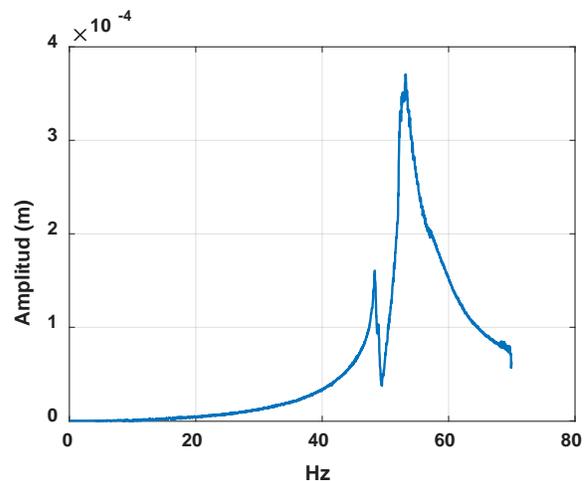


Figura 5-21. Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance MUL=69.8262 g-mm.

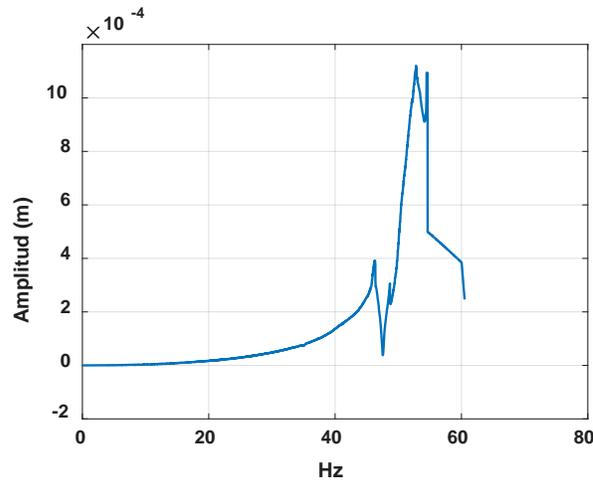


Figura 5-22. Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance rotatorio $MUL=264.77$ g-mm.

Con el objetivo de observar el efecto generado por el IDVA en la respuesta del sistema Viga-IDVA, se comparó la respuesta reportada en las figuras 5-16 a la 5-18 (viga sin IDVA) con la respuesta reportada en las figuras 5-20 a la 5-22 (viga con IDVA). En las figuras 5-23 a la 5-25 se muestra la comparación de la respuesta de la viga con y sin IDVA.

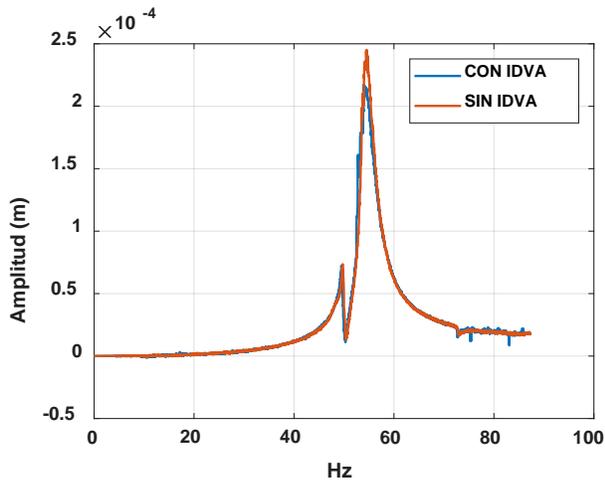


Figura 5-23. Respuesta de la vibración. Viga con IDVA vs viga sin IDVA. $MUL = 26.69612$ g-mm.

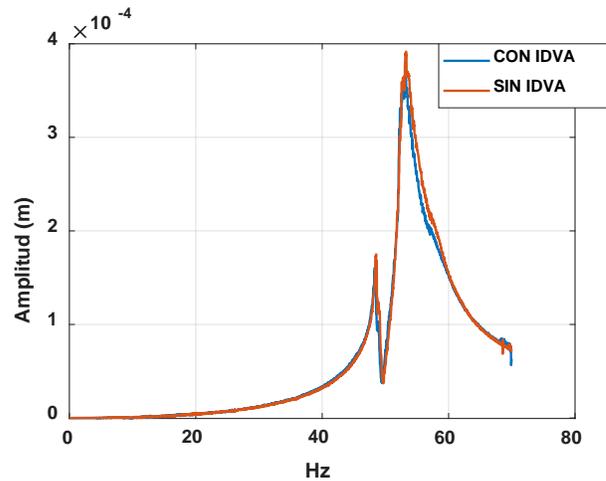


Figura 5-24. Respuesta de la vibración. Viga con IDVA vs viga sin IDVA. $MUL = 69.8262$ g-mm.

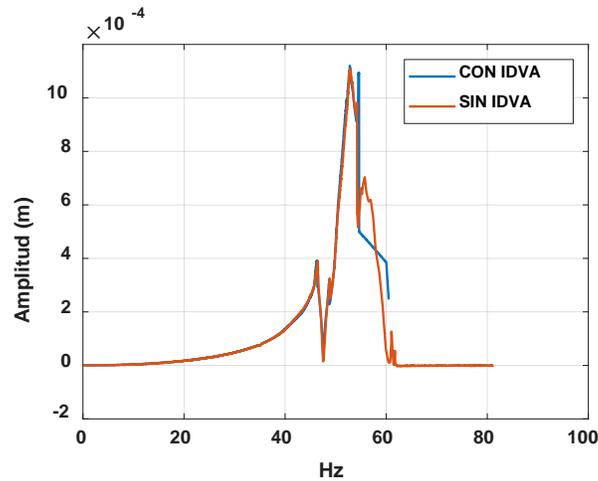


Figura 5-25. Respuesta de la vibración. Viga con IDVA vs viga sin IDVA. $MUL = 264.77 \text{ g-mm}$.

De las figuras 5-23 a la 5-25 se puede observar que ambas respuestas son similares. Lo anterior se debe principalmente, a que la fuerza de excitación proporcionada por el desbalance del sistema, no es lo suficientemente grande para activar el IDVA. Cabe recordar, que para poder dimensionar el diseño del IDVA se consideró una velocidad del sistema que no correspondía a la velocidad de la respuesta del sistema, además de que la rigidez de los resortes k_1 y k seleccionados no corresponde con la rigidez óptima calculada.

Por otra parte, con el objetivo de demostrar la funcionalidad del inersor, se eliminaron los resortes con rigidez k_1 y k del IDVA, utilizando el inersor como un amortiguador reológico. Para lo anterior, se fijó una de las terminales del inersor al suelo y la otra terminal al banco de pruebas experimental, tal y como se muestra en la figura 5-26.



Figura 5-26. Configuración del banco experimental con el inersor como amortiguador reológico.

Para el análisis de la respuesta de vibración del sistema con la nueva configuración del inersor se utilizó los desbalance número 6 y 11 reportados en la tabla 13. En las figuras 5-27 y 5-28 se

muestra la comparación de la respuesta de vibración para los casos donde se consideró el sistema como Viga-IDVA, Viga-Inersor (sin fluido), Viga-Inersor (con fluido sin campo magnético).

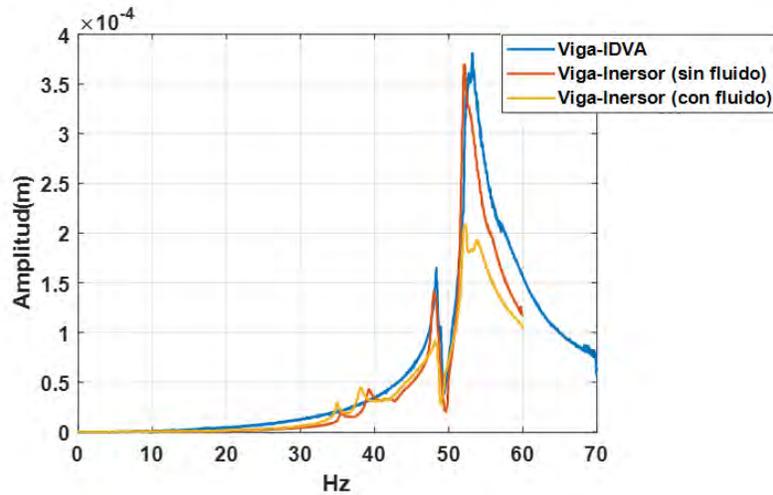


Figura 5-27. Respuesta del sistema como Viga-IDVA, Viga-Inersor (sin fluido), Viga-Inersor (con fluido sin campo magnético). $MUL=69.8262$ g-mm.

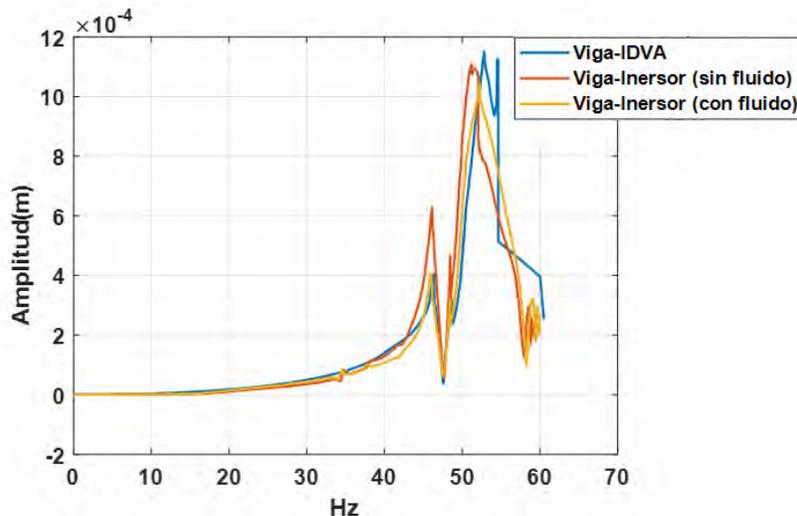


Figura 5-28. Respuesta del sistema como Viga-IDVA, Viga-Inersor (sin fluido), Viga-Inersor (con fluido sin campo magnético). $MUL=264.77$ g-mm.

En la figura 5-27 se puede observar que la respuesta de vibración para los sistemas Viga-IDVA, Viga-Inersor (sin fluido) son muy similares, es decir, el efecto generado por el IDVA y el inersor en el comportamiento de la viga no es significativo, sin embargo cuando el sistema se considera como Viga-Inersor (con fluido sin campo magnético) la respuesta de vibración se reduce aproximadamente el 50%, lo que muestra, que el inersor funciona como un amortiguador en el sistema. En contraste, en la figura 5-28 se puede observar que para todos los casos, sistema como Viga-IDVA, Viga-Inersor (sin fluido) y Viga-Inersor (con fluido sin campo magnético) no existe un cambio significativo en la respuesta de vibración, esto se debe a que como se mencionó

anteriormente para el desbalance número 11 reportado en la tabla 13, $MUL=264.77$ g-mm, el sistema presenta inestabilidad en la respuesta de vibración, lo que genera que la respuesta no se estabilice manteniendo la misma amplitud de vibración hasta salir de la zona de resonancia.

5.2.2 Comportamiento dinámico considerando al sistema como configuración viga en cantiléver

Por otra parte, con el objetivo de demostrar la funcionalidad del inersor, se utilizó el IDVA y el inersor en un banco experimental con una viga en cantiléver, para el caso del inersor se fijó una de las terminales del inersor al suelo y la otra terminal al banco de pruebas experimental, tal y como se muestra en la figura 5-29. Para lo anterior, se utilizó una viga de acero 1018 con una longitud de 60 cm. Las propiedades y geometría de la viga se reportan en la tabla 7.

Para el análisis la viga se discretizó en 12 elementos dando como resultado 13 nodos. La respuesta de vibración del sistema se obtuvo en el nodo 7 utilizando un desplazómetro tipo Eddy current con una sensibilidad de 200 mV/mils. Para evitar que se presentara inestabilidad en el sistema, se consideró como fuerza de excitación los desbalances número 1 y 6 reportados en la tabla 13.



Figura 5-29. Configuración de viga en cantiléver del banco experimental.

En las figuras 5-30 y 5-31 se muestra la comparación de la respuesta de vibración para los casos donde se consideró el sistema como viga en cantiléver, viga en cantiléver-IDVA y viga en cantiléver-inersor.

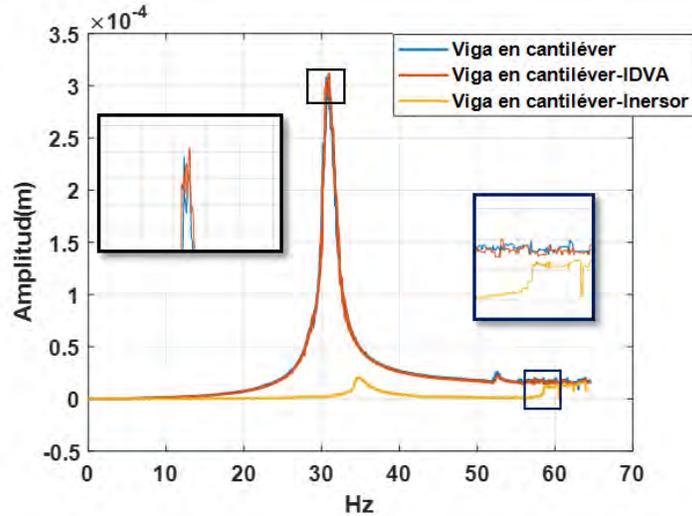


Figura 5-30. Respuesta de vibración. Viga en cantiléver, viga en cantiléver-IDVA y viga en cantiléver-Inersor. $MUL=26.6961$ g-mm.

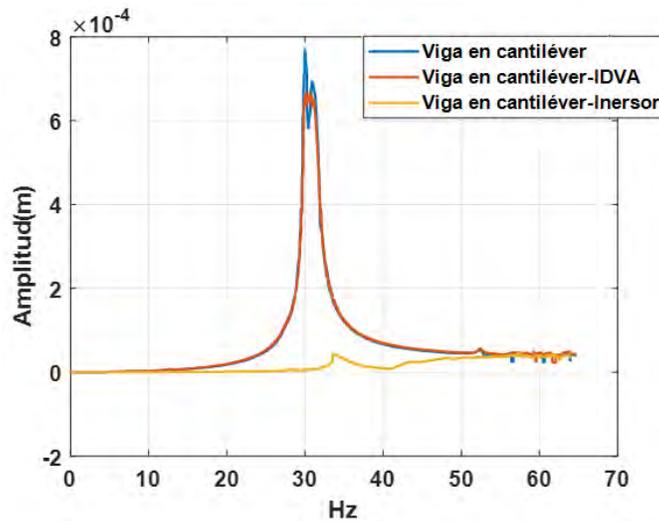


Figura 5-31. Respuesta de vibración. Viga en cantiléver, viga en cantiléver-IDVA y viga en cantiléver-Inersor. $MUL=69.8262$ g-mm.

Tomando como referencia la respuesta de vibración de la viga en cantiléver, en las figuras 5-30 y 5-31 se puede observar que cuando el sistema se considera como viga en cantiléver-IDVA la respuesta de vibración del sistema disminuye alrededor de un 13.15%, se concluye que la fuerza de excitación proporcionada por el desbalance del sistema, no es lo suficientemente grande para activar el IDVA. En contraste, cuando el sistema se considera como viga en cantiléver-inersor la respuesta de vibración disminuye en un 94.39%, lo que muestra, que el inersor funciona como un amortiguador en el sistema.

Con la finalidad de observar el comportamiento del inersor acoplado a la válvula magnetorreológica, se seleccionó el sistema viga en cantiléver-inersor. Para este sistema, se analizó la respuesta de vibración variando la intensidad de corriente de la válvula MR en el

intervalo $0 \leq I \leq 4$ con incrementos de 1 ampere. Para el análisis se consideró el desbalance número 9 ($MUL=82.7360$ g-mm) reportado en la tabla 13.

En la figura 5-32 se muestra la comparación de la respuesta de vibración del sistema viga en cantiléver-inersor para las diferentes intensidades de corriente en la válvula MR.

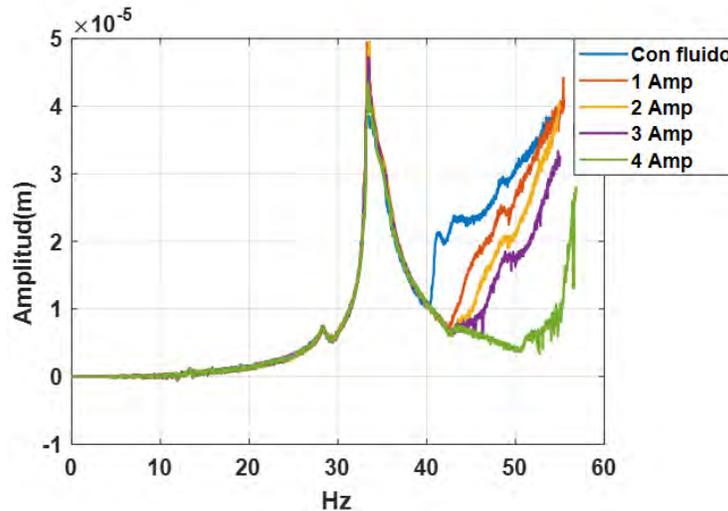


Figura 5-32. Respuesta de vibración del sistema viga en cantiléver-inersor variando la intensidad de corriente en la válvula MR. $MUL= 82.7360$ g-mm.

En la figura 5-32 se observa que al incrementar la intensidad de corriente en la válvula MR, la respuesta de vibración del sistema sufre pequeños cambios que no son significativos en la amplitud de vibración en la primera frecuencia natural del sistema, sin embargo, la amplitud de vibración del sistema disminuye significativamente pasando la resonancia correspondiente a la primera frecuencia natural, posteriormente la amplitud de vibración se incrementa nuevamente.

5.3 Comportamiento del inersor con fluido MR en pruebas de tensión y compresión

Para las pruebas de tensión y compresión, se consideró únicamente el inersor y se utilizó una máquina universal marca SHIMADZU. El objetivo de esta serie de pruebas, es determinar la fuerza necesaria para poder desplazar el pistón del inersor 70 mm sin fluido y con fluido, suministrando diferentes intensidades de corriente eléctrica a la bobina MR. Para las pruebas realizadas se consideró un ciclo cerrado de desplazamiento, donde el pistón del inersor se desplazó 70 mm en modo tensión, con una velocidad constante de 800 mm/min, posteriormente, el pistón retornó a su posición original a una velocidad constante de 500 mm/min. Para acoplar el inersor en la máquina universal, fue necesario manufacturar un elemento mecánico de sujeción donde se pudiera fijar la carcasa del inersor en la máquina universal, figura 5-33 (a). En la figura 5-33 (b), se muestra el montaje del inersor.

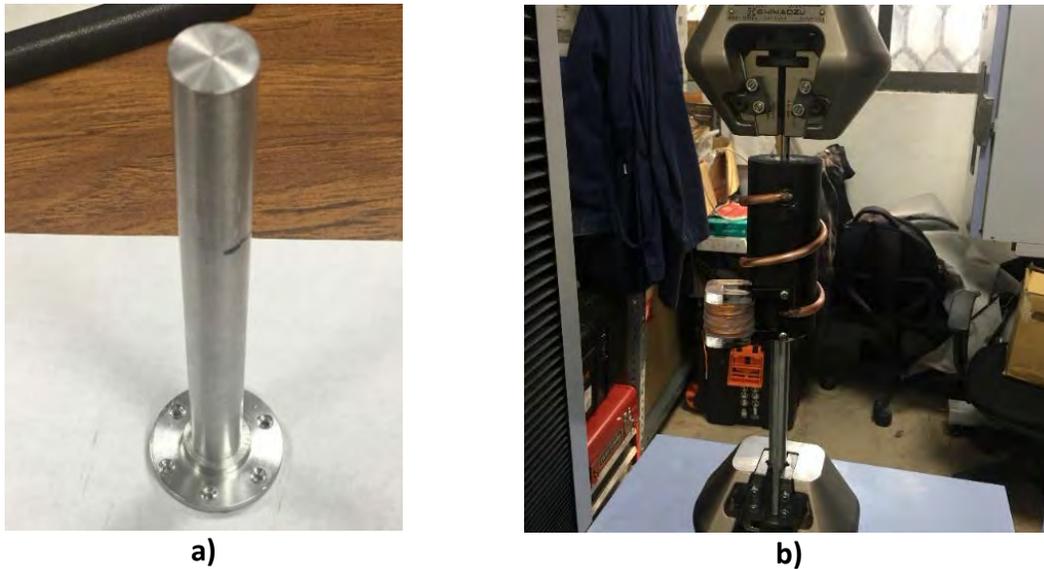


Figura 5-33: a) Aditamento mecánico de sujeción, b) montaje del inersor MR.

Para determinar la fuerza requerida para vencer la fricción que existe entre pistón con los bujes y el cilindro, se realizó una prueba inicial del inersor sin el fluido MR. Posteriormente, se agregó el fluido MR tipo MRF-122EG y mediante la válvula magnetorreológica, se sometió al fluido a un campo magnético variando la intensidad de corriente en el intervalo $0.5 \leq I \leq 3$ con incrementos de 0.5 amperes. Ver figura 5-34.



Figura 5-34: Pruebas de tensión-compresión del inersor MR.

Con el objetivo de observar una repetitividad en los resultados obtenidos, cada prueba se realizó 10 veces. Los resultados obtenidos para cada una de las pruebas se muestran en las figuras 5-35 a la 5-50. Para cada caso, se muestran las curvas de histéresis para las 10 pruebas realizadas, así como, la curva de histéresis promedio.

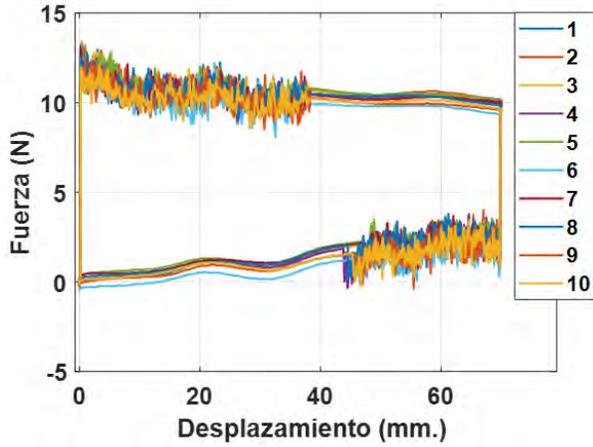


Figura 5-35. Fuerza del Inersor sin fluido MR.

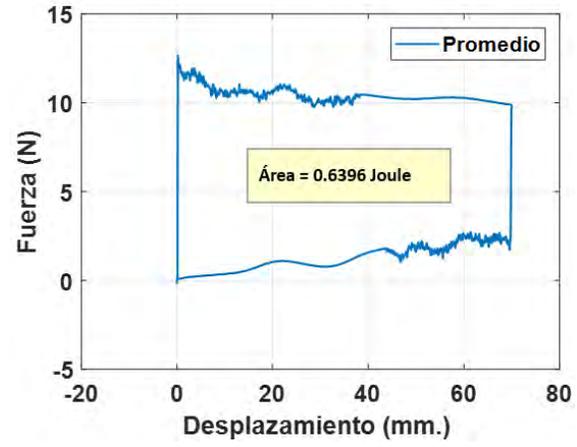


Figura 5-36. Fuerza promedio, inersor sin fluido MR.

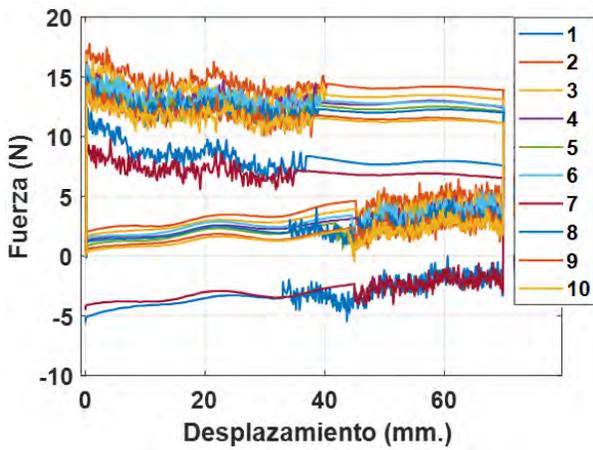


Figura 5-37. Fuerza del Inersor con fluido MR.

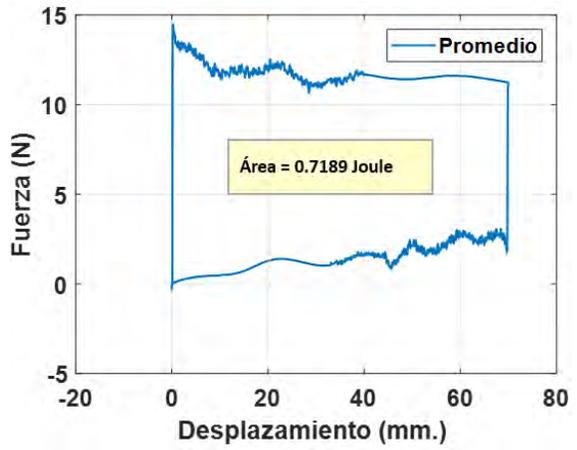


Figura 5-38. Fuerza promedio, inersor con fluido MR.

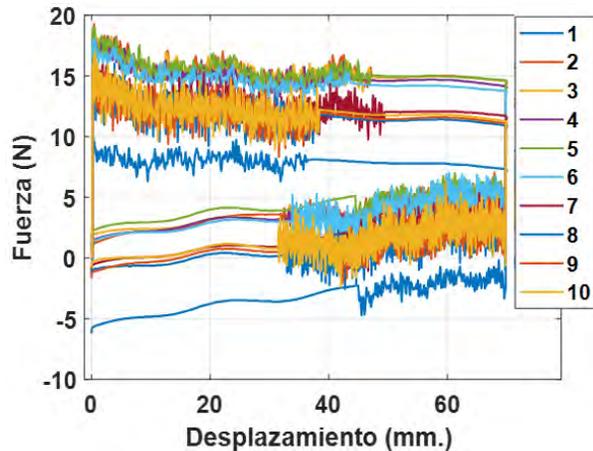


Figura 5-39. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 0.5$ amp.

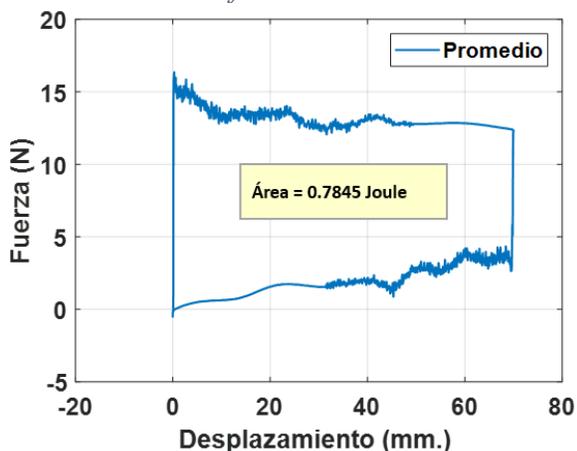


Figura 5-40. Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 0.5$ amp.

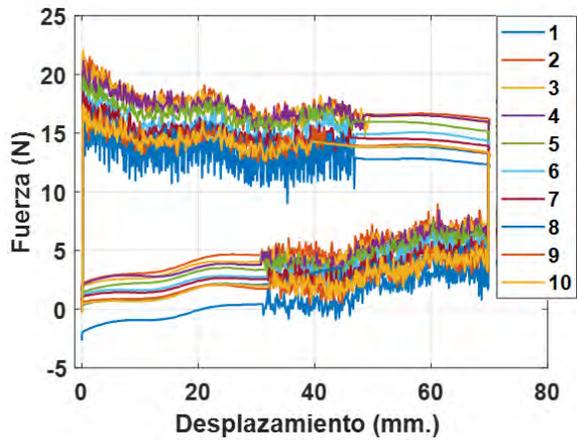


Figura 5-41. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 1$ amp.

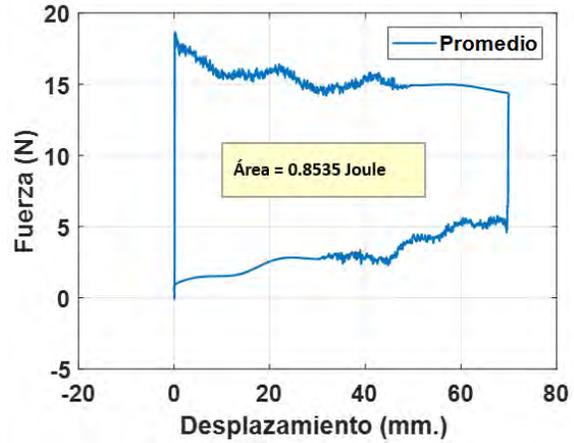


Figura 5-42. Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 1$ amp.

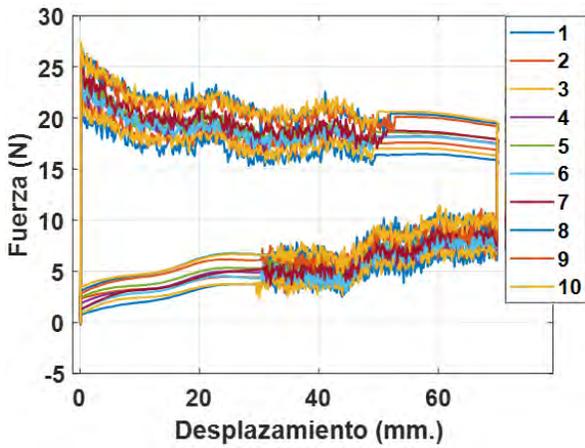


Figura 5-43. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 1.5$ amp.

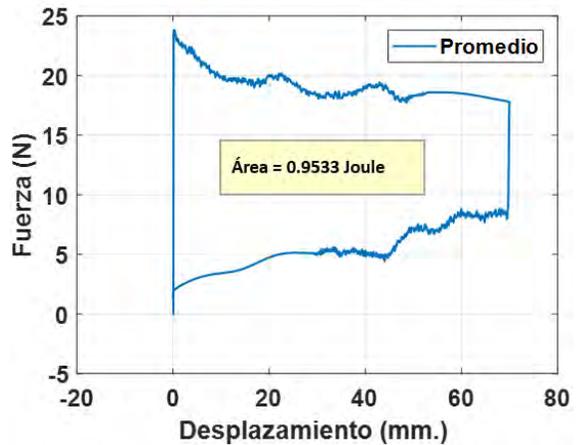


Figura 5-44. Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 1.5$ amp.

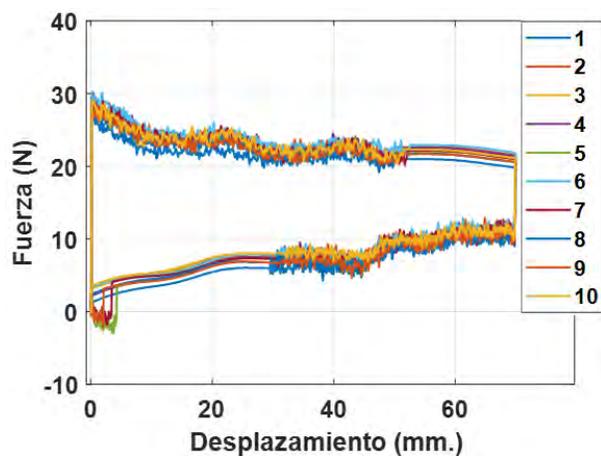


Figura 5-45. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 2$ amp.

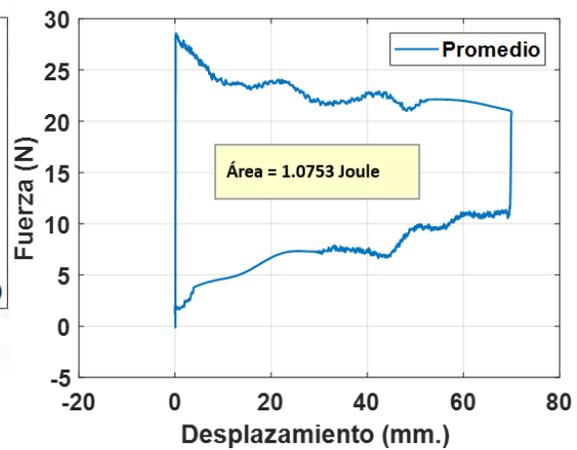


Figura 5-46. Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 2$ amp.

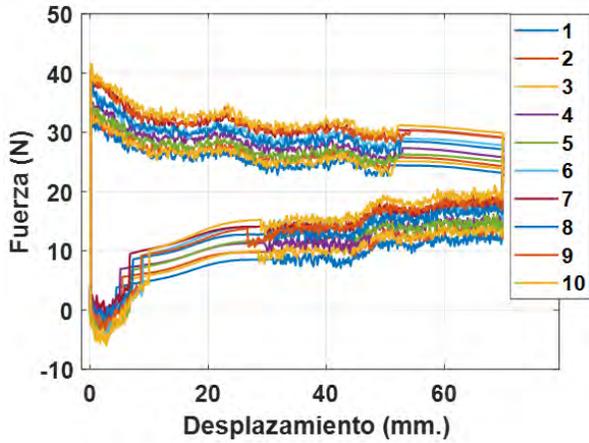


Figura 5-47. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 2.5$ amp.

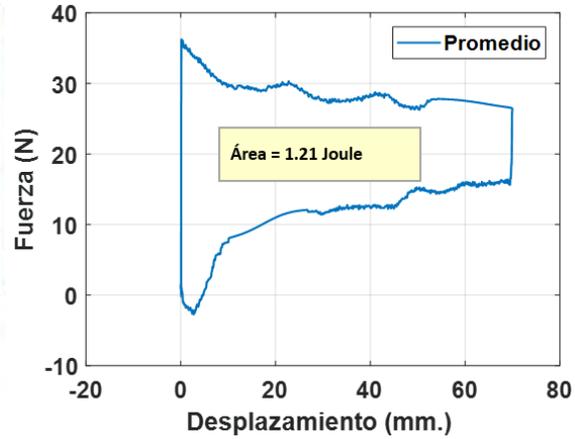


Figura 5-48. Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 2.5$ amp.

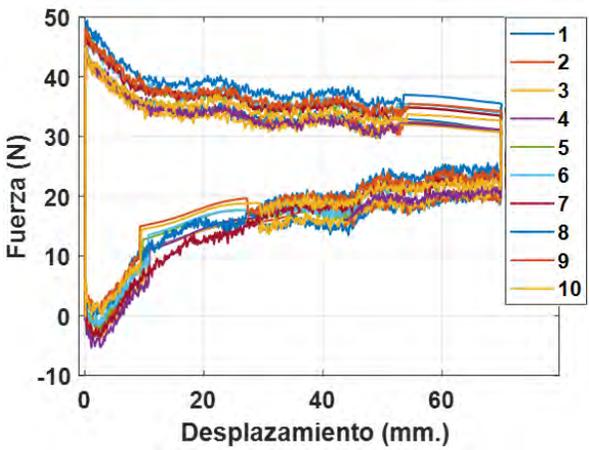


Figura 5-49. Fuerza del inersor con fluido MR, $I = 3$ amp.

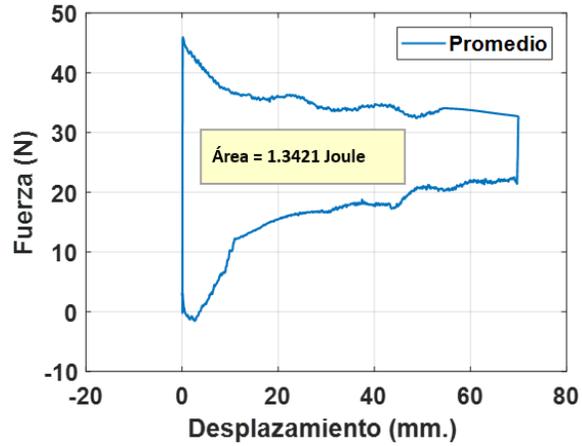


Figura 5-50. Fuerza promedio, inersor con fluido, $I = 3$ amp.

Los resultados obtenidos muestran que a mayor intensidad de corriente se requiere una fuerza mayor para desplazar el pistón, esto se debe al cambio de propiedades del fluido al estar sometido a un campo magnético. En la figura 5-51, se muestra el comportamiento de la fuerza del inersor cuando éste se encuentra sometido exclusivamente a tensión, es decir cuando el pistón del inersor se desplaza 70 mm a una velocidad de 800 mm/min (0.013 m/s).

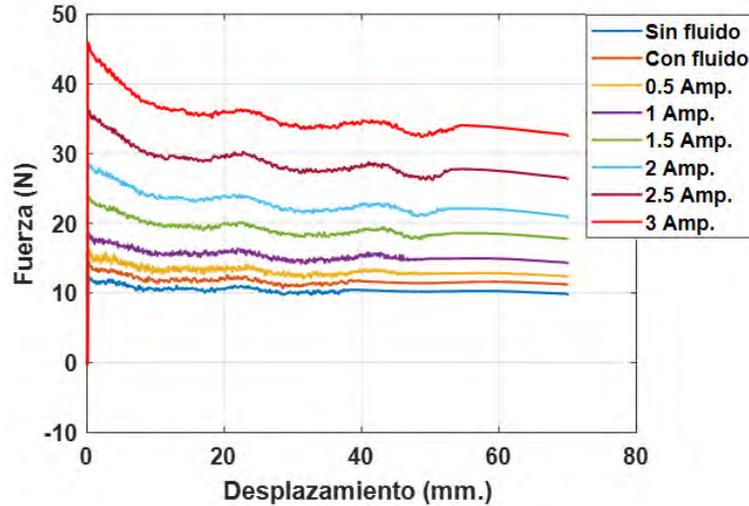


Figura 5-51. Comportamiento de la fuerza del inersor para los diferentes casos de la intensidad de corriente.

Por otra parte, en la figura 5-52 se muestra el comportamiento de la fuerza del inersor en el proceso de tensión a causa exclusivamente de fluido, para lo anterior, se obtiene la diferencia de la fuerza del inersor con fluido para las diferentes intensidades de corriente con la fuerza que se obtuvo del inersor sin fluido.

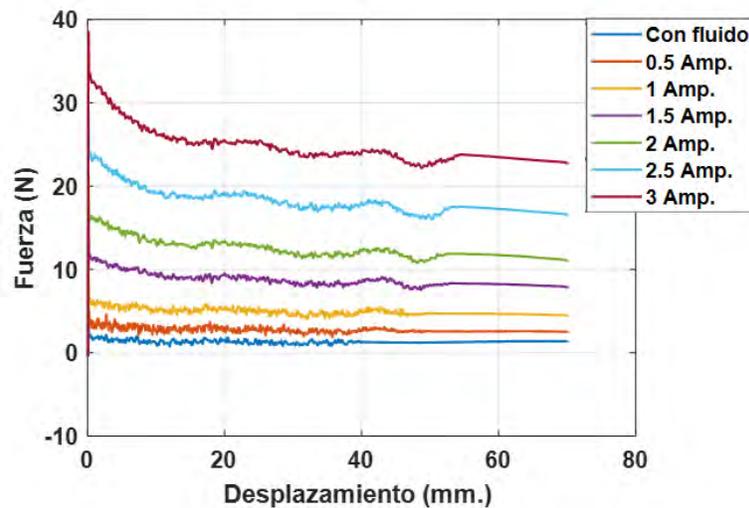


Figura 5-52. Comportamiento de la fuerza del inersor a causa del fluido MR.

De la figura 5-52 se puede observar que para todos los casos al principio del desplazamiento del ciclo del inersor, la fuerza necesaria para desplazar el pistón es mayor, esto se debe al coeficiente de fricción estático, este fenómeno se presenta en los primeros 10 mm de desplazamiento, posteriormente la fuerza se estabiliza a un valor determinado.

Por otra parte, para determinar la energía disipada por el inersor para cada caso de incremento de intensidad de corriente en la válvula MR, se calculó el área de las curvas de histéresis del ciclo de desplazamiento del inersor, el área calculada se muestra para cada caso en las figuras 5-36, 5-38, 5-40, 5-42, 5-44, 5-46, 5-48 y 5-50. En la figura 5-53 se muestra la energía disipada para cada intensidad de corriente de la válvula MR.

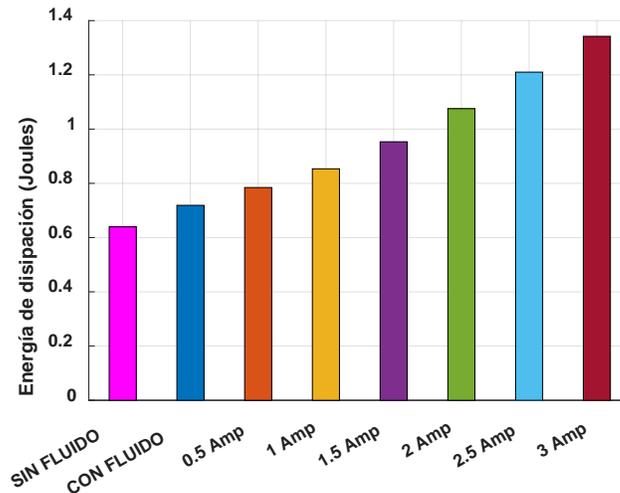


Figura 5-53. Energía de disipación.

Al incrementar la intensidad de corriente en la válvula MR, en consecuencia el campo magnético al que está expuesto el fluido MR del inersor, también se incrementa. En la figura 5-53 se puede observar que conforme se incrementa el campo magnético en la válvula MR la energía disipada por el inersor también se incrementa. Tomando como referencia la energía disipada por el inersor sin fluido, para el caso cuando se tiene una intensidad de corriente de 3 amperes se incrementó hasta en un 70%. Finalmente, en el siguiente Capítulo, se describen las conclusiones de esta investigación tomando en cuenta el modelado matemático, las simulaciones y la adquisición de las señales del banco experimental y posteriormente, se señalan los trabajos futuros para seguir con la línea de investigación, remarcando los aspectos que se pueden mejorar e ideas para posteriores trabajos.

Conclusiones y trabajos futuros

Conclusiones

En este trabajo se presenta el desarrollo matemático que muestra el comportamiento dinámico de una viga doblemente empotrada conectada a un absorbedor dinámico de vibración con inersor (IDVA). La estructura viga-IDVA se analizó para una excitación de tipo armónica, así como una excitación de tipo inercial. El IDVA propuesto consta de un inersor en paralelo con un amortiguador conectado en serie con un resorte, estos a su vez están conectados en paralelo con un resorte adicional, el inersor propuesto trabaja con un fluido magnetorreológico tipo MRF-122EG.

El modelo matemático se validó de forma numérica con resultados reportados en la literatura. Se analizó y estudió el problema de optimización, donde se minimizó el valor máximo de las funciones de respuesta en el dominio de la frecuencia de la viga en un intervalo de frecuencias determinado. El problema de minimización se realizó considerando una fuerza de excitación armónica e inercial en el sistema.

Tomando como base los parámetros optimizados obtenidos en la simulación numérica del sistema vibratorio de la viga, se propone una metodología para el diseño y dimensionamiento del inersor con fluido magnetorreológico. Asimismo, se diseñó una bobina que se conecta en la entrada del canal helicoidal del inersor que proporciona un flujo magnético de 0.7 Tesla, flujo necesario con el que se alcanza la saturación del fluido magnetorreológico.

Se diseñó y construyó un banco experimental que consta de una viga doblemente empotrada conectada al IDVA propuesto. Se analizó la respuesta de vibración de la viga con y sin IDVA, de los resultados obtenidos, se observó que la respuesta de vibración con y sin IDVA es muy similar, de lo que se concluye que IDVA no se activa con la vibración presente en el sistema, esto se debe posiblemente a que las fuerzas a causa de la fricción que existen entre el pistón con los bujes y carcasa del inersor no son superadas por las fuerzas generadas por la vibración del sistema.

Se analizó la respuesta de vibración del sistema utilizando el inersor como un amortiguador reológico para una viga doblemente empotrada y una viga en cantiléver, en ambos casos, se fijó una de las terminales del inersor al suelo y la otra al elemento viga. Para el primer caso, se observó una disminución en la respuesta de vibración del 50% comparada con la respuesta de vibración de la viga sin el inersor. Mientras que para el segundo caso, se observó una disminución en la respuesta de vibración del 94.39% comparada con la respuesta de vibración del mismo sistema sin inersor.

Se analizó la respuesta de vibración conectando el IDVA a una viga en cantiléver, de los resultados obtenidos, se observó que la respuesta de vibración con y sin IDVA es muy similar, de lo que se concluye, que la fuerza de excitación proporcionada por el desbalance del sistema, no es lo suficientemente grande para activar el IDVA.

Del análisis de la respuesta de vibración del sistema viga en cantiléver conectada al inersor como amortiguador reológico variando la intensidad de corriente en la válvula MR, se concluye que conforme se incrementa la intensidad de corriente, la amplitud de vibración en el sistema disminuye de manera significativa pasando la resonancia correspondiente a la primer frecuencia natural.

De acuerdo con lo anterior, se realizaron pruebas de tensión al inersor diseñado para determinar la influencia del campo magnético en el fluido del inersor en las fuerzas de amortiguamiento, de los resultados obtenidos se determinó que conforme se aumenta el campo magnético, se incrementa la fuerza de amortiguamiento y su energía de disipación hasta en un 70% comparado con la energía disipada por el inersor con fluido sin campo magnético. Asimismo, se encontró que se necesita una fuerza de magnitud de aproximadamente 10 N para vencer las fuerzas de fricción del inersor. La caracterización del inersor, estuvo limitada a la velocidad límite de la máquina de tensión 800 mm/min (0.013m/s), velocidad que se considera muy baja para determinar de manera confiable las fuerzas de amortiguamiento del inersor.

Se concluye que no fue posible validar de forma experimental, los resultados obtenidos en la simulación numérica del comportamiento dinámico del sistema viga-IDVA, sin embargo, se presenta un prototipo de IDVA que puede ser caracterizado para trabajos futuros.

Trabajos futuros

Conforme a los inconvenientes presentados en este trabajo se tienen los siguientes trabajos futuros:

- Realizar la validación del modelo matemático de la estructura tipo viga con el aislador dinámico de vibración de forma experimental. Considerando el inersor con fluido MR.
- Realizar una caracterización del fluido MRF-122EG, para verificar si los datos experimentales coinciden con los descritos en la literatura.
- Realizar el modelado matemático del inersor con fluido agregando los efectos del fluido MR. Posteriormente, realizar la validación del modelado matemático de forma experimental.
- Mejorar el sistema de control de la fuerza de excitación para que se pueda obtener la respuesta de estado estable con una mayor fuerza de excitación y así poder ver el efecto del inersor con fluido en la estructura.
- Implementar un control en tiempo real de la válvula MR, para mejorar su comportamiento variando la carga aplicada y poder sintonizar la corriente ideal, para un sistema sin necesidad de realizar la optimización del inersor con fluido MR

Bibliografía

- [1] M. C. Smith, «Synthesis of Mechanical Networks: The inerter,» *Transaction on automatic control*, vol. 47, nº 10, pp. 1648-1662, 2002.
- [2] Carrillo, «Materiales inteligentes y sostenibles, estudio de aplicaciones industriales,» *VI Congreso nacional de ingeniería mecánica*, 2010.
- [3] X. Biao, «Review on magneto-rheological fluid and its application,» *American Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, vol. 2, pp. 70-74, 2014.
- [4] M. R., «Properties and Applications of Commercial Magnetorheological Fluids,» *Lord Corporation*.
- [5] K. Madhamshetty, «Low-Rate characterization of a mechanical inerter,» *machines*, vol. 6, pp. 1-23, 2018.
- [6] X. Liu, «Testing and modelling of the damping effects for fluid-based inerters,» *ScienceDirect*, vol. 199, p. 435-440, 2017.
- [7] D. Hartong, «Damped Vibraton Absorber,» de *Mechanical Vibrations*, New York, Mc Graw Hill, 1947, pp. 129-199.
- [8] R. G. Jacquot, «Optimal dynamic vibration absorbers for general beam systems,» *Journal of sound and vibration*, vol. 60, nº 4, pp. 535-542, 1978.
- [9] A. Lago, «Damping technologies for tall buildings: new trends in comfort and safety,» *ELSEVIER*, 2010.
- [10] D. N. Manikanahally, «Vibration absorbers for hysteretical damped mass-loaded beams,» *Transations of ASME*, vol. 113, 1991.
- [11] D. Yadav, «Transverse vibracion of multi mass loaded variable section beams under randon excitation,» *Journal of sound and vibration* , vol. 207, nº 2, pp. 151-173, 1997.
- [12] R. G. Jacquot, «Optimal damper location for randomly forced cantiliver beamns,» *Journal of sound and vibration* , vol. 269, pp. 623-632, 2002.
- [13] F. C. Wang, «Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters,,» *Veh. Syst. Dyn.*, vol. 42, nº 4, pp. 235-257, 2004.
- [14] Y. Hu, «Optimal control for semi-active suspension with inerter,» *Proceedings of the 31st Chi-nese Control Conference*, pp. 2301-2306, 2012.
- [15] Y. Hu, «An inerter-based electromagnetic device and its application in vehicle suspensions,» *Proceedings of the 34th Chinese Control Conference*, pp. 28-35, 2015.

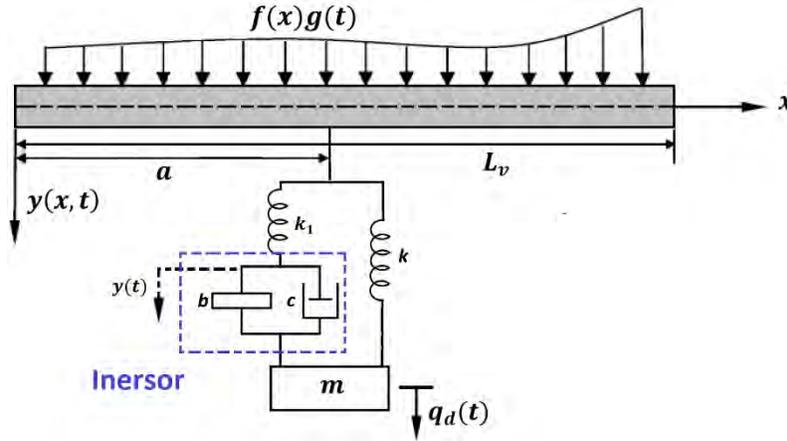
- [16] M. Smith, «Design and modelling of fluid inerter,» *Internacional Journal of control*, vol. 86, nº 11, pp. 2035-2051, 2013.
- [17] Y. Shen, «Modeling and optimization of vehicle suspension employing a nolinear fluid inerter,» *Hindawi*, 2016.
- [18] X. Jin, «Minimization of the beam response using inerter-based passive vibration control configurations,» *International Journal of mechanical sciences* , vol. 119, pp. 80-87, 2016.
- [19] Barredo, «Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers,» *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018.
- [20] P. Causemann, «Modern vibration system damping,» *Several*, 2003.
- [21] A. Spaggiari, «Properties and applications of Magnetorheological fluids,» *Frattura ed Integrità Strutturale*, pp. 57-61, 2013.
- [22] Dyke, «Seismic response reduction using magnetorheological dampers,» *13th triennial world congress*, vol. 29, pp. 5530-5535, 1996.
- [23] Yang, «Dynamic Modeling of Large-Scale Magnetorheological,» *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 130, pp. 1107-1114, 2004.
- [24] M. Maslanka, «Experimetal study of vibration control of a cable with an attached MR damper,» *Journal of theoretical and applied mechanics*, vol. 45, nº 4, pp. 893-917, 2007.
- [25] Parlak, «Optimal design of MR damper via finite element analyses of fluid dynamic and,» *Mechatronics*, vol. 22, pp. 890-903, 2012.
- [26] M. C. Smith, «Damping an inertial hydraulic device». US Patente US2013/0037362 A1, 22 octubre 2013.
- [27] M. Tipuric, «Semi-active inerters using magnetorheological fluid : a feasibility study,» *SPIE*, vol. 10595, 2018.
- [28] M. G. Herrera, «Diseño y construcción de un amortiguador electrorreológico,» Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, 2011.
- [29] R. M. Yescas, «Diseño y construcción de un embrague Electrorreológico,» Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, 2011.
- [30] E. E. Cruz, «Diseño y construcción de una chumacera semi-activa con fluidos reológicos,» Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, 2015.
- [31] E. E. Dilman, «Diseño y construcción de un embrague magnetorreológico,» Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico , Cuernavaca , 2017.

- [32] E. B. Hernández, «Análisis del efecto de un inersor en la respuesta dinámica de sistemas mecánicos en resonancia,» Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, 2016.
- [33] W. W. Seto, Vibraciones mecánicas, Mexico: Mc Graw Hill , 1970.
- [34] S. S. Rao, Vibraciones mecánicas, México : PEARSON , 2012.
- [35] J. He, Modal Analysis, Oxford: Planta tree, 2001.
- [36] S. Rao, Engineering Optimization, New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.
- [37] R. V. Dukkipati, Matlab: An Introduction with Applications, New Delhi: NEW AGE INTERNATIONAL, 2010.
- [38] V. L. Streeter, Mecánica de Fluidos, Santafé de Bogotá : Mc Graw Hill, 2000.
- [39] Z. Popovic, Introductory Electromagnetics, New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- [40] M. A. Plonus, Electromagnetismo aplicado, Barcelona: REVERTÉ, 1992.
- [41] Serway, Tomo II Física para ciencias e ingeniería, México D.F.: McGRAW-HILL, 2002.
- [42] Resnick, «Física,» PATRIA .
- [43] Carlson, «What Makes a Good MR Fluid?,» *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 13, p. 431, 2002.
- [44] J. Wang, «Magnetorheological fluid devices: principles, characteristics and applications in mechanical engineering,» *Proc Instn Mech Engrs*, vol. 215, pp. 165-174, 2001.
- [45] L. Corporation, «MRF-122EG Magneto Rheological Fluid,» [En línea]. Available: www.lord.com.
- [46] Y. Shen, «Modeling and Optimization of Vehicle Suspension Employing a Nonlinear Fluid Inerter,» *Hindawi*, vol. 2016, p. 9, 2016.
- [47] Harris, Shock and Vibration Handbook, New York: Mc Graw Hill , 2002.
- [48] Y. W. Kwon, The finite element method using Matlab, CRC Press, 1996.
- [49] D. L. Logan, A first course in the finite element method, Cengage Learning, 2012.
- [50] Z. Friedman, «An improved Two-Node Timoshenko beam finite element,» *Computers & Structures*, vol. 47, nº 3, pp. 473-481, 1993.
- [51] G. R. Cooper, «The shear coefficient in Timoshenko's beam theory,» *Journal of Applied Mechanics* , pp. 335-340, 1966.

- [52] R. D. Cook, Finite element modeling for stress analysis, John Wiley & Sons, 1995.
- [53] R. D. Cook, Concepts and applications of finite elements analysis, John Wiley & Sons, 2002.
- [54] K.-J. Bathe, Finite element procedures, Massachusetts : Pearson Education , 2014.
- [55] M. Smith, «Design and modelling of fluid inerter,» *International Journal of Control*, vol. 86, nº 11, pp. 2035-2051, 2013.
- [56] J. G. M. Larios, Identificador algebraico en línea del desbalance para un sistema rotodinámico, Cuernavaca, Morelos: Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico, 2016.

Apéndice A: Modelo matemático de viga empotrada con IDVA

Conforme a la teoría descrita en el marco teórico se realizó el análisis matemático de la configuración de propuesta para el banco de pruebas.



Se calcularon las energías del sistema.

- Energía cinética:

$$(E.C.) = \frac{1}{2} M_v (\dot{y}(x,t))^2 + \frac{1}{2} b (\dot{q}_d(t) - \dot{y}_1(t))^2 + \frac{1}{2} m (\dot{q}_d(t))^2 \quad (A.1)$$

- Energía Potencial:

$$(E.P.) = \frac{1}{2} K_v (y(x,t))^2 + \frac{1}{2} k_1 (y_1(t) - y(a,t))^2 + \frac{1}{2} k (q_d(t) - y(a,t))^2 \quad (A.2)$$

- Energía de disipación:

$$(E.D.) = \frac{1}{2} c (\dot{q}_d(t) - \dot{y}_1(t))^2 \quad (A.3)$$

Donde M_v y K_v son la masa y la rigidez de la viga respectivamente. Mediante la teoría de Euler-Lagrange se determinaron tres ecuaciones del sistema una por cada desplazamiento.

- Para el desplazamiento $y(x,t)$

$$M_v \ddot{y}(x,t) + K_v y(x,t) - k_1 (y_1(t) - y(a,t)) - k (q_d(t) - y(a,t)) = F \quad (A.4)$$

Conforme al método de separación de variables en las estructuras la Ec. (A.4) se reescribe.

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F + \{k_1 (y_1(t) - y(a,t)) + k (q_d(t) - y(a,t))\} \delta(x - a) \quad (A.5)$$

Donde $\delta(x - a)$, se domina la función delta de Dirac que indica que la expresión en corchetes solo es válida cuando la distancia x es igual a la ubicación de IDVA descrita por la variable a .

- Para el desplazamiento $y(t)$

$$b\ddot{y}_1(t) - c(\dot{q}_d(t) - \dot{y}_1(t)) = b\ddot{q}_d(t) - k_1(y_1(t) - y(a, t)) \quad (\text{A.6})$$

- Para el desplazamiento $q_d(t)$

$$(m + b)\ddot{q}_d(t) = -k(q_d(t) - y(a, t)) - c(\dot{q}_d(t) - \dot{y}_1(t)) + b\ddot{y}_1(t) \quad (\text{A.7})$$

De las Ecs. (A.6) y (A.7) se obtiene:

$$k_1(y_1(t) - y(a, t)) + k(q_d(t) - y(a, t)) = -m\ddot{q}_d(t) \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo la Ec. (A.8) en (A.5).

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = F + \{-m\ddot{q}_d(t)\} \delta(x - a) \quad (\text{A.9})$$

Considerando el análisis modal y las condiciones de frontera del elemento tipo viga.

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(x); \quad \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4 \phi_i(x) \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo la Ec. (A.10) en (A.9).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho A \phi_i(x) \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} EI q_i(t) \beta_i^4 \phi_i(x) = F + \{-m\ddot{q}_d(t)\} \delta(x - a) \quad (\text{A.11})$$

Suponiendo una fuerza de excitación armónica la variable $F = f(x)g(t)$.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho A \phi_i(x) \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + \sum_{i=0}^{\infty} EI q_i(t) \beta_i^4 \phi_i(x) = f(x)g(t) + \{-m\ddot{q}_d(t)\} \delta(x - a) \quad (\text{A.12})$$

Haciendo que:

$$g(t) = e^{i\omega t}; \quad q_i(t) = Q_i(\omega) e^{i\omega t}; \quad q_d(t) = Q_d(\omega) e^{i\omega t};$$

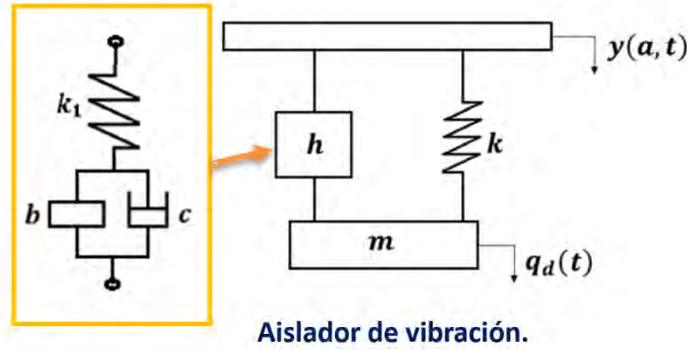
La Ec. (A.12) se reescribe.

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega) \phi_i(x) [EI\beta_i^4 - \omega^2 \rho A] = f(x) + \{\omega^2 m Q_d(\omega)\} \delta(x - a) \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando la función modal $\phi_i(x)$ en la Ec. (A.13).

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega) \phi_i(x) [EI\beta_i^4 - \omega^2 \rho A] \phi_i(x) = f(x) \phi_i(x) + \{\omega^2 m Q_d(\omega)\} \phi_i(a) \quad (\text{A.14})$$

Asimismo, se determinó $Q_d(\omega)$ mediante el análisis del IDVA descrita en la siguiente figura. Obteniendo la ecuación diferencial del comportamiento del sistema IDVA.



$$m\ddot{q}_d(t) + h\dot{q}_d(t) + kq_d(t) - h\dot{y}(a, t) - ky(a, t) = 0 \quad (\text{A.15})$$

Considerando una fuerza de excitación armónica la Ec. (A.15) se reescribe.

$$Q_d(\omega)((k - \omega^2 m) + j\omega h) - (k + j\omega h)y(a, \omega) = 0 \quad (\text{A.16})$$

Despejando $Q_d(\omega)$.

$$Q_d(\omega) = \frac{(k + j\omega h)}{((k - \omega^2 m) + j\omega h)} y(a, \omega) \quad (\text{A.17})$$

Sustituyendo la Ec. (A.17) en (A.14).

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega) \phi_i(x) [EI\beta_i^4 - \omega^2 \rho A] \phi_i(x) = f(x) \phi_i(x) + \left\{ \omega^2 m \left(\frac{(k + j\omega h)}{((k - \omega^2 m) + j\omega h)} y(a, \omega) \right) \right\} \phi_i(a) \quad (\text{A.18})$$

Integrando respecto de x , donde $\int_0^{L_v} \phi_i(x) \phi_i(x) = L_v$.

$$Q_i(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_0^{L_v} f(x) \phi_i(x)}{L_v [EI\beta_i^4 - \omega^2 \rho A]} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(a)}{L_v [EI\beta_i^4 - \omega^2 \rho A]} \left(\frac{\omega^2 m (k + j\omega h)}{((k - \omega^2 m) + j\omega h)} y(a, \omega) \right) y(a, \omega) \quad (\text{A.19})$$

Multiplicando por la función modal y sustituyendo en la Ec. (A.19) por las siguientes funciones.

$$G_1(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x) \phi_i(a)}{L_v [EI\beta_i^4 - \omega^2 \rho A(x)]}; \quad G_2(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \phi_i(x)}{L_v [EI\beta_i^4 - \omega^2 \rho A(x)]}; \quad H(\omega) = \frac{-\omega^2 m (k + j\omega h)}{((k - \omega^2 m) + j\omega h)};$$

$$h = \frac{j\omega b k_1 + c k_1}{-\omega^2 b + j\omega c + k_1}; \quad y(a, \omega) = \frac{G_2(a, \omega)}{1 + G_1(a, \omega) H(\omega)};$$

Se obtiene:

$$y(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega) \phi_i(x) = G_2(x, \omega) - \frac{G_2(a, \omega) G_1(x, \omega)}{\frac{1}{H(\omega)} + G_1(a, \omega)} \quad (\text{A.20})$$

Posteriormente se determinó la respuesta dinámica en el dominio de la frecuencia mediante la sustitución de las siguientes variables adimensionales.

$$\mu = \frac{m}{\rho A L_v}; \quad d = \frac{b}{m}; \quad \omega_{ni}^2 = \frac{EI\beta_i^4}{\rho A}; \quad \gamma_i = \frac{\omega_{ni}}{\omega_{n1}}; \quad \eta = \frac{\sqrt{k_1/m}}{\omega_{n1}}; \quad T = \frac{\sqrt{k/m}}{\omega_{n1}}; \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_{n1}}$$

Sustituyendo la función h en $H(\omega)$ se obtiene:

$$H(\omega) = -m\omega^2 \left[\frac{-\omega^2 bk + kk_1 - \omega^2 bk_1 + j\omega ck + j\omega ck_1}{-\omega^2 bk + kk_1 + \omega^4 mb - \omega^2 mk_1 - \omega^2 bk_1 + j\omega ck - j\omega^3 mc + j\omega ck_1} \right] \quad (\text{A.21})$$

Ec. (A.21) simplificada está dada por:

$$H(\omega) = -m\omega^2 J \quad (\text{A.22})$$

Donde:

$$J = \left[\frac{-\omega^2 bk + kk_1 - \omega^2 bk_1 + j\omega ck + j\omega ck_1}{-\omega^2 bk + kk_1 + \omega^4 mb - \omega^2 mk_1 - \omega^2 bk_1 + j\omega ck - j\omega^3 mc + j\omega ck_1} \right]$$

Sustituyendo las variables adimensionales en J , se obtiene:

$$J = \frac{(-\Omega^2 dT^2 + T^2 \eta^2 - \Omega^2 d\eta^2 + j2\xi\Omega T(T^2 + \eta^2))}{(\Omega^2 dT^2 + T^2 \eta^2 + \Omega^4 d - \Omega^2 \eta^2 - \Omega^2 d\eta^2) + j2\xi\Omega T(T^2 - \Omega^2 + \eta^2)}$$

Sustituyendo $\Omega = \frac{\omega}{\omega_{n1}}$ en la Ec. (A.22).

$$H(\omega) = -m\omega_1^2 J_1 \quad (\text{A.23})$$

Donde:

$$J_1 = - \frac{\Omega^2 (-\Omega^2 dT^2 + T^2 \eta^2 - \Omega^2 d\eta^2 + j2\xi\Omega T(T^2 + \eta^2))}{(\Omega^2 dT^2 + T^2 \eta^2 + \Omega^4 d - \Omega^2 \eta^2 - \Omega^2 d\eta^2) + j2\xi\Omega T(T^2 - \Omega^2 + \eta^2)}$$

Sustituyendo la Ec. (A.23) y las variables adimensionales en la Ec. (A.20) se obtiene:

$$S(x, \Omega) = \frac{1}{\rho AL_v \omega_{n1}^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \left[\frac{a_i}{\gamma_i^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu a_i \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu (\phi_i(a))^2}{\gamma_i^2 - \Omega^2} + \frac{1}{J_1}} \right) \right] \quad (\text{A.24})$$

Considerando el primer modo de vibración, la Ec. (A.24) se reescribe.

$$R(S) = \frac{S(a, \Omega) \rho AL_v \omega_{n1}^2}{a_1 \phi_1(a)} = \frac{1}{J_1 \mu (\phi_1(a))^2 + (1 - \Omega^2)} \quad (\text{A.25})$$

Determinando la magnitud de Ec. (25), se obtienen la respuesta de estado estable con una fuerza de excitación armónica simple.

$$R(S) = \frac{S(a, \lambda) \rho AL_v \omega_{n1}^2}{a_1 \phi_1(a)} = \sqrt{\frac{B_1^2 + B_2^2}{B_3^2 + B_4^2}} \quad (\text{A.26})$$

Donde:

$$B_1 = (-\Omega^4 d + (T^2 d + \eta^2 (d + 1)\Omega^2 - T^2 \eta^2))$$

$$B_2 = (2T\Omega^3 - 2\Omega T(T^2 + \eta^2))\xi$$

$$B_3 = (d\Omega^6 + ((-\phi_1(a))^2 \mu - 1)dT^2 + (-\phi_1(a))^2 d\mu - d - 1)\eta^2 - d)\Omega^4$$

$$+ \left(((\phi_1(a))^2 \mu + 1) \eta^2 + d \right) T^2 + \eta^2 (d + 1) \Omega^2 - T^2 \eta^2$$

$$B_4 = (-2T\Omega^5 + 2((\phi_1(a))^2 \mu + 1)T^2 + 1 + ((\phi_1(a))^2 \mu + 1)\eta^2)T\Omega^3 - 2\Omega T(T^2 + \eta^2))\xi$$

Para una fuerza de excitación inercial la Ec. (A.25) se multiplica por la relación de frecuencias al cuadrado Ω^2 , obtenido.

$$R_a(S) = \frac{S_a(a,\Omega)\rho AL_v}{a_1\phi_1(a)} = \frac{\Omega^2}{J_1\mu(\phi_1(a))^2 + (1-\Omega^2)} \quad (A.27)$$

Asimismo, la respuesta de estado estable se puede expresar como:

$$R_a(S) = \frac{S_a(a,\Omega)\rho AL_v \omega_{n1}^2}{a_1\phi_1(a)} = \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{C_3^2 + C_4^2}} \quad (A.28)$$

Donde:

$$C_1 = 2\Omega^2 \left(\frac{1}{2}\Omega^4 d + \left(-\frac{1}{2}dT^2 - \frac{1}{2}\eta^2(d+1) \right) \Omega^2 + \frac{1}{2}T^2\eta^2 \right).$$

$$C_2 = 2\Omega^2 (-T\Omega^3 + \Omega T(T^2 + \eta^2))\xi$$

$$C_3 = d\Omega^6 + ((-\phi_1(a))^2 \mu - 1)dT^2 + (-\phi_1(a))^2 d\mu - d - 1 \eta^2 - d \Omega^4 + \left(((\phi_1(a))^2 \mu + 1)\eta^2 + d \right) T^2 + \eta^2 (d + 1) \Omega^2 - T^2 \eta^2$$

$$C_4 = \left(-2T\Omega^5 + 2((\phi_1(a))^2 \mu + 1)T^2 + 1 + ((\phi_1(a))^2 \mu + 1)\eta^2 \right) T\Omega^3 - 2\Omega T(T^2 + \eta^2) \xi$$

Apéndice B: Optimización del IDVA

Conforme a la respuesta del IDVA con una fuerza de excitación inercial la respuesta del sistema es:

$$R(S) = \frac{S_a(a,\Omega)\rho AL_v\omega_1^2}{a_1\phi_1(a)} = \sqrt{\frac{C_1^2+C_2^2}{C_3^2+C_4^2}} \quad (\text{B.1})$$

Donde:

$$C_1 = 2\Omega^2 \left(\frac{1}{2}\Omega^4 d + \left(-\frac{1}{2}dT^2 - \frac{1}{2}\eta^2(d+1) \right) \Omega^2 + \frac{1}{2}T^2\eta^2 \right)$$

$$C_2 = 2\Omega^2(-T\Omega^3 + \Omega T(T^2 + \eta^2))\xi$$

$$C_3 = d\Omega^6 + ((-\phi_1(a))^2\mu - 1)dT^2 + (-\phi_1(a))^2d\mu - d - 1)\eta^2 - d)\Omega^4 + (((\phi_1(a))^2\mu + 1)\eta^2 + d)T^2 + \eta^2(d+1)\Omega^2 - T^2\eta^2$$

$$C_4 = (-2T\Omega^5 + 2(((\phi_1(a))^2\mu + 1)T^2 + 1 + ((\phi_1(a))^2\mu + 1)\eta^2)T\Omega^3 - 2\Omega T(T^2 + \eta^2))\xi$$

Determinando las tenencias de la relación de amortiguamiento.

Cuando $R(S)_{\xi \rightarrow \infty}$:

$$R(S)_{\xi \rightarrow \infty}^2 = \frac{\Omega^4(T^2 + \eta^2 - \Omega^2)^2}{(-\Omega^4 + (((\phi_1(a))^2\mu + 1)T^2 + 1 + ((\phi_1(a))^2\mu + 1)\eta^2)\Omega^2 - T^2 - \eta^2)^2} \quad (\text{B.2})$$

Cuando $R(S)_{\xi \rightarrow 0}$:

$$R(S)_{\xi \rightarrow 0}^2 = \frac{\Omega^4(-\Omega^4 d + (dT^2 + \eta^2(d+1))\Omega^2 - T^2)^2}{(-d\Omega^6 + (((\phi_1(a))^2\mu d + d + 1)\eta^2 + (((\phi_1(a))^2\mu + 1)T^2 + 1)d)\Omega^4 + (-d - 1 + (-\phi_1(a))^2\mu - 1)T^2)\eta^2 - dT^2)\Omega^2 + T^2\eta^2)^2} \quad (\text{B.3})$$

Igualando la Ec. (B.2) y (B.3) se obtienen dos soluciones:

Solución trivial.

$$(\phi_1(a))^2\mu\Omega^4\eta^4 = 0 \quad (\text{B.4})$$

Solución para encontrar los puntos invariantes.

$$R_1\Omega^8 + R_2\Omega^6 + R_3\Omega^4 + R_4\Omega^2 + R_5 = 0 \quad (\text{B.5})$$

Donde:

$$R_1 = 2d$$

$$R_2 = (-2((\phi_1(a))^2d\mu - 4d - 2)\eta^2 - 2d(1 + ((\phi_1(a))^2\mu + 2)T^2))$$

$$R_3 = ((2(\phi_1(a))^2d\mu + (\phi_1(a))^2\mu + 2d + 2)\eta^4 + ((4(\phi_1(a))^2d\mu + 2(\phi_1(a))^2\mu + 4d + 4)T^2 + 4d + 2)\eta^2 + 2(2 + ((\phi_1(a))^2\mu + 1)T^2)dT^2)$$

$$R_4 = \left((-2(\phi_1(a))^2\mu - 2)T^2 - 2d - 2 \right)\eta^4 - 2\left(((\phi_1(a))^2\mu + 1)T^2 + 2d + 2 \right)T^2\eta^2 - 2T^4d$$

$$R_5 = 2T^4\eta^2 + 2T^2\eta^4$$

La expresión para determinar el polinomio de la magnitud de la respuesta es:

$$H_m = R(S)_{\rightarrow\infty}^2 \quad (\text{B.6})$$

El polinomio de la magnitud H_m es:

$$H_1\Omega^8 + H_2\Omega^6 + H_3\Omega^4 + H_4\Omega^2 + H_5 = 0 \quad (\text{B.7})$$

Donde:

$$H_1 = (H_m^2 - 1)$$

$$H_2 = (H_m^2(-2((\phi_1(a))^2\mu + 1)T^2 - 2 - 2((\phi_1(a))^2\mu + 1)\eta^2))$$

$$H_3 = \left(H_m^2 \left(2T^2 + 2\eta^2 + \left(((\phi_1(a))^2\mu + 1)T^2 + 1 + ((\phi_1(a))^2\mu + 1)\eta^2 \right)^2 \right) \right)$$

$$H_4 = 2H_m^2(-T^2 - \eta^2)\left(((\phi_1(a))^2\mu + 1)T^2 + 1 + ((\phi_1(a))^2\mu + 1)\eta^2 \right)$$

$$H_5 = H_m^2(-T^2 - \eta^2)^2$$

Conforme a las fórmulas de Vieta y sustituyendo Q por $(\phi_1(a))^2\mu$ se tiene que:

Para la primera raíz:

$$-\frac{R(S)_{a_2}}{R(S)_{a_1}} = -\frac{H_{m,a_2}}{H_{m,a_1}} \quad (\text{B.8})$$

Obteniendo:

$$H_m^2 = \frac{-QT^2d - Qd\eta^2 - \eta^2 - d}{QT^2d + Qd\eta^2 - \eta^2 + d} \quad (\text{B.9})$$

Para la segunda raíz:

$$\frac{R(S)_{a_3}}{R(S)_{a_1}} = \frac{H_{m,a_3}}{H_{m,a_1}} \quad (\text{B.10})$$

Obteniendo:

$$H_m^2 = \frac{(-2Qd - Q - 2)\eta^4 + ((-4QT^2 - 4)d - 2QT^2 - 4T^2 - 2)\eta^2 - 2T^2d(QT^2 + 2)}{(2Q^2 + 2Q)d - Q - 2)\eta^4 + (4(Q+1)(QT^2 + 1)d - 2QT^2 - 4T^2 - 2)\eta^2 + 2(Q^2T^4 + QT^2(T^2 + 2) + 2T^2 + 1)d} \quad (\text{B.11})$$

Para la tercera raíz:

$$-\frac{R(S)_{a_4}}{R(S)_{a_1}} = -\frac{H_{m,a_4}}{H_{m,a_1}} \quad (\text{B.12})$$

Obteniendo:

$$H_m^2 = \frac{(-d - 1 + (-Q)T^2)\eta^4 - ((Q+1)T^2 + 2d + 2)T^2\eta^2 - T^4d}{((-Q-1)T^2 + 2Qd + d - 1)\eta^4 + ((-Q-1)T^4 + (4Qd + 2d - 2)T^2 + 2d)\eta^2 + 2\left(\left(Q + \frac{1}{2}\right)T^2 + 1\right)T^2d} \quad (\text{B.13})$$

Para la cuarta raíz:

$$\frac{R(S)_{a_5}}{R(S)_{a_1}} = \frac{H_{m,a_5}}{H_{m,a_1}} \quad (\text{B.14})$$

Obteniendo:

$$H_m^2 = -\frac{T^2\eta^2}{-T^2\eta^2+T^2d-d\eta^2} \quad (\text{B.15})$$

Igualando la Ec. (B.9) con la (B.15) y despejando en función de la variable η .

$$\eta^2 = \frac{-2(QT^2+\frac{1}{2})(T^2-d)\pm\sqrt{4Q^2T^8+4QT^6-4QT^4d+T^4-6T^2d+d^2}}{-2+4Q(T^2-\frac{1}{2}d)} \quad (\text{B.16})$$

Igualando la Ec. (B.11) con la (B.15) y agrupando en términos de la variable η .

$$\begin{aligned} & \left((Q^2 + 2Q)T^2 - 1 - Q\left(d + \frac{1}{2}\right) \right) \eta^6 + \left((2Q^2 + 4Q)T^4 + \left(1 - 3Q\left(d - \frac{1}{6}\right)\right)T^2 - 2d - 1 \right) \eta^4 + T^2 \left((Q^2 + 2Q)T^4 + \right. \\ & \left. \left(2 - 3Q\left(d - \frac{1}{3}\right)\right)T^2 - 4d \right) \eta^2 - T^4d(QT^2 + 2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Igualando la Ec. (B.13) con la (B.15) y despejando en función de la variable η .

$$\eta^2 = -\frac{(QT^2+T^2-2d)T^2\pm T^2\sqrt{(Q+1)^2T^4-4d}}{(2Q+2)T^2-2d-2} \quad (\text{B.18})$$

Igualando la Ec. (B.16) con la (B.18) y despejando en función de la variable T , obteniendo 7 posibles soluciones.

$$T^2 = 0, \frac{1}{2}\frac{Qd+1}{Q}, \frac{d+1}{Q+1}, \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{Q}}, -\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{Q}}, \frac{Q-3+\sqrt{Q^2+(8d+2)Q-8d+1}}{4Q-4}, \frac{Q-3-\sqrt{Q^2+(8d+2)Q-8d+1}}{4Q-4} \quad (\text{B.19})$$

La solución que cumple los criterios de optimización es:

$$T^2 = \frac{Q-3-\sqrt{Q^2+(8d+2)Q-8d+1}}{4Q-4} \quad (\text{B.20})$$

Sustituyendo la Ec. (B.18) en (B.17) y agrupando en términos de la variable T .

$$\begin{aligned} & Qd(Q+1)^2T^8 + \left(-Qd(Q+1)\sqrt{(Q+1)^2T^4-4d} + (-Q^3-5Q^2-4Q)d + \frac{5}{2}Q - \frac{1}{2}Q^3 + 2\right)T^6 + \\ & \left(\left((Q^2+4Q)d + \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^2 + 2\right)\sqrt{(Q+1)^2T^4-4d} + \left(-\frac{3}{2}Q + \frac{3}{2}Q^2 - 1\right)d^2 + \left(\frac{9}{2}Q + \frac{9}{2}Q^2 - 6\right)d - Q - \right. \\ & \left. 1\right)T^4 + \left(\left(d^2 - 6d - \frac{3}{2}Qd - \frac{3}{2}Qd^2 - 1\right)\sqrt{(Q+1)^2T^4-4d} - 3Qd^2 - 3Qd + 10d^2 - 2d\right)T^2 + (2d^2 + \\ & 2d)\sqrt{(Q+1)^2T^4-4d} - 2d^3 + 2d = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Sustituyendo la Ec. (B.20) en (B.21) se obtienen cinco posibles soluciones para la variable d .

$$\begin{aligned} d = -1, Q, -\frac{2Q(Q-1)}{(Q+1)^2}, \frac{1}{64} \frac{(Q^2-Q-4)\sqrt{25Q^2-12Q+4+5Q^3-19Q^2+26Q+8}}{\left(Q-\frac{3}{2}\right)^2}, \\ \frac{1}{64} \frac{(-Q^2+Q+4)\sqrt{25Q^2-12Q+4+5Q^3-19Q^2+26Q+8}}{\left(Q-\frac{3}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Donde la solución que cumple los criterios de optimización es:

$$d = -\frac{2Q(Q-1)}{(Q+1)^2} \quad (\text{B.23})$$

Sustituyendo Q por $(\phi_1(a))^2\mu$ en la Ec. (B.23).

$$d_{opt} = -\frac{2(\phi_1(a))^2\mu((\phi_1(a))^2\mu-1)}{((\phi_1(a))^2\mu+1)^2} \quad (\text{B.24})$$

Sustituyendo Q por $(\phi_1(a))^2\mu$ y la Ec. (B.24) en (B.20).

$$T_{opt} = \frac{1}{\sqrt{(\phi_1(a))^2\mu+1}} \quad (\text{B.25})$$

Sustituyendo Q por $(\phi_1(a))^2\mu$ y las Ecs. (B.24) y (B.25) en (B.18).

$$\eta_{opt} = \sqrt{-\frac{2(\phi_1(a))^2\mu}{(\phi_1(a))^4\mu^2-1}} \quad (\text{B.26})$$

Sustituyendo Q por $(\phi_1(a))^2\mu$ y las Ecs. (B.24), (B.25) y (B.26) en (B.15).

$$H_{m,opt} = \sqrt{\frac{1}{(\phi_1(a))^2\mu}} \quad (\text{B.27})$$

Sustituyendo las Ecs. (B.24), (B.25), (B.26) y (B.27) en (B.1).

$$R(S) = \frac{\Omega^4\mu^2(\phi_1(a))^4(1+((\phi_1(a))^2\mu-1)^2\Omega^4-2\Omega^2((\phi_1(a))^2\mu+1)+\Omega^6\xi^2((\phi_1(a))^2\mu+1)^4(1+((\phi_1(a))^2\mu)\Omega^2)^2)}{\sqrt{(\phi_1(a))^4\mu^2(-1+((\phi_1(a))^2-1)^2\Omega^6+((\phi_1(a))^2\mu-3)\Omega^4+((\phi_1(a))^2\mu+3)\Omega^2)((\phi_1(a))^2\mu+1)+\Omega^2\xi^2(-1+((\phi_1(a))^2\mu-1)\Omega^4+2\Omega^2)^2((\phi_1(a))^2\mu+1)^4}} \quad (\text{B.28})$$

Igualando la magnitud $H_{m,opt}$ de la respuesta con la Ec. (B.27) y despejando la relación de amortiguamiento

$$\xi^2 = -\frac{(\phi_1(a))^4\mu^2((\phi_1(a))^4\mu^2\Omega^4-2(\phi_1(a))^2\mu\Omega^4-2(\phi_1(a))^2\mu\Omega^2+\Omega^4-2\Omega^2+1)}{\Omega^2((\phi_1(a))^6\mu^3+3(\phi_1(a))^4\mu^2+3(\phi_1(a))^2\mu+1)} \quad (\text{B.29})$$

Conforme a la teoría de krenk se determinó la relación de amortiguamiento óptima mediante el software de matlab, en programa que se implementó se muestra a continuación.

```

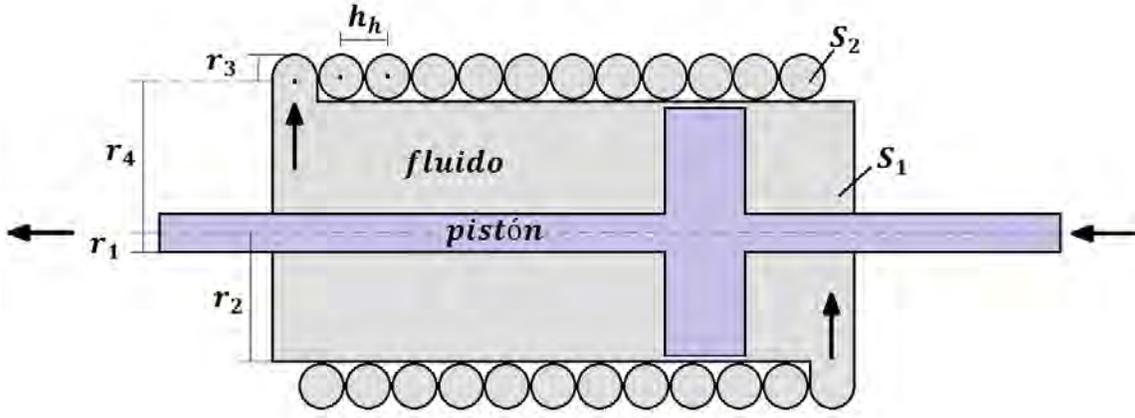
%----- ANALISIS DE LA RELACION DE AMORTIGUAMIENTO OPTIMA ✓
%-----
%----- ING. CUAUHTEMOC MAZON VALADEZ ✓
%-----
clc; clear all; close all;
%----- INICIALIZACION DE VARIABLES SIMBOLICAS ✓
%-----
syms l Q U
% u=mu
% l=Zeta
% n=eta
% q=q
% b=Beta
% r=Omega

L=1;
Bi=pi/L; % EIGENVALOR DE LA VIGA (PRIMER MODO DE
VIBRACION)
a=L/2; % UBICACION DEL SISTEMA DE AMORTIGUAMIENTO
ai=(2*sqrt(2))/Bi; % INTEGRAL DE LA FUERZA PUNTUAL Y QX
Q=1.4142;
U=0.45;
d=-2*Q^2*U*(Q^2*U-1)/(Q^2*U+1)^2
N=sqrt(-(2 * Q ^ 2 * U / (Q ^ 4 * U ^ 2 - 1)))
T=(Q ^ 2 * U + 1) ^ (-0.1e1 / 0.2e1)
%----- REPUESTA EN FUNCION DE LOS ✓
PUNTOS-----
r=- (0.2e1-0.2e1*Q*sqrt(U))/(0.2e1*Q^2*U-0.2e1);
r1=- (0.2e1+0.2e1*Q*sqrt(U))/(0.2e1*Q^2*U-0.2e1);
V=[(Q^2*U-1)^2, (Q^2*U-3), (Q^2*U+3), -1];
R=roots(V);
r2=real(R(2,1));
%----- RELACION DE AMORTIGUAMIENTO ✓
%-----
RA1=- (Q ^ 4 * U ^ 2 * r ^ 4 - 2 * Q ^ 2 * U * r ^ 4 - 2 * Q ^ 2 * U * r ^ 2 + r ^ 4 -
2 * r ^ 2 + 1) * Q ^ 4 * U ^ 2 / (Q ^ 6 * U ^ 3 + 3 * Q ^ 4 * U ^ 2 + 3 * U * Q ^ 2 +
1) / r ^ 2;
RA2=- (Q ^ 4 * U ^ 2 * r1 ^ 4 - 2 * Q ^ 2 * U * r1 ^ 4 - 2 * Q ^ 2 * U * r1 ^ 2 + r1 ^
4 - 2 * r1 ^ 2 + 1) * Q ^ 4 * U ^ 2 / (Q ^ 6 * U ^ 3 + 3 * Q ^ 4 * U ^ 2 + 3 * U * Q
^ 2 + 1) / r1 ^ 2;
RA3=- (Q ^ 4 * U ^ 2 * r2 ^ 4 - 2 * Q ^ 2 * U * r2 ^ 4 - 2 * Q ^ 2 * U * r2 ^ 2 + r2 ^
4 - 2 * r2 ^ 2 + 1) * Q ^ 4 * U ^ 2 / (Q ^ 6 * U ^ 3 + 3 * Q ^ 4 * U ^ 2 + 3 * U * Q
^ 2 + 1) / r2 ^ 2;

L3=sqrt((RA1+RA2+RA3)/3);

```

Apéndice C: Modelado inersor con fluido



Conforme a la teoría de mecánica de fluido se realizó el modelado matemático. De acuerdo a la figura anterior, el área trabajo efectiva de la cara de pistón se puede expresar como:

$$S_1 = \pi(r_2^2 - r_1^2) \quad (C.1)$$

El área efectiva de canal helicoidal.

$$S_2 = \pi r_3^2 \quad (C.2)$$

Considerando una vuelta en el canal helicoidal.

$$L = \sqrt{h_h^2 + (2\pi r_4)^2} \quad (C.3)$$

Para n número de vuelta del canal helicoidal y considerando la longitud de las conexiones de entrada y de salida. La longitud de canal helicoidal es:

$$l_h = n\sqrt{h_h^2 + (2\pi r_4)^2} + 2l_0 \quad (C.4)$$

La masa de fluido en el canal helicoidal.

$$m_f = \rho S_2 l_h \quad (C.5)$$

De acuerdo al principio de conservación la masa para un volumen de control se tienen.

$$\pi(r_2^2 - r_1^2)x = \frac{\theta}{2\pi} r_3^2 \sqrt{h_h^2 + (2\pi r_4)^2} \quad (C.6)$$

Despejando θ de la Ec. (C.6).

$$\theta = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{r_3^2 \sqrt{h_h^2 + (2\pi r_4)^2}} x \quad (C.7)$$

El momento inercial que ocurre por el movimiento del fluido en el canal helicoidal se expresa como:

$$J_I = m_f r_4^2 \quad (C.8)$$

Conforme a la ley de la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} b \dot{x}^2 = \frac{1}{2} J_I \dot{\theta}^2 \quad (C.9)$$

Despejando \dot{x} de la Ec. (C.9).

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{J_I}{b}} \dot{\theta} \quad (C.10)$$

Integrando la Ec. (C.10) en función del tiempo.

$$x = \sqrt{\frac{J_I}{b}} \theta \quad (C.11)$$

Sustituyendo la Ec. (C.7) en la (C.11).

$$x = \sqrt{\frac{J_I}{b}} \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{r_3^2 \sqrt{h_h^2 + (2\pi r_4)^2}} x \quad (C.12)$$

Despejando b de la Ec. (C.12).

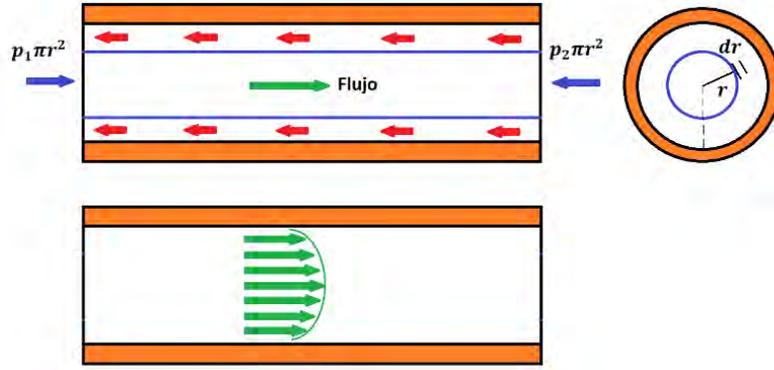
$$b = \frac{4m_f r_4^2 S_1^2}{r_3^4 (h_h^2 + (2\pi r_4)^2)} \quad (C.13)$$

Reescribiendo la Ec. (C.13) en función de las áreas efectivas.

$$b = \frac{m_f}{1 + \left(\frac{h_h}{2\pi r_4}\right)^2} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad (C.14)$$

La resistencia de flujo (fuerza de amortiguamiento) del inersor, puede ser representada por:

$$F_c = \Delta p + \Delta p_1 + \Delta p_2 \quad (C.15)$$



Conforme a la imagen anterior la fuerza ejercida por la diferencia de presiones en el canal helicoidal es:

$$F = (p_2 - p_1)\pi r^2 = \Delta p \pi r^2 \quad (C.16)$$

Considerando que el flujo del sistema es laminar y por tanto, su velocidad decrece cuando el fluido se acerca a las paredes de la tubería el área de contacto de fluido con la tubería es:

$$S_f = 2\pi r_3 l_h \quad (C.17)$$

Considerando la velocidad del flujo, la fuerza por la diferencia de presiones se puede escribir como:

$$F = \Delta p \pi r^2 = -\mu_f S_f \frac{dv}{dr_3} \quad (C.18)$$

Con base al valor absoluto y despejando dv de la Ec. (C.18).

$$dv = \frac{\Delta p r_3}{2\mu_f l_h} dr_3 \quad (C.19)$$

Integrando la Ec. (C.19).

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu_f} (R_3^2 - r_3^2) \quad (C.20)$$

El volumen de control se puede expresar como:

$$dV = dS_1 dx = dS_2 v dt \quad (C.21)$$

Sustituyendo la Ec. (C.20) en la Ec. (C.21).

$$Q_p = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi \Delta p}{2\mu_f l_h} (R_3^2 - r_3^2) r_3 dr_3 \quad (C.22)$$

Integrando la Ec. (C.22) desde $r_3 = 0$ hasta $R = r_3$.

$$Q_p = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi r_3^4}{8\mu_f l_h} (\Delta p) \quad (C.23)$$

Considerando que la velocidad media del canal helicoidal es:

$$u = \frac{Q_p}{S_2} \quad (C.24)$$

Sustituyendo la Ec. (C.23) en (C.24).

$$u = \frac{r_3^2 \Delta p}{8\mu_f l_h} \quad (C.25)$$

La diferencia de presión en la entrada del canal helicoidal.

$$\Delta p_1 = 0.5 \frac{\rho u^2}{2} \quad (C.26)$$

La diferencia de presión en la salida del canal helicoidal.

$$\Delta p_2 = \frac{\rho u^2}{2} \quad (C.27)$$

Conforme a la ley de la conservación de la masa para un volumen de control.

$$S_1 \dot{x} = S_2 u \quad (C.28)$$

Sustituyendo la Ec. (C.25) en (C.28).

$$\Delta p = \frac{8\mu_f l_h S_1}{r_3^2 S_2} \dot{x} \quad (C.29)$$

Sustituyendo la Ec. (C.26) en (C.28).

$$\Delta p_1 = \frac{\rho S_1^2}{4 S_2^2} \dot{x}^2 \quad (C.30)$$

Sustituyendo la Ec. (C.26) en (C.28).

$$\Delta p_2 = \frac{\rho S_1^2}{2 S_2^2} \dot{x}^2 \quad (C.31)$$

Sustituyendo las Ec. (C.29), (C.30) y (C.31) en (C.15).

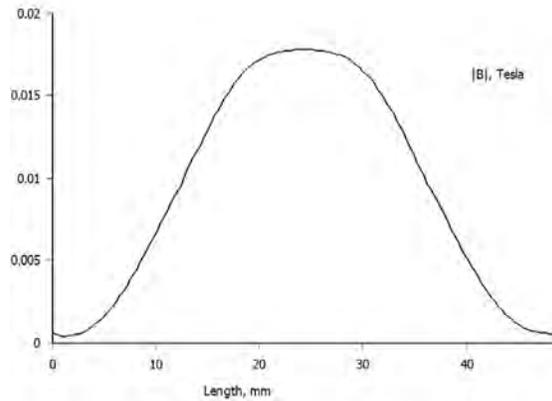
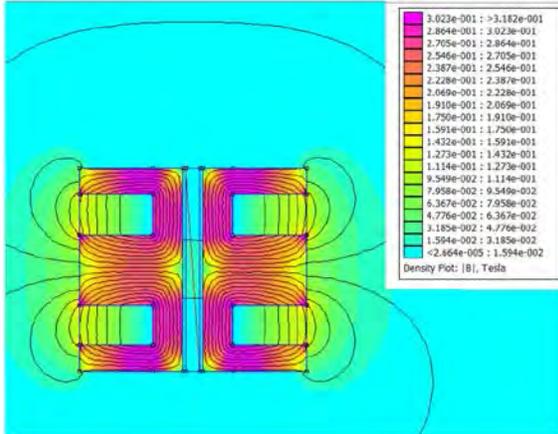
$$F_c = \frac{8\mu_f l_h S_1^2}{r_3^2 S_2} \dot{x} + \frac{3\rho S_1^3}{4S_2^2} \dot{x}^2 \quad (C.32)$$

De acuerdo con el análisis, se tiene que el modelo que representa el comportamiento dinámico del inersor considerando la inercia y el efecto de amortiguamiento es.

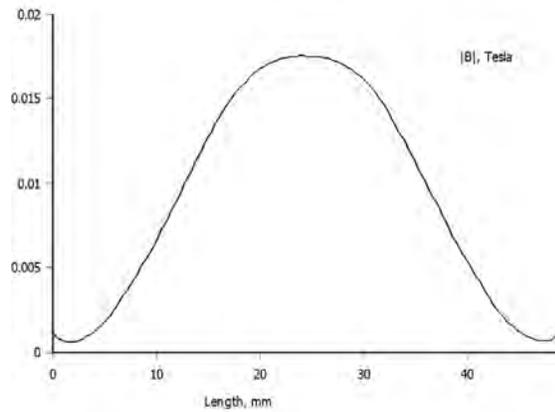
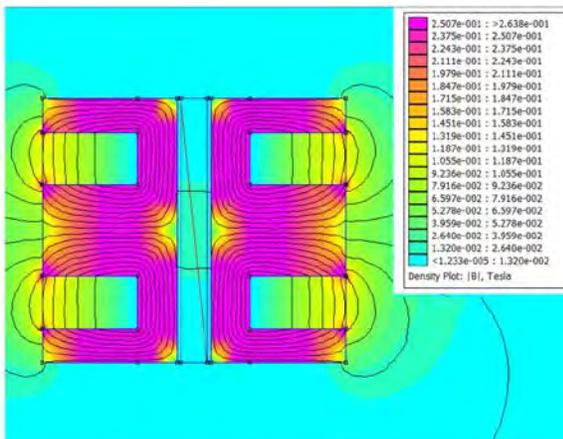
$$F = \frac{m_f}{1 + \left(\frac{h_h}{2\pi r_4}\right)^2} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \ddot{x} + \frac{8\mu_f l_h S_1^2}{r_3^2 S_2} \dot{x} + \frac{3\rho S_1^3}{4S_2^2} \dot{x}^2 \quad (C.33)$$

Apéndice D: Simulaciones por el software FEMM 4.2

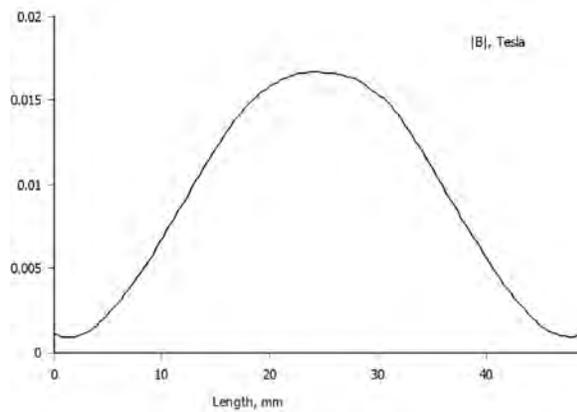
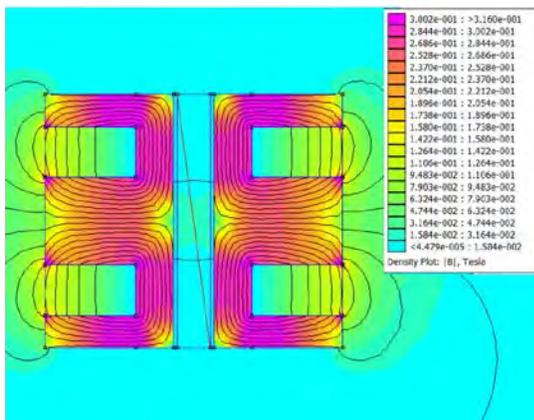
Simulaciones modelo 1 (núcleo de ferrita):



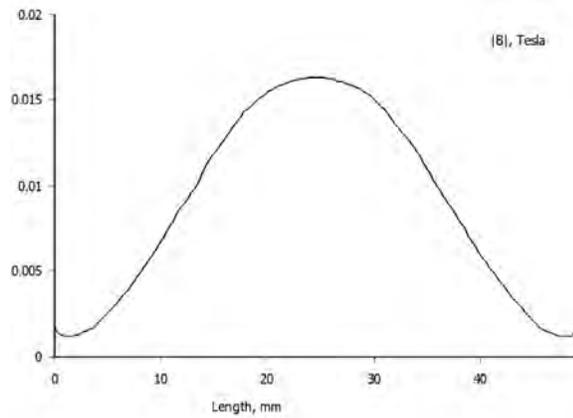
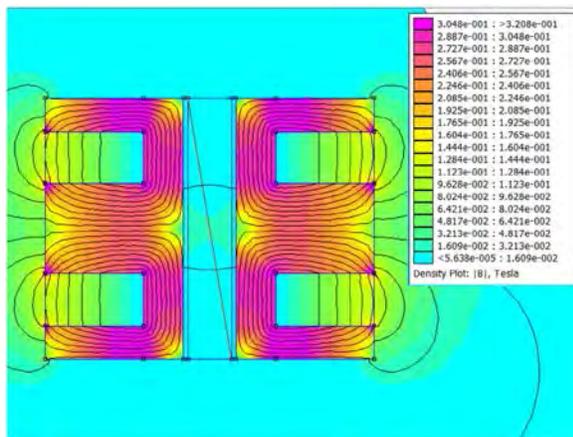
1: Simulación con tubería de cobre 3/16.



2: Simulación con tubería de cobre 1/4.

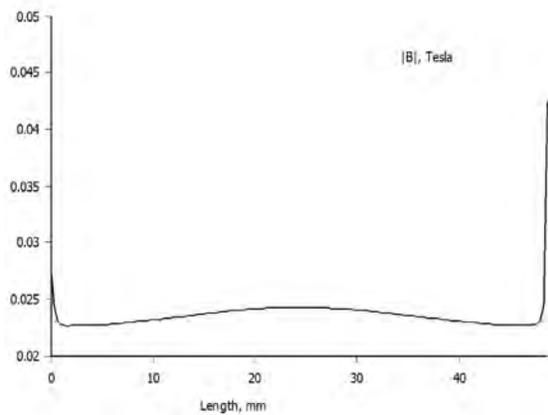
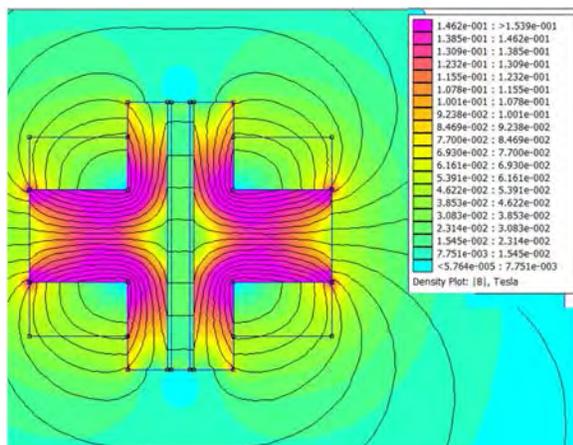


3: Simulación con tubería de cobre 5/16.

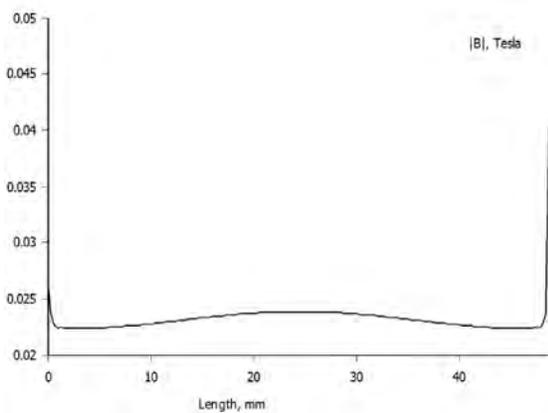
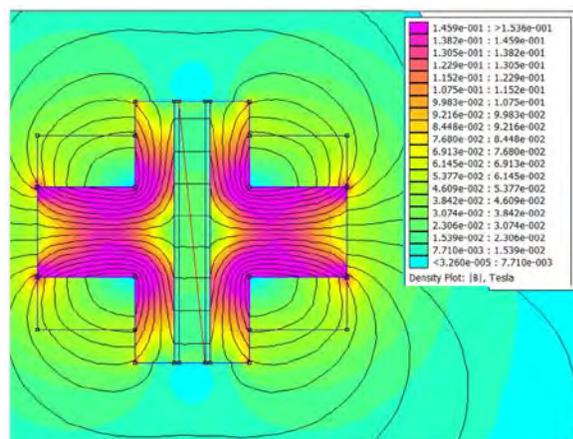


4: Simulación con tubería de cobre 3/8.

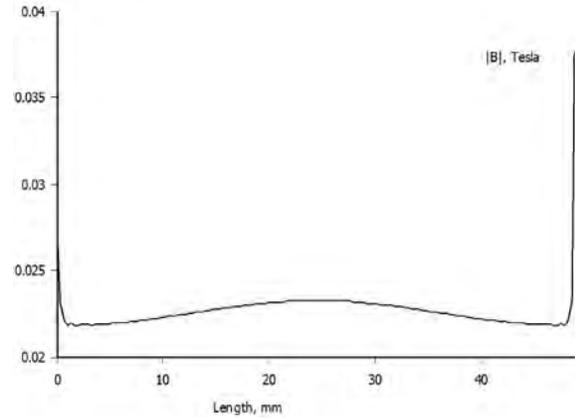
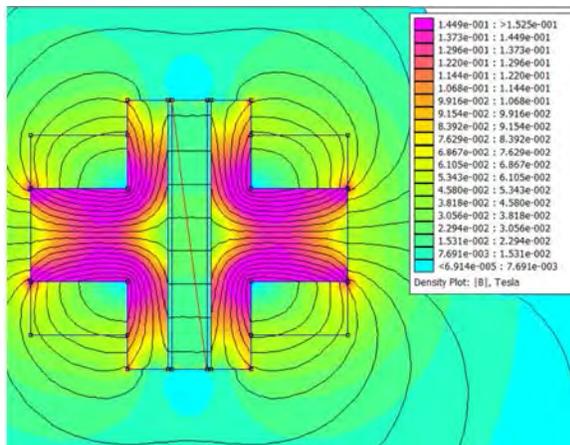
Simulaciones modelo 2 (núcleo de ferrita):



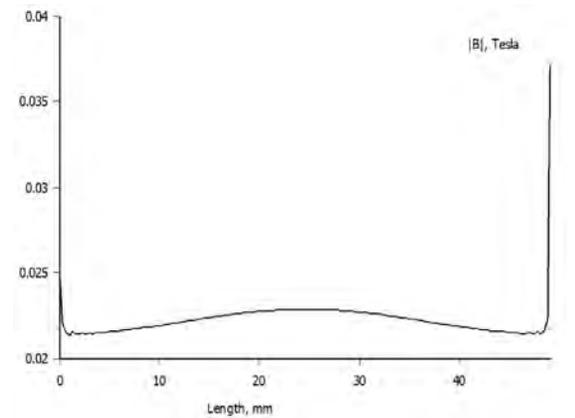
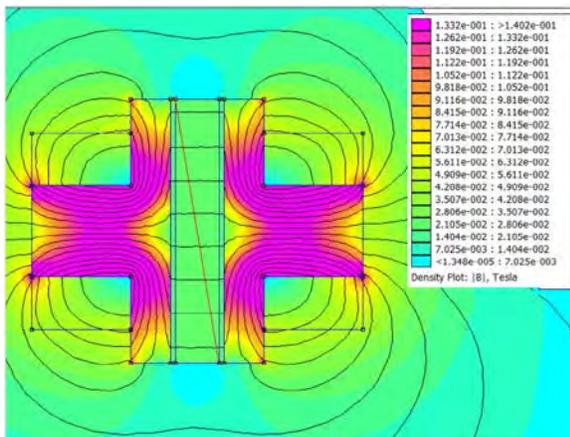
5: Simulación con tubería de cobre 3/16.



6: Simulación con tubería de cobre 1/4.

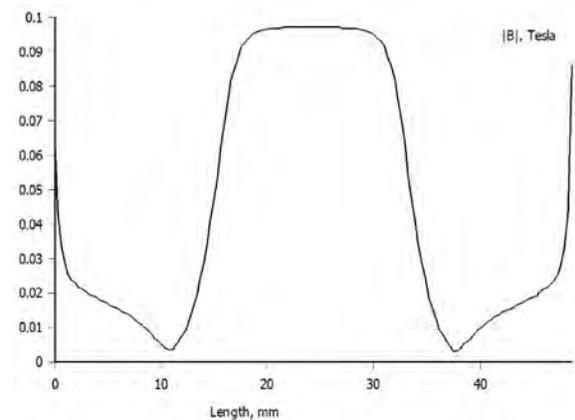
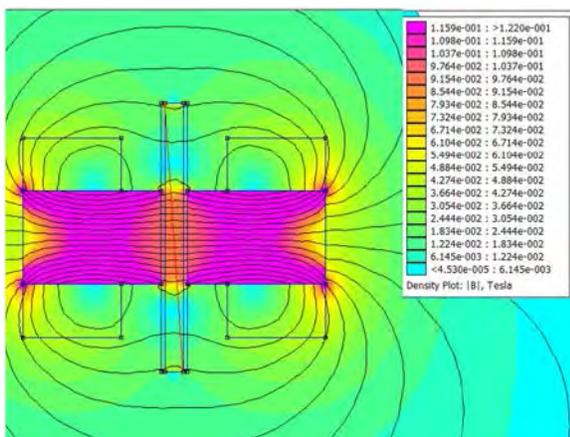


7: Simulación con tubería de cobre 5/16.

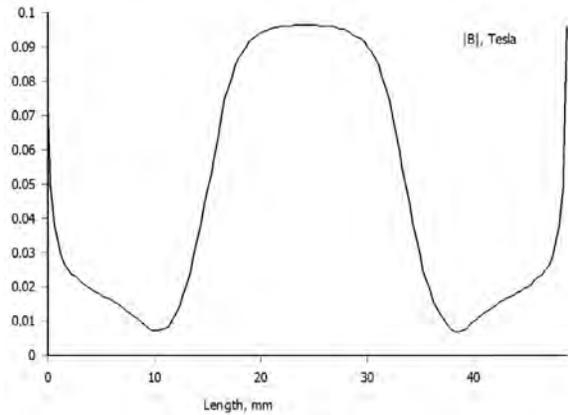
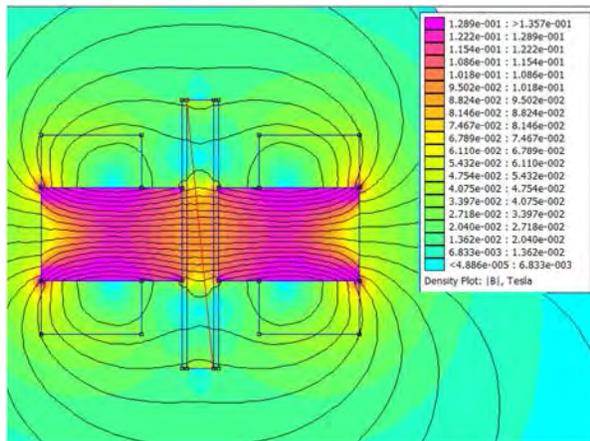


8: Simulación con tubería de cobre 3/8.

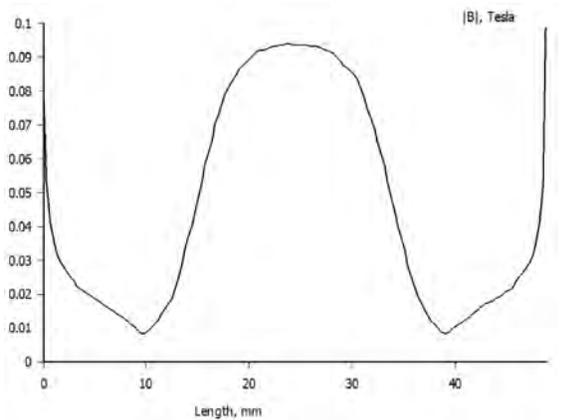
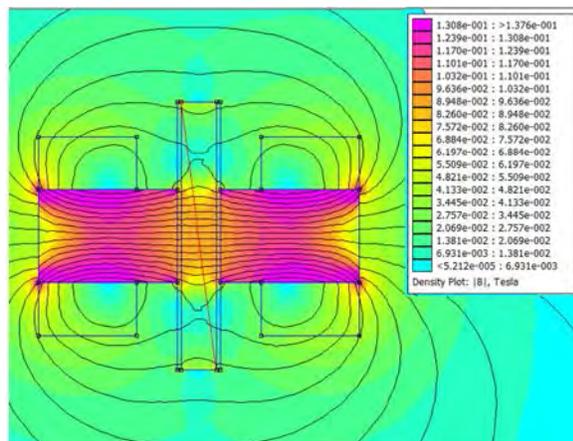
Simulaciones modelo 3 (núcleo de ferrita):



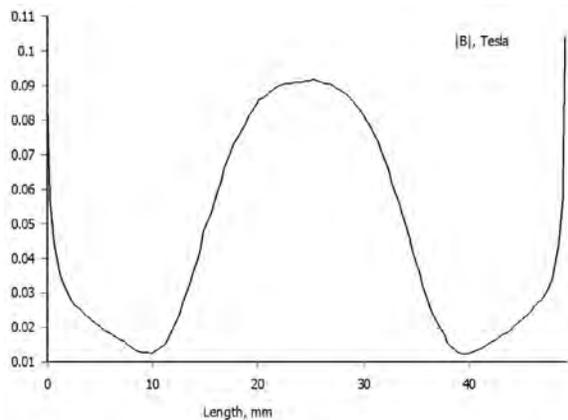
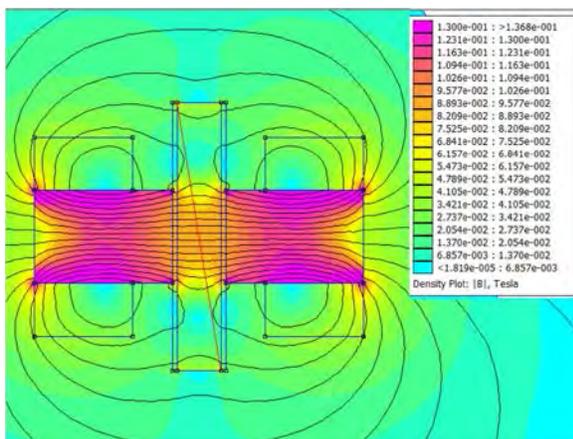
9: Simulación con tubería de cobre 3/16.



10: Simulación con tubería de cobre 1/4.

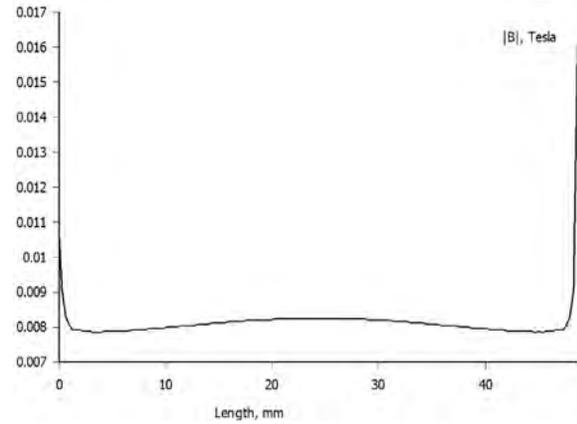
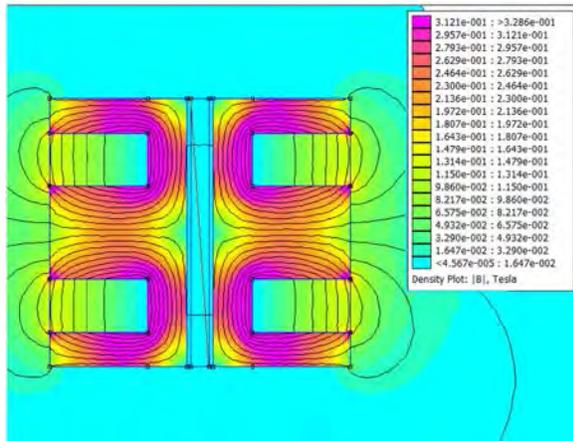


11: Simulación con tubería de cobre 5/16.

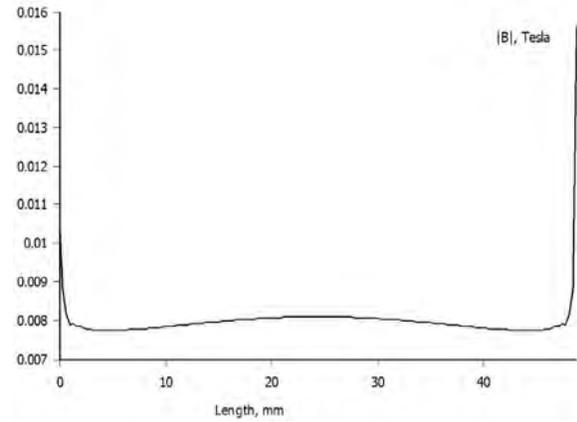
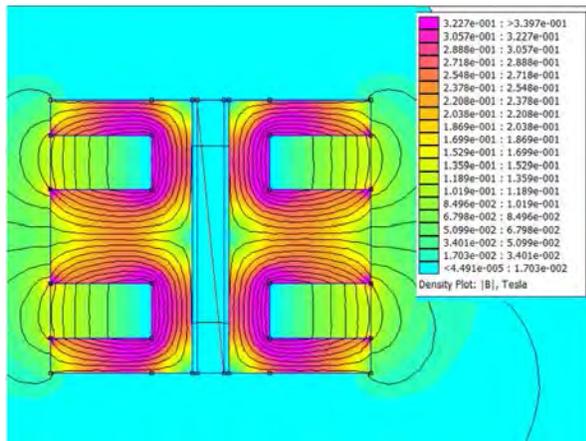


12: Simulación con tubería de cobre 3/8.

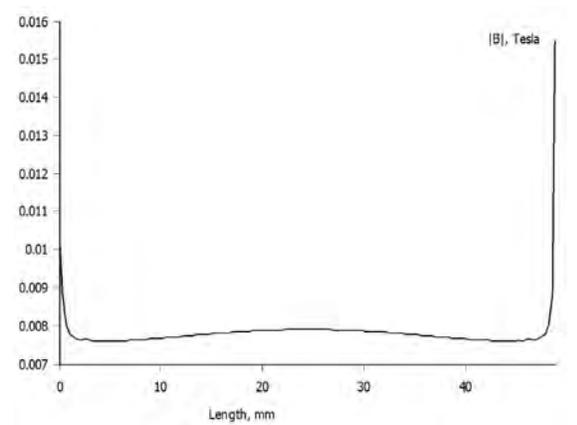
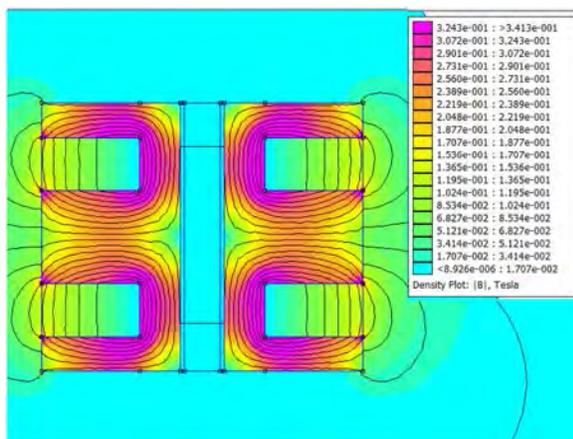
Simulaciones modelo 1 (núcleo de hierro):



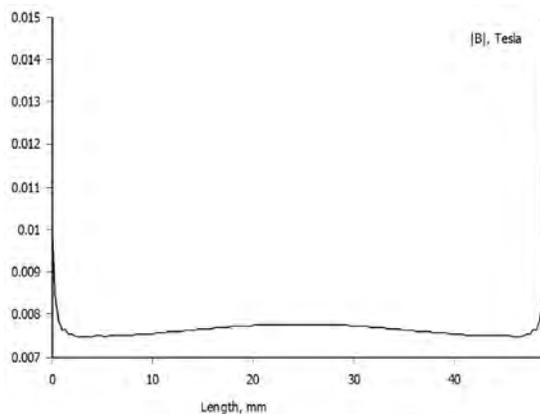
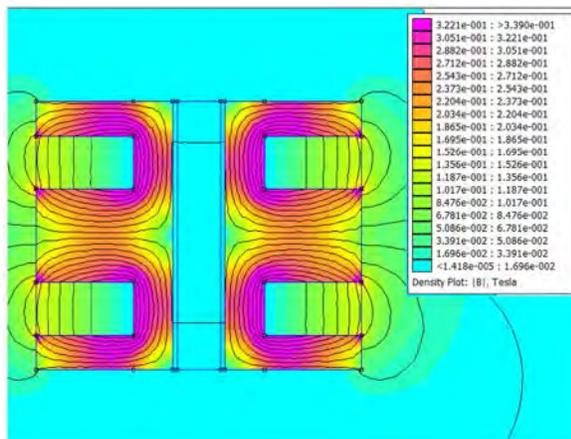
13: Simulación con tubería de cobre 3/16.



14: Simulación con tubería de cobre 1/4.

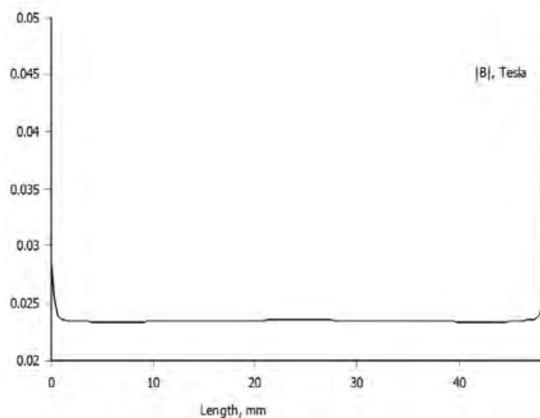
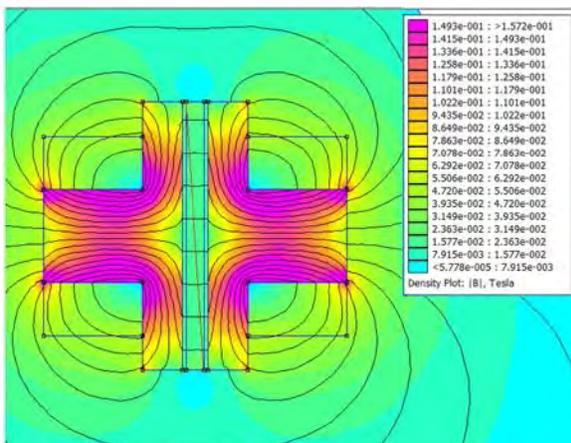


15: Simulación con tubería de cobre 5/16.

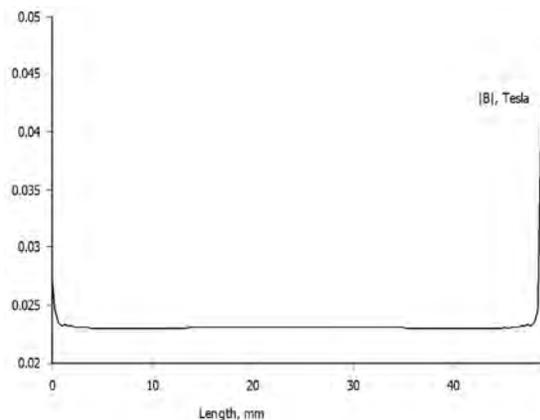
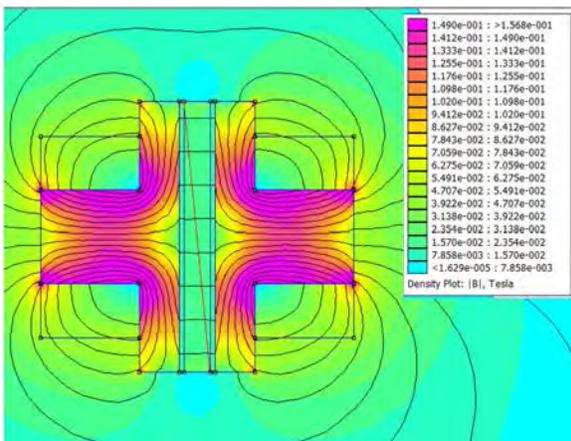


16: Simulación con tubería de cobre 3/8.

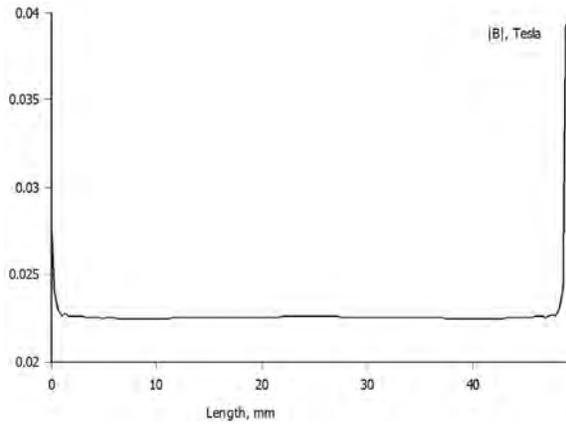
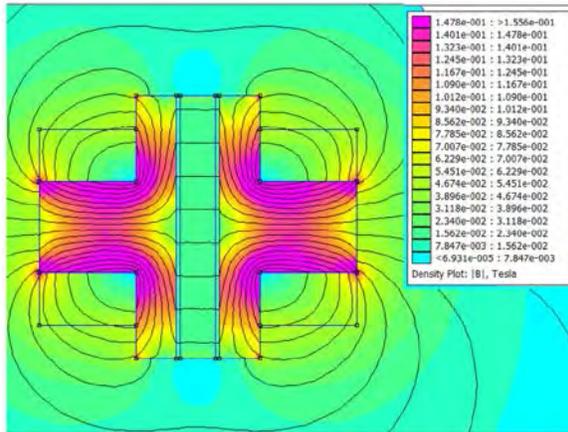
Simulaciones modelo 2 (núcleo de hierro):



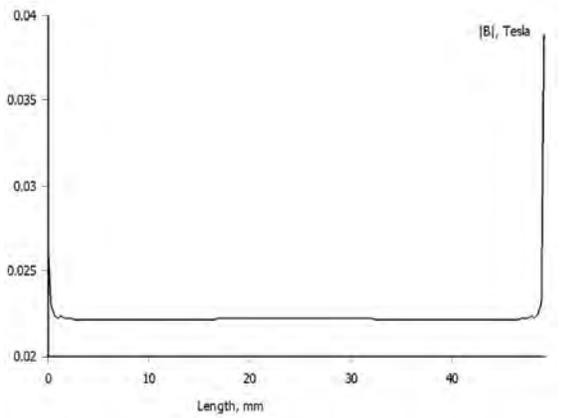
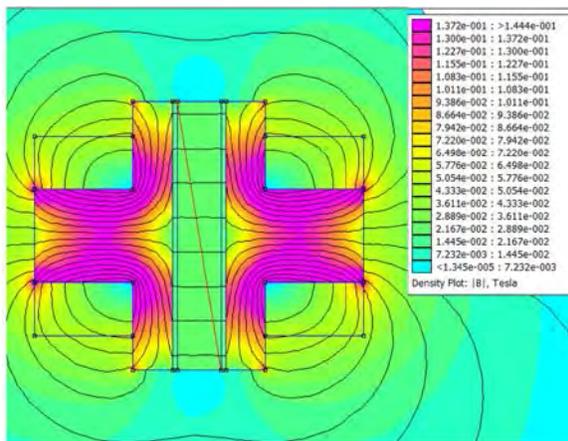
17: Simulación con tubería de cobre 3/16.



18: Simulación con tubería de cobre 1/4.

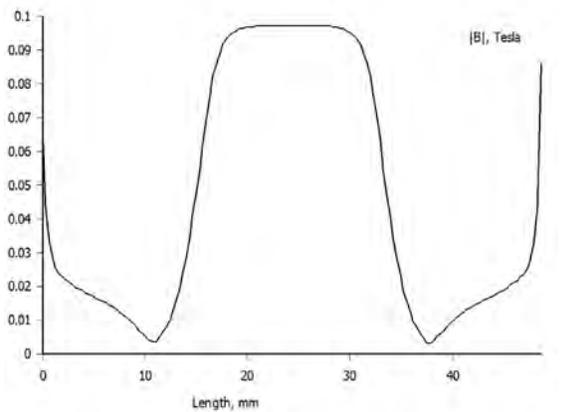
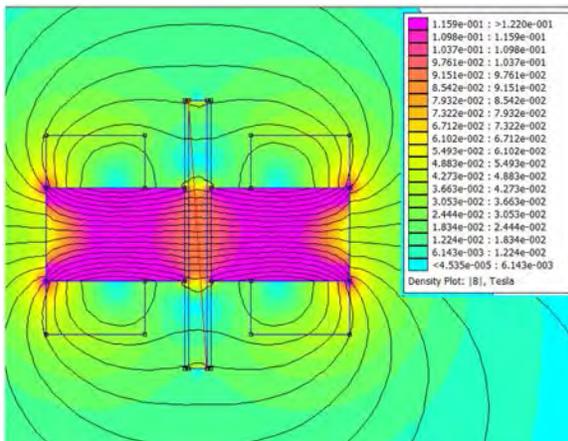


19: Simulación con tubería de cobre 5/16.

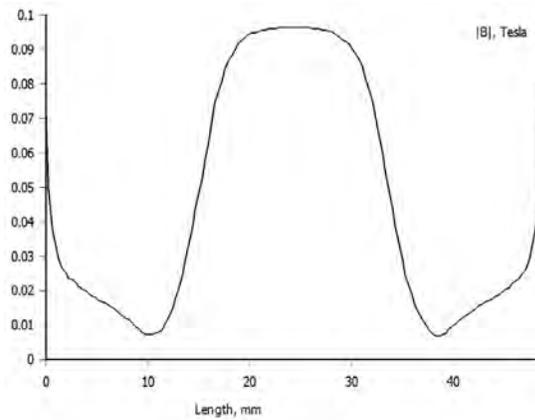
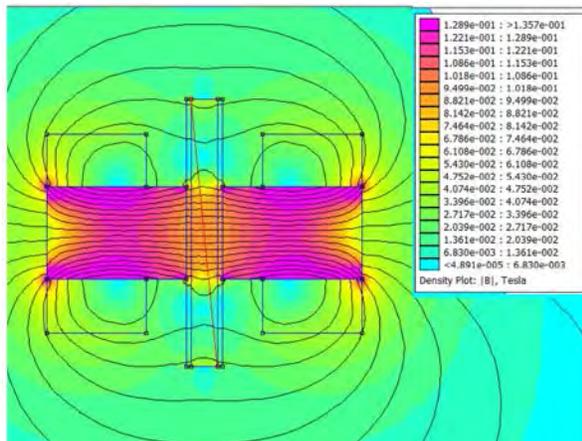


20: Simulación con tubería de cobre 3/8.

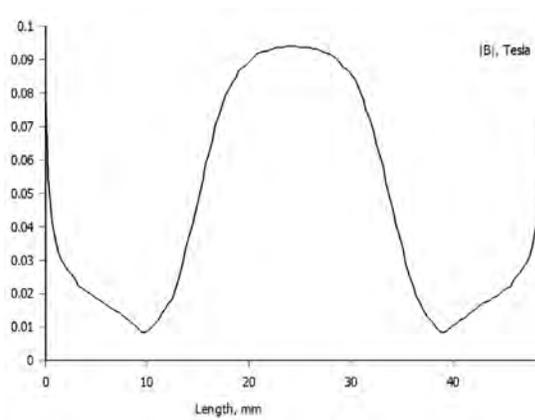
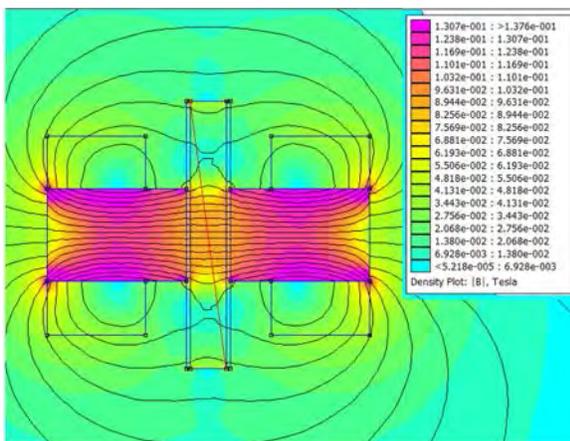
Simulaciones modelo 3 (núcleo de hierro):



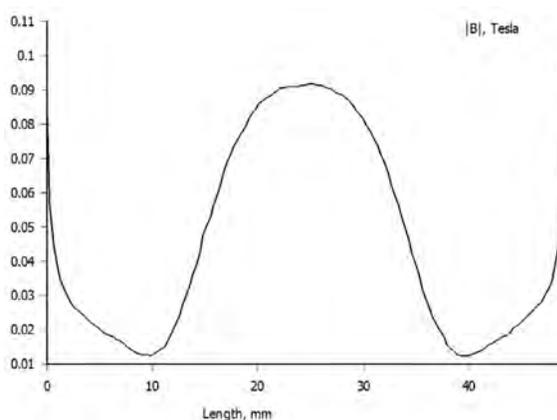
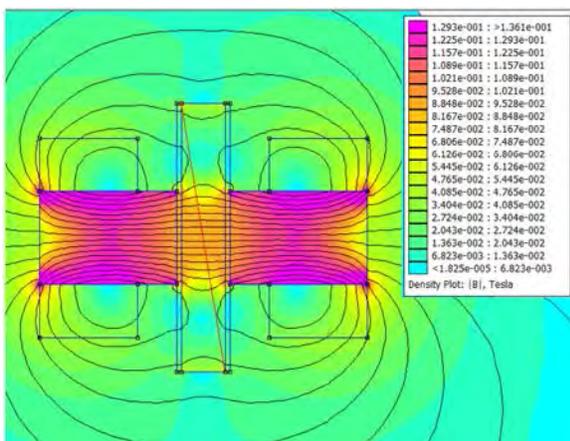
21: Simulación con tubería de cobre 3/16.



22: Simulación con tubería de cobre 1/4.

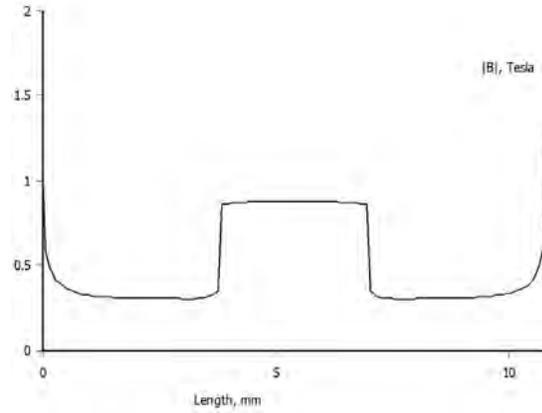
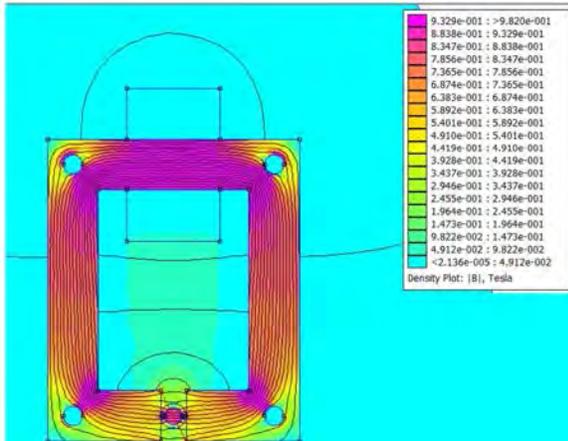


23: Simulación con tubería de cobre 5/16.

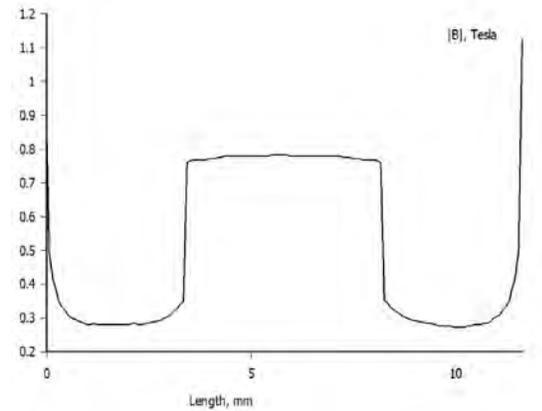
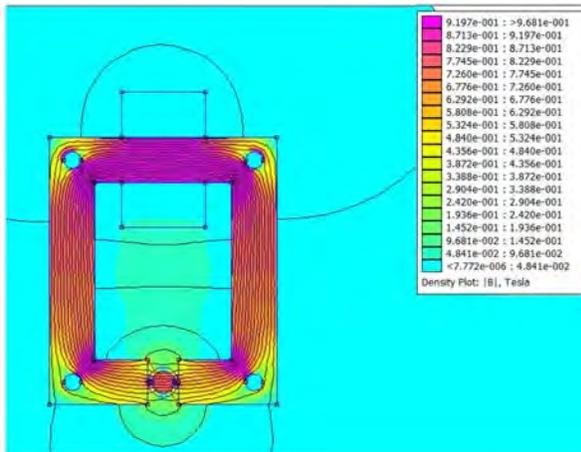


24: Simulación con tubería de cobre 3/8.

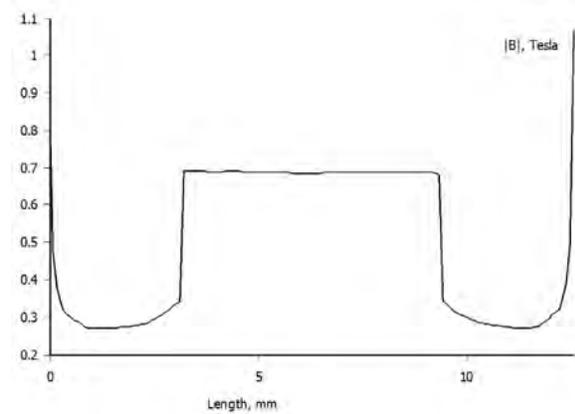
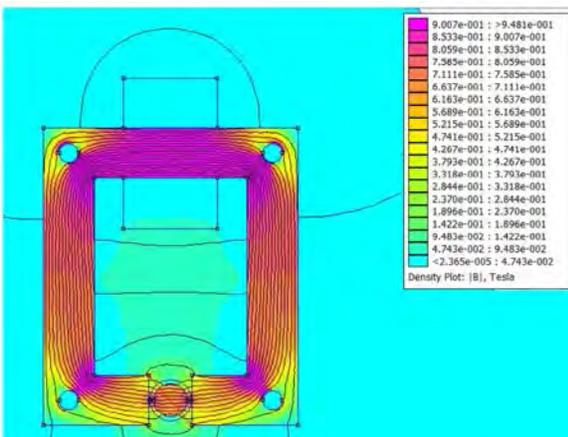
Simulaciones modelo 4 (laminado de hierro 18" de espesor):



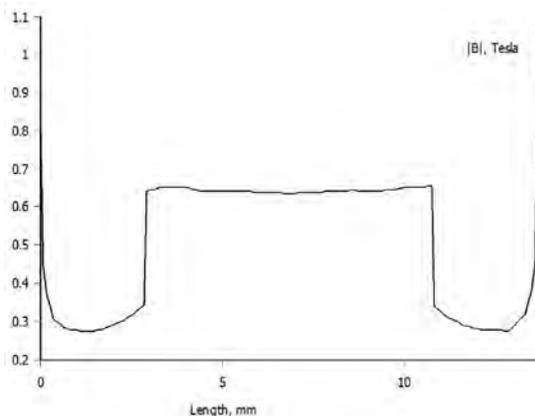
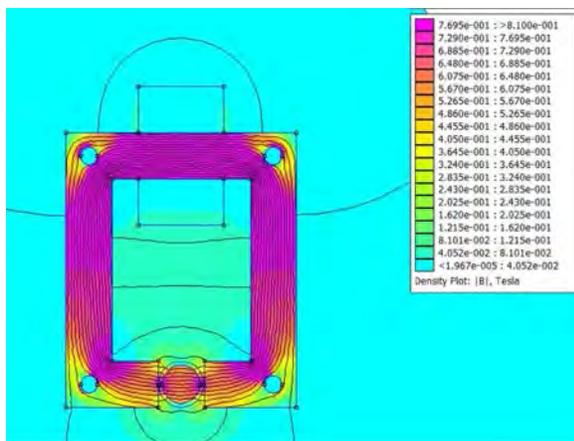
25: Simulación con tubería de cobre 3/16



26: Simulación con tubería de cobre 1/4.

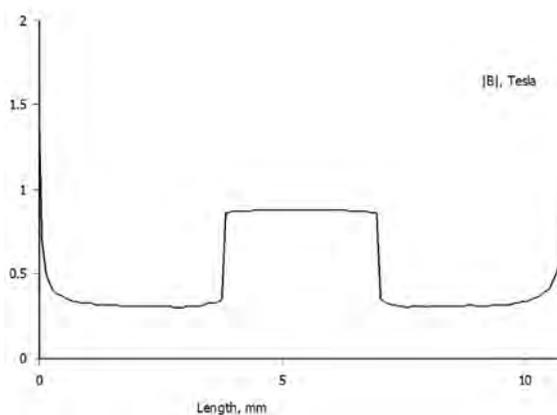
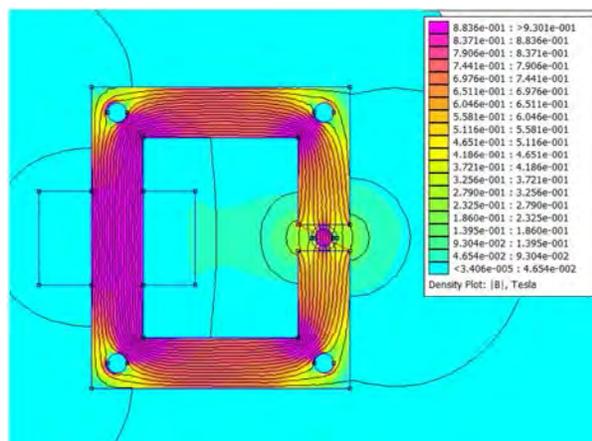


27: Simulación con tubería de cobre 5/16.

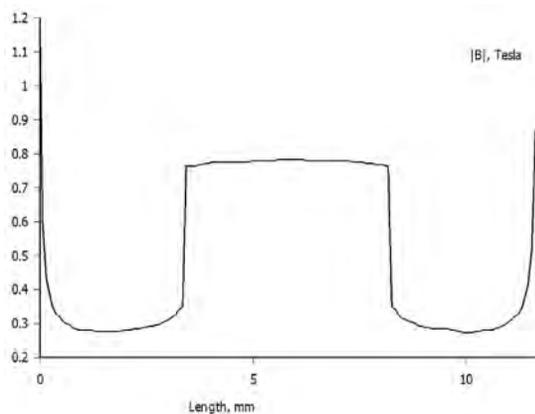
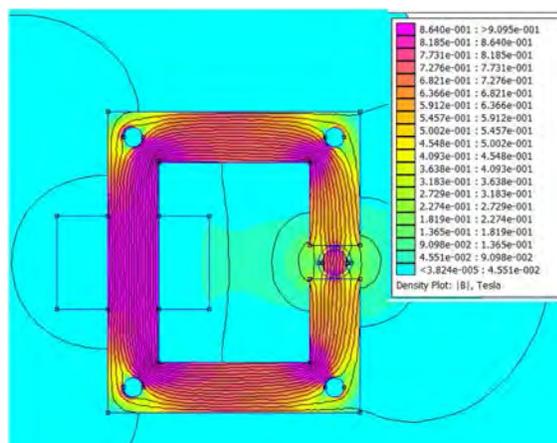


28: Simulación con tubería de cobre 3/8.

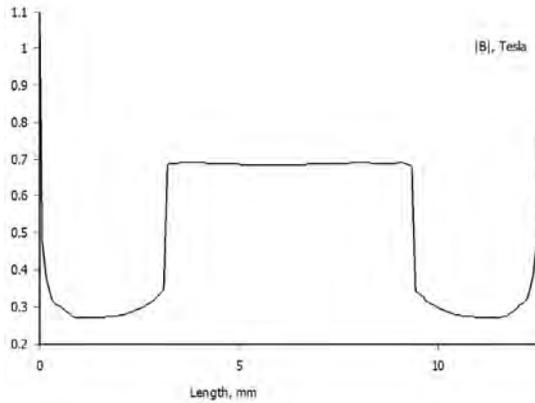
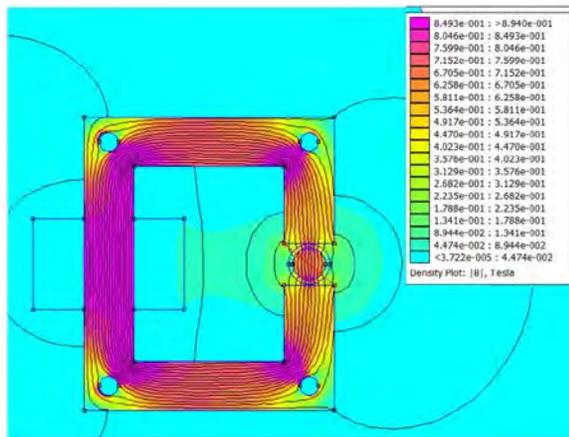
Simulaciones modelo 5 (laminado de hierro 18" de espesor):



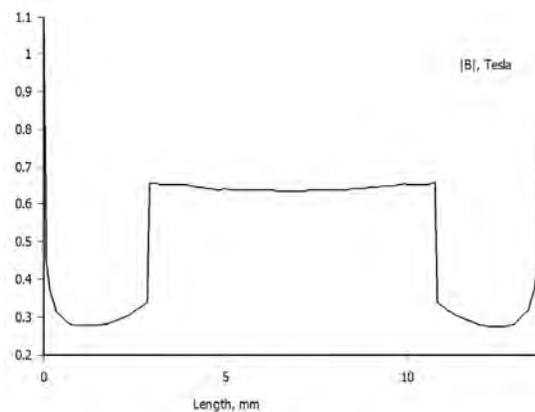
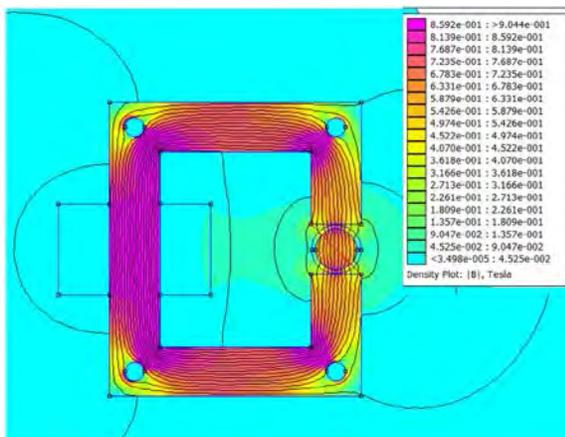
29: Simulación con tubería de cobre 3/16.



30: Simulación con tubería de cobre 1/4.

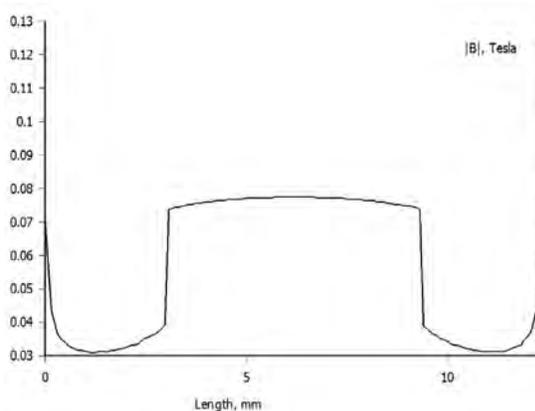
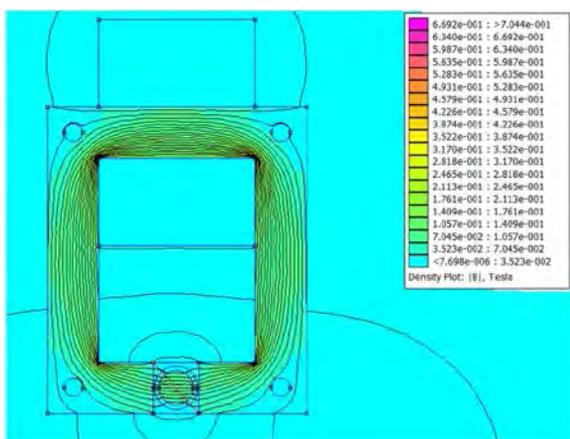


31: Simulación con tubería de cobre 5/16.

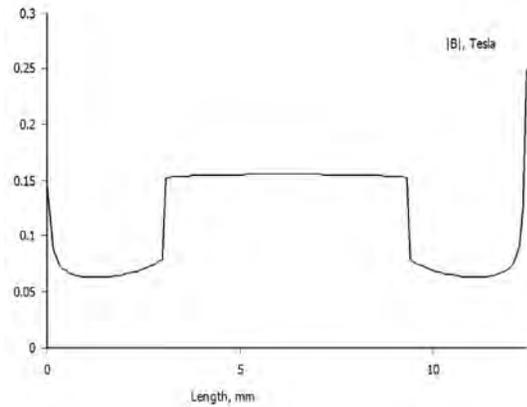
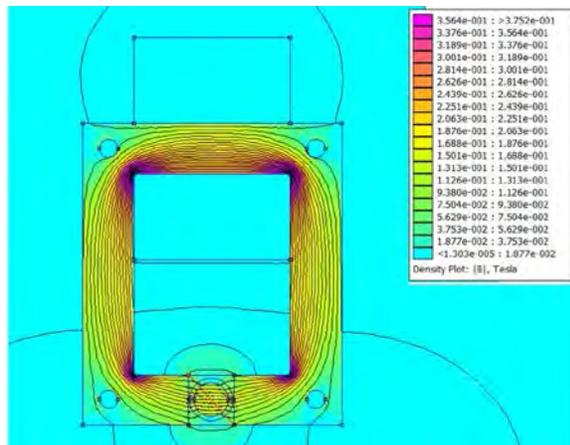


32: Simulación con tubería de cobre 3/8.

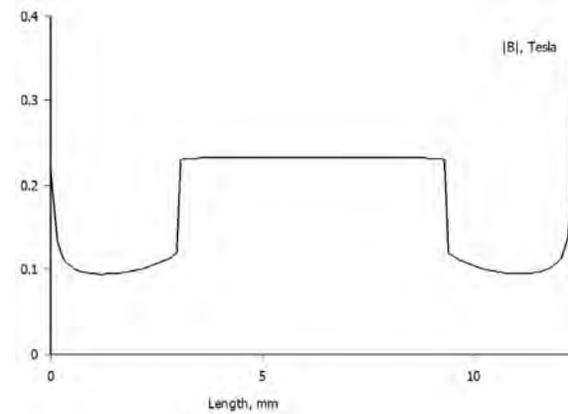
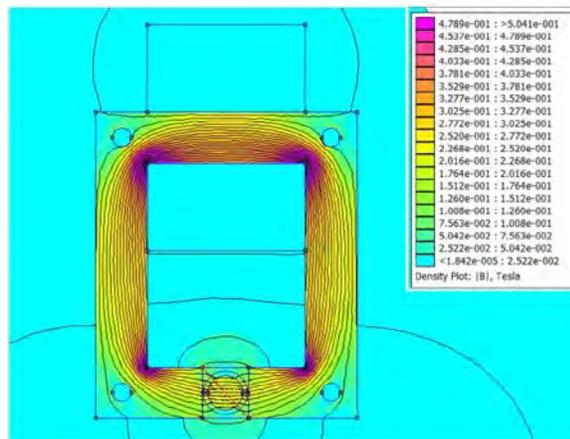
Simulaciones del inersor final con el software FEEM 4.2



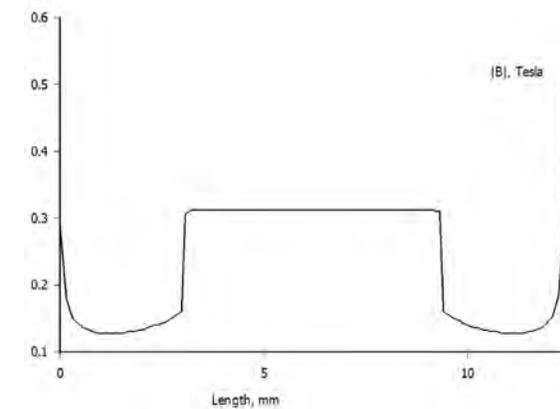
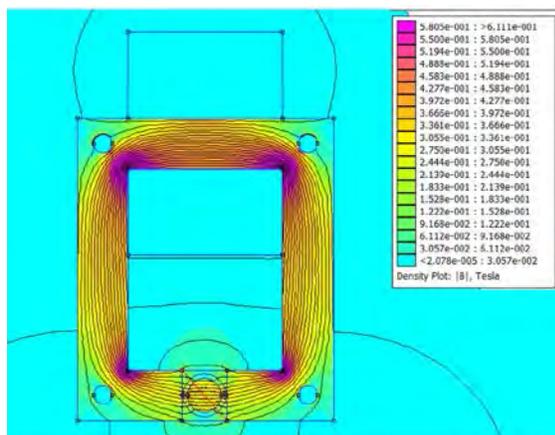
33: Simulación del flujo magnético con una intensidad de corriente 0.5 Amp.



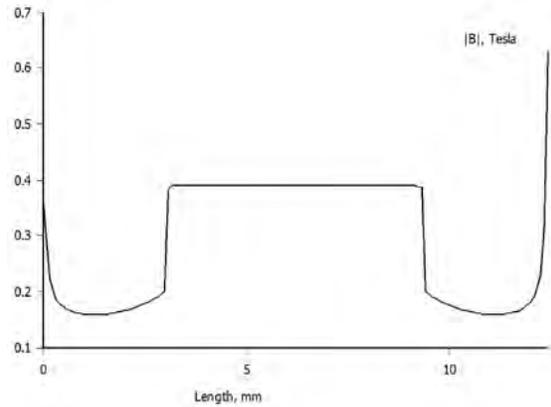
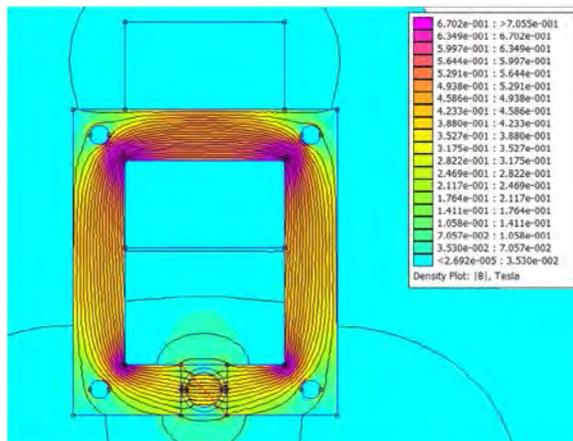
34: Simulación del flujo magnético con una intensidad de corriente 1 Amp.



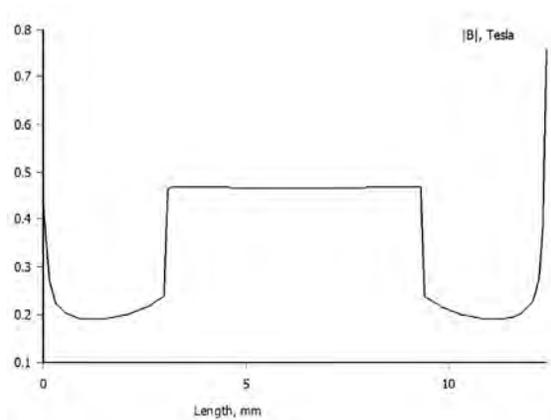
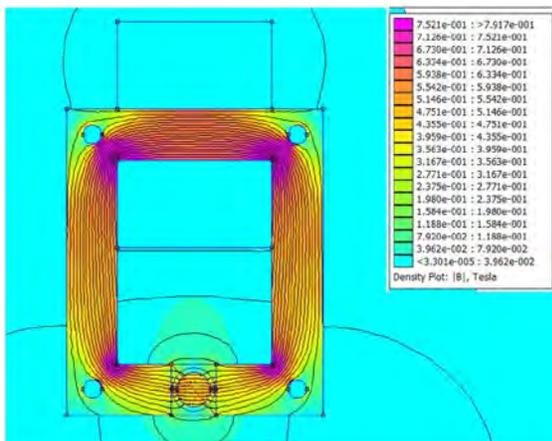
35: Simulación del flujo magnético con una intensidad de corriente 1.5 Amp.



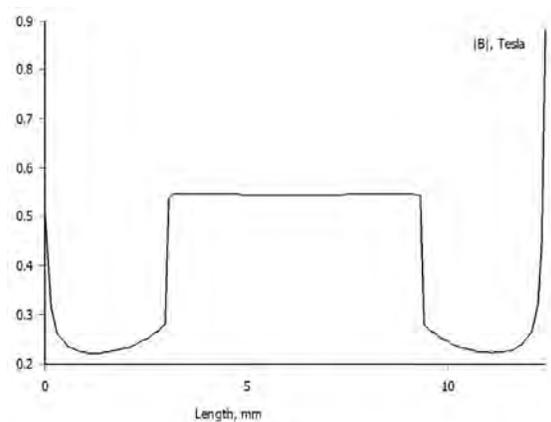
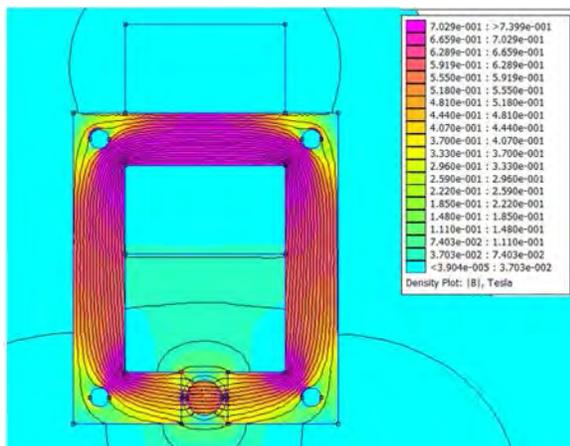
36: Simulación del flujo magnético con una intensidad de corriente 2 Amp.



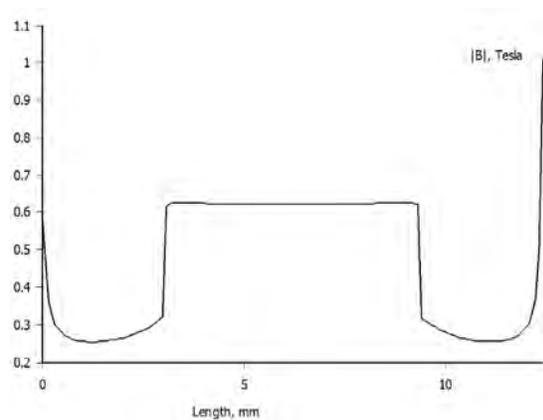
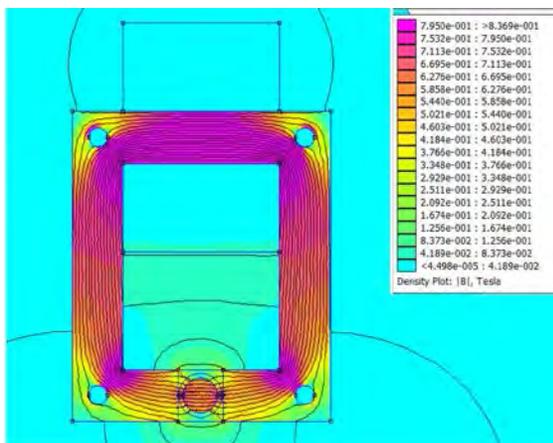
37: Simulación del flujo magnético con una intensidad de corriente 2.5 Amp.



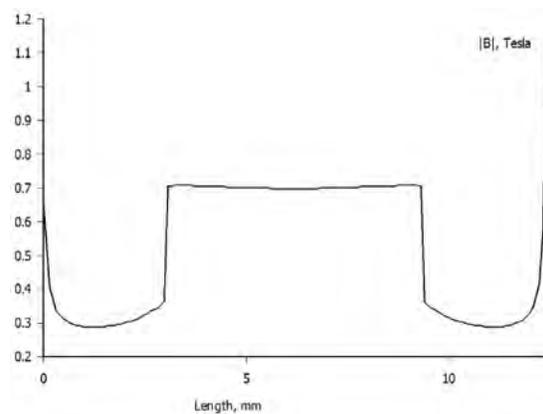
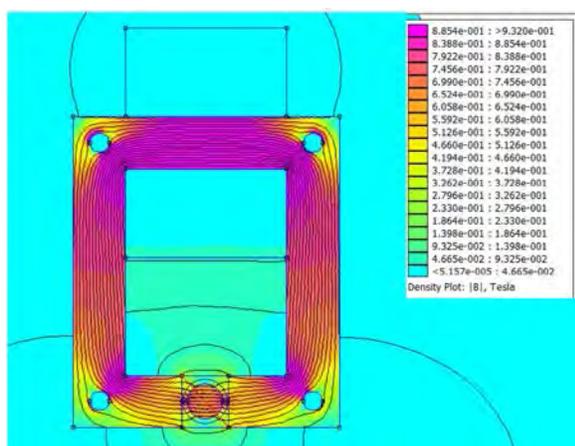
38: Simulación del flujo magnético con una intensidad de corriente 3 Amp.



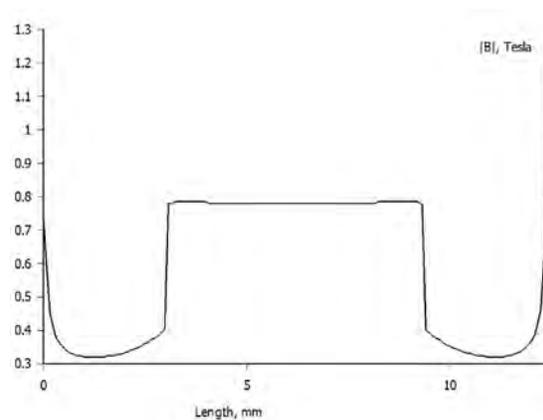
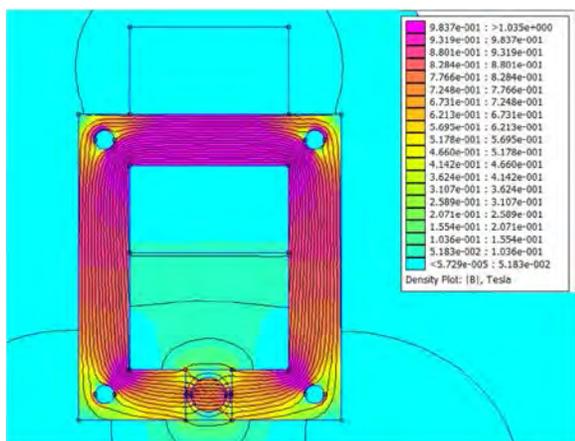
39: Simulación del flujo magnético con una intensidad de corriente 3.5 Amp.



40: Simulación del flujo magnético con una intensidad de corriente 4 Amp.

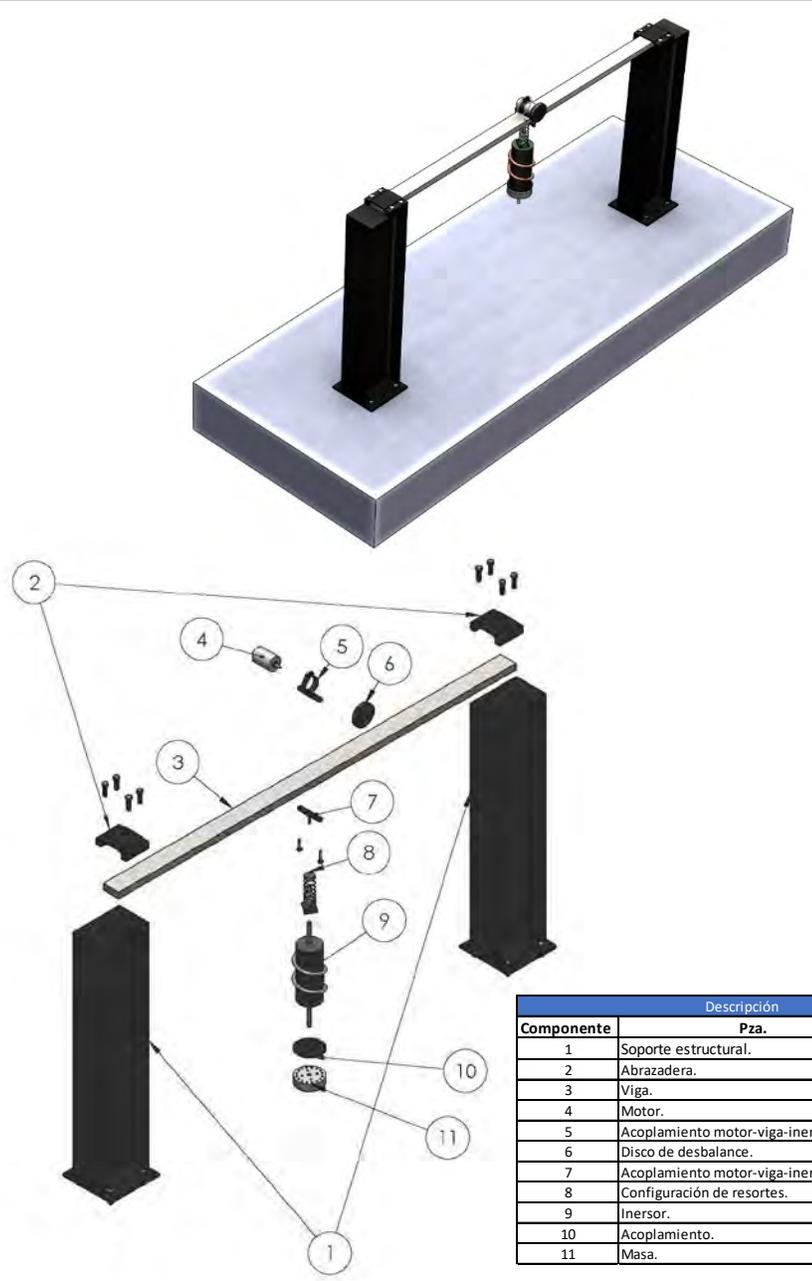


41: Simulación del flujo magnético con una intensidad de corriente 4.5 Amp.

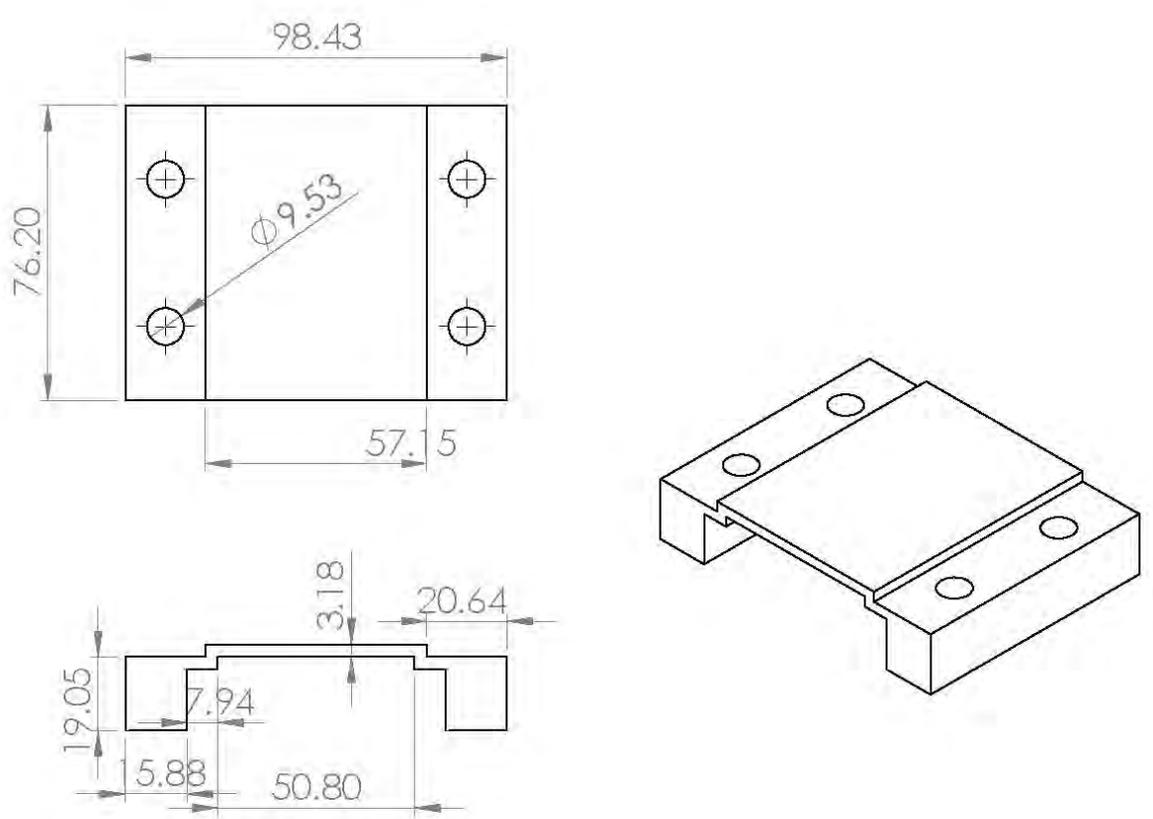


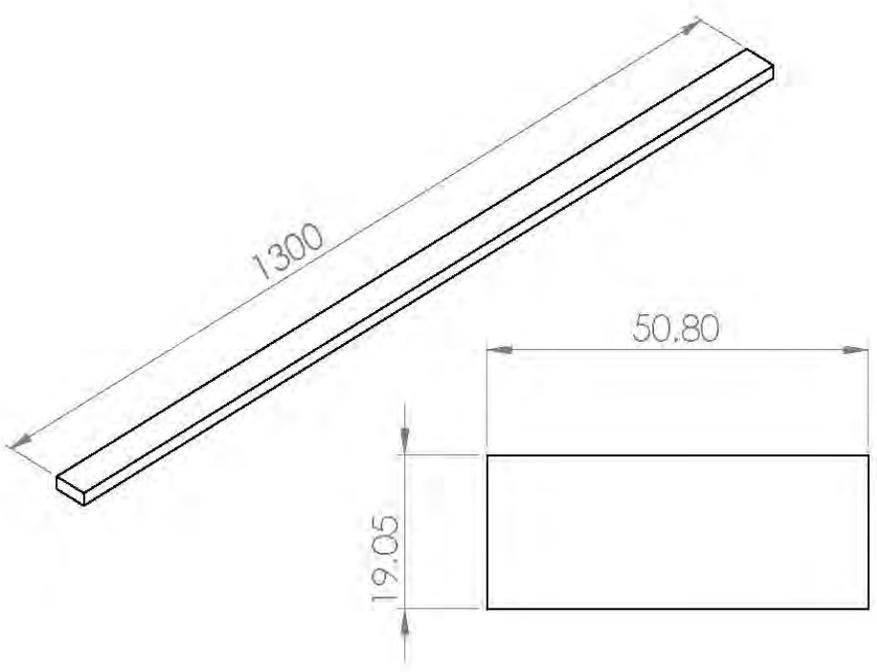
42: Simulación del flujo magnético con una intensidad de corriente 5 Amp.

Apéndice E: Planos de diseño

Planos de diseño																																									
Banco experimental																																									
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 1																																							
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo																																								
Vista preliminar																																									
																																									
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <thead> <tr style="background-color: #4F81BD; color: white;"> <th colspan="3">Descripción</th> </tr> <tr> <th style="width: 15%;">Componente</th> <th style="width: 65%;">Pza.</th> <th style="width: 20%;">Cantidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>Soporte estructural.</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>Abrazadera.</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>Viga.</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>Motor.</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>Acoplamiento motor-viga-inersor part. 1.</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>Disco de desbalance.</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>Acoplamiento motor-viga-inersor part. 2.</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>Configuración de resortes.</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>Inersor.</td><td>1</td></tr> <tr><td>10</td><td>Acoplamiento.</td><td>1</td></tr> <tr><td>11</td><td>Masa.</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>			Descripción			Componente	Pza.	Cantidad	1	Soporte estructural.	2	2	Abrazadera.	2	3	Viga.	1	4	Motor.	1	5	Acoplamiento motor-viga-inersor part. 1.	1	6	Disco de desbalance.	1	7	Acoplamiento motor-viga-inersor part. 2.	1	8	Configuración de resortes.	1	9	Inersor.	1	10	Acoplamiento.	1	11	Masa.	1
Descripción																																									
Componente	Pza.	Cantidad																																							
1	Soporte estructural.	2																																							
2	Abrazadera.	2																																							
3	Viga.	1																																							
4	Motor.	1																																							
5	Acoplamiento motor-viga-inersor part. 1.	1																																							
6	Disco de desbalance.	1																																							
7	Acoplamiento motor-viga-inersor part. 2.	1																																							
8	Configuración de resortes.	1																																							
9	Inersor.	1																																							
10	Acoplamiento.	1																																							
11	Masa.	1																																							
<p>Comentarios: Diseño del banco de pruebas experimental y el desglose de piezas. Nota: En los planos no se incluye el motor, los resortes y la tornillería.</p>																																									

Planos de diseño		
Banco experimental		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 2
Pieza: Soporte estructural		
Material: Acero estructural	Cantidad: 2	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez		Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo
Comentarios: Las perforaciones son para tornillería de 3/8 de pulgada.		

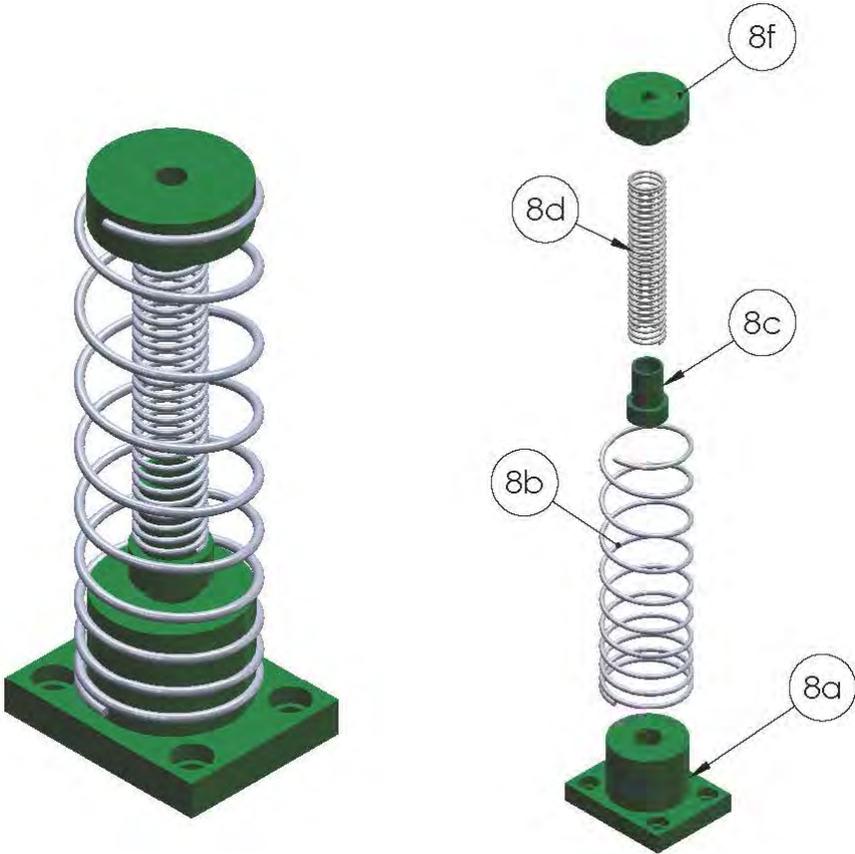
Planos de diseño		
Banco experimental.		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 3
Pieza: Abrazadera		
Material: Fierro comercial	Cantidad: 2	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez		Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo
 <p>The technical drawing shows a bracket with the following dimensions: overall width 98.43 mm, overall height 76.20 mm, and a distance of 57.15 mm from the left edge to the center of the hole pattern. The hole pattern consists of four holes arranged in a 2x2 grid. The diameter of each hole is $\phi 9.53$ mm. The cross-section shows a total width of 50.80 mm, with a top flange of 7.94 mm width and 19.05 mm height. The main body has a height of 3.18 mm and a distance of 20.64 mm from the right edge to the center of the hole pattern. A bottom flange has a width of 5.88 mm.</p>		
Comentarios: Las perforaciones son para tornillería de 3/8 de pulgada.		

Planos de diseño		
Banco experimental.		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 4
Pieza: Viga		
Material: Acero 1018	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo	
		
Comentarios:		

Planos de diseño		
Banco experimental.		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 5
Pieza: Acoplamiento motor-viga-inersor part. 1		
Material: fierro comercial	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez		Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo
Comentarios:		

Planos de diseño		
Banco experimental.		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 6
Pieza: Disco de desbalance		
Material: Nylomaq	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valdez		Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo
Comentarios: Disco para poner diferentes pesos de desbalance.		

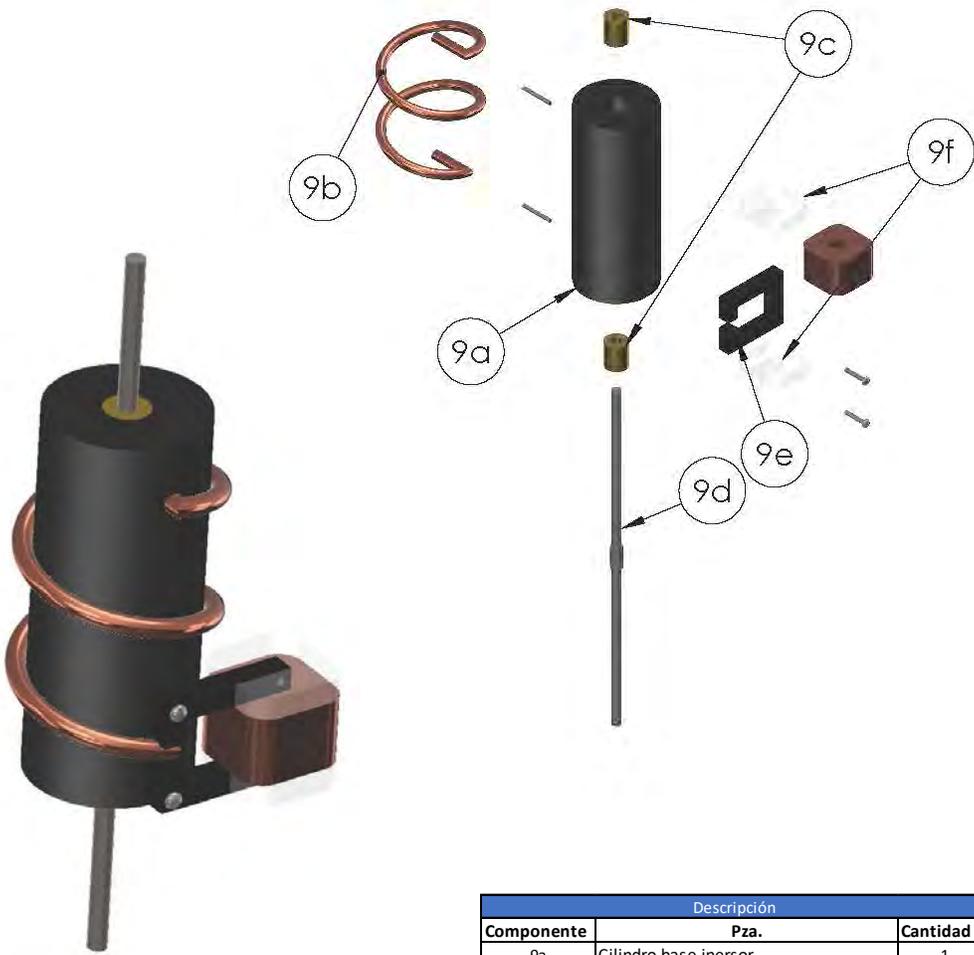
Planos de diseño		
Banco experimental.		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 7
Pieza: Acoplamiento motor-viga-inersor part.2		
Material: fierro comercial	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo	
Comentarios: El vástago tiene cuerda 3/16 cuerda estándar.		

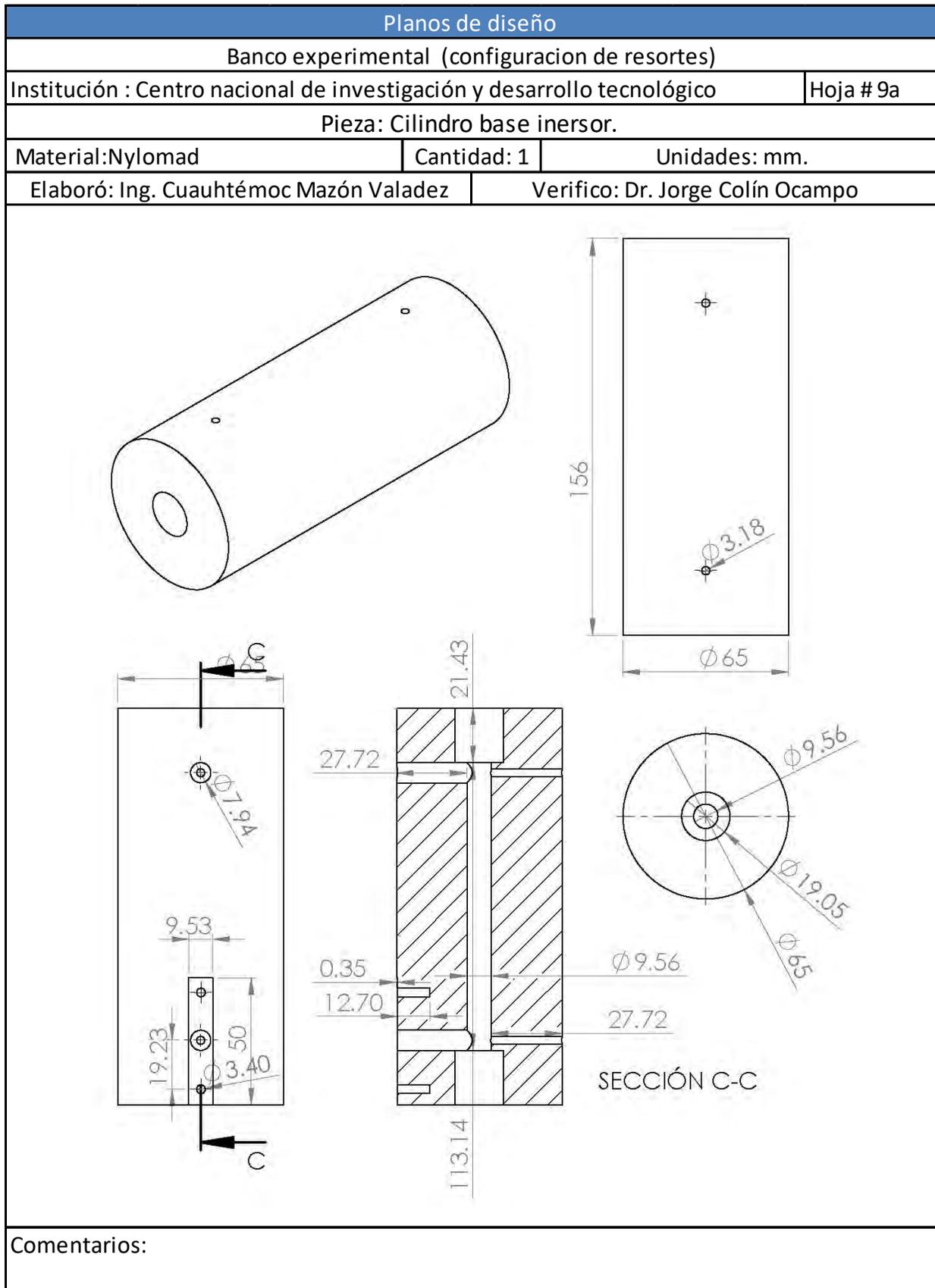
Planos de diseño																						
Banco experimental (configuración de resortes)																						
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico	Hoja # 8																					
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo																					
Vista preliminar																						
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">  </div>																						
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr style="background-color: #4F81BD; color: white;"> <th colspan="3">Descripción</th> </tr> <tr> <th style="text-align: left;">Componente</th> <th style="text-align: left;">Pza.</th> <th style="text-align: left;">Cantidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>8a</td> <td>Acoplamiento inersor-resorte 038.</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td>8b</td> <td>Resorte 028.</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td>8c</td> <td>Acoplamiento flecha-resorte 028.</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td>8d</td> <td>Resorte 038.</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td>8f</td> <td>Acoplamiento viga-resortes.</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </tbody> </table>		Descripción			Componente	Pza.	Cantidad	8a	Acoplamiento inersor-resorte 038.	1	8b	Resorte 028.	1	8c	Acoplamiento flecha-resorte 028.	1	8d	Resorte 038.	1	8f	Acoplamiento viga-resortes.	1
Descripción																						
Componente	Pza.	Cantidad																				
8a	Acoplamiento inersor-resorte 038.	1																				
8b	Resorte 028.	1																				
8c	Acoplamiento flecha-resorte 028.	1																				
8d	Resorte 038.	1																				
8f	Acoplamiento viga-resortes.	1																				
<p>Comentarios: Diseño del banco de pruebas experimental y el desglose de piezas. Nota: en los planos no se incluye los resortes.</p>																						

Planos de diseño		
Banco experimental (configuración de resortes)		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 8a
Pieza: Acoplamiento inersor-resorte 038.		
Material: Nylomad	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verificó: Dr. Jorge Colín Ocampo	
Comentarios: Se considera un avellanado para que la tornillería de 3/16.		

Planos de diseño		
Banco experimental (configuracion de resortes)		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 8c
Pieza: Acoplamiento flecha-resorte 028.		
Material:Nylomad	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez		Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo
Comentarios:		

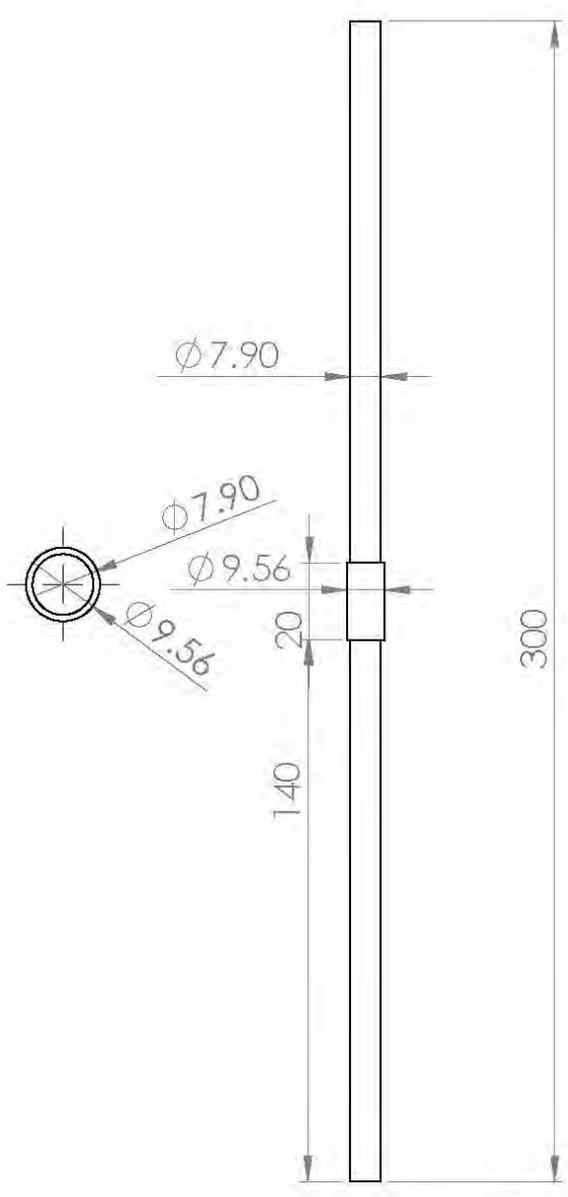
Planos de diseño		
Banco experimental (configuracion de resortes)		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 8f
Pieza: Acoplamiento viga-resortes.		
Material: Nylomad	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez		Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo
Comentarios:		

Planos de diseño																										
Banco experimental (inensor)																										
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 9																								
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo																									
Vista preliminar																										
																										
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr style="background-color: #4F81BD; color: white;"> <th colspan="3" style="text-align: center;">Descripción</th> </tr> <tr> <th style="text-align: left;">Componente</th> <th style="text-align: left;">Pza.</th> <th style="text-align: left;">Cantidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>9a</td> <td>Cilindro base inensor.</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td>9b</td> <td>Canal helicoidal.</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td>9c</td> <td>Buje.</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td>9d</td> <td>Pistón.</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td>9e</td> <td>Núcleo válvula MR.</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td>9f</td> <td>Soporte de bobina.</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> </tbody> </table>			Descripción			Componente	Pza.	Cantidad	9a	Cilindro base inensor.	1	9b	Canal helicoidal.	1	9c	Buje.	2	9d	Pistón.	1	9e	Núcleo válvula MR.	1	9f	Soporte de bobina.	2
Descripción																										
Componente	Pza.	Cantidad																								
9a	Cilindro base inensor.	1																								
9b	Canal helicoidal.	1																								
9c	Buje.	2																								
9d	Pistón.	1																								
9e	Núcleo válvula MR.	1																								
9f	Soporte de bobina.	2																								
Comentarios: Diseño del inensor y el desglose de piezas.																										



Planos de diseño		
Banco experimental (configuración de resortes)		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 9b
Pieza: Canal helicoidal.		
Material: Tubería de cobre 5/16".	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo	
Comentarios:		

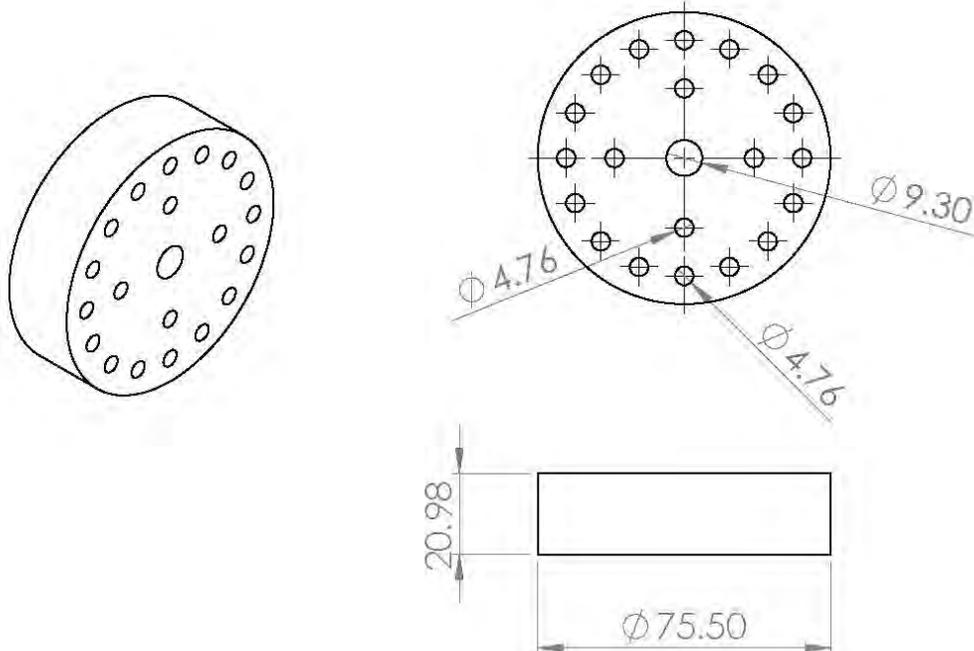
Planos de diseño		
Banco experimental (configuracion de resortes)		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 9c
Pieza: Buje.		
Material: Laton.	Cantidad: 2	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo	
<p>The drawing consists of three views of a bush. On the left is a 3D perspective view of a cylindrical bush with a central hole. To the right is a side view showing a square profile with a height dimension of 21.43 mm and an outer diameter dimension of Ø19.05 mm. Below the side view is a top view showing a circular profile with an inner diameter dimension of Ø7.90 mm. Dashed lines in the top view indicate the center and the vertical axis.</p>		
Comentarios:		

Planos de diseño		
Banco experimental (configuracion de resortes)		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 9d
Pieza: Pistón.		
Material: Acero inoxidable 304	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez		Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo
		
Comentarios:		

Planos de diseño		
Banco experimental (configuracion de resortes)		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 9e
Pieza: Núcleo válvula MR.		
Material: Acero laminada 18" espesor.	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo	
Comentarios:		

Planos de diseño		
Banco experimental (configuración de resortes)		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 9f
Pieza: Soporte de bobina.		
Material: Acrílico.	Cantidad: 2	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo	
Comentarios:		

Planos de diseño		
Banco experimental.		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 10
Pieza: Acoplamiento.		
Material: Naylomaq	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo	
Comentarios:		

Planos de diseño		
Banco experimental.		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 11
Pieza: Masa.		
Material: Acero 4140.	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo	
		
Comentarios:		

Planos de diseño		
Banco experimental.		
Institución : Centro nacional de investigación y desarrollo tecnológico		Hoja # 12
Pieza: Aditamento para maquina universal marca SHIMADZU.		
Material: Aluminio 6061.	Cantidad: 1	Unidades: mm.
Elaboró: Ing. Cuauhtémoc Mazón Valadez	Verifico: Dr. Jorge Colín Ocampo	
Comentarios:		

Apéndice F: Análisis adicionales

Análisis del elemento viga doblemente empotrada

Para el banco experimental de la figura 5-1, se implementó una viga de acero 1018, en la siguiente tabla se muestran las dimensiones, así como, sus propiedades de acuerdo a la literatura o datos comerciales.

Geometría y propiedades de la viga de acero 1018.

Propiedades del elemento tipo viga.		
Material.	Acero 1018.	
Características.	Valores.	Unidades.
Dimensiones.	5.08 x 1.905 x 130	(cm)
Módulo de elasticidad. (E)	200	(G Pa)
Segundo momento de área. (I)	2.99E-08	(m^4)
Densidad. (ρ)	7762.377	(kg/m^3)
Masa total de la viga. (m_v)	10.0911	(kg)

Con el objetivo de corroborar con datos experimentales las propiedades del elemento viga, se realizó un análisis con carga a flexión en tres puntos con tres probetas de la misma viga, tal y como se muestra en la siguientes figura. Para las pruebas se utilizó una maquina universal marca SHIMADZU.

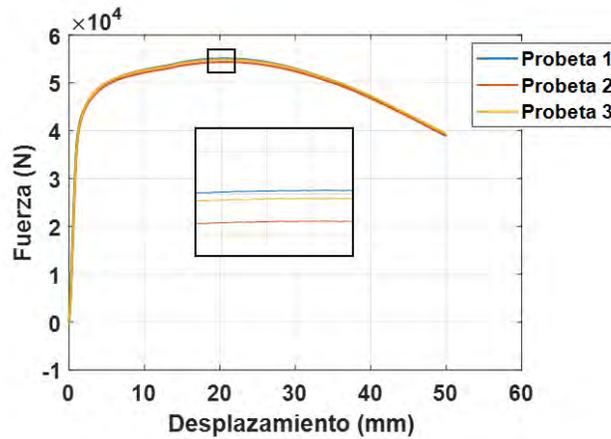


Análisis a deflexión con la máquina universal.



Maquina universal marca SHIMADZU.

De las pruebas realizadas, se puede determinar mediante la deflexión, el comportamiento que tiene el material a una carga puntual. A partir de los datos adquiridos, el programa de la máquina universal determina rigidez, resistencia del material y el módulo de elasticidad, entre otros parámetros. En esta ocasión la propiedad física de interés fue el módulo de elasticidad o módulo de Young, con el cual es posible determinar la frecuencia natural de la viga doblemente empotrada del banco experimental. En la siguiente figura, se muestra las gráficas del comportamiento de la fuerza aplicada a cada probeta con respecto al desplazamiento generado.



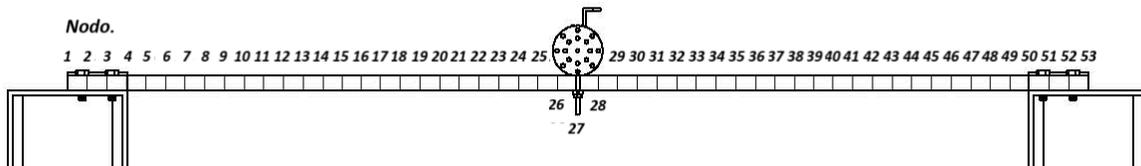
Respuesta de las probetas en el análisis (deflexión 3 puntos).

De la gráfica anterior, se puede observar que los resultados obtenidos son similares en las tres pruebas realizadas. Nótese que la probeta presenta un comportamiento lineal hasta una fuerza aproximada de 4×10^4 N. En la siguiente tabla, se muestra el Módulo de Young obtenido en cada prueba.

Resultados del análisis del módulo de elasticidad con la maquina universal.

Elemento.	Módulo de elasticidad.(E)
Probeta 1	128.645 GPa.
Probeta 2	126.614 GPa.
Probeta 3	127.501 GPa.
Promedio	127.501 GPa.

Por otra parte, se determinó las frecuencias naturales de la viga ya empotrada en el banco experimental, para lo anterior se utilizó un martillo de impacto (marca KISTLER modelo: 9722A2000). Para el análisis, la viga se discretizó en 53 nodos, dejando en el nodo 27 el motor que provocará la fuerza de excitación, tal y como se muestra en la siguiente figura. Para la medición de las FRF's (Frequency Response Function), se colocó un acelerómetro marca KISTLER con una sensibilidad de 101.5 mV/g en el nodo 48 y se procedió a golpear con el martillo de impacto al resto de los nodos.



Discretización y análisis con el martillo de impacto.

De las pruebas realizadas se obtuvieron las siguientes frecuencias naturales de la viga:

- Para el primer modo de vibración la frecuencia natural está a 56.5 Hz.
- Para el segundo modo de vibración la frecuencia natural está a 167 Hz.

Por otra parte, adicionalmente se calculó la primera frecuencia natural de la viga utilizando el Módulo de Young medido experimentalmente. Para lo anterior se utilizó la siguiente ecuación reportada en la literatura [47].

$$\omega_{n1} = 14 \sqrt{\frac{EI}{L_v^3(m_M + 0.375m_v)}}$$

Para el cálculo de la frecuencia natural, se utilizaron los datos de las propiedades físicas de la viga y el Módulo de Young promedio. En la tabla, se presenta la frecuencia natural calculada y su comparación con la obtenida con el martillo de impacto.

Comparación de la primera frecuencia natural.

	Módulo de elasticidad		Análisis experimental con el martillo de impacto
	Literatura.	Experimental	
Primera frecuencia natural Hz.	72	57.52	56.5
Porcentaje de error	27.43362832	1.805309735	0

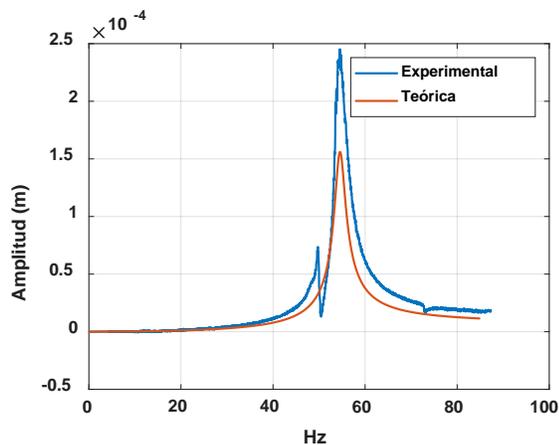
De los resultados presentados en la tabla, se puede observar que la frecuencia natural de la viga calculada a partir del Módulo de Young obtenido de forma experimental, presenta un porcentaje de error con la frecuencia natural de la viga obtenida con el martillo de impacto del 1.8 %.

Apéndice G: Señales del banco experimental

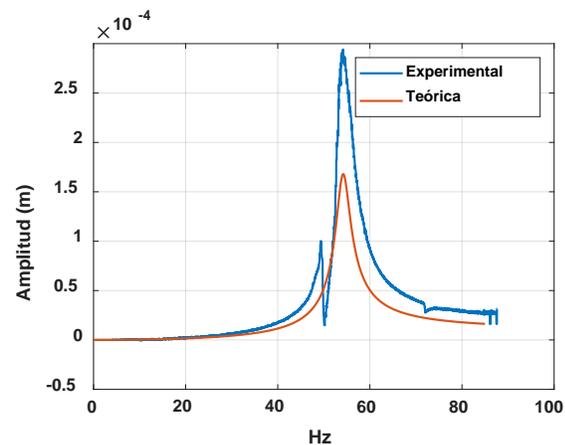
Señales adquiridas de la configuración de elemento viga doblemente empotrada sin el IDVA.

Conforme a la tabla 13 descrita en la sección 5.2.1, Capítulo 5 se realizó la adquisición de las señales del banco de pruebas, para cada una de las 11 masas descritas considerando solo la estructura tipo viga con la masa del motor. La respuesta experimental para cada una de las masas respectivamente, se muestra a continuación en las siguientes figuras, asimismo se realiza la comparación de manera teórica, mediante el cálculo de la relación de amortiguamiento en función del cálculo de ancho de banda, las relaciones de amortiguamiento para cada una de los diagramas están descritos en la siguiente tabla:

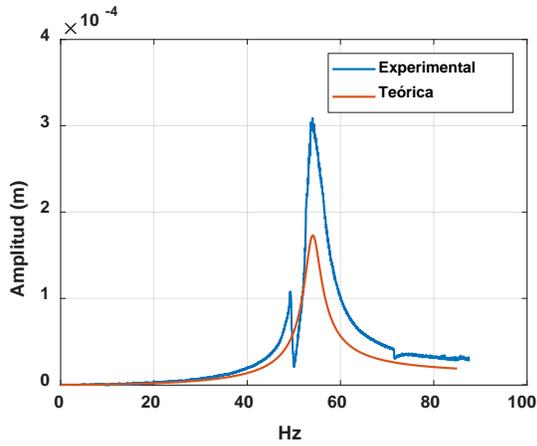
SIN INERSOR							
Número	MUL	Frecuencia natural	Amplitud (m)	RMS	Frecuencia 1	Frecuencia 2	R. Amortiguamiento
1	26.69	54.53	0.0002451	0.00017331	53.52	55.88	0.021639465
2	40.35	54.17	0.0002941	0.000207958	53	56.13	0.02889053
3	44.28	54.02	0.0003089	0.000218423	52.78	56.28	0.032395409
4	56.2	53.42	0.0003526	0.000249323	52.48	56.08	0.033695245
5	65.24	53.25	0.000394	0.000278597	52.27	55.7	0.032206573
6	69.82	53.27	0.0003916	0.0002769	52.2	55.28	0.02890933
7	73.78	53.23	0.0003939	0.000278527	52.18	55.23	0.028649258
8	78.88	52.38	0.0004195	0.000296628	52.07	54.95	0.027491409
9	82.73	52.52	0.0004798	0.000339267	52.08	54.25	0.020658797
10	207.48	53.2	0.0009189	0.000649754	51.42	57.52	0.057330827
11	264.77	52.93	0.001109	0.000784174	51.47	54.25	0.0262611



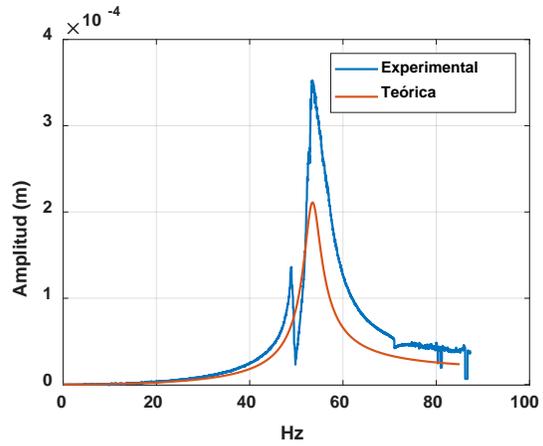
1: Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance MUL=26.69612 g-mm.



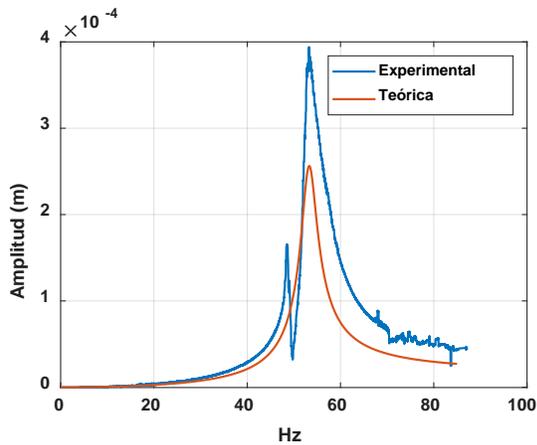
2: Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance MUL=40.3546 g-mm.



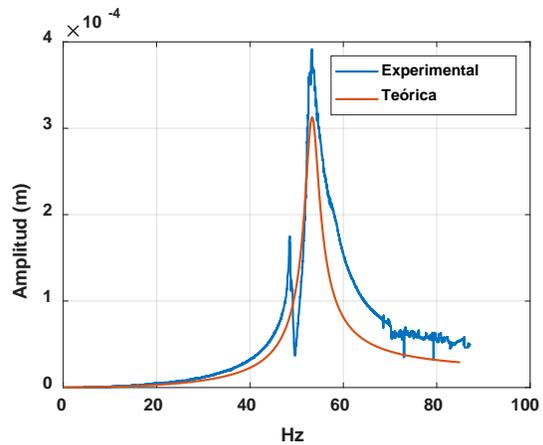
3: Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=44.2805$ g-mm.



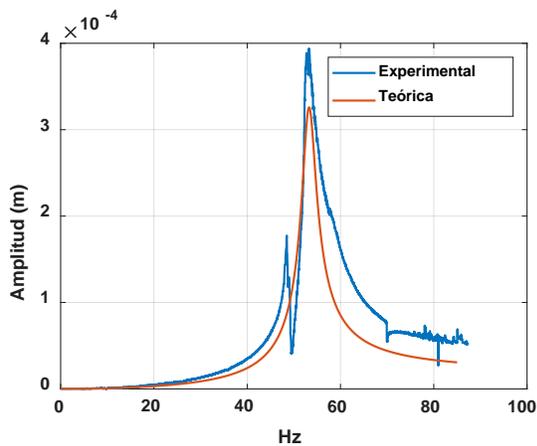
4: Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=56.2042$ g-mm.



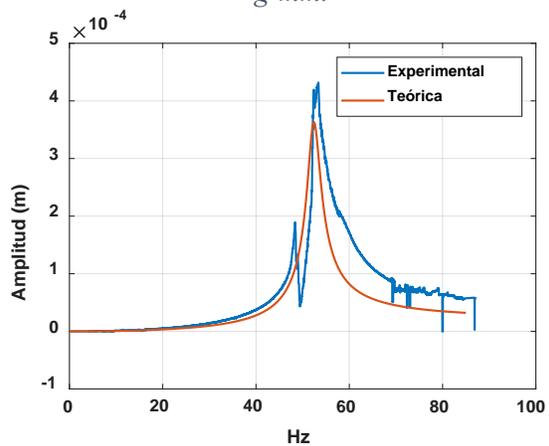
5: Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=65.2429$ g-mm.



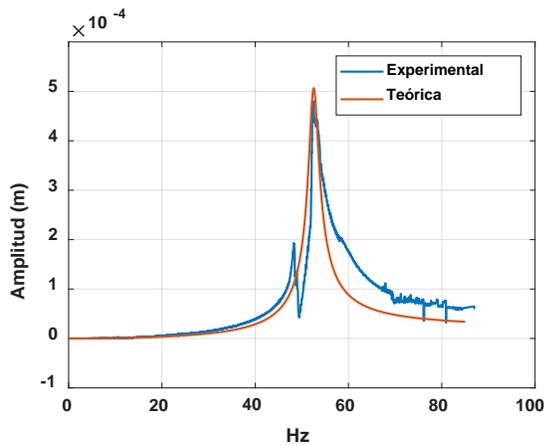
6: Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=69.8262$ g-mm.



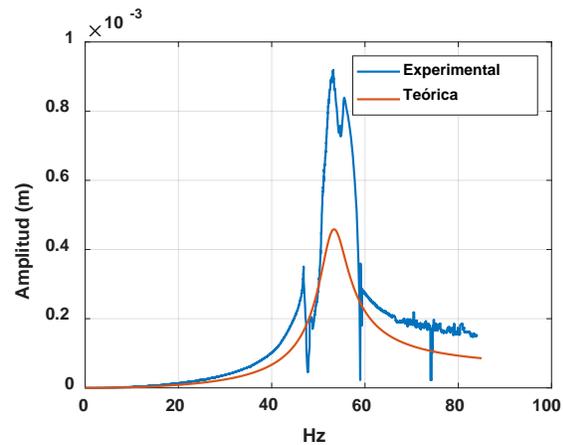
7: Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=73.7886$ g-mm.



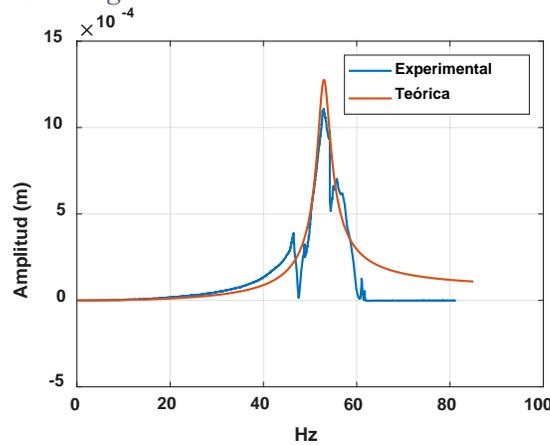
8: Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=78.8832$ g-mm.



9: Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=82.7360$ g-mm.



10: Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=207.48$ g-mm.

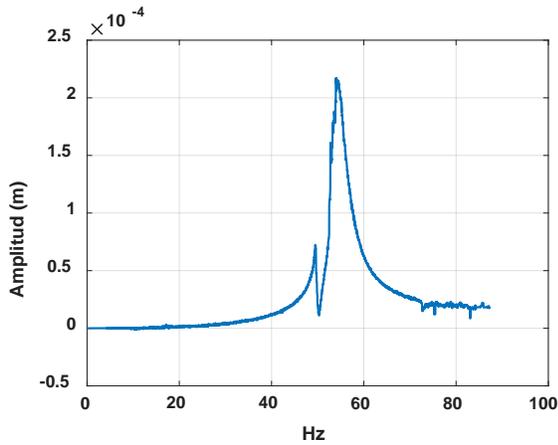


11: Respuesta vibratoria del sistema (sin IDVA) con desbalance $MUL=264.77$ g-mm.

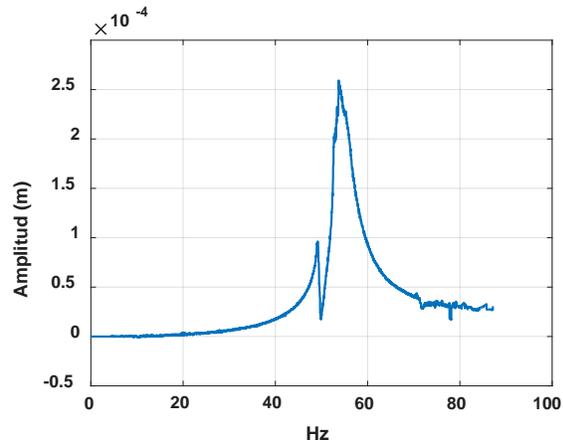
Señales adquiridas de la configuración de elemento viga doblemente empotrada con el IDVA.

Conforme a la tabla 13 descrita en la sección 5.2.1, Capítulo 5 se realizó la adquisición de las señales del banco de pruebas, para cada una de las 11 masas descritas considerando el sistema IDVA en la estructura tipo viga. La respuesta experimental para cada una de las masas respectivamente, se muestra a continuación en las siguientes figuras y la tabla del caculo de amortiguamiento para el sistema con IDVA:

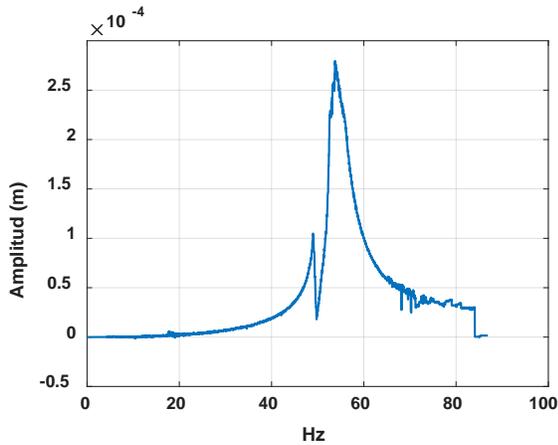
CON INERSOR								
Número	MUL	Frecuencia natural	Amplitud (m)	RMS	Frecuencia 1	Frecuencia 2	R. Amortiguamiento	
1	26.69	53.95	0.0002171	0.000153511	53.07	56.02	0.02734013	
2	40.35	53.73	0.0002593	0.000183351	52.6	56.4	0.035361995	
3	44.28	53.77	0.0002796	0.000197705	52.48	56.37	0.036172587	
4	56.2	53.1	0.0003045	0.000215312	52.32	55.57	0.030602637	
5	65.24	53.02	0.0003622	0.000256112	52.13	54.7	0.024236137	
6	69.82	53.22	0.0003699	0.000261556	52.1	54.83	0.025648253	
7	73.78	53.02	0.0003955	0.000279658	52.08	54.62	0.023953225	
8	78.88	52.95	0.0004318	0.000305326	51.98	54.38	0.02266289	
9	82.73	52.38	0.0004635	0.000327741	51.92	54.13	0.021095838	
10	207.48	52.88	0.000906	0.000640633	51.13	57.03	0.055786687	
11	264.77	52.8	0.00112	0.000791952	51.32	54.63	0.031344697	



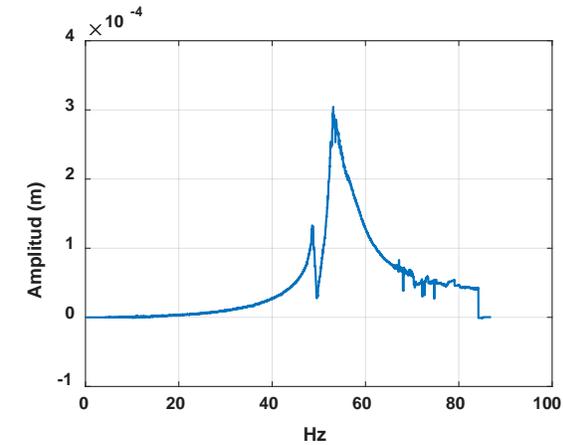
12: Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance MUL=26.69612 g-mm.



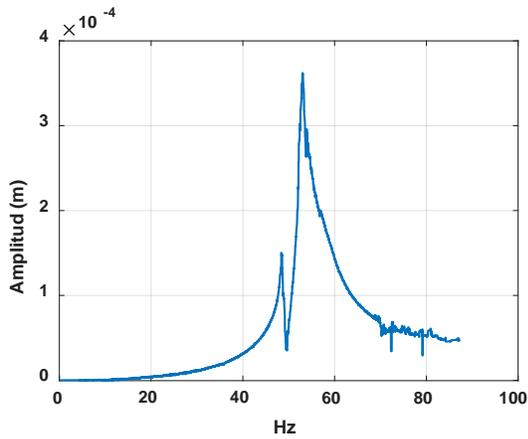
13: Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance MUL=40.3546 g-mm.



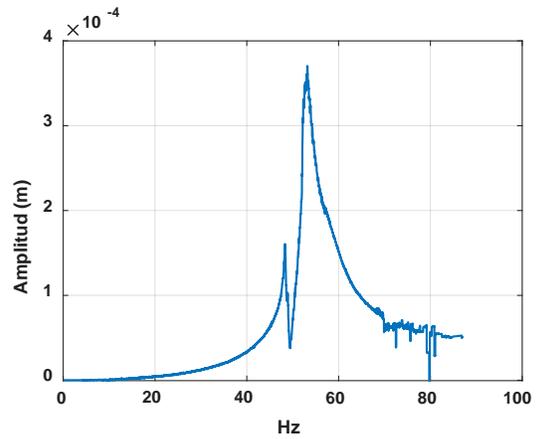
14: Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance MUL=44.2805 g-mm.



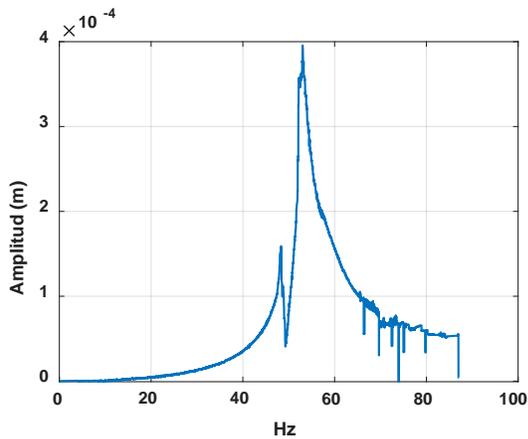
15: Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance MUL=56.2042 g-mm.



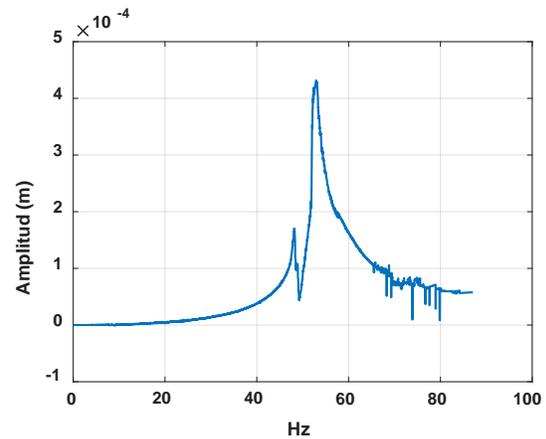
16: Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance $MUL=65.2429$ g-mm.



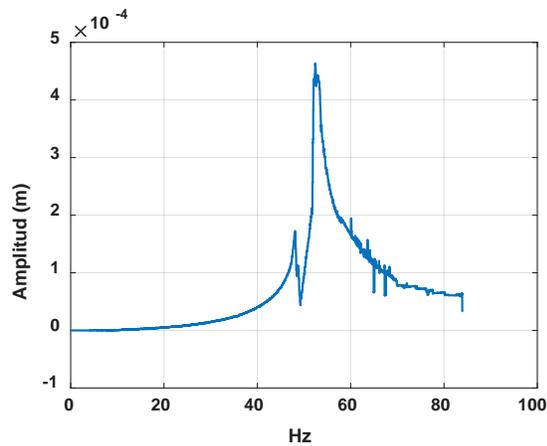
17: Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance $MUL=69.8262$ g-mm.



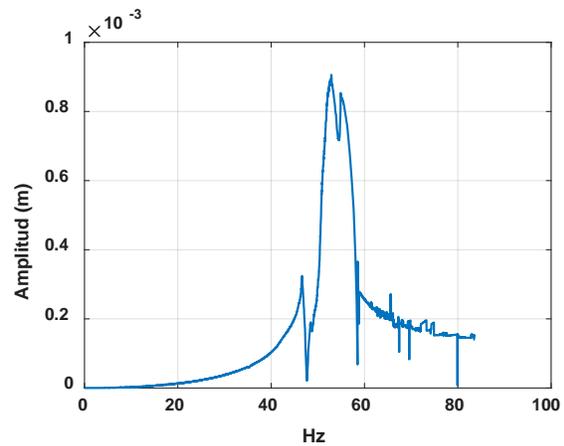
18: Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance $MUL=73.7886$ g-mm.



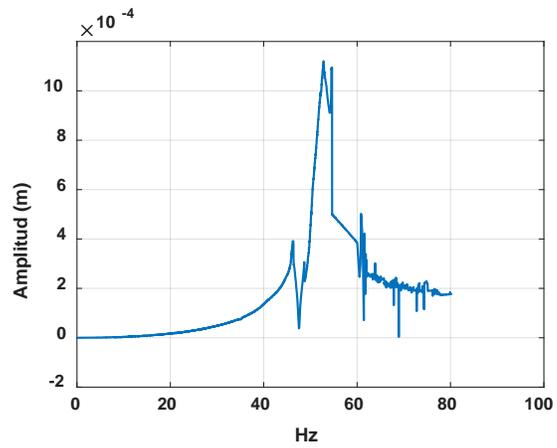
19: Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance rotatorio $MUL=78.8832$ g-mm.



20: Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance rotatorio $MUL=82.7360$ g-mm.



21: Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance rotatorio $MUL=207.48$ g-mm.



22: Respuesta vibratoria del sistema (con IDVA) con desbalance rotatorio $MUL=264.77$ g-mm.



**TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO**

cenidet[®]
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico



**TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO**

cenidet[®]
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico