



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Maestría

Análisis experimental de un inersor en sistema masa-  
resorte-amortiguador de 2 grados de libertad

presentada por

**Ing. Lot Reza Arteaga**

como requisito para la obtención del grado de

**Maestro en Ciencias en Ingeniería  
Mecánica**

Director de tesis

**Dr. Andrés Blanco Ortega**

Codirector de tesis

**Dr. Jorge Colín Ocampo**

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2020.



"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Morelos **30/octubre/2020**

OFICIO No. SAC/ 259/2020

Asunto: Autorización de impresión de tesis

**LOT REZA ARTEAGA  
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA MECÁNICA  
P R E S E N T E**

Por este conducto tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado *"Análisis experimental de un inersor en sistema masa-resorte-amortiguador de 2 grados de libertad"*, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**A T E N T A M E N T E**

*Excelencia en Educación Tecnológica®*

*"Conocimiento y tecnología al servicio de México"*

**DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



CENTRO NACIONAL  
DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA

C.c.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera. Jefa del Departamento de Servicios Escolares

Expediente

CMAZ/CHG



# EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico  
Departamento de Ingeniería Mecánica

"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Mor., 20 de octubre 2020

OFICIO No. DIM/129/2020

Asunto: Aceptación de documento de tesis  
CENTDET-AC-004-M14-OFCIO

Dr. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO  
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del Ing. Lot Reza Arteaga con número de control M17CE079, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis de grado titulado "Análisis experimental de un inersor en sistema masa-resorte-amortiguador de 2 grados de libertad" y hemos encontrado que se han atendido todas las observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

Dr. Andrés Blanco Ortega  
Director de tesis

Dr. Jorge Colín Ocampo  
Codirector de Tesis

Dr. Dariusz Sławomir  
Szwedowicz  
Revisor 1

Dra. Claudia Cortés García  
Revisor 2

Dr. Eladio Martínez Rayón  
Revisor 3

C.c.p. Depto. Servicios Escolares.  
Expediente / Estudiante

ABC/m.2020

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490Cuernavaca, Morelos.  
Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 1421, e-mail: [din@cenidet.edu.mx](mailto:din@cenidet.edu.mx)  
[www.tecnm.mx](http://www.tecnm.mx) | [www.cenidet.tecnm.mx](http://www.cenidet.tecnm.mx)

**cenidet**  
Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico



# AGRADECIMIENTOS

A mi madre, un verdadero ejemplo de esfuerzo, que no se rinde ante nada y sobre todo demuestra su apoyo y amor a sus hijos.

A mi hermana, alguien inteligente y perseverante, que con su manera de ver el mundo me inspira a tener nuevos retos en los que siempre contaré con su apoyo incondicional.

A mi padre, a quien le dedico este logro, quien me alentaba a seguir aun cuando yo ya quería darme por vencido. Donde quiera que estés, espero que me veas y te sientas orgulloso por lo que he logrado.

A Anel Arce, que con su amor y valor despejan mi mente de los problemas que invaden mis pensamientos y me acompañó en este logro en mi vida.

Al Dr. Andrés Blanco y al Dr. Jorge Colín, por tener la paciencia y la gentileza de explicar y compartir sus conocimientos conmigo.

A mis familiares y amigos, que han hecho lo posible por apoyarme y estar conmigo aun en panoramas difíciles.

Al CONACYT y al TecNM por la oportunidad que me brindaron para seguir superándome y el apoyo que me brindaron en el proceso.

# RESUMEN

El inersor es un elemento mecánico que almacena energía cinética de rotación que consta de diferentes piezas como engranes, cremallera, piñones, entre otros. Este dispositivo fue creado como un homólogo del capacitor, al igual que se tienen como referencia el resorte con el inductor y el amortiguador con el resistor.

La función principal del inersor es el almacenamiento de energía cinética. En un sistema masa-resorte, esa absorción de energía ayuda a disminuir las amplitudes de vibración en los sistemas mecánicos, incluyendo en la condición de resonancia que es donde se presentan las máximas amplitudes de vibración. En la actualidad ya son utilizados en sistemas de suspensión en vehículos de la Fórmula 1, motocicletas, ferrocarriles, entre otros.

En este trabajo de investigación se valida de manera experimental parte de la teoría realizada sobre el diseño de un inersor en una plataforma experimental de masa-resorte-amortiguador. Para lograr esto, se diseña un inersor con base en la configuración de un sistema de dos grados de libertad para atenuar las vibraciones del sistema en condiciones de resonancia.

La plataforma experimental fue modificada para hacer el análisis experimental correctamente. Se propuso de manera arbitraria que las masas  $m_1$  y  $m_2$  fueran de 2.5 kg. Otro detalle de la plataforma son los resortes, los cuales fueron mandados a hacer con las medidas requeridas en cuanto a dimensiones se refiere y posteriormente se midió la rigidez en la máquina *Ximadzu AG Plus 100KN*.

La plataforma se somete a vibración forzada en una frecuencia cercana a las dos primeras frecuencias naturales del sistema tanto sin inersor como con él. Se encontró que el inersor tiene una gran influencia en la atenuación de vibración de hasta un 35% solo en un modo de vibración. También se comparan resultados de simulación derivados del modelado matemático y con un prototipo virtual, bajo el ambiente del programa MSC Adams View con los resultados experimentales obtenidos con la plataforma experimental masa-resorte-amortiguador.

# Abstract

The inerter is a mechanical element that stores rotational kinetic energy that consists of different parts such as gears, rack, pinions, among others. This device was created as a counterpart of the capacitor, just as the spring with the inductor and the damper with the resistor are taken as reference.

The main function of the inerter is the storage of kinetic energy. In a mass-spring system, this energy absorption helps to reduce the amplitudes of vibration in mechanical systems, including in the resonance condition, which is where the maximum amplitudes of vibration occur. Currently they are already used in suspension systems in Formula 1 vehicles, motorcycles, railways, among others.

In this research work, part of the theory carried out on the design of an inerter in a mass-spring-damper experimental platform is experimentally validated. To achieve this, an inerter is designed based on the configuration of a two degrees of freedom system to attenuate the vibrations of the system under resonance conditions.

The experimental platform was modified to do the experimental analysis correctly. The masses  $m_1$  and  $m_2$  were arbitrarily proposed to be 2.5 kg. Another detail of the platform is the springs, which were ordered to be made with the required measurements in terms of dimensions and later the stiffness was measured on the *Ximadzu AG Plus 100KN machine*.

The platform is subjected to forced vibration at a frequency close to the first two natural frequencies of the system both without and with it. The inersor was found to have a great influence on vibration attenuation of up to 35% in only one vibration mode. Simulation results derived from mathematical modeling and with a virtual prototype, under the environment of the MSC Adams View program, are also compared with the experimental results obtained with the mass-spring-damper experimental platform.

# Terminología y simbología

- TMD: Tuned-mass-damper
- SDOF: Single-Degree-of-Freedom System
- TDOF: Two- Degree-of-Freedom System
- MDOF: Multiple- Degree-of-Freedom System
- MRA: Masa-Resorte-Amortiguador
- MRI: Masa-resorte-inersor
- $r_1$ : radio del piñón 1
- $r_2$ : radio del engrane 2
- $r_3$ : radio del engrane 3
- $r_4$ : radio del engrane 4
- $r_5$ : radio del engrane 5
- $r_6$ : radio del engrane 6
- $I_1$ : momento de inercia de masa del piñón 1, engrane 2 y eje 1
- $I_2$ : momento de inercia de masa del engrane 3, eje 2 y el volante de inercia 1
- $I_3$ : momento de inercia de masa del engrane 4, engrane 5 y eje 3
- $I_4$ : momento de inercia de masa del engrane 6, eje 4 y el volante de inercia 2
- $M_{Crem}$ : masa de la cremallera
- $F_e$ : fuerza de entrada al sistema en la cremallera
- $x(t)$ : desplazamiento de la cremallera en el dominio del tiempo
- $\theta_1$ : desplazamiento angular del eje 1
- $\theta_2$ : desplazamiento angular del eje 2
- $\theta_3$ : desplazamiento angular del eje 3
- $\theta_4$ : desplazamiento angular del eje 4
- $L$ : función Lagrangiana
- $T$ : energía cinética
- $V$ : energía potencial
- $q_i$ : coordenada generalizada
- $D$ : función de disipación de energía
- $\omega_n$ : frecuencia natural
- $\Omega$ : variable adimensional relación de frecuencia forzada
- $q$ : variable adimensional relación de frecuencias naturales
- $\mu$ : variable adimensional relación de  $J$  a  $m_1$
- $\beta$ : variable adimensional relación de masas  $m_2$  a  $m_1$
- $\zeta_i$ : factor de amortiguamiento
- $b_i$ : coeficiente de amortiguamiento rotacional
- $J$ : masa equivalente del inersor en kilogramo
- $\delta$ : constante de amortiguamiento equivalente del inersor
- $c_i$ : coeficiente de amortiguamiento de translación
- $k_i$ : coeficiente de rigidez
- $\varphi_i$ : ángulo de fase

- $\rho$ : densidad
- $t$ : espesor del volante de inercia en metros
- $r_0$ : radio externo del volante de inercia
- $r_i$ : radio interno del volante de inercia

## TABLA DE CONTENIDO

<b>Capítulo 1 Introducción</b> .....	1
1.1 Inersor .....	1
1.2 Descripción de la problemática .....	1
1.3 Objetivos .....	2
1.3.1 Objetivo general.....	2
1.3.2 Objetivos específicos.....	2
1.4 Alcances y limitaciones .....	3
1.4.1 Alcances .....	3
1.4.2 Limitaciones.....	3
1.5 Justificación.....	3
1.6 Estructura de la tesis.....	3
<b>Capítulo 2 Marco Teórico</b> .....	5
2.1 Conceptos básicos .....	5
2.1.1 Vibraciones mecánicas.....	5
2.1.2 Resonancia.....	5
2.1.3 Sistemas de suspensión .....	6
2.1.4 Inersor .....	7
2.1.5 Tarjeta NI myRIO.....	7
2.1.6 Volante de inercia .....	8
2.1.7 Cremallera y piñón.....	9
2.2 Estado del arte .....	10
2.3 Modelado de un sistema MRA .....	27
<b>Capítulo 3 Sistema MRA de 2 GDL</b> .....	31
3.1 Frecuencias naturales .....	31
3.2 Modelo matemático con inersor .....	34
3.3 Cálculo de volante de inercia .....	39
3.3.1 Masa equivalente.....	39
3.3.2 Radio del volante de inercia.....	39
<b>Capítulo 4 Plataforma Experimental</b> .....	41

4.1 Elaboración del prototipo.....	41
4.2 Conexión del motor .....	47
4.3 Programas utilizados.....	48
4.3.1 Programa de adquisición de datos .....	48
4.3.2 Programa del excitador.....	49
<b>Capítulo 5 Resultados</b> .....	<b>53</b>
5.1 Resultados de simulación con modelo matemático.....	53
5.1.1 Respuesta en simulación sin inersor .....	53
5.1.2 Respuesta en simulación con inersor.....	60
4.2 Resultados experimentales .....	62
4.2.1 Vibración libre .....	62
4.2.2 Vibración forzada.....	63
<b>CONCLUSIONES</b> .....	<b>81</b>
<b>REFERENCIAS</b> .....	<b>83</b>
<b>ANEXOS</b> .....	<b>87</b>

# Lista de Figuras

<i>Figura 2.1. Comportamiento de un sistema en resonancia.....</i>	<i>6</i>
<i>Figura 2.2. Plataforma experimental de sistemas masa-resorte-amortiguador.....</i>	<i>6</i>
<i>Figura 2.3. Partes de un inersor (Barredo, 2016). ....</i>	<i>7</i>
<i>Figura 2.4. Tarjeta NI myRIO.....</i>	<i>8</i>
<i>Figura 2.5. Volante de inercia. ....</i>	<i>8</i>
<i>Figura 2.6. Modelo del sistema piñón-cremallera .....</i>	<i>9</i>
<i>Figura 2.7. Prototipo del amortiguador hecho por Manuel Guzmán (Guzman, 2011).....</i>	<i>10</i>
<i>Figura 2.8. Diseño de la plataforma MRA (Mendez, 2015).....</i>	<i>10</i>
<i>Figura 2.9. Diseño del inersor de doble cremallera (Barredo, 2016). ....</i>	<i>11</i>
<i>Figura 2.10. Inersor de una cremallera (rediseñado) (Barredo, 2016).....</i>	<i>11</i>
<i>Figura 2.11. Suspensión de automóvil.....</i>	<i>12</i>
<i>Figura 2.12. Inersor en la suspensión de un automóvil de Fórmula 1. ....</i>	<i>13</i>
<i>Figura 2.13. Suspensión primaria y secundaria de un ferrocarril (Matamoros-Sanchez &amp; Goodaoll, 2014). ....</i>	<i>14</i>
<i>Figura 2.14. Prototipo del inersor (H. J. Chen et al., 2017).....</i>	<i>14</i>
<i>Figura 2.15. Sistema de un grado de libertad sin amortiguador (M. Chen, Hu, Huang, &amp; Chen, 2014).....</i>	<i>14</i>
<i>Figura 2.16. Sistema de dos grados de libertad sin amortiguamiento (M. Chen et al., 2014). ....</i>	<i>15</i>
<i>Figura 2.17. Modelo del robot utilizado (Watanabe et al., 2014).....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 2.18. Configuración utilizada en simulación (Wang et al., 2007). ....</i>	<i>17</i>
<i>Figura 2.19. Sistema de amortiguamiento en las tres patas de la mesa (Wang &amp; Wu, 2016). ....</i>	<i>17</i>
<i>Figura 2.20. Diseño del inersor semi-activo propuesto (Hu et al., 2016) .....</i>	<i>18</i>

<i>Figura 2.21. Diseño de inersor basado en fluidos de (X. Liu et al., 2017).</i>	18
<i>Figura 2.22. Diseño del absorbedor de impactos (Faraj et al., 2016).</i>	19
<i>Figura 2.23. Inersor hidráulico semi-activo utilizado en (M. Chen et al., 2017).</i>	19
<i>Figura 2.24. Sistema de suspensión con inersor skyhook (Hu et al., 2017).</i>	20
<i>Figura 2.25. Configuración del inersor y el dispositivo de supresión shimmy utilizada en el tren de aterrizaje (Li et al., n.d.).</i>	20
<i>Figura 2.26. Configuración el sistema de dos grados de libertad utilizado en (Pietrosanti, 2017).</i>	21
<i>Figura 2.27. Amortiguador de vibraciones pasivo-activo con realimentación de fuerza (Høgsberg et al., 2016).</i>	21
<i>Figura 2.28. Ilustración del sistema utilizado (L. Sun et al., 2017).</i>	22
<i>Figura 2.29. Esquema del inersor con fluido diseñado (Swift et al., 2013).</i>	22
<i>Figura 2.30. Configuración del compensador utilizado (Evangelou et al., 2004).</i>	22
<i>Figura 2.31. Sistema masa-resorte-amortiguador normal (Javidialesaadi &amp; Wierschem, 2018).</i>	23
<i>Figura 2.32. Sistema propuesto, reemplazando el amortiguador por un resorte y un inersor (Javidialesaadi &amp; Wierschem, 2018).</i>	23
<i>Figura 2.33. Diagrama de cuerpo libre del elemento de juego en el sistema (Y. Liu et al., 2015).</i>	23
<i>Figura 2.34. Diagrama de cuerpo libre analizado (Y. Liu et al., 2015).</i>	24
<i>Figura 2.35. Péndulo T con inersor.</i>	24
<i>Figura 2.36. Estructura analizada en (Siami et al., 2018).</i>	25
<i>Figura 2.37. Diseño del inersor utilizado en (Siami et al., 2018).</i>	25
<i>Figura 2.38. Diseño de inersor ball-screw utilizado en (Madhamshetty, 2018).</i>	26
<i>Figura 2.39. Diseño de inersor piñón-cremallera utilizado en (Madhamshetty, 2018).</i>	26
<i>Figura 2.40. Modelo del vehículo completo.</i>	27
<i>Figura 2.41. Modelo de la cama aislante de vibraciones.</i>	27

<i>Figura 2.42. Sistema MRA de dos grados de libertad.</i> .....	28
<i>Figura 3.1. Tipos de inersores.</i> .....	34
<i>Figura 3.2. Inersor de doble cremallera.</i> .....	35
<i>Figura 3.3. Diagrama cinemático del inersor de doble cremallera.</i> .....	35
<i>Figura 3.4. Sistema MRA de dos grados de libertad con inersor.</i> .....	37
<i>Figura 4.1. Carro de aluminio y las masas utilizadas.</i> .....	41
<i>Figura 4.2. Encoder de 600 pulsos por revolución.</i> .....	42
<i>Figura 4.3. Encoders colocados en cada carro de la plataforma.</i> .....	42
<i>Figura 4.4. Forma de conectar los encoders a la tarjeta MyRIO.</i> .....	42
<i>Figura 4.5. Motor Open Builds a pasos que se utilizó.</i> .....	43
<i>Figura 4.6. Resortes utilizados.</i> .....	44
<i>Figura 4.7. Relación de fuerza por desplazamiento arrojada por la máquina Ximadzu AG Plus 100KN.</i> .....	44
<i>Figura 4.8. Volante de inercia utilizado.</i> .....	45
<i>Figura 4.9. Rodamiento utilizado para el volante de inercia y el piñón del inersor.</i> .....	45
<i>Figura 4.10. Piñón del inersor.</i> .....	45
<i>Figura 4.11. Cremallera del inersor.</i> .....	46
<i>Figura 4.12. Plataforma experimental MRA.</i> .....	46
<i>Figura 4.13. Plataforma experimental con inersor.</i> .....	47
<i>Figura 4.14. Conexión del motor a pasos y el driver TB6600 en el arduino.</i> .....	47
<i>Figura 4.15. Interfaz del programa de adquisición de datos.</i> .....	48
<i>Figura 4.16. Diagrama de bloques del programa de adquisición de datos.</i> .....	49
<i>Figura 4.17. Programa de excitador (A).</i> .....	50
<i>Figura 4.18. Programa de excitador (B).</i> .....	51
<i>Figura 4.19. Programa de excitador (C).</i> .....	52

<i>Figura 5.1. Respuesta de las dos masas para una fuerza de <math>2\text{Sin}(14.1t)</math>.</i>	54
<i>Figura 5.2. Fuerza de excitación, <math>F(t)=2\text{Sin}(14.1t)</math>.</i>	54
<i>Figura 5.3. Respuesta de las dos masas para una fuerza de <math>2\text{Sin}(36.9t)</math>.</i>	55
<i>Figura 5.4. Fuerza de excitación, <math>F(t)=2\text{Sin}(36.9t)</math>.</i>	56
<i>Figura 5.5. Respuesta de las dos masas para una fuerza de <math>2\text{Sin}(14.1t)</math>.</i>	57
<i>Figura 5.6. Prototipo virtual en tres posiciones para una fuerza de <math>2\text{Sin}(14.1t)</math>.</i>	57
<i>Figura 5.7. Fuerza de excitación, <math>F(t)=2\text{Sin}(14.1t)</math>.</i>	58
<i>Figura 5.8. Respuesta de las dos masas para una fuerza de <math>2\text{Sin}(36.9t)</math>.</i>	59
<i>Figura 5.9. Prototipo virtual en tres posiciones para una fuerza de <math>2\text{Sin}(36.9t)</math>.</i>	59
<i>Figura 5.10. Fuerza de excitación, <math>F(t)=2\text{Sin}(36.9t)</math>.</i>	60
<i>Figura 5.11. Respuesta de las dos masas para una fuerza de <math>2\text{Sin}(14.1t)</math> con inersor.</i>	61
<i>Figura 5.12. Respuesta de las dos masas para una fuerza de <math>2\text{Sin}(36.9t)</math> con inersor.</i>	61
<i>Figura 5.13. Vibración libre del sistema MRA sin inersor.</i>	62
<i>Figura 5.14. Vibración libre del sistema MRA con inersor.</i>	63
<i>Figura 5.15. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2 Hz sin inersor.</i>	64
<i>Figura 5.16. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2 Hz sin inersor.</i>	65
<i>Figura 5.17. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2.3 Hz (frecuencia natural) sin inersor.</i>	65
<i>Figura 5.18. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2.3 Hz (frecuencia natural) sin inersor.</i>	66
<i>Figura 5.19. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2.5 Hz sin inersor.</i>	67
<i>Figura 5.20. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2.5 Hz sin inersor.</i>	67
<i>Figura 5.21. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 5.5 Hz sin inersor.</i>	68
<i>Figura 5.22. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 5.5 Hz sin inersor.</i>	68
<i>Figura 5.23. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 5.9 Hz (segunda frecuencia natural) sin inersor.</i>	69

<i>Figura 5.24. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 5.9 (segunda frecuencia natural) Hz sin inersor.....</i>	<i>70</i>
<i>Figura 5.25. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 6.2 Hz sin inersor.....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 5.26. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 6.2 Hz sin inersor.....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 5.27. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2 Hz con inersor. ....</i>	<i>72</i>
<i>Figura 5.28. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2 Hz con inersor. ....</i>	<i>72</i>
<i>Figura 5.29. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2.3 Hz (primera frecuencia natural) con inersor.....</i>	<i>73</i>
<i>Figura 5.30. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2.3 (primera frecuencia natural) Hz con inersor.....</i>	<i>73</i>
<i>Figura 5.31. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2.5 Hz con inersor. ....</i>	<i>74</i>
<i>Figura 5.32. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2.5 Hz con inersor. ....</i>	<i>75</i>
<i>Figura 5.33. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 5.5 Hz con inersor. ....</i>	<i>76</i>
<i>Figura 5.34. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 5.5 Hz con inersor. ....</i>	<i>76</i>
<i>Figura 5.35. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 5.9 Hz (segunda frecuencia natural) con inersor.....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 5.36. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 5.9 Hz (segunda frecuencia natural) con inersor.....</i>	<i>78</i>
<i>Figura 5.37. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 6.2 Hz con inersor. ....</i>	<i>79</i>
<i>Figura 5.38. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 6.2 Hz con inersor. ....</i>	<i>79</i>

# Lista de Tablas

Tabla 2.1 Analogía convencional entre elementos mecánicos y electrónicos. ....	12
Tabla 2.2 Nueva analogía utilizando un inersor en lugar de la masa . ....	13
Tabla 3.1. Valores utilizados en simulación .....	31
Tabla 3.2. Parámetros de simulación.....	36
Tabla 3.3. Valores utilizados para el cálculo del radio exterior del volante de inercia. ....	40

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Inersor

A lo largo de la historia se le ha dado importancia al estudio de las vibraciones mecánicas, y por supuesto también a inventar dispositivos que ayuden a absorberlas o disiparlas. Las vibraciones se presentan en sistemas mecánicos como estructuras o máquinas y pueden causar daños estructurales o de funcionamiento a causa de las cargas dinámicas generadas. Las tres fuentes más comunes en vibración son producidas por desbalance, desalineamiento y resonancias.

Uno de los dispositivos más utilizados para el control de vibraciones es el amortiguador, este dispositivo absorbe energía de impacto o de movimientos periódicos disminuyendo las oscilaciones no deseadas.

Otro dispositivo reciente para la absorción de energía cinética es el inersor, el cual fue presentado por el profesor Malcolm C. Smith en un artículo publicado en 2002 (Smith, 2002). Este dispositivo absorbe la energía cinética de las vibraciones que se producen en el sistema y la transforma en energía cinética de rotación, es decir, esa energía es trasladada a una masa inercial dentro del inersor, reduciendo las amplitudes de vibración (Barredo, 2016). El inersor puede ser construido por medio de un conjunto de elementos mecánicos tales como piñón, cremallera, engranes y volantes de inercia.

### 1.2 Descripción de la problemática

Las causas de las vibraciones son muchas, pero básicamente las vibraciones se encuentran estrechamente relacionadas con tolerancias de mecanización, desajustes, movimientos relativos entre superficies en contacto, desbalances de piezas en rotación u oscilación, entre otras, provenientes de diversas fuentes, tales como, maquinaria rotatoria, motores, compresores, vehículos de transporte como camiones y trenes. La presencia de vibración en los sistemas es indeseable, ya que provoca desgaste en componentes como cojinetes o chumaceras, formación de grietas, aflojamiento de sujetadores, fallas estructurales y mecánicas. Estos problemas que se presentan derivado de las vibraciones conllevan a diseñar dispositivos que ayuden a mejorar el comportamiento dinámico del sistema principal

eliminando o reduciendo las amplitudes de vibración. Además, en los sistemas mecánicos se presenta un fenómeno llamado resonancia, el cual ocurre cuando la frecuencia de excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, dando lugar a grandes amplitudes de vibración.

La amplitud de vibración que se presenta en los sistemas se puede reducir utilizando algunos dispositivos como los aisladores o absorbedores de vibración. En este proyecto se propone realizar el análisis experimental de un inersor como dispositivo disipador de energía de vibración en un sistema de masa-resorte-amortiguador (MRA). En un estudio previo se realizó el análisis teórico para minimizar la máxima amplitud de vibración de sistemas mecánicos en condiciones de resonancia de 1 y 3 grados de libertad. Se determinarán los parámetros de diseño de un inersor que se construirá, así como los parámetros de rigidez y masa a utilizar en la plataforma, para obtener una respuesta mínima de vibración en un sistema de dos grados de libertad.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo general

Diseñar y construir un inersor para analizar de forma experimental su influencia sobre las amplitudes de vibración en un sistema de masa-resorte-amortiguador (MRA) de dos grados de libertad.

### 1.3.2 Objetivos específicos

1. Construir una plataforma MRA para pruebas de laboratorio.
2. Obtener el modelo matemático del inersor con el sistema mecánico MRA de dos grados de libertad.
3. Simular el inersor en un sistema MRA de dos grados de libertad ante condiciones de resonancia para minimizar la amplitud de vibración.
4. Calcular los parámetros de rigidez, masa equivalente y factor de amortiguamiento del inersor con los cuales tendrá un funcionamiento óptimo en el sistema MRA.
5. Construir el inersor a partir de los cálculos obtenidos y tomando en cuenta las dimensiones del simulador de masas con que se cuenta.
6. Hacer las pruebas experimentales en el sistema MRA y con el inersor con los parámetros optimizados.

## 1.4 Alcances y limitaciones

### 1.4.1 Alcances

- Instrumentación y puesta en marcha de la plataforma de MRA para el estudio de vibraciones.
- Diseñar y construir el inersor con los parámetros optimizados para validar su desempeño en un sistema de 2 GDL.

### 1.4.2 Limitaciones

- Se analizará el comportamiento del sistema con dos grados de libertad.
- Se harán pruebas solo para la primera frecuencia natural.
- Se construirá un inersor en configuración cremallera-piñón-volante de inercia.

## 1.5 Justificación

De acuerdo con investigaciones reportadas en el estado del arte, el inersor proporciona estabilidad, reduce amplitudes de vibración, balancea cargas dinámicas que originan los neumáticos a causa de imperfecciones en carretera. Por lo que, considerando estas propiedades, se propone construir un inersor que reduzca las amplitudes de vibración en condiciones de resonancia de un sistema MRA. Esto permitirá validar el desempeño del inersor en casos reales y así expandir el terreno de aplicación de este dispositivo en otras aplicaciones de control de vibraciones.

## 1.6 Estructura de la tesis

Esta tesis cuenta con seis capítulos, los cuales se describen a continuación:

- **Capítulo 1:** En este capítulo se da una breve introducción del contenido de la tesis. La descripción del problema que se abordará con este proyecto, los objetivos que se cumplirán, así como los alcances y limitaciones de este tema.
- **Capítulo 2:** En este capítulo se explican conceptos que se utilizan en esta tesis, así como también se describen proyectos en los que se ha utilizado el inersor, tanto dentro de la institución como en otras partes.

- **Capítulo 3:** Se abordan todos los cálculos que se utilizarán para la correcta realización del proyecto, como modelos matemáticos, y simulaciones.
- **Capítulo 4:** Toda la elaboración e instrumentación del prototipo se encuentra en este capítulo, desde las piezas utilizadas hasta la programación del movimiento y lectura de datos.
- **Capítulo 5:** Este capítulo muestra los resultados obtenidos en el proyecto, en él se dan explicaciones de los factores que se tomaron en cuenta al hacer el análisis experimental.
- **Capítulo 6:** Son las conclusiones a las que se llegaron con base en el análisis experimental de este proyecto.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1 Conceptos básicos

#### 2.1.1 Vibraciones mecánicas

Las vibraciones, como describe S. Graham Kelly, son oscilaciones que se producen en un cuerpo que está en equilibrio cuando una energía externa actúa sobre este cuerpo, provocando su salida del estado de equilibrio (Kelly, 2012). Cada cuerpo tiene una frecuencia natural de vibración, es decir que, si se le aplica una fuerza externa y luego se le deja libre, éste continuará vibrando sin cambiar su intervalo entre sus ondas de vibración. Si la excitación aplicada al cuerpo se acerca o coincide con la frecuencia natural de éste, se llega a la resonancia, la cual produce que el cuerpo tenga amplitudes de vibración más altas, ocasionando fallas en el sistema. Por esta razón, se han estudiado desde hace tiempo para encontrar la mejor forma de eliminar o atenuar las amplitudes de vibración.

#### 2.1.2 Resonancia

Cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural se produce una condición de resonancia, con esta condición se producen los mayores daños causados por las vibraciones en los sistemas (Kelly, 2012). Como se observa en la Figura 2.1, la amplitud de respuesta  $x(t)$  va aumentando proporcionalmente al tiempo  $t$ , esta condición es llamada resonancia. La resonancia conduce a un aumento de la amplitud a un valor donde las suposiciones utilizadas en el modelado del sistema físico ya no son válidas.

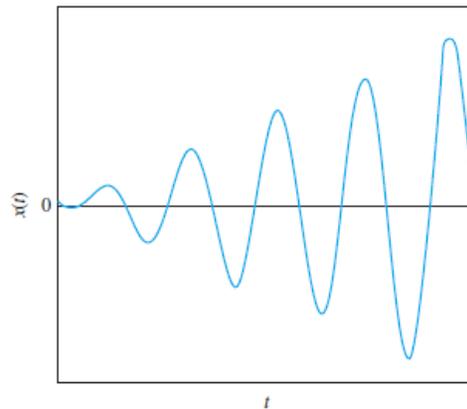


Figura 2.1. Comportamiento de un sistema en resonancia.

### 2.1.3 Sistemas de suspensión

Los sistemas de suspensión son aquellos que tienen como finalidad disminuir y disipar las vibraciones en un sistema mecánico. Estos sistemas están formados por elementos masa-resorte-amortiguador y, en algunos casos, se agregan otros elementos como el inersor. La plataforma experimental masa-resorte-amortiguador se utiliza para analizar el comportamiento de un sistema mecánico sometido a diferentes tipos de vibración y a diferentes configuraciones que ayudan a determinar cuál es la más adecuada para cierto sistema, ver Figura 2.2.

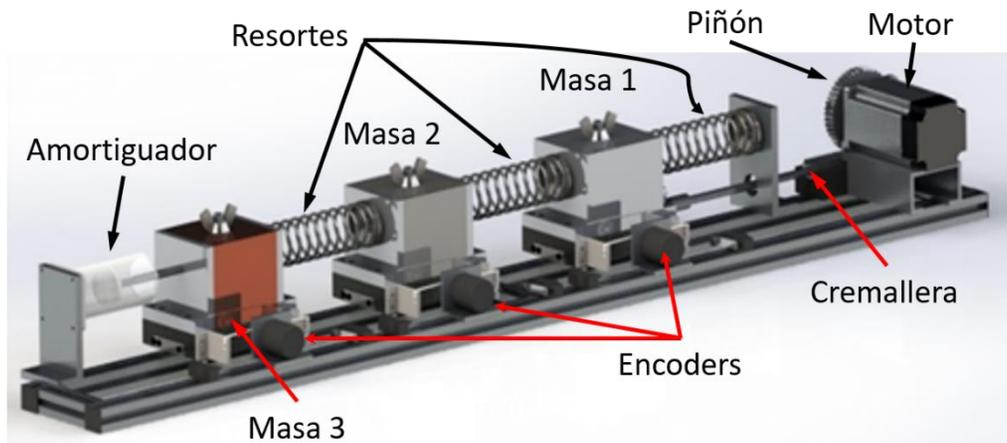


Figura 2.2. Plataforma experimental de sistemas masa-resorte-amortiguador.

## 2.1.4 Inersor

Para atenuar o reducir las amplitudes de vibración se han propuestos diversos dispositivos. Malcolm C. Smith define al inersor como un dispositivo capaz de absorber vibraciones, a diferencia del amortiguador que las disipa, ver Figura 2.3. En el inersor la fuerza aplicada a una de sus terminales es directamente proporcional a la aceleración relativa que existe entre ellas (Smith, 2002).

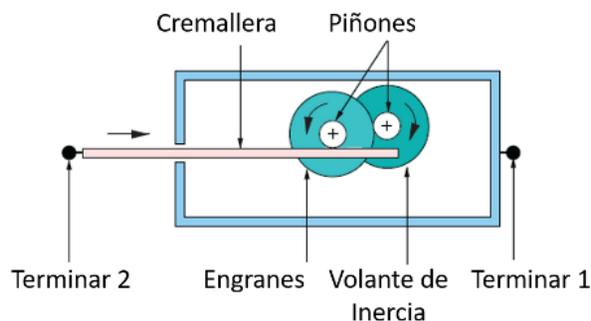


Figura 2.3. Partes de un inersor (Barredo, 2016).

## 2.1.5 Tarjeta NI myRIO

NI myRIO es un dispositivo portátil de diseño embebido creado para desarrollar sistemas de control y diseñar proyectos, ver Figura 2.4. Con tecnología de E/S reconfigurables (RIO) estándar en la industria de National Instruments, NI myRIO pone en manos de los estudiantes el procesador ARM® Cortex™-A9 dual-core de rendimiento en tiempo real y E/S personalizada. Disponible en dos versiones, la versión cubierta de NI myRIO (NI myRIO-1900) ofrece habilidad WiFi, 3 puertos de E/S y una cubierta lista para estudiantes, mientras que la versión de tarjeta únicamente (NI myRIO-1950) ofrece un tamaño más pequeño sin WiFi y con 2 puertos de E/S. Al usar esta herramienta integrada de hardware y software, los estudiantes pueden crear aplicaciones rápidamente en el procesador en tiempo real de NI myRIO, aprovechando la configuración de FPGA predeterminados, la cual pueden personalizar conforme los proyectos se vuelven más avanzados. Por medio de sus componentes internos, acceso a software transparente y biblioteca de recursos y tutoriales, NI myRIO ofrece a los profesores una herramienta accesible para enseñar múltiples conceptos de diseño en un dispositivo y brinda a los estudiantes la tecnología para completar proyectos de diseño del mundo real en un semestre (NI, n.d.).



Figura 2.4. Tarjeta NI myRIO.

### 2.1.6 Volante de inercia

El volante de inercia es, básicamente, un elemento de almacenamiento de energía mecánica (Masferrer, 2005)(Proyecto FSE, 2015). Su principal característica frente a otros sistemas es la capacidad de absorber y ceder energía en poco tiempo (Figura 2.5). Tiene forma de disco circular plano es conectado al eje de un motor, el cual a su vez podría también ser el eje motriz de la manivela de un mecanismo.

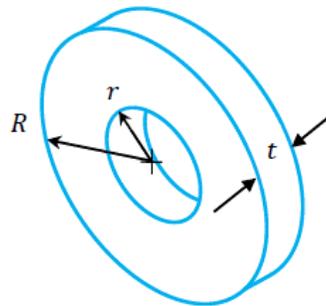


Figura 2.5. Volante de inercia.

Si se considera una geometría de disco sólido con un radio interno  $r$  y un radio externo  $R$ , el momento de inercia de masa  $I_m$  es:

$$I_m = \frac{\rho\pi t}{2}(R^4 - r^4) \quad (2.1)$$

En donde,  $\rho$  y  $t$  representan la densidad del material y el espesor del volante de inercia, respectivamente.

En las aplicaciones más clásicas los volantes reciben la energía a través de una transmisión mecánica, como si fueran un subconjunto de la máquina. En estos casos es habitual que tengan un multiplicador para aumentar las revoluciones, o incluso un variador para adaptarse a distintos regímenes, como se expone en (Miller, 2005)(Ugena, 2008).

### 2.1.7 Cremallera y piñón

Este tipo de mecanismo permite transformar un movimiento giratorio en uno lineal y viceversa (Peña, 2015)(Plus, 2017). Un ejemplo de uso se encuentra en la dirección de piñón y cremallera en automóviles. El piñón está conectado al extremo inferior de la columna de la dirección y gira con el volante. La cremallera engrana con el piñón y se mueve a izquierda y derecha en respuesta al movimiento angular impreso al volante de dirección (ver Figura 2.6).

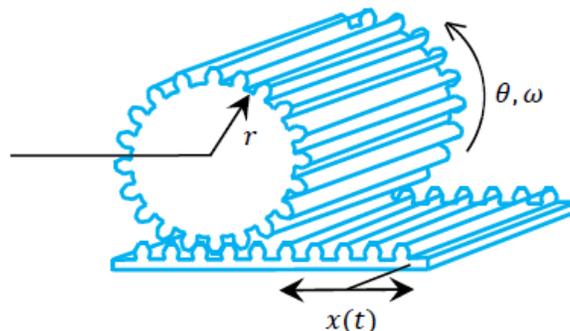


Figura 2.6. Modelo del sistema piñón-cremallera

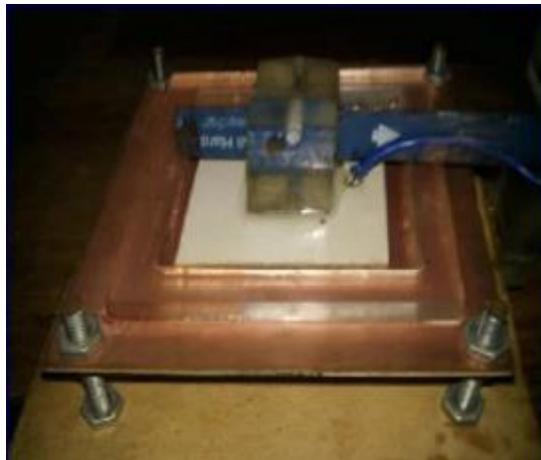
La ecuación cinemática que representa la posición de la cremallera en relación con el desplazamiento angular del piñón es la siguiente:

$$x(t) = r\theta \quad (2.2)$$

Esta representación matemática es válida si y solo si, no existe deslizamiento en los cilindros rodantes tanto del piñón como de la cremallera, es decir entre los radios de paso de ellos mismos (Manuel, 2010)(Benitez, 2012).

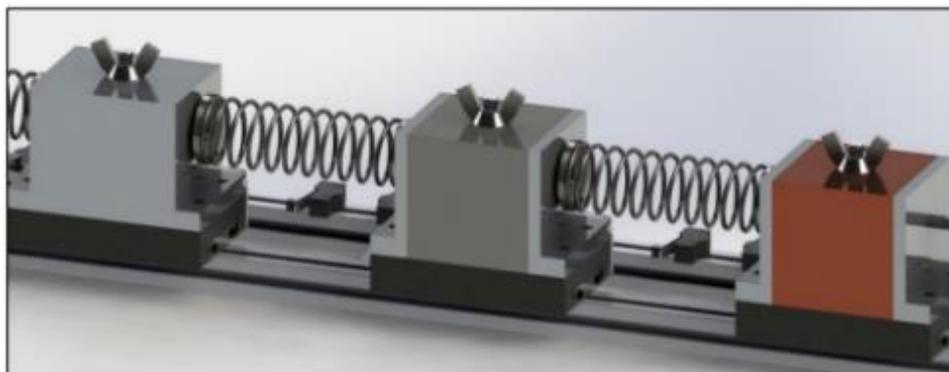
## 2.2 Estado del arte

En el área de Diseño Mecánico del CENIDET, se han hecho varios estudios relacionados a vibraciones mecánicas, tanto en rotores, vigas, estructuras, entre otras, incluyendo una forma de disiparlas o absorberlas. Uno de estos estudios lo llevó a cabo Guzmán M., en 2011. Él diseñó y construyó un amortiguador electrorreológico activo, Figura 2.7, lo cual significa que podía variar el factor de amortiguamiento dependiendo del campo eléctrico aplicado, permitiéndole al amortiguador funcionar en situaciones donde las excitaciones son variables (Guzman, 2011).



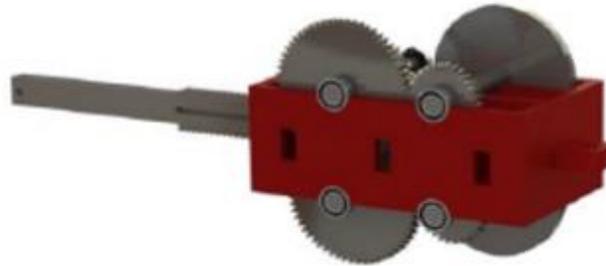
*Figura 2.7. Prototipo del amortiguador hecho por Manuel Guzmán (Guzman, 2011).*

En el 2015, Camarillo E., diseñó una plataforma de un sistema masa-resorte-amortiguador (MRA) de tres grados de libertad, ver Figura 2.8. Fue propuesta con tres masas, tres resortes y un amortiguador (Mendez, 2015).

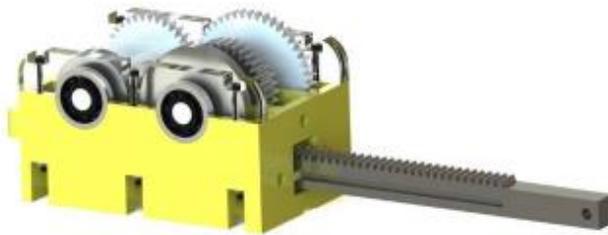


*Figura 2.8. Diseño de la plataforma MRA (Mendez, 2015).*

En el 2016 Barredo E., hizo el análisis numérico de un inersor en la respuesta dinámica de sistemas mecánicos en resonancia. También hizo el diseño del inersor de doble cremallera tomando en cuenta los efectos de amortiguamiento viscoso para su estudio, ver Figura 2.9. Se cambió el diseño de doble cremallera por problemas de maquinado, pero se mantuvieron las propiedades físicas de tal manera que la constante de masa equivalente del dispositivo no sea afectada, ver Figura 2.10. El inersor se configuró con resortes y amortiguadores para mejorar la respuesta dinámica del sistema y se simuló su comportamiento. Llegó a la conclusión de que cuando una de las terminales del inersor es conectada a la tierra mecánica el efecto que produce en la respuesta en estado estable es incrementar la amplitud y reducir las frecuencias naturales. Por otra parte, si las terminales del inersor no están conectadas a tierra, las fuerzas que se generan son directamente proporcionales a la aceleración relativa entre ellas (Barredo, 2016).



*Figura 2.9. Diseño del inersor de doble cremallera (Barredo, 2016).*



*Figura 2.10. Inersor de una cremallera (rediseñado) (Barredo, 2016).*

Las vibraciones mecánicas han sido tema de estudio desde hace varios años. Por lo tanto, se han estudiado diferentes formas de disiparlas, un ejemplo es en vehículos de transporte. Actualmente se han diseñado los sistemas de suspensión, que permiten a los usuarios de los vehículos viajar cómodamente, ver Figura 2.11.



Figura 2.11. Suspensión de automóvil.

Los dispositivos empleados en la disipación de las vibraciones han sido los resortes y amortiguadores. Recientemente se ha añadido el inersor como disipador de energía cinética. Este dispositivo fue propuesto por Malcolm C. Smith en 2002, para lo cual, hizo una analogía de la síntesis que existe entre los dispositivos mecánicos y los dispositivos electrónicos. Recalcó que el dispositivo masa no es un homólogo directo del capacitor (como son el resorte del inductor o el amortiguador de la resistencia) dado que solo posee una terminal, mientras que el capacitor posee dos terminales (Smith, 2002). De este modo, da paso al inersor, compuesto por dos terminales cuyo comportamiento es similar a su homólogo el capacitor, como se muestra en la Tabla 2.1 y Tabla 2.2.

Tabla 2.1 Analogía convencional entre elementos mecánicos y electrónicos (Smith, 2003).

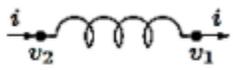
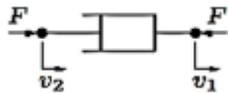
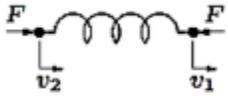
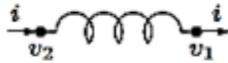
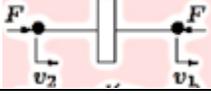
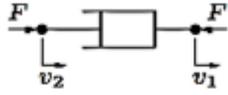
Mecánica	Eléctrica
 <p style="text-align: center;">Resorte</p>	 <p style="text-align: center;">Inductor</p>
 <p style="text-align: center;">Masa</p>	 <p style="text-align: center;">Capacitor</p>
 <p style="text-align: center;">Amortiguador</p>	 <p style="text-align: center;">Resistencia</p>

Tabla 2.2 Nueva analogía utilizando un inersor en lugar de la masa (Smith, 2003).

Mecánica		Eléctrica	
	Resorte		Inductor
	Inersor		Capacitor
	Amortiguador		Resistencia

El inersor tomó fama después de que en la Fórmula 1 se presentara como un nuevo dispositivo, llamado entonces J-Damper, utilizado por McLaren en 2005, mejorando la estabilidad y el agarre de los neumáticos del vehículo, permitiéndoles ganar su primer carrera del año (M. Chen, 2015), ver Figura 2.12.

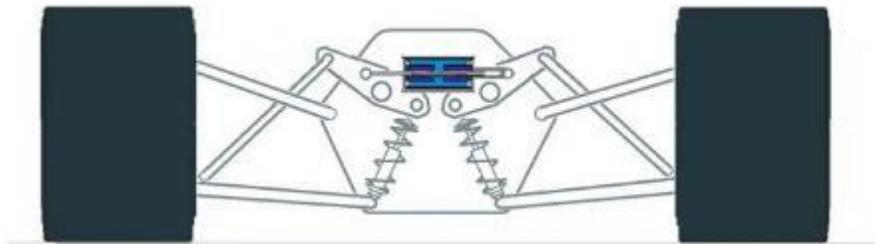


Figura 2.12. Inersor en la suspensión de un automóvil de Fórmula 1.

Los inersores también se han puesto a prueba en sistemas de suspensión de ferrocarriles, tanto en la suspensión primaria como en la secundaria, dando buenos resultados en soluciones de suspensión activa en la suspensión primaria (Matamoros-Sanchez & Goodaoll, 2014), ver Figura 2.13. En (H. J. Chen, Su, & Wang, 2017) se hizo el análisis numérico y la simulación con varios vagones conectados en el que se concluyó que aunque el tiempo de estabilidad es mayor, no se afectaría la comodidad de los pasajeros, por lo tanto el inersor mejora el rendimiento del sistema de vagones; también se realizó un prototipo para futuras pruebas, Figura 2.14.

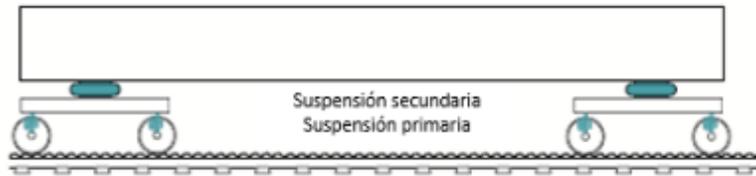


Figura 2.13. Suspensión primaria y secundaria de un ferrocarril (Matamoros-Sanchez & Goodaoll, 2014).



Figura 2.14. Prototipo del inersor (H. J. Chen et al., 2017).

También, se ha estudiado la influencia de los inersores en la frecuencia natural de sistemas de vibración de uno (ver Figura 2.15) y dos grados de libertad (ver Figura 2.16) sin amortiguamiento de forma algebraica.

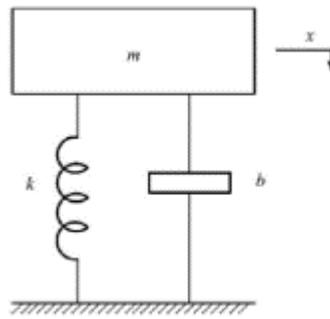


Figura 2.15. Sistema de un grado de libertad sin amortiguador (M. Chen, Hu, Huang, & Chen, 2014).

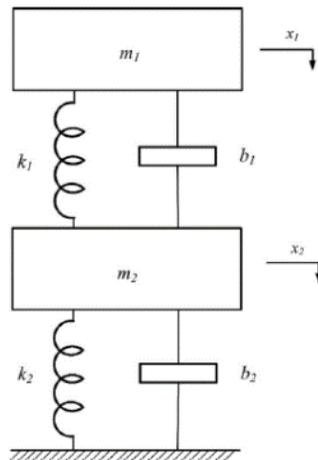


Figura 2.16. Sistema de dos grados de libertad sin amortiguamiento (M. Chen et al., 2014).

Se concluyó que, en sistemas de un grado de libertad, la frecuencia natural disminuye en función de la inercia, es decir, el inersor puede reducir la frecuencia natural del sistema. De la misma forma, se dedujo que las frecuencias naturales disminuyen en función de las inercias de cada subsistema (M. Chen et al., 2014).

En (Watanabe, Hayashi, & Yamakitao, 2014) se hicieron simulaciones numéricas de la estabilidad con que cuenta un robot al cual se le acoplaron inersores en los tobillos, como se muestra en la Figura 2.17. Se obtuvo un mayor desempeño en la velocidad de caminata y la estabilidad, lo cual produjo una mayor eficacia en cuanto al comportamiento dinámico en terrenos irregulares.

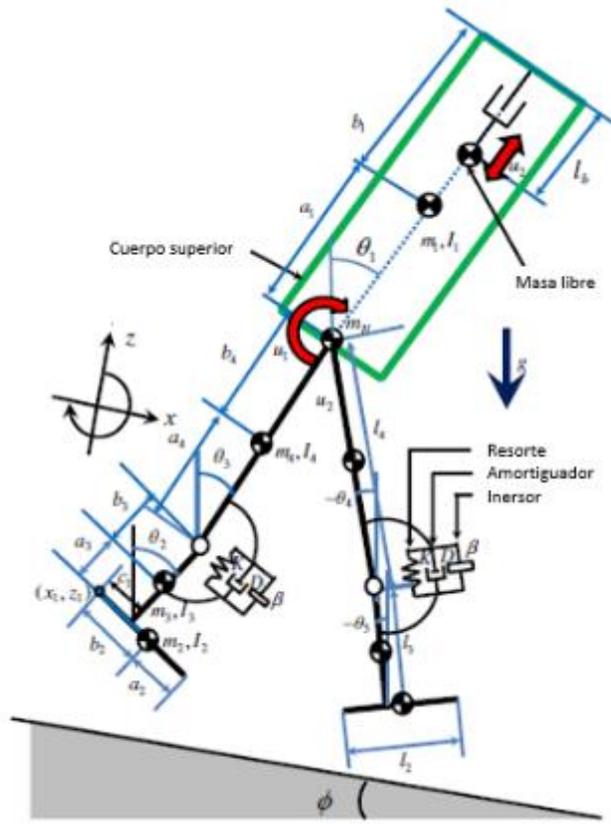


Figura 2.17. Modelo del robot utilizado (Watanabe et al., 2014).

Incluso se ha llegado a utilizar en edificios (Wang, Chen, Liao, & Hong, 2007)(J. Q. Sun, n.d.), en las que se muestran tres configuraciones simuladas de una suspensión para edificios utilizando inersores. La suspensión fue simulada con dos grados de libertad, con la configuración que se ve en la Figura 2.18. Se llegó a la conclusión de que el inersor es capaz de reducir las vibraciones producidas por temblores y tráfico. Mientras que en (Giaralis & Petrini, 2017) se propuso trabajar con un sistema amortiguador de masa sintonizado con inersor, por sus siglas en inglés (TMDI), en edificios altos sometidos a efectos de fricción por ráfagas de viento y se demostró numéricamente que el inersor aumenta significativamente el rendimiento de la respuesta de la estructura.

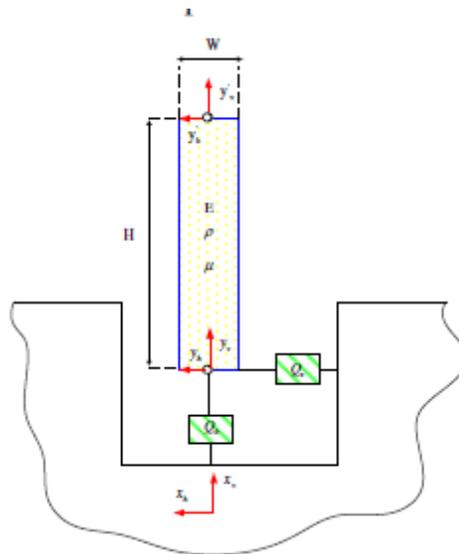


Figura 2.18. Configuración utilizada en simulación (Wang et al., 2007).

Otra aplicación con el uso de inersores se realizó en una mesa óptica (Wang & Wu, 2016), la cual se utiliza para realizar experimentos de óptica, y requieren que la mesa se mantenga estable, utilizando normalmente sistemas de amortiguamiento neumático. Aunque en esta investigación se optó por utilizar inersores en el sistema, obteniendo resultados favorables en cuanto a la estabilización de la mesa, ver Figura 2.19.

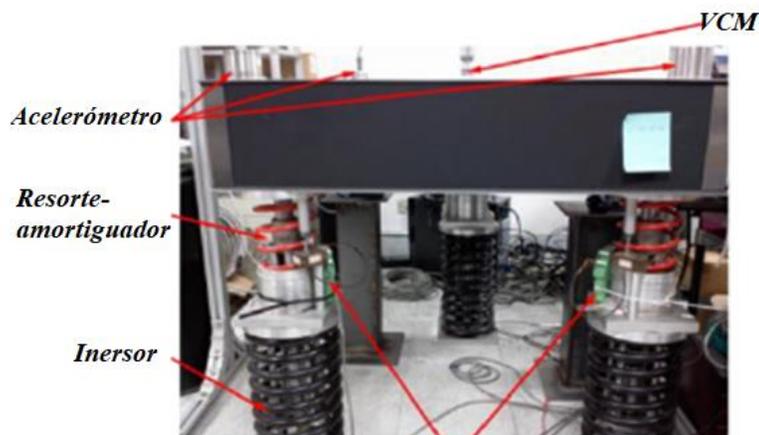


Figura 2.19. Sistema de amortiguamiento en las tres patas de la mesa (Wang & Wu, 2016).

En (Hu, Chen, Xu, & Liu, 2016) se diseña un inersor semi-activo para analizar su aplicación en absorbedores de vibración ajustables, Figura 2.20. Un inersor semi-activo es aquel en el que su volante de inercia se reemplaza por otro con inercia controlable. Se concluyó que el sistema de suspensión propuesto tolera la variación de parámetros del sistema.

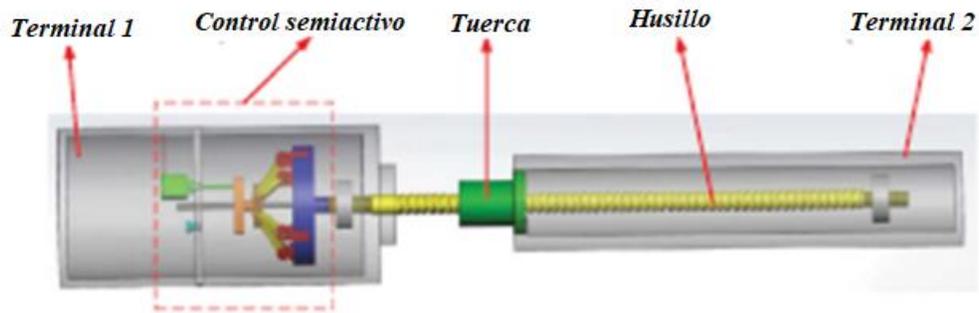


Figura 2.20. Diseño del inersor semi-activo propuesto (Hu et al., 2016)

En (X. Liu, Jiang, Titurus, Harrison, & McBryde, 2017) se diseña un inersor basado en fluidos de tubo helicoidal (ver Figura 2.21) y se realizan pruebas y modelado de sus efectos de amortiguación tomando en cuenta las discrepancias que existen entre el análisis teórico y el experimental como lo son el modelado imperfecto de la amortiguación y la pérdida de presión dentro del tubo helicoidal. Concluyen que el método para realizar las pruebas fue el adecuado y también que su diseño presentó excelentes resultados.

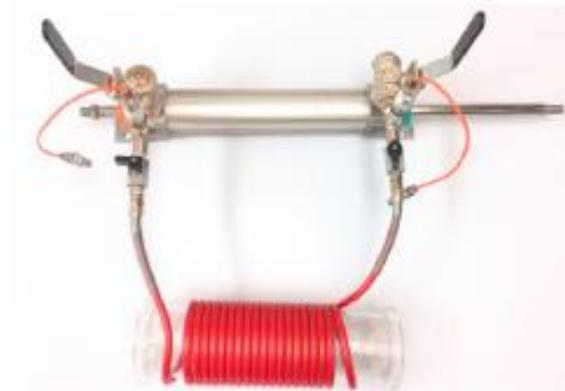


Figura 2.21. Diseño de inersor basado en fluidos de (X. Liu et al., 2017).

En (Faraj, Holnicki-Szulc, Knap, & Senko, 2016) se diseñó un absorbedor de impacto inercial ajustable, ver Figura 2.22, que mediante el almacenamiento de energía en discos inerciales, amortigua el impacto y reduce las amplitudes de vibración. Los resultados de las simulaciones numéricas demuestran que es posible reducir significativamente las cargas máximas causadas por el impacto.

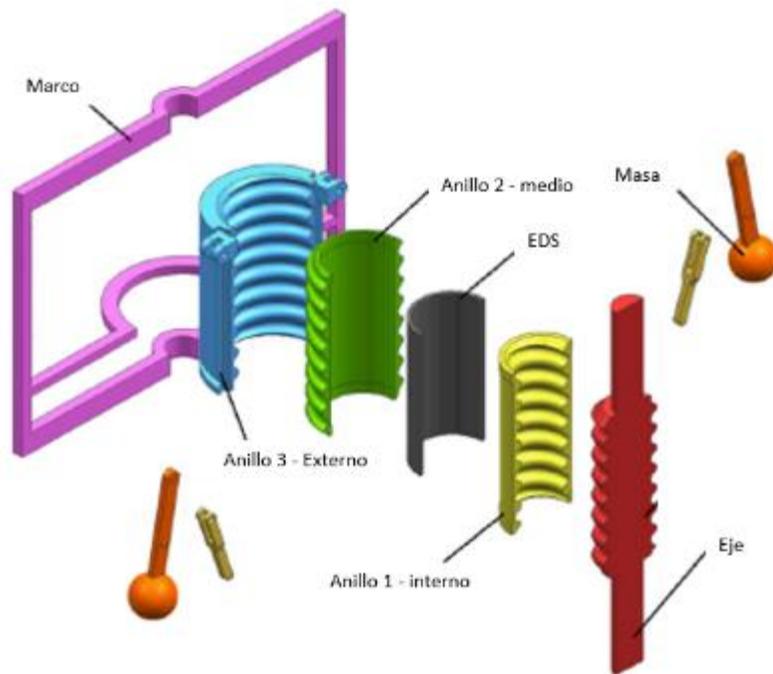


Figura 2.22. Diseño del absorbedor de impactos (Faraj et al., 2016).

Se investigó la aplicación de un inersor semi-activo en una suspensión semi-activa y se demostró en simulación que añadir el inersor semi-activo a la suspensión aproxima el funcionamiento de ésta a la de una suspensión activa (M. Chen, Hu, Li, & Chen, 2017). Se utilizó un inersor hidráulico, ver Figura 2.23.

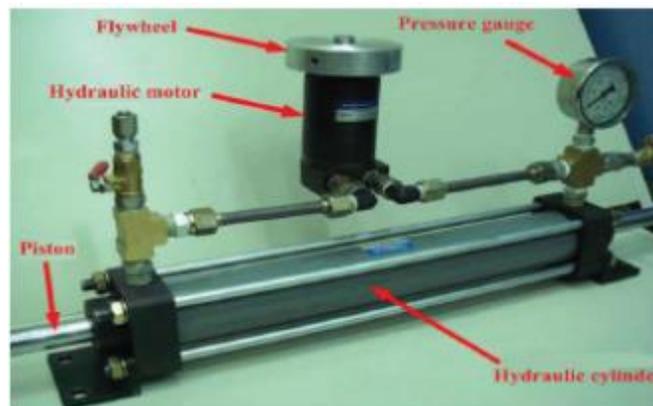


Figura 2.23. Inersor hidráulico semi-activo utilizado en (M. Chen et al., 2017).

En (Hu, Chen, & Sun, 2017) se diseñó una suspensión orientada al confort de un vehículo con un inersor *skyhook*, ver Figura 2.24. El inersor *skyhook* va conectado a tierra, lo que, virtualmente, aumenta la masa del sistema (el vehículo) mejorando con ello el rendimiento de

la conducción. Se demostró que independientemente de la rigidez y el coeficiente de amortiguamiento, el inersor siempre mejora el rendimiento, pero debe ser implementado de forma activa o semi-activa, ya que en forma pasiva no funciona.

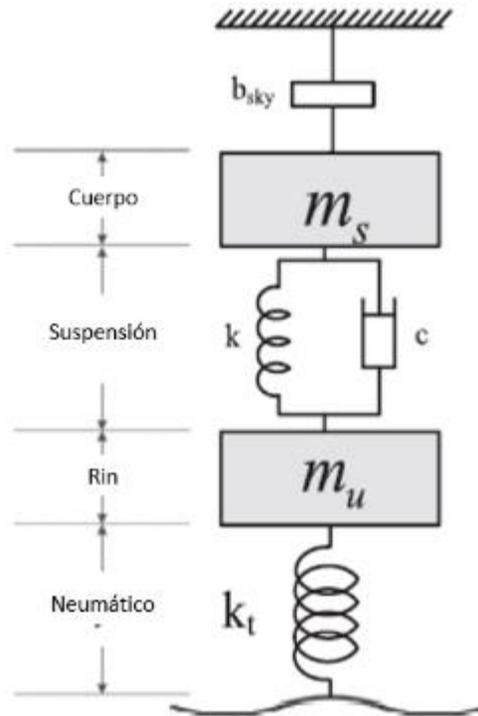


Figura 2.24. Sistema de suspensión con inersor skyhook (Hu et al., 2017).

En (Li, Jiang, Neild, Kingdom, & Layouts, n.d.) se analizó la posibilidad de agregar inersores dispositivo de supresión shimmy en el tren de aterrizaje principal, ver Figura 2.25. Este dispositivo es una unidad que se instala en el cilindro de la rueda delantera para absorber las vibraciones que se producen en el tren de aterrizaje (Oscilaciones2, 2012). Se determinó que el uso de inersores trae más beneficios que el uso de configuraciones paralelas de resorte-amortiguador.

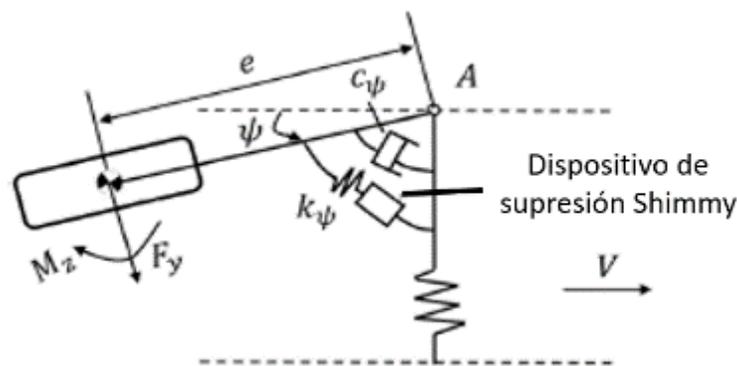


Figura 2.25. Configuración del inersor y el dispositivo de supresión shimmy utilizada en el tren de aterrizaje (Li et al., n.d.).

En (Pietrosanti, 2017) se diseña y evalúa un sistema masa-resorte-amortiguador sintonizado con inersor para reducir las vibraciones mecánicas de un sistema de dos grados de libertad (ver Figura 2.26), en el cual, la estructura primaria va conectada a tierra vía resorte-amortiguador, mientras que la estructura secundaria se conecta en serie con la primaria y a su vez a tierra con el elemento inersor. Este dispositivo proporcionó una estabilidad en menor tiempo incluso con acción sísmica.

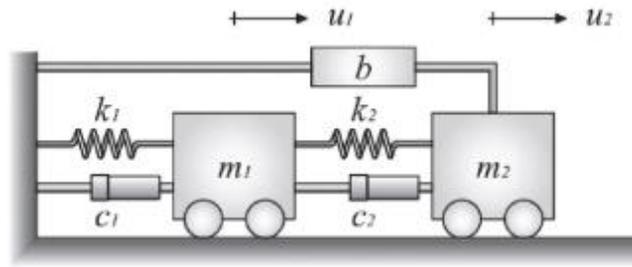


Figura 2.26. Configuración el sistema de dos grados de libertad utilizado en (Pietrosanti, 2017).

En (Høgsberg, Brodersen, & Krenk, 2016) se hizo un amortiguador de vibración en resonancia pasivo-activo. Se diseñó con una unidad pasiva conectada en serie con una unidad híbrida, con un actuador activo conectado en paralelo con un segundo elemento pasivo (ver Figura 2.27). El desplazamiento del actuador activo se controla mediante un control de realimentación integrado con la diferencia de fuerza entre los dos elementos pasivos como entrada. Los resultados mostraron que el amortiguador activo-pasivo propuesto proporciona una reducción efectiva en la amplitud en estado de resonancia.

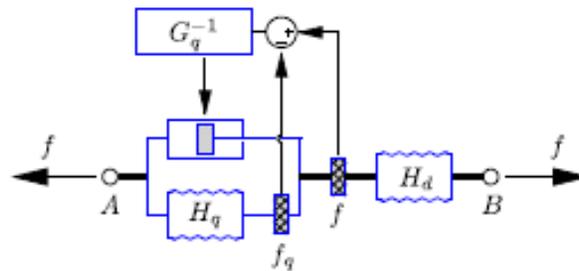


Figura 2.27. Amortiguador de vibraciones pasivo-activo con realimentación de fuerza (Høgsberg et al., 2016).

El inersor también se utiliza para mitigar vibraciones en cables de puentes, en (L. Sun, Hong, & Chen, 2017) se hizo un análisis de dos cables interconectados con un sistema amortiguador-inersor sintonizado (ver Figura 2.28). Se demostró numéricamente que el inersor mejora la capacidad de disipación del sistema en comparación de un sistema resorte-amortiguador.

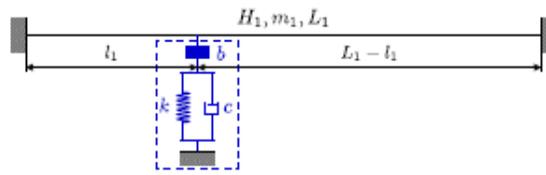


Figura 2.28. Ilustración del sistema utilizado (L. Sun et al., 2017).

En (Swift et al., 2013) se diseñó y modeló un inersor con fluido (ver Figura 2.29), el cual tiene ventaja sobre un inersor simple (sin fluido) en términos de simplicidad de diseño. Se compararon los datos de pruebas experimentales de prototipos con tubos helicoidales para investigar los efectos de amortiguación parasitaria del fluido y se demostró que el dispositivo se puede modelar como un inersor ideal en paralelo con un componente de amortiguamiento parasitario no lineal.

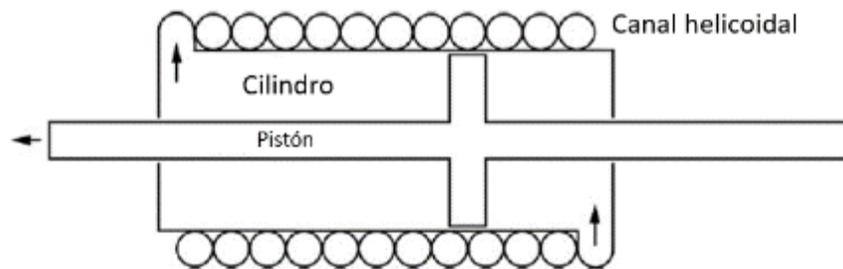


Figura 2.29. Esquema del inersor con fluido diseñado (Swift et al., 2013).

También se ha analizado la influencia de los inersores en el comportamiento dinámico de motocicletas de alto rendimiento. En (Evangelou, Limebeer, Sharp, & Smith, 2004) se hizo un análisis numérico de la utilización de un compensador de dirección compuesto por un sistema resorte-amortiguador-inersor (ver Figura 2.30), en una motocicleta Suzuki GSX-R1000. El sistema propuesto sustituyó al amortiguador de dirección convencional. Se concluyó que el sistema propuesto mejoró el rendimiento de la motocicleta a altas velocidades, manteniéndola más estable.

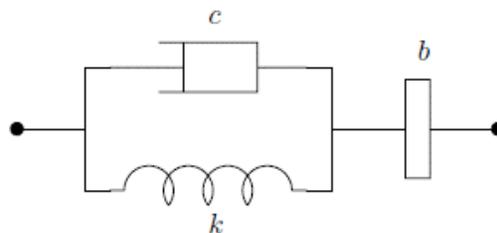


Figura 2.30. Configuración del compensador utilizado (Evangelou et al., 2004).

En (Javidialesaadi & Wierschem, 2018) se analizó una solución óptima exacta para seleccionar los valores de amortiguamiento y rigidez en el diseño de un inersor para mitigar la respuesta de una estructura sometida a una fuerza aleatoria con una excitación base. En la estructura propuesta, se cambia un amortiguador viscoso, de una estructura normal con sistema masa-resorte-amortiguador (ver Figura 2.31), por un arreglo en serie de un resorte y un inersor (ver Figura 2.32).

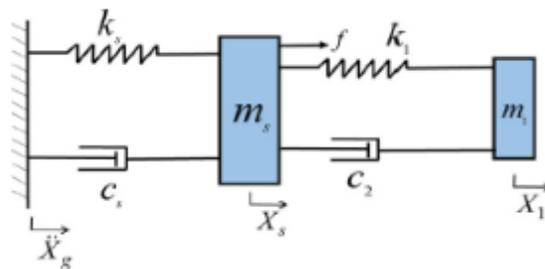


Figura 2.31. Sistema masa-resorte-amortiguador normal (Javidialesaadi & Wierschem, 2018).

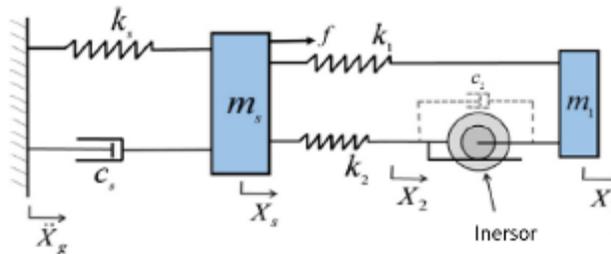


Figura 2.32. Sistema propuesto, reemplazando el amortiguador por un resorte y un inersor (Javidialesaadi & Wierschem, 2018).

En (Y. Liu, Hu, & Chen, 2015) se analizó el efecto de juego en un automóvil con inersor en su suspensión. A continuación se muestra el diagrama de cuerpo libre del efecto de juego (ver Figura 2.33).

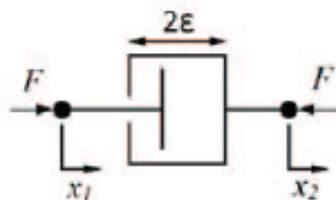


Figura 2.33. Diagrama de cuerpo libre del elemento de juego en el sistema (Y. Liu et al., 2015).

El diagrama de cuerpo libre analizado se puede observar a continuación, se puede observar que el efecto de juego se pone en serie con el inersor, que a su vez está en paralelo con un resorte y con un amortiguador (ver Figura 2.34). Se obtuvieron óptimos resultados para atenuar las amplitudes de vibración.

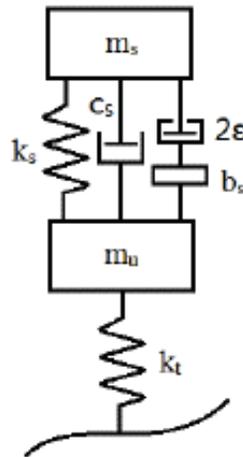


Figura 2.34. Diagrama de cuerpo libre analizado (Y. Liu et al., 2015).

En (Garrido, Curadelli, & Ambrosini, 2013) se utilizó un inersor en un sistema de un grado de libertad, es decir un absorbedor, para reducir amplitudes de vibración (ver Figura 2.35). El objetivo principal de un absorbedor de vibración es transmitir la energía de vibración del sistema primario al sistema secundario, es decir, que en condiciones de resonancia exista un equilibrio dinámico de fuerzas inerciales en ambos sistemas. Este absorbedor demostró mejores resultados que un simple sistema MRA.

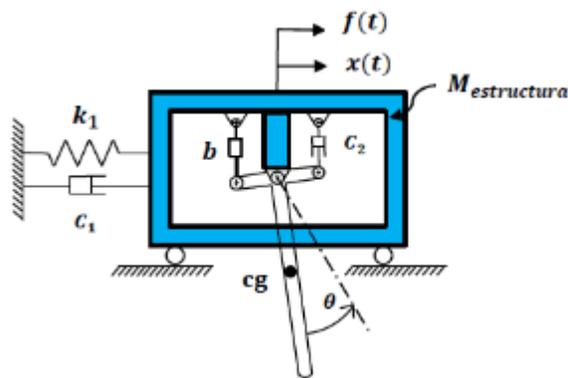


Figura 2.35. Péndulo T con inersor.

Existen diversos arreglos o configuraciones de las redes mecánicas, es decir, serie y paralelo. Basado en el estudio teórico de (Wang & Su, 2008), se demostró que, de acuerdo con una

admitancia permisible, la configuración de la red mecánica con un amortiguador, un inersor y como máximo tres resortes es más eficiente en reducir las amplitudes de vibración.

El inersor presenta tres no linealidades las cuales son los efectos elásticos, la holgura o espaciado entre diente y diente en el sistema de engranajes y fricción principalmente en las zonas de contacto de los engranes y en los rodamientos. Estas no linealidades han sido estudiadas en (Seto, 1986) y se concluyó que las no linealidades de efectos elásticos y holgura entre dientes del sistema de engranes pueden ser evitadas en el proceso de manufactura del inersor, es decir, el material debe de ser resistente a esfuerzos causados por cargas dinámicas y añadiendo una precarga al sistema de engranes, respectivamente. Entonces la única no linealidad en el inersor que no puede ser eliminada es la fricción en todo el sistema.

En (Siami, Karimi, Cigada, & Zappa, 2018) se analiza el comportamiento de un inersor en estatuas de patrimonio cultural sometidas a vibraciones por temblores y ambientales. El inersor se introduce en la estructura y su efecto en el comportamiento dinámico del aislador se verifica mediante una prueba de vibración de barrido sinusoidal (ver Figura 2.36 y Figura 2.37).



*Figura 2.36. Estructura analizada en (Siami et al., 2018).*



*Figura 2.37. Diseño del inersor utilizado en (Siami et al., 2018).*

El estudio concluyó que el inersor diseñado puede proteger las estatuas de patrimonio cultural contra vibraciones por terremotos o ambientales.

En (Madhamshetty, 2018) se consideran inersores con tornillo de bolas y de piñón-cremallera para estudiar su comportamiento con excitaciones bajas (menores a 5 Hz.). Los diseños utilizados se muestran en la Figura 2.38 y en la Figura 2.39. Examinar los límites de baja y alta frecuencia de la inercia específica experimental revela que la rigidez interna y la amortiguación inherentes en objeto de prueba tienen una influencia significativa en ello.

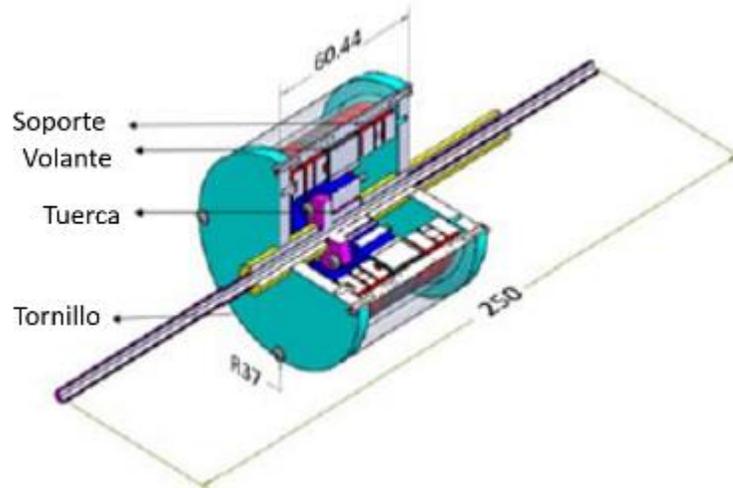


Figura 2.38. Diseño de inersor ball-screw utilizado en (Madhamshetty, 2018).

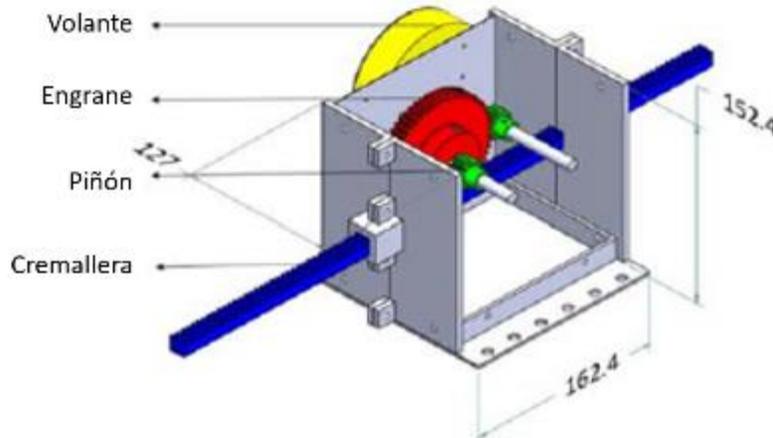


Figura 2.39. Diseño de inersor piñón-cremallera utilizado en (Madhamshetty, 2018).

En (Smith & Wang, 2004) se realizó un estudio comparativo de varios sistemas de suspensión pasivos simples, cada uno de los cuales contiene a lo sumo un amortiguador y un inersor. El rendimiento mejorado para varias medidas diferentes en un modelo de cuarto de carro se demostró en comparación con un sistema de suspensión pasivo convencional.

En (KOYANAGI & TAKAHASHI, 2019) se propone una cama aislante de vibraciones para ambulancias usando un inersor. Se supone que la estructura de la cama consiste en un marco inferior fijado al piso de la ambulancia y un marco superior, donde se coloca la camilla (Figura 2.40). Ambas están conectadas solo por la suspensión, incluido el inersor, en las direcciones vertical y horizontal (Figura 2.41).

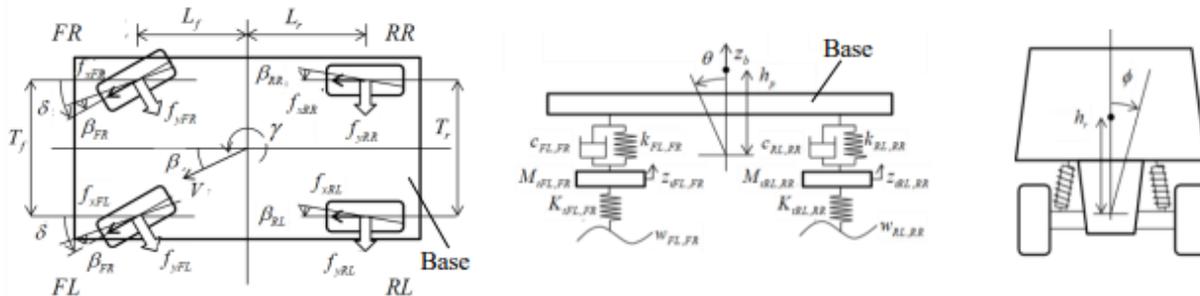


Figura 2.40. Modelo del vehículo completo.

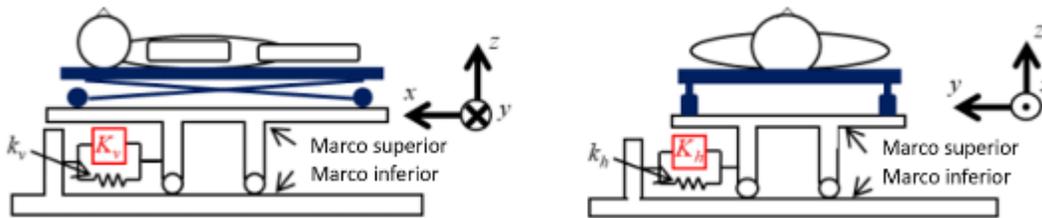


Figura 2.41. Modelo de la cama aislante de vibraciones.

Para mostrar la efectividad de la cama aislante de vibraciones, se llevó a cabo la simulación sobre el supuesto del transporte de emergencia. Se demostró que efectivamente, añadiendo al sistema un inersor, se reducen las amplitudes de vibración comparándolo con un sistema habitual de MRA.

### 2.3 Modelado de un sistema MRA

Para obtener las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema MRA se optará por utilizar la ecuación de Euler-Lagrange. En un sistema conservativo no hay fuerzas disipativas como las debidas a la fricción, por lo que la ecuación de la Lagrange se escribe (Ogata, 1987)(Sistemas, 2018a):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i \quad (2.3)$$

Las leyes de la mecánica newtoniana para sistemas dinámicos en traslación y rotación son útiles para obtener las ecuaciones diferenciales de movimiento, pero se trata de un caso en el que se tiene disipación de energía, por lo tanto, se necesita un método para sistemas no conservativos. Entonces, para obtener dichas ecuaciones de este sistema se utilizará la ecuación de Euler-Lagrange para sistemas no conservativos. Lord Rayleigh introdujo un parámetro como función de disipación  $D = \frac{1}{2} c \dot{q}_i^2$  para incluir fuerzas de amortiguamiento lineal proporcional a la velocidad  $\dot{q}$ . En términos de esta función, la ecuación de Lagrange queda como (Balachandran & Magrab, 2018)(Goldstein, Poole, & Safko, 2001):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = F(i) \quad (2.4)$$

En donde  $L = T - V$  se conoce como la función Lagrangiana que representa la diferencia de energías cinética y potencial. Mientras que  $x_i$  y  $F_i$  es la coordenada generalizada y todas las fuerzas presentes en el sistema respectivamente.

Para un sistema mecánico MRA de dos grados de libertad, como el que se muestra en la Figura 2.42 las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica pueden obtenerse mediante la ecuación de Lagrange para sistemas no conservativos (Siordia Vásquez, González Ramírez, García Ramos, & García Martínez, 2017) (Sistemas, 2018b).

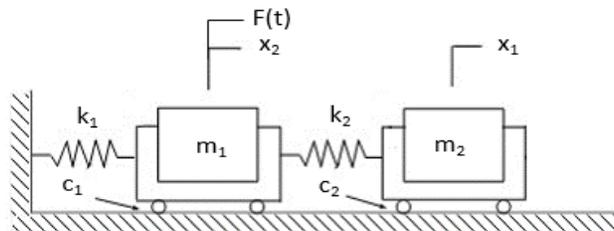


Figura 2.42. Sistema MRA de dos grados de libertad.

Como el sistema mostrado es de dos grados de libertad, la ecuación de Lagrange produce dos ecuaciones de movimiento para cada coordenada generalizada, entonces la ecuación (2.4) queda como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F(t) \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \quad (2.6)$$

Restando las energías cinética y potencial del sistema, se obtiene la función Lagrangiana, que está dada por la ecuación:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 \quad (2.7)$$

La función de disipación de energía está dada por:

$$D = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{x}_2^2 \quad (2.8)$$

Entonces, las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema MRA son las siguientes:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) + c_1 \dot{x}_1 = F(t) \quad (2.9)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 \dot{x}_2 = 0 \quad (2.10)$$

# Capítulo 3

## Sistema MRA de 2 GDL

### 3.1 Frecuencias naturales

Para someter al sistema a resonancia, es necesario encontrar las frecuencias naturales del sistema. En este caso, se analiza un sistema MRA de dos grados de libertad sin amortiguamiento, para esto se consideran las ecuaciones (2.9) y (2.10) del capítulo anterior, que son el modelo matemático del sistema.

Para las calcular las frecuencias naturales del sistema se consideran los parámetros de la Tabla 3.1, que corresponden a la rigidez de los resortes que se tienen, así como las masas de los carros de la plataforma experimental. Esto para verificar la parte de resultados de simulación con las pruebas experimentales. Así como determinar los parámetros del inersor a utilizar en las pruebas experimentales.

Tabla 3.1. Valores utilizados en simulación

Unidad	Valor
Masa 1	2.5 kg
Masa 2	2.5 kg
$k_1$	1300 N/m
$k_2$	1300 N/m
$c_1$	0
$c_2$	0
$F(t)$	0

Despreciando el amortiguamiento y considerando  $F = 0$  N, las ecuaciones (2.9) y (2.10) quedan de la siguiente manera:

$$\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (3.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (3.2)$$

Expresando el modelo matemático en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Proponiendo la solución compleja como:

$$x_1 = A_1 e^{j\omega t} \quad (3.4)$$

$$x_2 = A_2 e^{j\omega t} \quad (3.5)$$

Derivando ecuaciones (3.4) y (3.5) quedan de la siguiente manera:

$$\dot{x}_1 = j\omega A_1 e^{j\omega t}, \ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 e^{j\omega t} \quad (3.6)$$

$$\dot{x}_2 = j\omega A_2 e^{j\omega t}, \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 e^{j\omega t} \quad (3.7)$$

Sustituyendo ecuaciones (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7) en las ecuaciones (3.1) y (3.2):

$$m_1(-\omega^2 A_1 e^{j\omega t}) + k_1(A_1 e^{j\omega t}) - k_2(A_2 e^{j\omega t} - A_1 e^{j\omega t}) = 0 \quad (3.8)$$

$$m_2(-\omega^2 A_2 e^{j\omega t}) + k_2(A_2 e^{j\omega t} - A_1 e^{j\omega t}) = 0 \quad (3.9)$$

Simplificando  
(3.8) y (3.9):

$$m_1(-\omega^2 A_1) + k_1(A_1) - k_2(A_2 - A_1) = 0 \quad (3.10)$$

$$m_2(-\omega^2 A_2) + k_2(A_2 - A_1) = 0 \quad (3.11)$$

Expresando (3.10) y (3.11) de manera matricial:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Se obtiene el polinomio característico de la matriz al sacar el determinante de la ecuación (3.12) e igualando a cero.

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

El determinante de (3.13) está dado por:

$$k_1k_2 - \omega^2k_1m_2 - \omega^2k_2m_1 - \omega^2k_2m_2 + \omega^4m_1m_2 = 0 \quad (3.14)$$

Haciendo  $\lambda = \omega^2$  en ecuación (3.14):

$$\lambda^2m_1m_2 - (k_1m_2 + k_2m_1 + k_2m_2)\lambda + k_1k_2 = 0 \quad (3.15)$$

Se sustituyen los valores de  $m$  y  $k$  en la ecuación (3.15):

$$6.25\lambda^2 - 9750\lambda + 3.6292 \times 10^7 = 0 \quad (3.16)$$

Se resuelve (3.16) como ecuación cuadrática y se tiene que:

$$\lambda_1 = 198.62$$

$$\lambda_2 = 1361.4$$

Para el primer modo de vibración, la frecuencia natural es

$$\omega = \sqrt{198.62}$$

$$\omega = 14.093 \frac{rad}{s}$$

Para el segundo modo de vibración, la frecuencia natural es

$$\omega = \sqrt{1361.4}$$

$$\omega = 36.897 \frac{rad}{s}$$

### 3.2 Modelo matemático con inersor

Dos tipos de inersores se tomaron en cuenta para el diseño del inersor a utilizar, los cuales se muestran en la Figura 3.1. El primero es un inersor cremallera-piñón y el segundo un inersor tornillo-volante de inercia. Ambos presentan la desventaja de que para incrementar la constante de proporcionalidad llamada inercancia del dispositivo se tiene que aumentar las dimensiones geométricas del volante de inercia o la relación de engranaje, lo cual involucra incrementar el tamaño físico y el peso del inersor. Una ventaja que tiene el inersor cremallera-piñón es que consta de elementos mecánicos sencillos y es fácil de construir. Una forma de incrementar la constante de inercia sin alterar las dimensiones físicas del inersor es añadir una cremallera que contenga dientes tanto en la parte superior como inferior. De esta manera es posible ampliar la constante de inercia del dispositivo.



a) *Inersor cremallera-piñón*



b) *Inersor tornillo-volante*

*Figura 3.1. Tipos de inersores.*

El inersor de doble cremallera está compuesto por una cremallera que consta de dientes tanto en la parte superior como inferior, un sistema de engranaje con una relación de 2 a 1 y dos volantes de inercia. Para obtener el modelo matemático de este dispositivo se considera que la terminal 2 está conectada a tierra de acuerdo a la Figura 3.2.

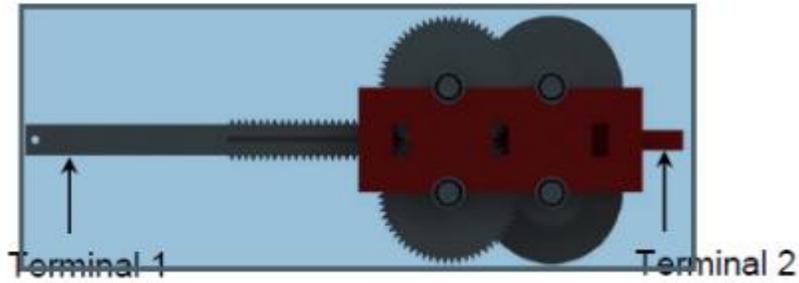


Figura 3.2. Inersor de doble cremallera.

En la Figura 3.3 se presenta el diagrama cinemático del inersor de doble cremallera, para caracterizar sus parámetros.

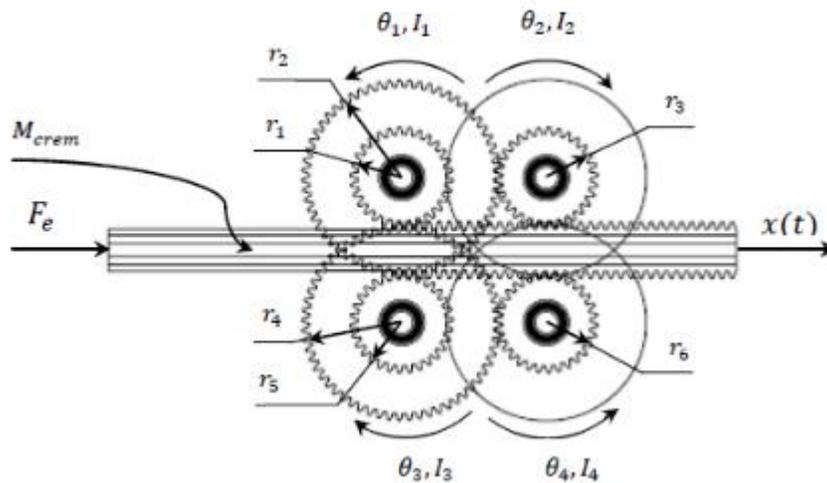


Figura 3.3. Diagrama cinemático del inersor de doble cremallera.

Con base a la ley de engranes se procede a obtener las relaciones cinemáticas de posición y velocidad para la cremallera y los engranes, para así determinar el conjunto de ecuaciones que rigen la dinámica del inersor. Por tanto, tales ecuaciones cinemáticas son las siguientes.

$$x = r_1\theta_1 = r_5\theta_3 \quad \therefore \quad \dot{x} = r_1\dot{\theta}_1 \quad (3.17)$$

$$\theta_2 = \frac{r_2}{r_3}\theta_1 \quad \therefore \quad \dot{\theta}_2 = \frac{r_2}{r_3}\dot{\theta}_1 \quad (3.18)$$

$$\theta_3 = \frac{r_1}{r_5}\theta_1 \quad \therefore \quad \dot{\theta}_3 = \frac{r_1}{r_5}\dot{\theta}_1 \quad (3.19)$$

$$\theta_4 = \frac{r_4 r_1}{r_6 r_5} \theta_1 \quad \therefore \quad \dot{\theta}_4 = \frac{r_4 r_1}{r_6 r_5} \dot{\theta}_1 \quad (3.20)$$

Ahora bien, dadas estas definiciones se calcula la función Lagrangiana y la función de disipación de energía para el inersor. Al definir las siguientes constantes  $J$ ,  $\delta$  y dada la relación 2 a 1 del sistema de engranaje en el inersor, es decir,  $r_1 = r_2 = r_4 = r_6$ ,  $r_3 = r_5$  y suponer que los coeficientes de amortiguamiento rotacional en los rodamientos son iguales, es decir,  $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ . A partir de estas consideraciones se obtiene la ecuación diferencial de movimiento mediante la ecuación de Lagrange. Por tanto, la ecuación que rige la dinámica del inersor es:

$$J\ddot{x} + \delta\dot{x} = F_e \quad (3.21)$$

En donde  $J$  y  $\delta$  es la masa equivalente y la constante de amortiguamiento total del inersor, respectivamente. Entonces a la ecuación ideal del inersor se le añade un término adicional. Con base en los parámetros mostrados en la Tabla 3.2 se realiza la simulación en MSC Adams View y en Matlab Simulink para corroborar el modelo matemático del inersor.

Tabla 3.2. Parámetros de simulación.

	J [kg]	m <sub>1</sub> [kg]	m <sub>2</sub> [kg]	k <sub>1</sub> $\left[\frac{N}{m}\right]$	k <sub>2</sub> $\left[\frac{N}{m}\right]$	b $\left[\frac{N m s}{rad}\right]$
TDOF	0.8333	2.5	2.5	1300	1300	0

Esta tesis se enfoca en la configuración mostrada en la Figura 3.4, la cual fue la que demostró los mejores resultados de forma analítica. El inersor es añadido a un sistema mecánico de dos grados de libertad para analizar su efecto en la respuesta dinámica de ambos subsistemas ante una fuerza impulso. En este caso el inersor es conectado entre los extremos de  $m_1$  y  $m_2$ , lo cual existe aceleración relativa en sus terminales. En esta configuración se analiza más detalladamente el efecto del inersor dado que se originan fuerzas opuestas en sus terminales cuando se sintoniza a la segunda frecuencia natural, es decir el segundo modo de vibración. Debido a esta restricción la energía cinética de rotación interna en el inersor depende del desplazamiento de ambas masas.

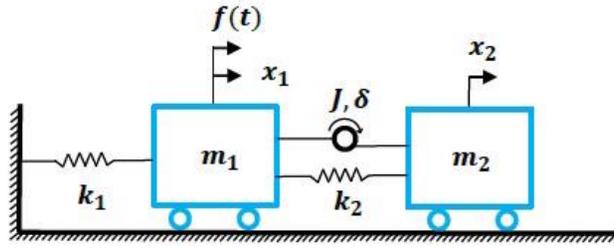


Figura 3.4. Sistema MRA de dos grados de libertad con inersor.

El desplazamiento angular del piñón puede ser representado:

$$\theta_1 = \frac{1}{r_1} (x_1 - x_2) \quad (3.22)$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{r_1} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (3.23)$$

La energía cinética queda como:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \quad (3.24)$$

La energía potencial queda como:

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 \quad (3.25)$$

Entonces, al restar la energía potencial de la energía cinética [ecuaciones (3.24) y (3.25)] el lagrangiano queda como:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 \quad (3.26)$$

La función de disipación de energía está dada por:

$$D = \frac{1}{2} (c_1 \dot{x}_1^2 + c_2 \dot{x}_2^2 + c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2) \quad (3.27)$$

Por lo tanto, la ecuación de la masa 1 es:

$$(m_1 + J) \ddot{x}_1 - J \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 + c_1 \dot{x}_1 + c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = f(t) \quad (3.28)$$

La ecuación de la masa 2 queda:

$$(m_2 + J) \ddot{x}_2 - J \ddot{x}_1 - k_2 (x_1 - x_2) + c_2 \dot{x}_2 - c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \quad (3.29)$$

En las funciones de transferencia el denominador es muy largo, por lo que se optó por hacer sustituciones en algunas variables propuestas que a continuación se muestran:

$$m_e = m_1 m_2 + J m_1 + J m_2 \quad (3.30)$$

$$m_c = m_1 c_2 + J c_2 + m_1 c_3 + m_2 c_1 + J c_1 + m_2 c_3 \quad (3.31)$$

$$m_k = m_1 k_2 + m_2 k_1 + J k_1 + m_2 k_2 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 \quad (3.32)$$

$$m_s = k_1 c_2 + k_1 c_3 + k_2 c_2 + k_2 c_1 \quad (3.33)$$

Las ecuaciones (3.30), (3.31), (3.32) y (3.33) se sustituyen en el denominador de ambas funciones de transferencia, entonces se tiene que:

Función de transferencia de la masa 1:

$$\frac{x_1(s)}{f(s)} = \frac{(m_2 + J)s^2 + k_2 + c_2 s + c_3 s}{m_e s^4 + m_c s^3 + m_k s^2 + m_s s + k_1 k_2} \quad (3.34)$$

Función de transferencia de la masa 2:

$$\frac{x_2(s)}{f(s)} = \frac{J s^2 + k_2 + c_3 s}{m_e s^4 + m_c s^3 + m_k s^2 + m_s s + k_1 k_2} \quad (3.35)$$

Evaluando funciones de masa 1 y 2 con  $c_1 = 0$  y  $c_2 = 0$

$$\frac{x_1(s)}{f(s)} = \frac{(m_2 + J)s^2 + k_2 + c_3 s}{(m_1 m_2 + J m_1 + J m_2)s^4 + (m_1 c_3 + m_2 c_3)s^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + J k_1 + m_2 k_2)s^2 + k_1 c_3 s + k_1 k_2} \quad 3.36$$

$$\frac{x_2(s)}{f(s)} = \frac{J s^2 + k_2 + c_3 s}{(m_1 m_2 + J m_1 + J m_2)s^4 + (m_1 c_3 + m_2 c_3)s^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + J k_1 + m_2 k_2)s^2 + k_1 c_3 s + k_1 k_2} \quad 3.37$$

Reemplazando  $s$  por  $j\omega$ :

$$\frac{x_1(j\omega)}{f(j\omega)} = \frac{(m_2 + J)\omega^2 + k_2 + c_3\omega}{(m_1m_2 + Jm_1 + Jm_2)\omega^4 - (m_1c_3 + m_2c_3)j\omega^3 - (m_1k_2 + m_2k_1 + Jk_1 + m_2k_2)\omega^2 + k_1c_3j\omega + k_1k_2} \quad 3.38$$

$$\frac{x_2(j\omega)}{f(j\omega)} = \frac{-J\omega^2 + k_2 + c_3j\omega}{(m_1m_2 + Jm_1 + Jm_2)\omega^4 - (m_1c_3 + m_2c_3)j\omega^3 - (m_1k_2 + m_2k_1 + Jk_1 + m_2k_2)\omega^2 + k_1c_3j\omega + k_1k_2} \quad 3.39$$

### 3.3 Cálculo de volante de inercia

#### 3.3.1 Masa equivalente

Barredo indica en su tesis cómo calcular la masa equivalente a partir de la optimización del sistema (Barredo, 2016). Es decir, se buscan ecuaciones que, teniendo algunos valores del sistema, se puedan calcular otros, en este caso el de masa equivalente del volante de inercia.

Entonces, se tiene que la masa equivalente del inersor  $J$  se calcula de la siguiente manera:

$$J = m_1\mu_{\text{óptima}} = m_1 \left( \frac{\beta(\beta^2 + 1)}{\beta(3 + 2\beta) + 1} \right) \quad 3.40$$

En dónde,  $\beta = \frac{m_2}{m_1} = 1$  y sustituyendo en la ecuación (3.40) se obtiene

$$J = 0.8333 \text{ kg}$$

#### 3.3.2 Radio del volante de inercia

Con base en lo anterior, es posible calcular el radio externo del volante de inercia. Suponiendo que el momento de inercia de masa para cada eje y engrane es despreciable. La ecuación de masa equivalente puede reducirse entonces a la siguiente expresión:

$$J = \left( \frac{1}{r_1^2} \right) I_1 \quad 3.41$$

Donde  $r_1$  es el radio del piñón que transmitirá el movimiento al volante e  $I_1$  es el momento de inercia de un cilindro hueco, entonces sustituyendo  $I_1$  en la ecuación (3.41) se tiene que:

$$J = \left( \frac{1}{r_1^2} \right) \frac{m_v(r_0^2 + r_e^2)}{2} \quad 3.42$$

Donde  $m_v = \rho\pi(r_0^2 - r_e^2)t$ ;  $r_0$  es el radio externo del volante que se quiere calcular y  $r_e$  es el radio interno del cilindro.

Sustituyendo en (3.42):

$$J = \left( \frac{1}{r_1^2} \right) \frac{\rho\pi t(r_0^4 - r_e^4)}{2} \quad 3.43$$

Despejando  $r_0$  de (3.43):

$$r_0 = \sqrt[4]{\frac{2Jr_1^2}{\rho\pi t} + r_e^4} \quad 3.44$$

Sustituyendo en la ecuación (3.44) los valores mostrados en la Tabla 3.3, se determina el radio externo del volante de inercia.

Tabla 3.3. Valores utilizados para el cálculo del radio exterior del volante de inercia.

Variable	Valor	Unidades
$J$	0.83333	$kg$
$r_1$	0.019	$m$
$\rho$	7800	$\frac{kg}{m^3}$
$E$	0.01	$m$
$r_e$	0.0025	$m$

En dónde  $J$  es la masa equivalente del volante de inercia;  $r_1$ , el radio del piñón que trasmite el movimiento;  $\rho$ , la densidad del aluminio;  $E$ , el espesor del volante de inercia y  $r_e$ , el radio interno del volante de inercia.

Por lo que, el radio externo del volante resulta en:

$$r_0 \approx 0.04 m$$

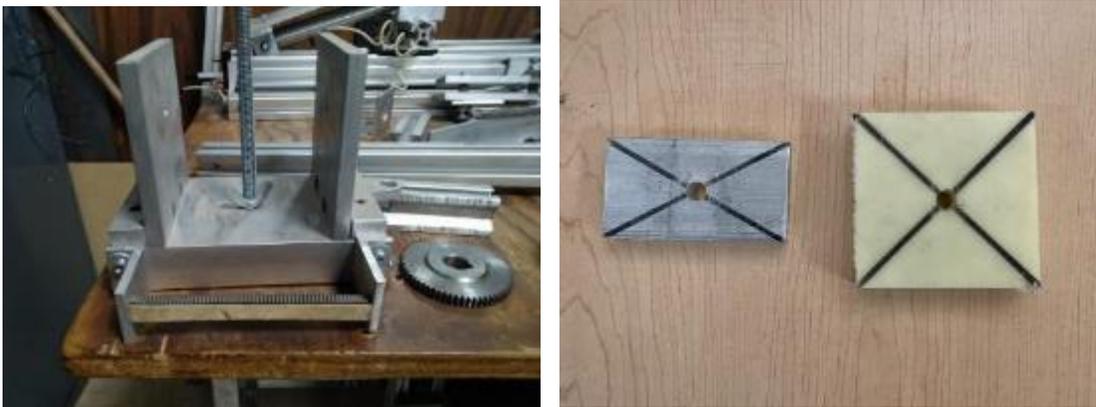
# Capítulo 4

## Plataforma Experimental

### 4.1 Elaboración del prototipo

Para la construcción y puesta en marcha del prototipo de masa-resorte-amortiguador, se parte de las piezas ya construidas anteriormente. Se adaptaron algunos elementos para colocar el actuador y los sensores.

De inicio, se cortaron placas de diferentes tamaños de aluminio y de nylamid para agregar masa a los carros de la plataforma, ver Figura 4.1.



*Figura 4.1. Carro de aluminio y las masas utilizadas.*

Para registrar la posición de los carros se optó por *encoders* rotatorios de 600 pulsos por revolución (Figura 4.2). En el eje de rotación del *encoder* se le colocaron cilindros de goma que hacen contacto con un eje lineal del carro para transformar el desplazamiento rotatorio en desplazamiento lineal, ver Figura 4.3. En el Anexo 1 se puede observar la hoja de datos de este dispositivo.



Figura 4.2. Encoder de 600 pulsos por revolución.

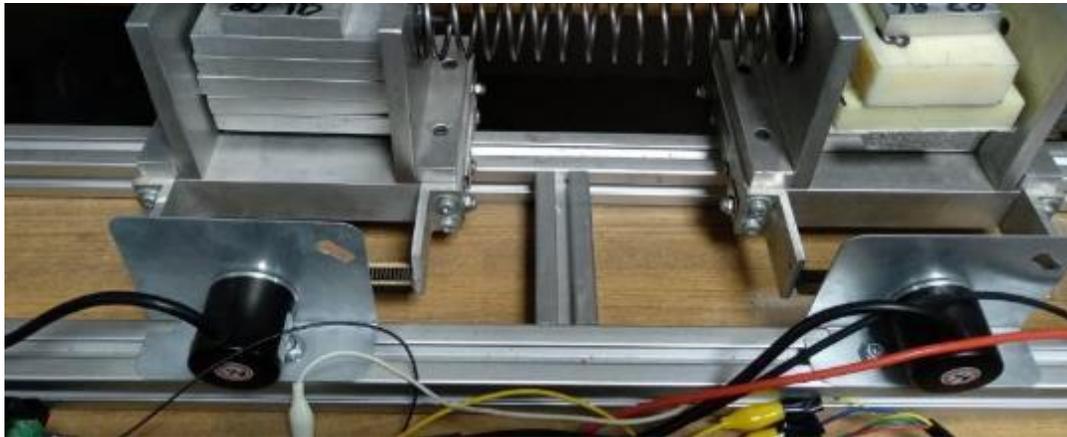


Figura 4.3. Encoders colocados en cada carro de la plataforma.

En la Figura 4.4 se muestra la forma correcta de conectar el encoder a la tarjeta MyRIO. Primero se deben identificar las fases A y B de este dispositivo. Los cables restantes se identifican para conectar a +5V y a tierra.

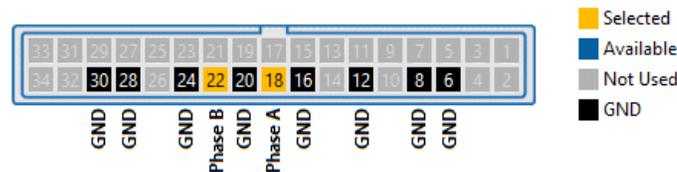
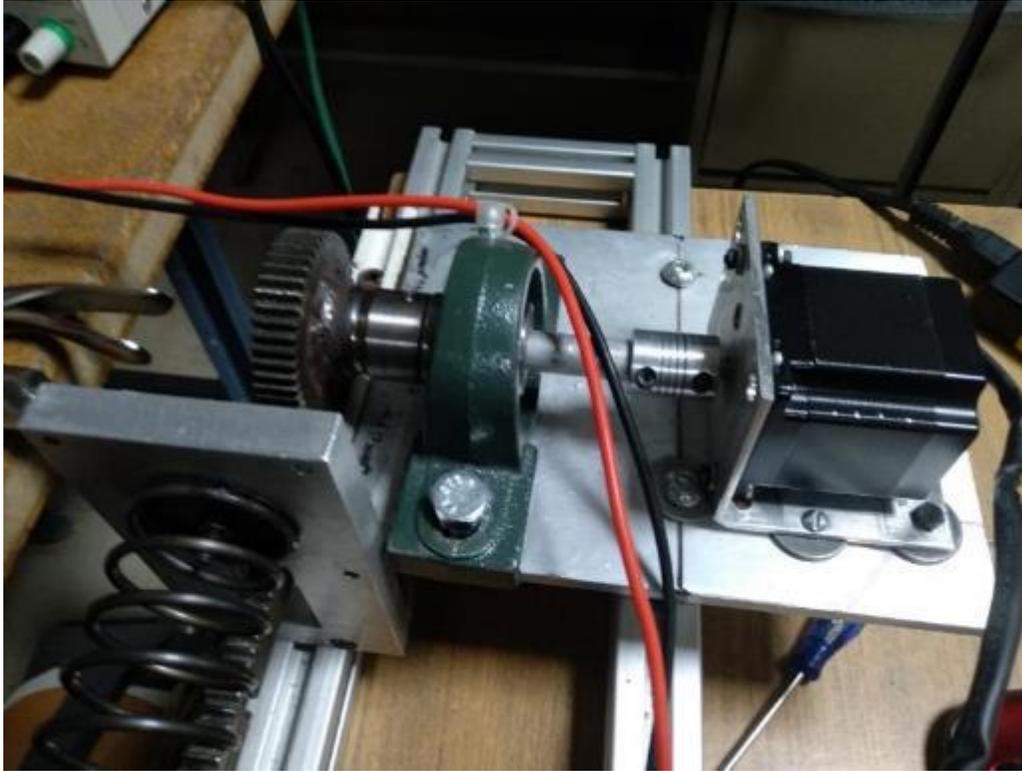


Figura 4.4. Forma de conectar los encoders a la tarjeta MyRIO.

Como actuador se utilizó un motor a pasos Open Builds, de  $1.8^\circ$  por paso, la hoja de datos del motor se puede ver en el Anexo 2. El motor genera la excitación lineal en las frecuencias programadas en Arduino UNO. Ver Figura 4.5.



*Figura 4.5. Motor Open Builds a pasos que se utilizó.*

Como se pudo observar en la figura, el motor transmitirá el movimiento a través de un eje conectado a un piñón, este a su vez transmitirá ese movimiento a una cremallera que transformará ese movimiento rotacional en movimiento lineal.

Se utilizan resortes con rigidez de  $1300 \frac{N}{m}$  que conecta a la masa 1 a tierra así como también a las masas 1 y 2. Tienen 180 mm largo y se determinó su rigidez con ayuda de la máquina universal Ximadzu AG Plus 100KN, ver Figura 4.6 y Figura 4.7.



Figura 4.6. Resortes utilizados.

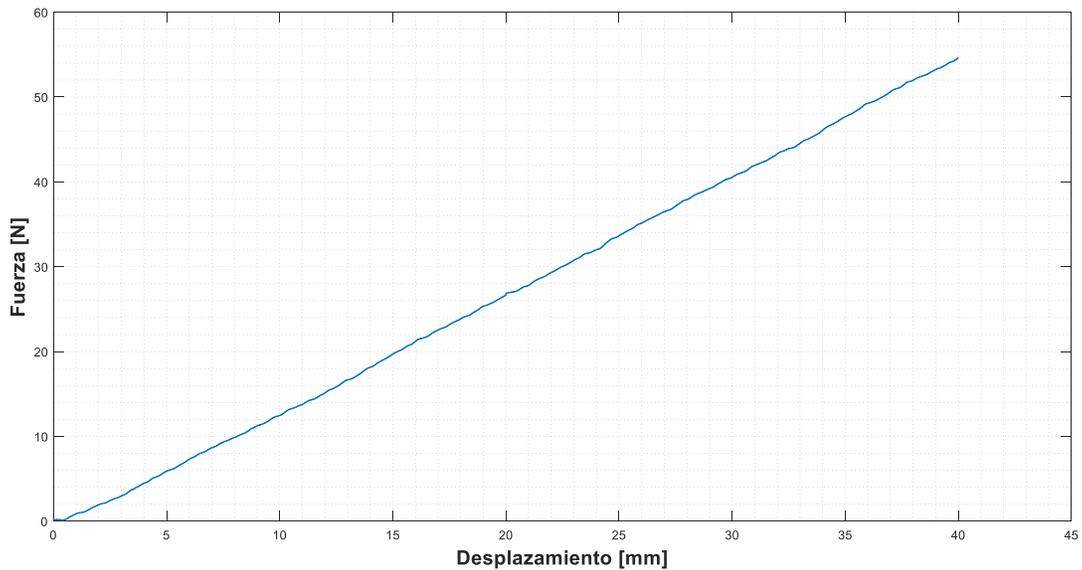


Figura 4.7. Relación de fuerza por desplazamiento arrojada por la máquina Ximadzu AG Plus 100KN.

En la Figura 4.8 se muestra el volante de inercia utilizado en el inersor. Se elaboró de aluminio y tiene un diámetro de 80 mm, como se determinó con la ecuación 3.44. Dentro del agujero del centro se colocó un rodamiento para facilitar su rotación, ver Figura 4.9. En el Anexo 3 se muestra el diseño en Solidworks.



*Figura 4.8. Volante de inercia utilizado.*



*Figura 4.9. Rodamiento utilizado para el volante de inercia y el piñón del inersor.*

El piñón y la cremallera se hicieron con una impresora 3D. En la Figura 4.10 se muestra el piñón, este va pegado al volante de inercia haciendo que ambos giren, el piñón también cuenta con un rodamiento que facilita su rotación en el eje. En la Figura 4.11 se puede observar la cremallera, que es la que se encarga de transmitir el movimiento lineal al piñón. En los Anexo 4 y Anexo 5 se muestra su diseño individual en Solidworks.

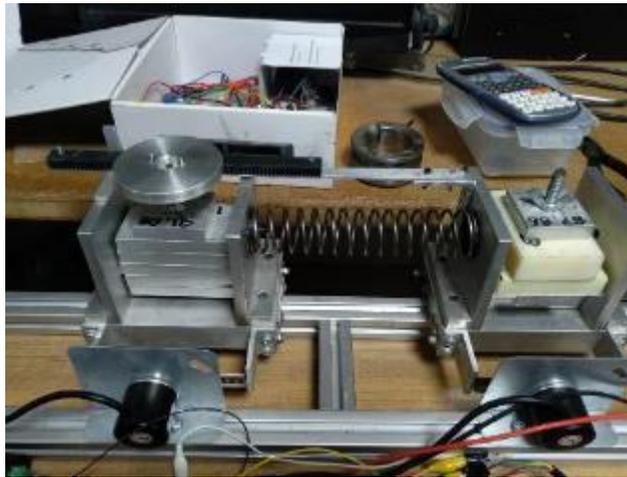


*Figura 4.10. Piñón del inersor.*



*Figura 4.11. Cremallera del inersor.*

La plataforma experimental MRA con inersor, se muestra en la Figura 4.12. En la Figura 4.13 se muestra el diseño de la plataforma con el inersor ensamblado, el cual se utilizó para las pruebas de simulación.



*Figura 4.12. Plataforma experimental MRA.*

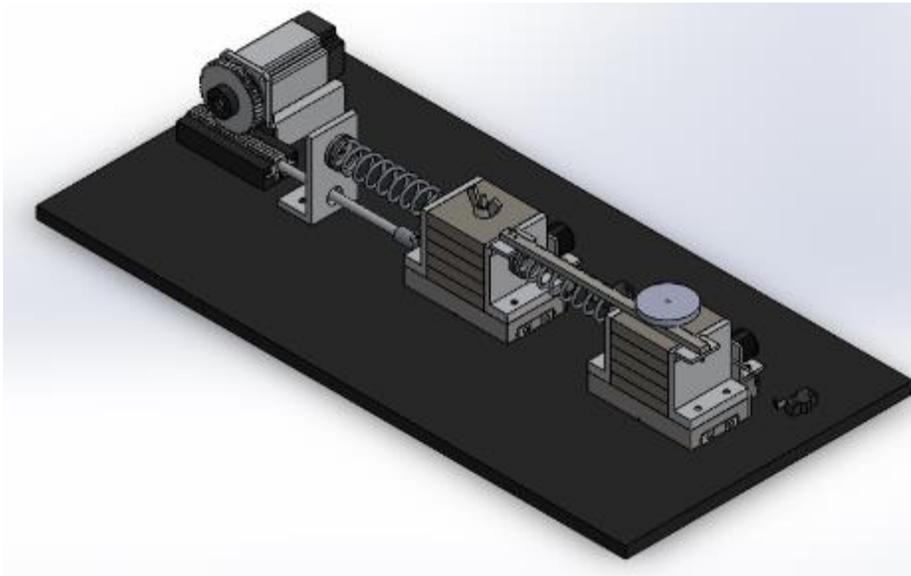


Figura 4.13. Plataforma experimental con inersor.

## 4.2 Conexión del motor

El control del motor se hizo con un Arduino UNO para facilitar su programación. Se utilizó un driver TB6600 para controlar el motor. En la Figura 4.14 se muestra el diagrama de conexión del motor.

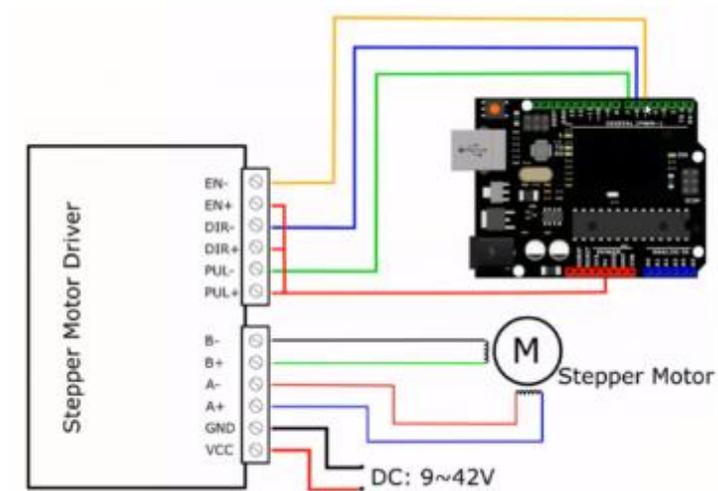


Figura 4.14. Conexión del motor a pasos y el driver TB6600 en el arduino.

### 4.3 Programas utilizados

Se realizaron programas tanto para adquisición de datos como de control del excitador, las plataformas utilizadas fueron LabView y Arduino respectivamente, a continuación, se muestran cada uno de ellos.

#### 4.3.1 Programa de adquisición de datos

Con la interfaz de LabView y la tarjeta MyRIO se hizo un programa para adquirir los datos recopilados por los encoders. Los encoders transmiten pulsos, por lo que la tarjeta recibía esos pulsos para que el programa los convirtiera a desplazamiento rotacional que posteriormente por medio de ecuaciones simples se transformaba a desplazamiento lineal de cada una de las masas. En la Figura 4.15 se muestra la interfaz del programa elaborado en LabView y en la Figura 4.16 se muestra el diagrama de bloques del mismo.

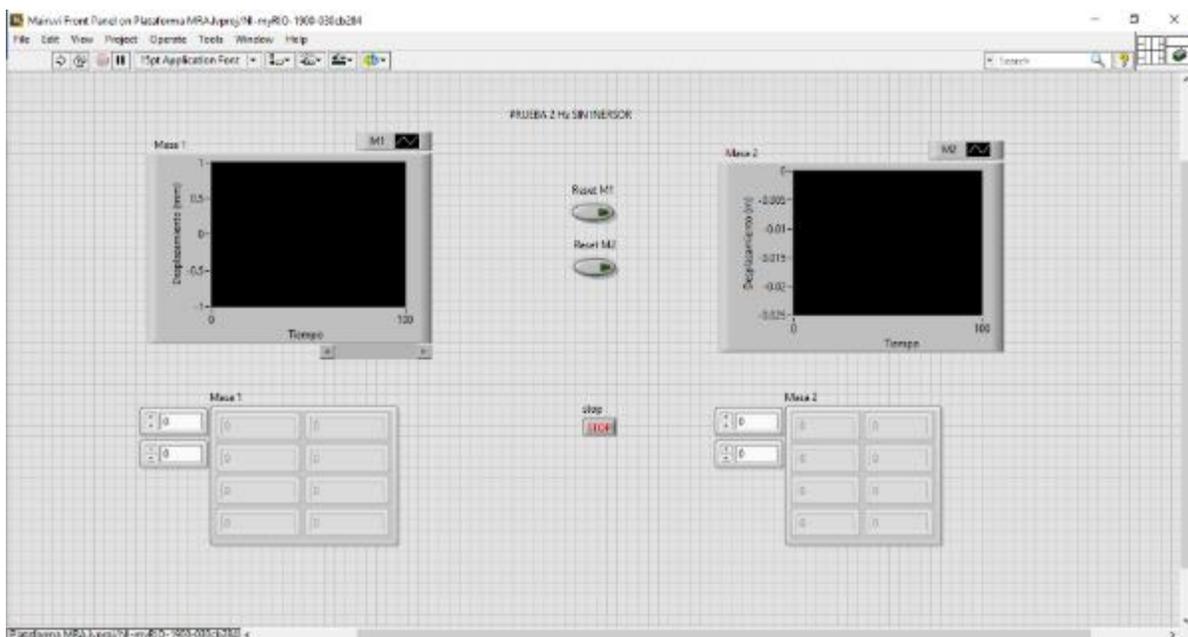


Figura 4.15. Interfaz del programa de adquisición de datos.

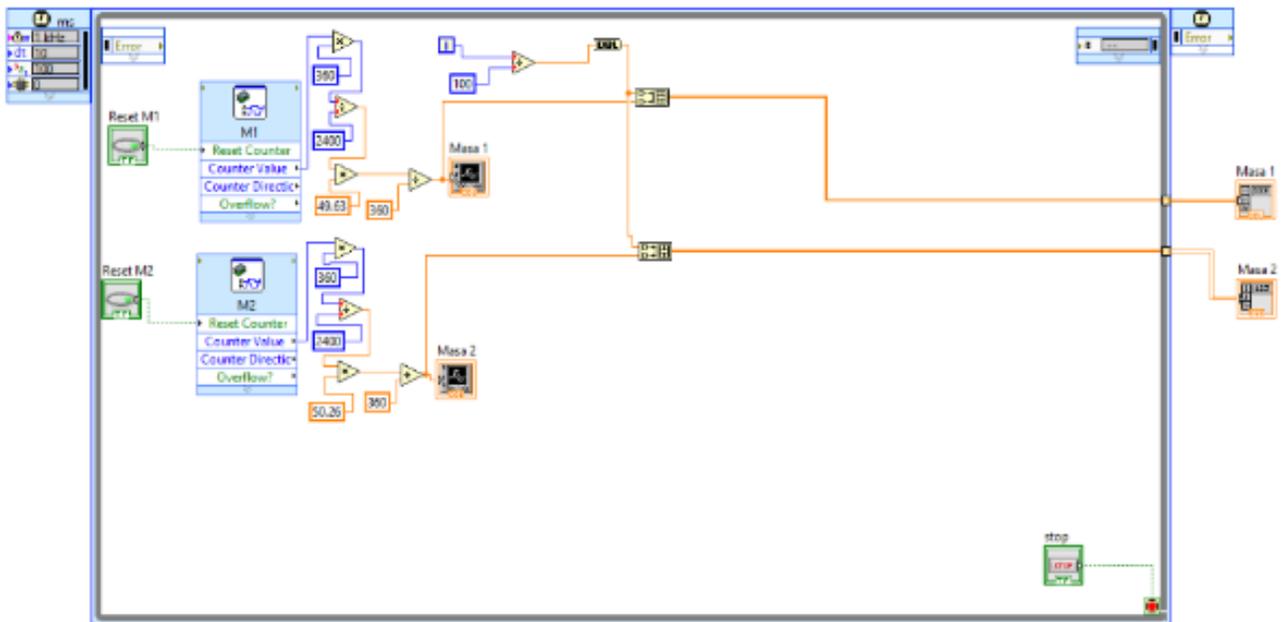


Figura 4.16. Diagrama de bloques del programa de adquisición de datos.

### 4.3.2 Programa del excitador

El excitador se programó en la plataforma de arduino. Se realizó la conversión de pasos del motor para definir una amplitud exacta a la que se excitaría el sistema. También se cambió la longitud de onda de los pasos para modificar la frecuencia del excitador. En las Figura 4.17Figura 4.18Figura 4.19 se muestra el programa realizado.

© Barrido\_de\_motor Arduino 1.8.12 (Windows Store 1.8.33.0)  
Archivo Editar Programa Herramientas Ayuda

```
Barrido_de_motor
int PUL=7; //Pin para la señal de pulso
int DIR=6; //define Direction pin
int EN=5; //define Enable Pin
int ANP=25300;//define el ancho de pulso
int IV=1; //Ida y vuelta
void setup() {
  pinMode (PUL, OUTPUT);
  pinMode (DIR, OUTPUT);
  pinMode (EN, OUTPUT);
  digitalWrite (EN,HIGH);
}

void loop() {

  for (int i=0; i<175; i++) //Barrido incremental
  {

    digitalWrite(DIR,LOW);
    for (int i=0; i<8; i++) //Forward 1600 steps
    {
      digitalWrite(PUL,HIGH);
      delayMicroseconds(1000);
      digitalWrite(PUL,LOW);
      delayMicroseconds(ANP);
    }
    delayMicroseconds(100);
    digitalWrite(DIR,HIGH);
  }
}
```

Figura 4.17. Programa de excitador (A).

```
Barrido_de_motor Arduino 1.8.12 (Windows Store 1.8.33.0)
Archivo Editar Programa Herramientas Ayuda
Barrido_de_motor
for (int i=0; i<10; i++) //Backward 1600 steps
{
  digitalWrite(PUL,HIGH);
  delayMicroseconds(1000);
  digitalWrite(PUL,LOW);
  delayMicroseconds(ANP);
}
// ANP=ANP-100;
}

for (int ANP=7900; ANP<25300; ANP+100) // Barrido decremental
{
digitalWrite(DIR,LOW);
for (int i=0; i<8; i++) //Forward 1600 steps
{
  digitalWrite(PUL,HIGH);
  delayMicroseconds(1000);
  digitalWrite(PUL,LOW);
  delayMicroseconds(7900);
}
delayMicroseconds(100);
digitalWrite(DIR,HIGH);

for (int i=0; i<10; i++) //Backward 1600 steps
{
  digitalWrite(PUL,HIGH);
  delayMicroseconds(1000);
  digitalWrite(PUL,LOW);
  delayMicroseconds(7900);
```

Figura 4.18. Programa de excitador (B).

```
void loop() {
  delayMicroseconds(ANP);
}
// ANP=ANP-100;
}

for (int ANP=7900; ANP<25300; ANP+100) // Barrido decremental
{
  digitalWrite(DIR,LOW);
  for (int i=0; i<8; i++) //Forward 1600 steps
  {
    digitalWrite(PUL,HIGH);
    delayMicroseconds(1000);
    digitalWrite(PUL,LOW);
    delayMicroseconds(7900);
  }
  delayMicroseconds(100);
  digitalWrite(DIR,HIGH);

  for (int i=0; i<10; i++) //Backward 1600 steps
  {
    digitalWrite(PUL,HIGH);
    delayMicroseconds(1000);
    digitalWrite(PUL,LOW);
    delayMicroseconds(7900);
  }
  //ANP=ANP+100;
}
}
```

Figura 4.19. Programa de excitador (C).

# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1 Resultados de simulación con modelo matemático

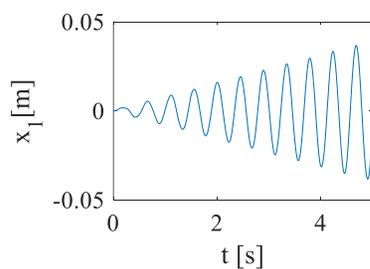
En este capítulo se presentan resultados de simulación derivados del modelo matemático, así como los obtenidos con la plataforma experimental. Los parámetros de simulación se muestran en la Tabla 3.2.

#### 5.1.1 Respuesta en simulación sin inersor

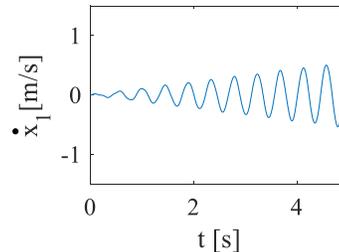
En las Figura 5.1 A y B se muestra la respuesta, considerando el modelo matemático, del desplazamiento y velocidad respectivamente, de la masa 1. En las Figura 5.1 C y D se muestra la respuesta de desplazamiento y velocidad de la masa 2 respectivamente. Cabe mencionar que están sujetos a vibración forzada, con una fuerza de:

$$F = 2 \sin(14.1t) \text{ [N]}$$

En la Figura 5.2 se observa como se está excitando la primera resonancia, dónde las masas se mueven en el mismo sentido y la amplitud va creciendo conforme el tiempo pasa.



A)



B)

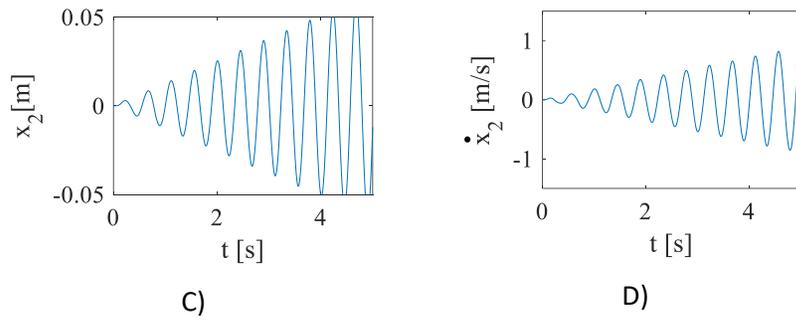


Figura 5.1. Respuesta de las dos masas para una fuerza de  $2\sin(14.1t)$ .

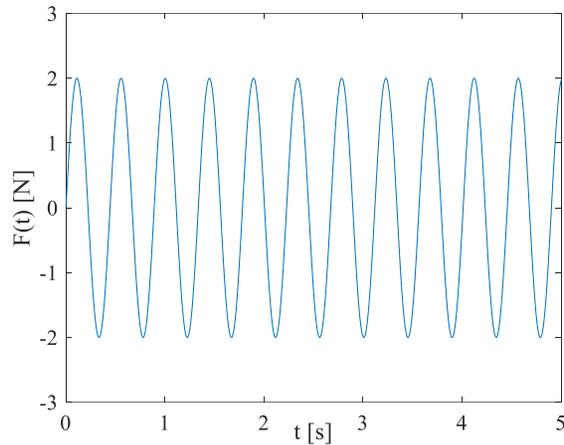


Figura 5.2. Fuerza de excitación,  $F(t)=2\sin(14.1t)$ .

En la Figura 5.3 A y B se muestra las respuestas de desplazamiento y velocidad respectivamente de la masa 1 y en C y D las respuestas de desplazamiento y velocidad de la masa 2, ambas en resonancia con su segunda frecuencia natural, lo que provoca que las masas tengan movimientos en sentidos opuestos, a diferencia de la excitación anterior, en la cual las masas se desplazaban sincronizadas hacia el la misma dirección. En este caso la fuerza utilizada para la simulación fue de:

$$F = 2 \sin(36.9t) \text{ [N]}$$

En la Figura 5.4 se observa la fuerza de excitación aplicada en este caso, se puede observar claramente como la frecuencia aumentó en comparación con la anterior, aunque al ser también una frecuencia natural del sistema, la amplitud de este va en aumento conforme pasa el tiempo al igual que en el caso anterior.

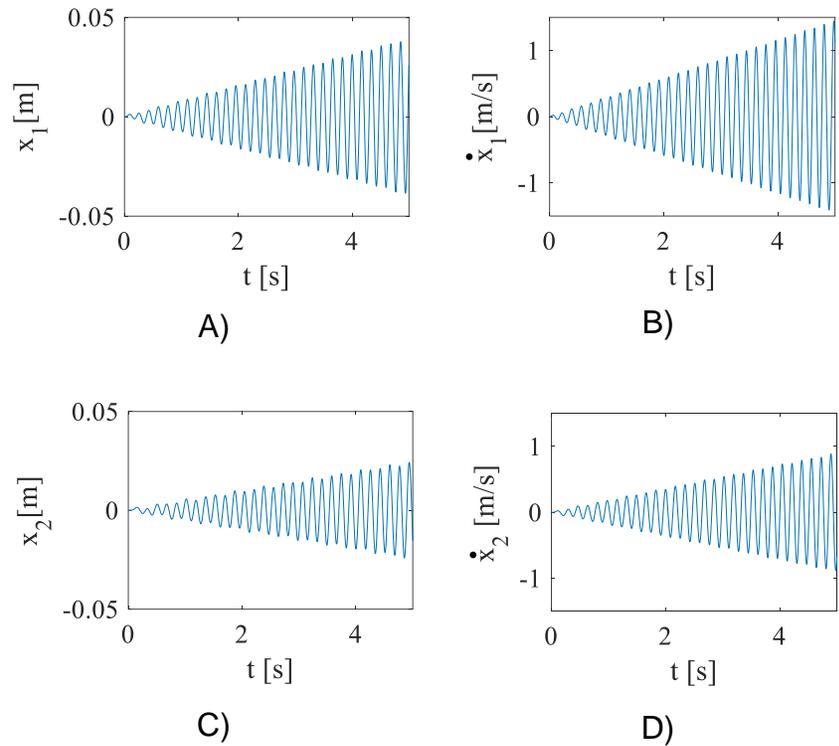


Figura 5.3. Respuesta de las dos masas para una fuerza de  $2\sin(36.9t)$ .

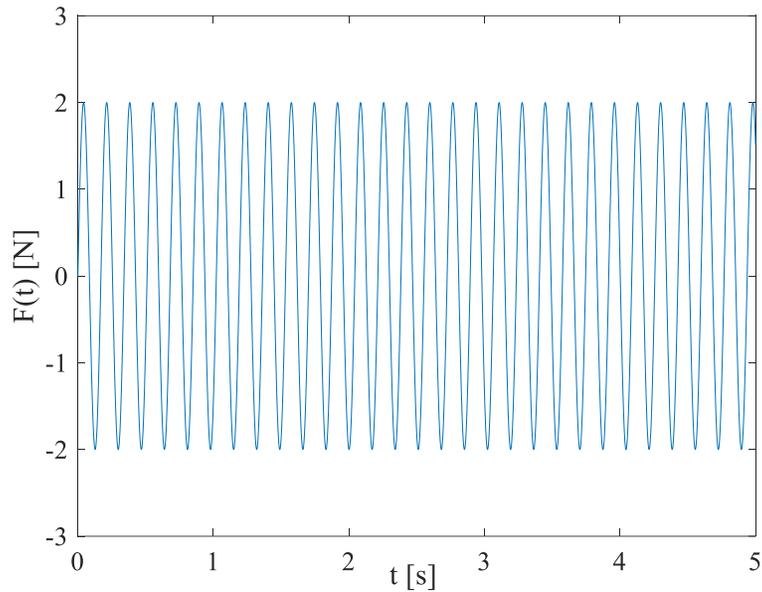
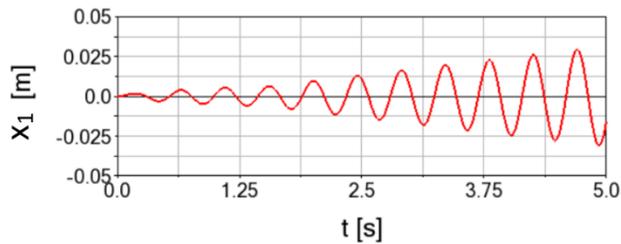


Figura 5.4. Fuerza de excitación,  $F(t)=2\sin(36.9t)$ .

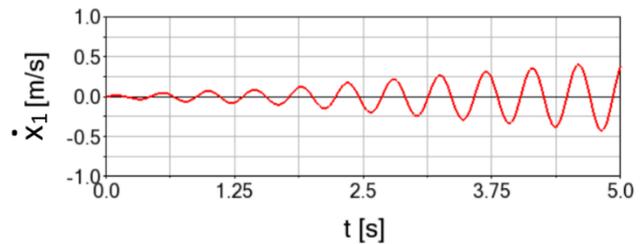
En la Figura 5.5 se muestra la respuesta, considerando el prototipo virtual en el entorno de MSC Adams, se puede observar que el comportamiento es el mismo que en la simulación de Simulink, se sometieron a vibración forzada en la primer frecuencia natural del sistema, con una fuerza de:

$$F = 2 \sin(14.1t) [N]$$

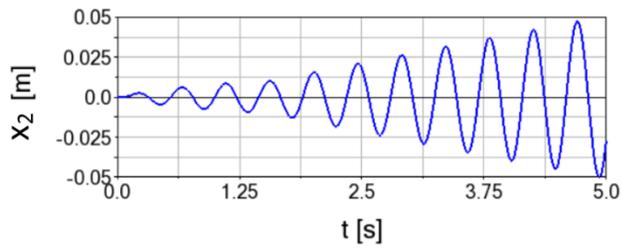
En la Figura 5.6 se observa como se está excitando la primera resonancia, dónde las masas se mueven en sincronía hacia el mismo sentido y la amplitud va creciendo conforme el tiempo pasa. En la Figura 5.7 se muestra la fuerza utilizada en este análisis.



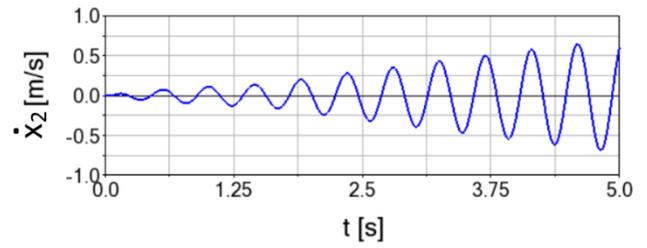
A)



B)



C)



D)

Figura 5.5. Respuesta de las dos masas para una fuerza de  $2\sin(14.1t)$ .

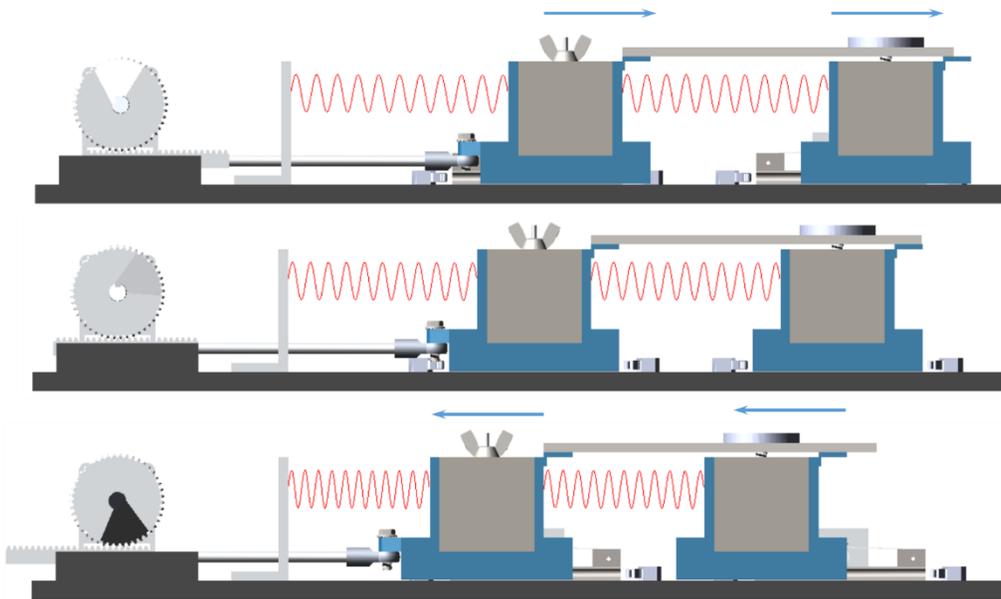


Figura 5.6. Prototipo virtual en tres posiciones para una fuerza de  $2\sin(14.1t)$ .

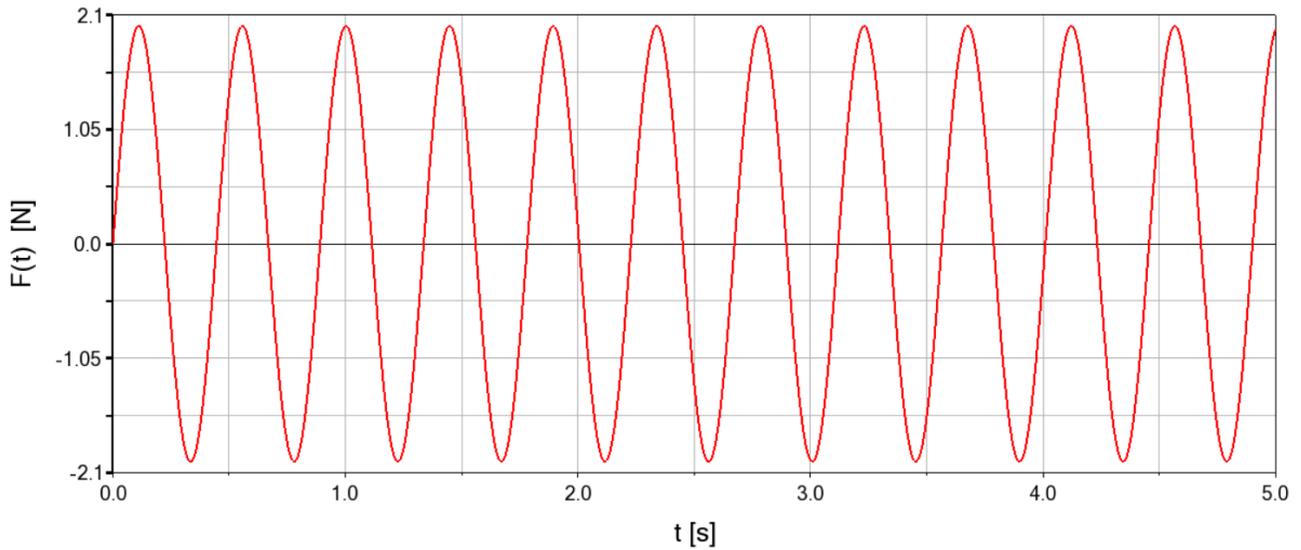
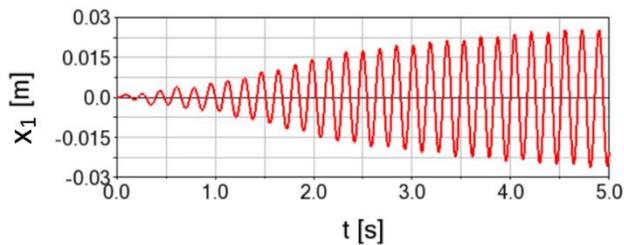


Figura 5.7. Fuerza de excitación,  $F(t)=2\sin(14.1t)$ .

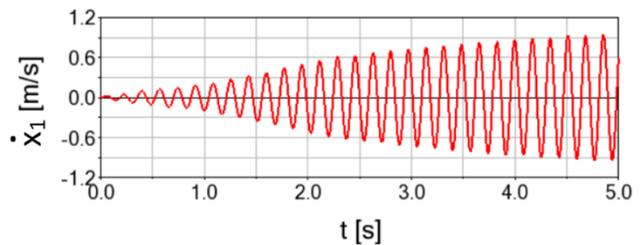
También se simuló en MSC Adams el sistema en su segunda resonancia (Figura 5.8), obteniendo el mismo comportamiento que en Simulink. Con una fuerza de:

$$F = 2 \sin(36.9t) \text{ [N]}$$

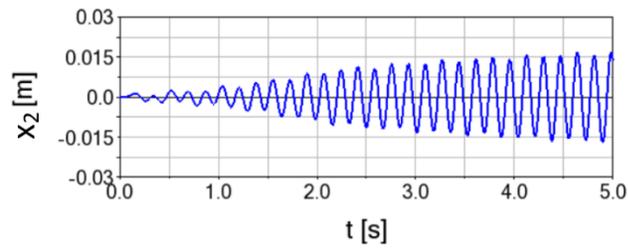
En la Figura 5.9 se observa como se está excitando la segunda resonancia, donde las masas se mueven en sentido contrario y la amplitud va creciendo conforme el tiempo pasa. En la Figura 5.10 se muestra la fuerza utilizada en el sistema.



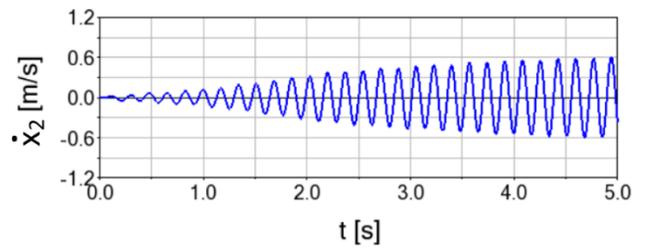
A)



B)



C)



D)

Figura 5.8. Respuesta de las dos masas para una fuerza de  $2\sin(36.9t)$ .

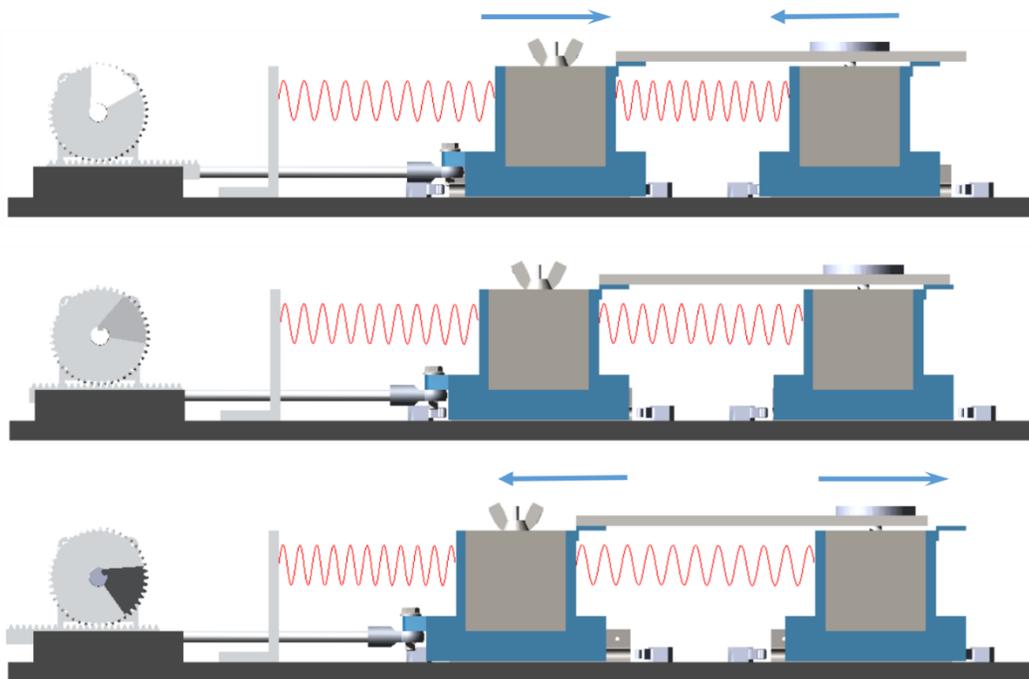


Figura 5.9. Prototipo virtual en tres posiciones para una fuerza de  $2\sin(36.9t)$ .

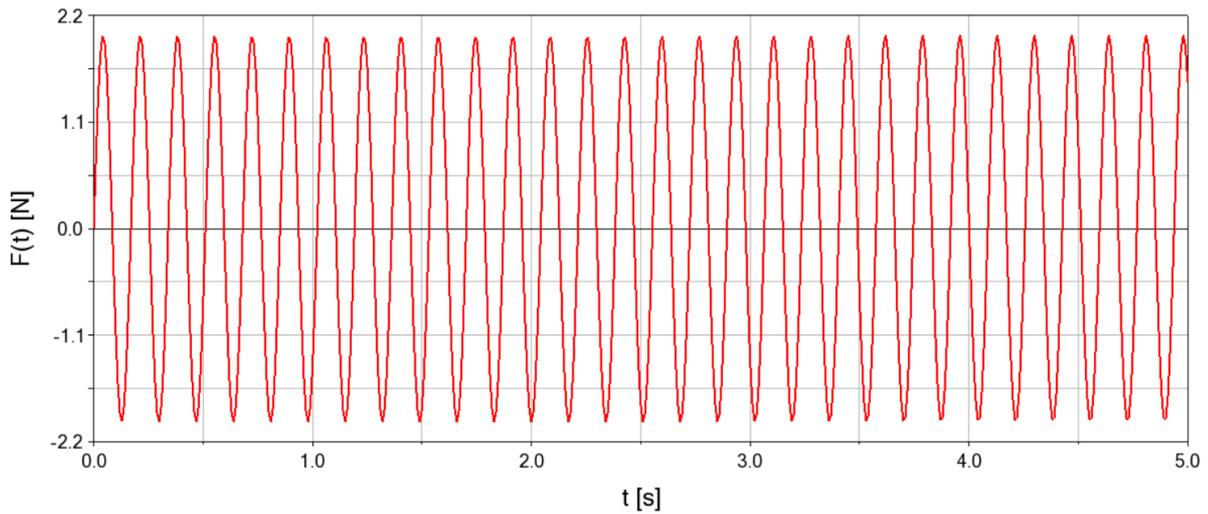
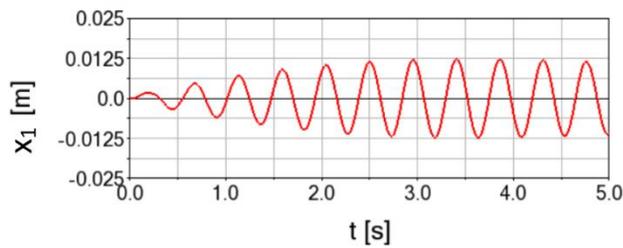


Figura 5.10. Fuerza de excitación,  $F(t)=2\text{Sin}(36.9t)$ .

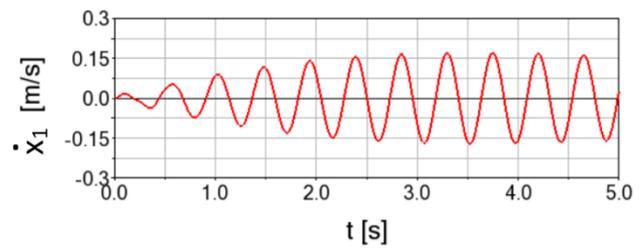
Cabe mencionar que a pesar de aparecer gráficamente en las imágenes el inersor no influía en el resultado, dado que se le puso una masa de 0 kg, esto para poder hacer la simulación en la que el sistema no cuenta con el inersor.

### 5.1.2 Respuesta en simulación con inersor

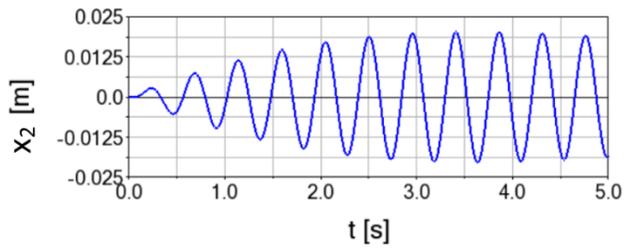
Se agregó el inersor al sistema y se sometió a las mismas pruebas en simulación. En la Figura 5.11 se puede observar el análisis en el primer modo de vibración, es decir, en su primera resonancia.



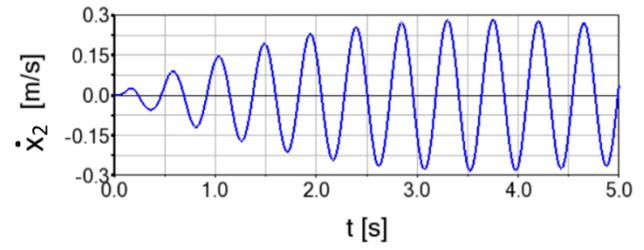
A)



B)



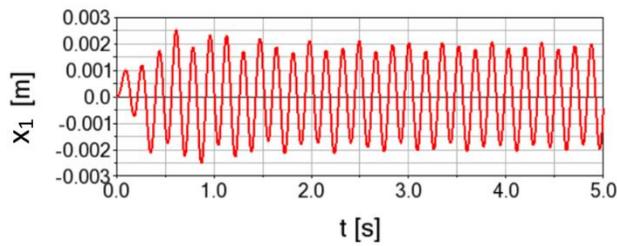
C)



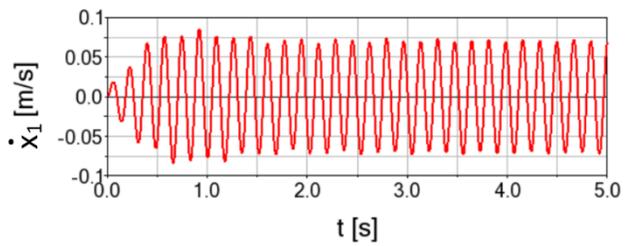
D)

Figura 5.11. Respuesta de las dos masas para una fuerza de  $2\sin(14.1t)$  con inersor.

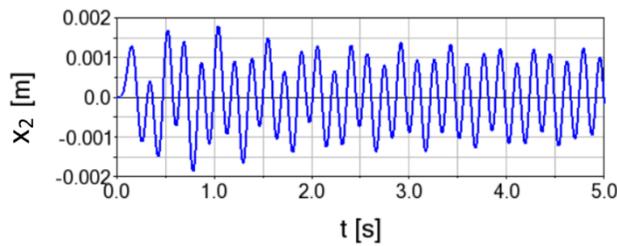
También se analizó el sistema en el segundo modo de vibración, se puede observar que el sistema reduce su vibración considerablemente en comparación con el análisis realizado sin el inersor, ver Figura 5.12.



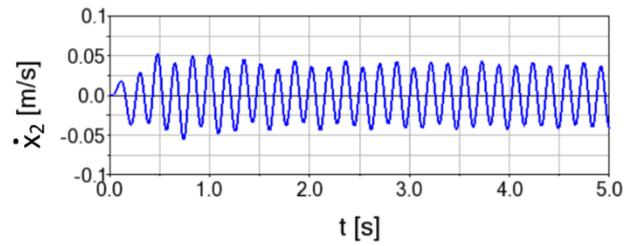
A)



B)



C)



D)

Figura 5.12. Respuesta de las dos masas para una fuerza de  $2\sin(36.9t)$  con inersor.

## 4.2 Resultados experimentales

Se hicieron varios análisis en el sistema, tanto de vibración libre como de vibración forzada. Cabe resaltar que cada prueba se hizo con y sin inersor, para resaltar el efecto que tiene este dispositivo en el comportamiento del sistema.

### 4.2.1 Vibración libre

En este análisis experimental, la masa 1 se desplaza 30 mm de su posición original, lo que produce que el resorte 1 tenga una precarga, almacenamiento de energía potencial, que al soltarlo se liberará, provocando así la vibración libre del sistema, el cual debido al amortiguamiento se va disipando conforme pasa el tiempo. Primeramente, se tiene el comportamiento del sistema sin inersor, ver Figura 5.13. Se puede observar que las oscilaciones se reducen a cero pasando poco más de dos segundos.

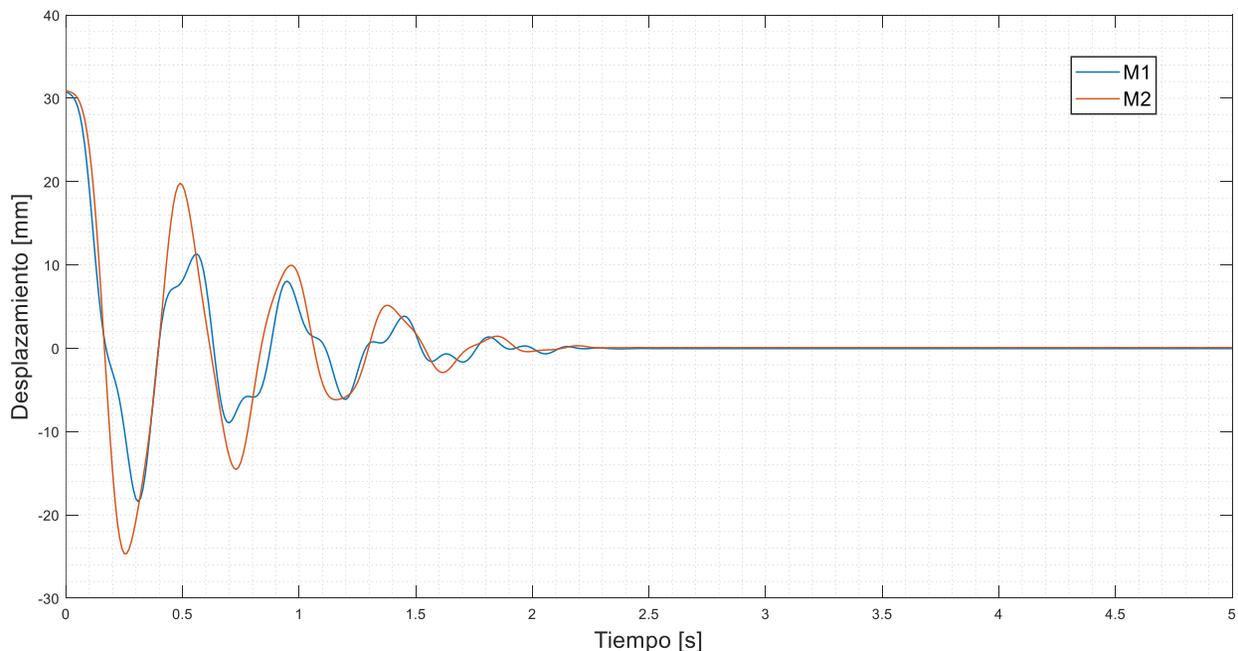


Figura 5.13. Vibración libre del sistema MRA sin inersor.

También se sometió al mismo experimento la plataforma agregando el inersor, ver Figura 5.14. Se observa que las oscilaciones se disipan poco antes de cumplir dos segundos, lo cual demuestra que el inersor influye en la reducción de vibraciones en este sistema, así como su comportamiento, principalmente de la masa 1.

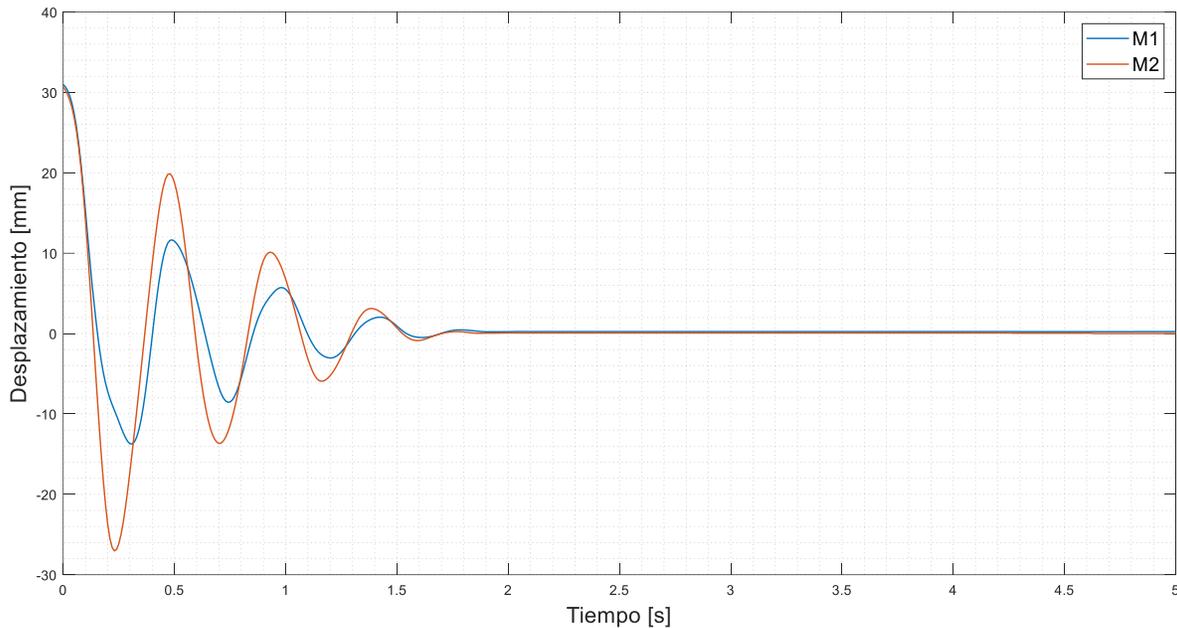


Figura 5.14. Vibración libre del sistema MRA con inersor.

#### 4.2.2 Vibración forzada

El sistema fue sometido a vibración forzada, se sometió a frecuencias cercanas a su frecuencia natural, así como también a las frecuencias naturales que se calcularon (2.3 y 5.9 Hz respectivamente). En la masa 1 podemos apreciar cuál es la excitación del sistema, ya que tiene contacto directo con el excitador, esto quiere decir que la disminución en la amplitud en el sistema solo se espera en la masa 2.

Primeramente, se tiene el comportamiento de las masas 1 y 2 cuando el sistema se somete a 2 Hz, el sistema en este análisis no cuenta con el inersor. En el comportamiento de la masa 1 se pueden notar picos en las ondas, esto se debe a que la frecuencia a la que se mueve el motor es muy lenta y hace que se noten algunos pasos que da al realizar el trabajo, ver Figura 5.15.

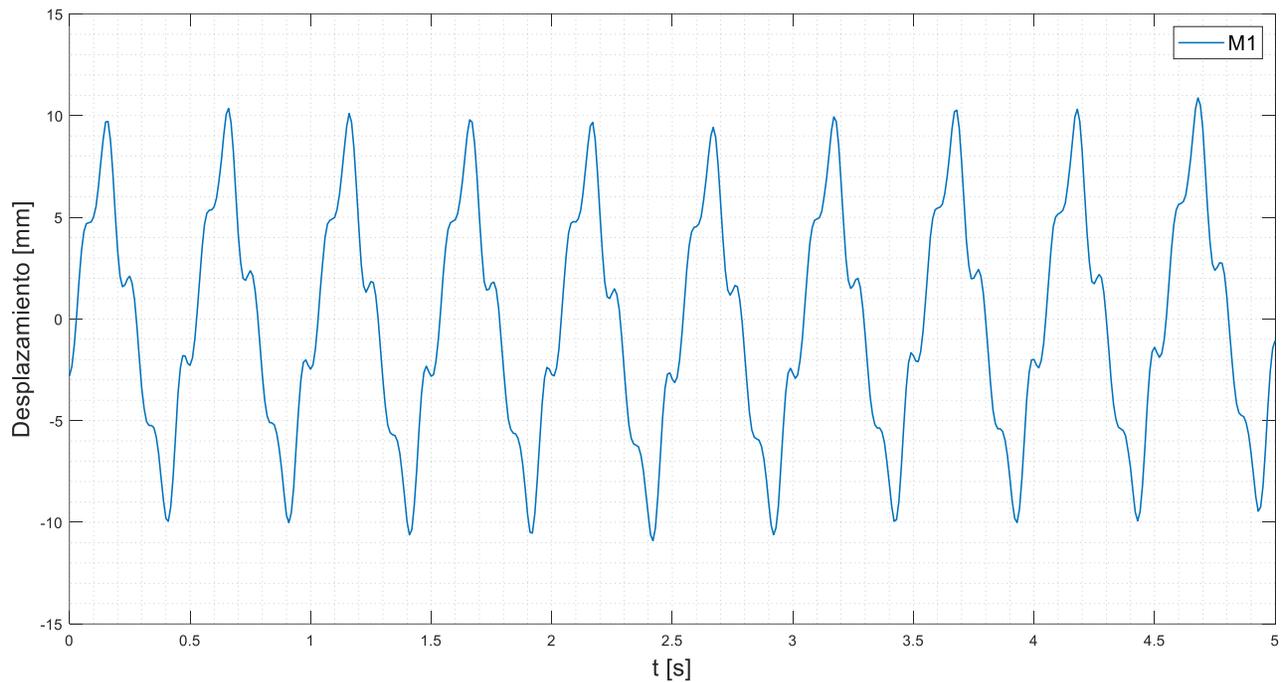


Figura 5.15. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2 Hz sin inersor.

A continuación, en la Figura 5.16, se presenta el comportamiento de la masa 2 a la misma frecuencia. Se puede apreciar que sus oscilaciones son más “suaves” ya que no tiene contacto directo con el motor. Cabe resaltar que el inersor no está colocado en el sistema y se pueden apreciar oscilaciones de poco más de 10 mm de amplitud.

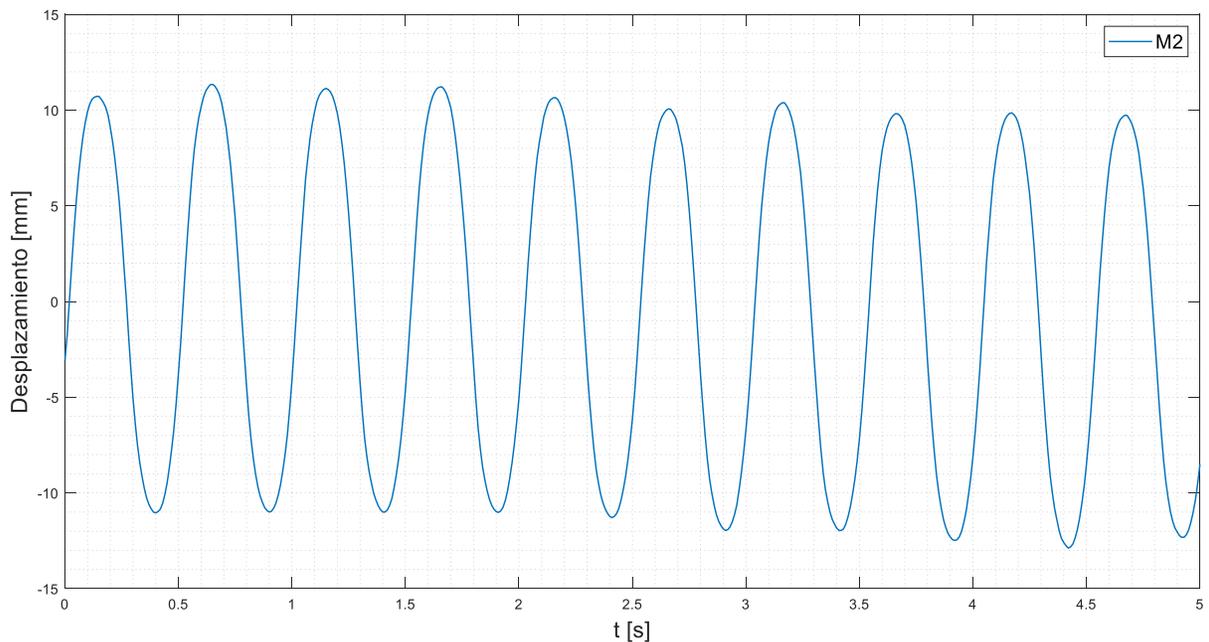


Figura 5.16. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2 Hz sin inersor.

A continuación, se presenta el comportamiento del sistema en su primera frecuencia natural. Dado que la masa 1 está conectada directamente al motor, su amplitud no varía, pero si se puede observar la frecuencia. También, se puede observar que hay un desfase en la amplitud, esto se debe a los elementos mecánicos utilizados, ver Figura 5.17.

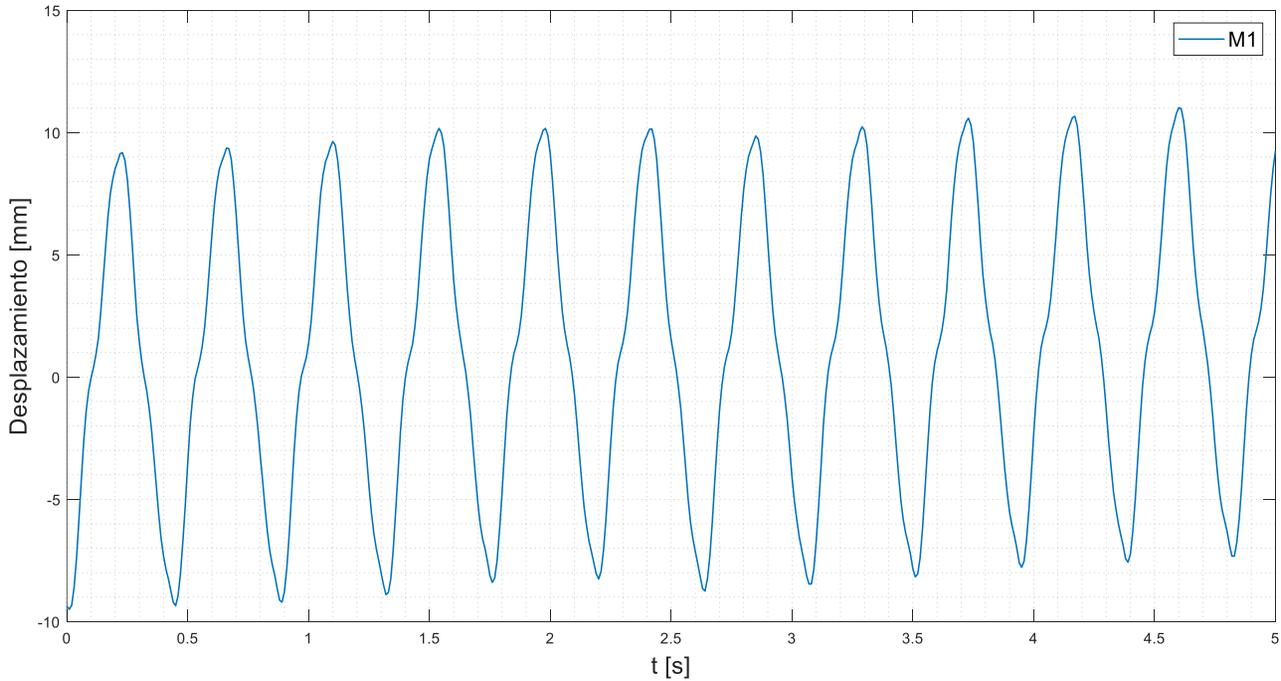
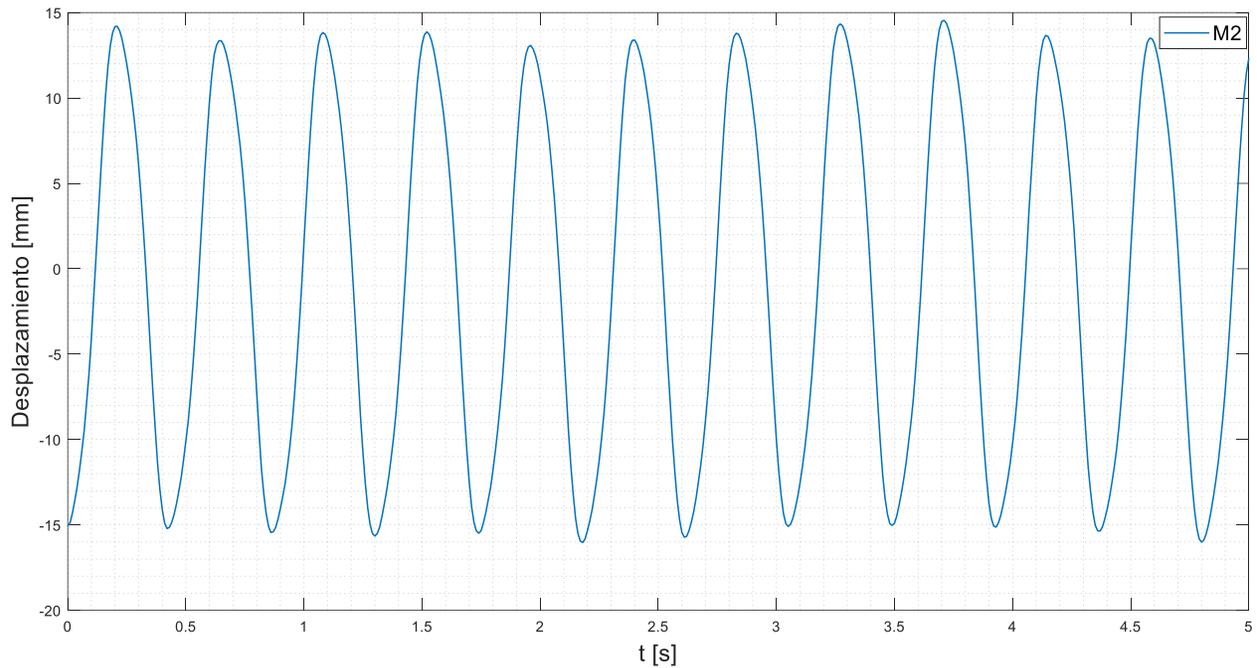


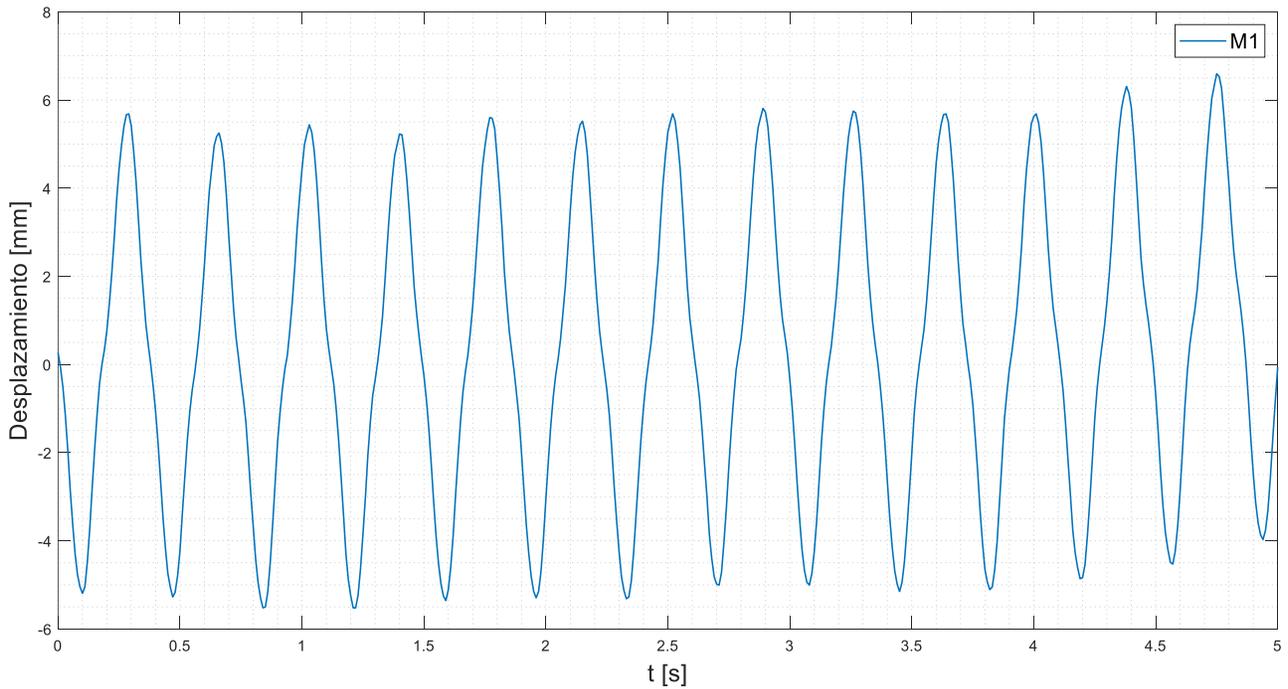
Figura 5.17. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2.3 Hz (frecuencia natural) sin inersor.

Ahora se presenta la respuesta de la masa 2 en resonancia, se puede observar claramente un aumento en la amplitud de desplazamiento. La amplitud casi llega a los 15 mm, a diferencia de la anterior que tiene un poco más de 10 mm de amplitud, ver Figura 5.18.

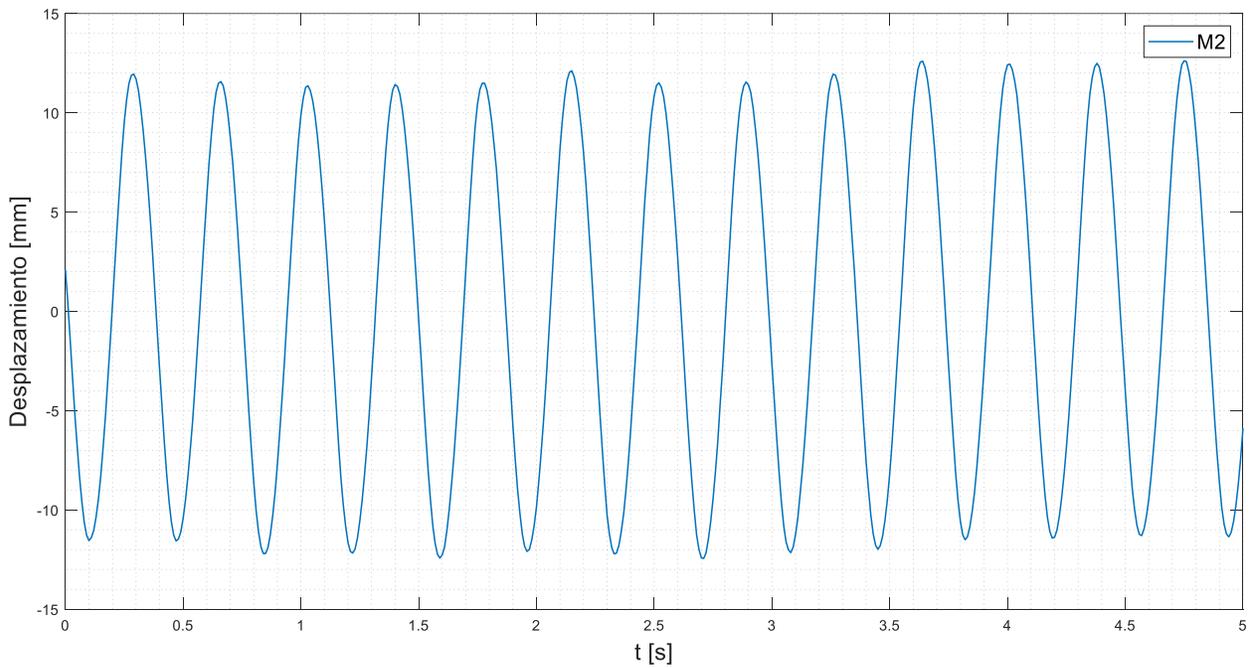


*Figura 5.18. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2.3 Hz (frecuencia natural) sin inersor.*

También se sometió el sistema a una frecuencia un poco mayor a su primera frecuencia natural. En la masa 1 solo se observa la amplitud de entrada y la frecuencia a la que fue sometida, ver Figura 5.19. Mientras que en la masa 2 se observa una amplitud menor que cuando fue sometido a resonancia, ver Figura 5.20.



*Figura 5.19. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2.5 Hz sin inersor.*



*Figura 5.20. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2.5 Hz sin inersor.*

También se hizo el análisis en una frecuencia menor a la segunda frecuencia natural, ver Figura 5.21. Se puede observar en la masa 2 que tiene una amplitud menor a la de excitación,

ver Figura 5.22. Cabe resaltar también que la amplitud de excitación se redujo 1 mm, ya que el motor presentaba problemas para mover la carga a esa velocidad.

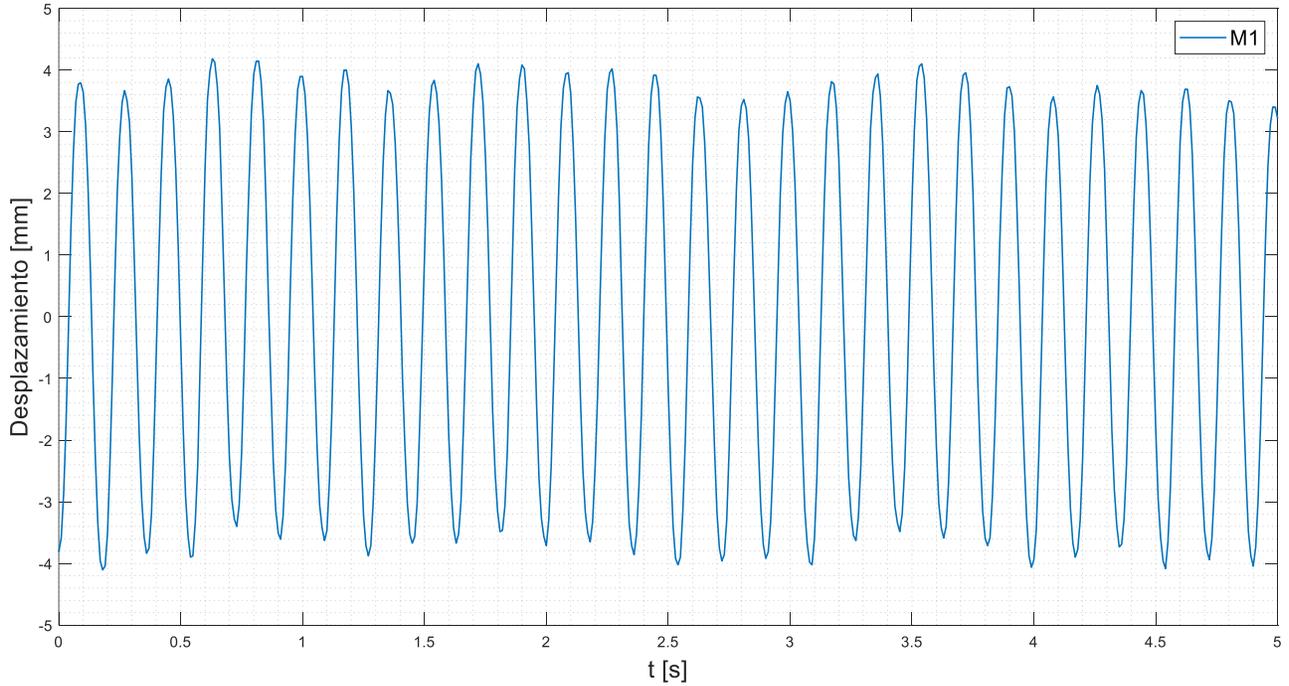


Figura 5.21. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 5.5 Hz sin inersor.

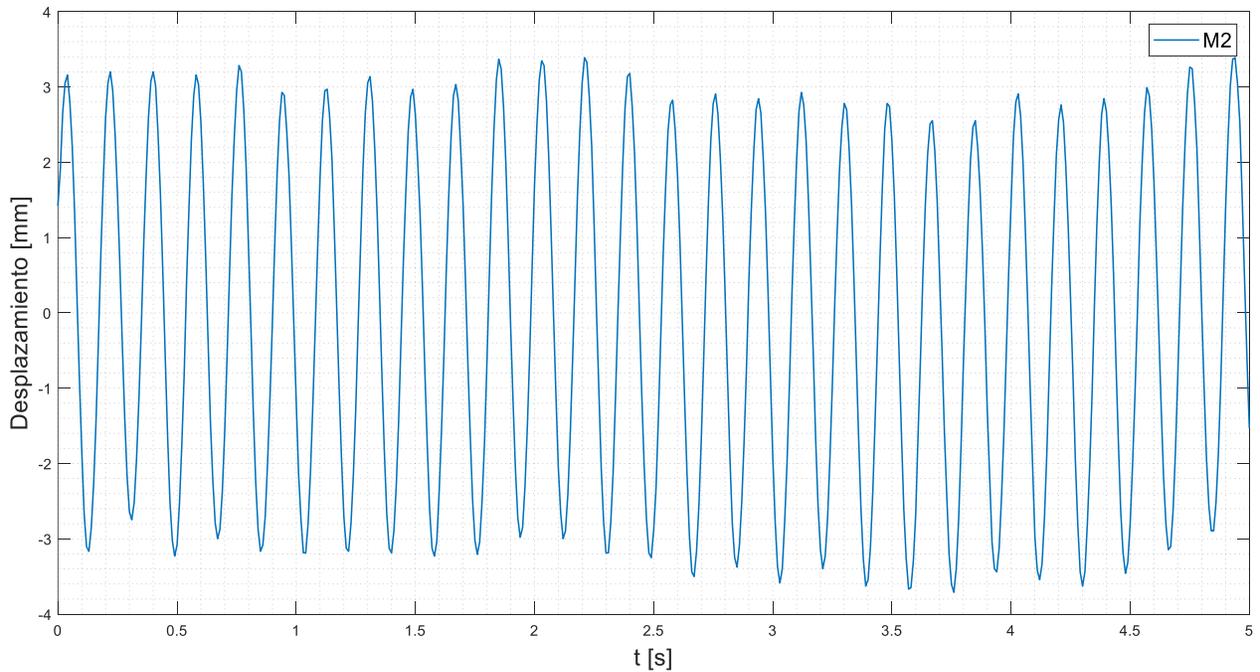


Figura 5.22. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 5.5 Hz sin inersor.

Se realizó el análisis en su segunda frecuencia natural, se tuvo que reducir la amplitud de excitación a 3 mm dado que el motor no podía mover la carga a esa velocidad; (ver Figura 5.23). Se puede notar que la amplitud de la masa 2 disminuye con respecto a la primera frecuencia natural, este comportamiento se puede observar de manera simulada también, ver Figura 5.24.

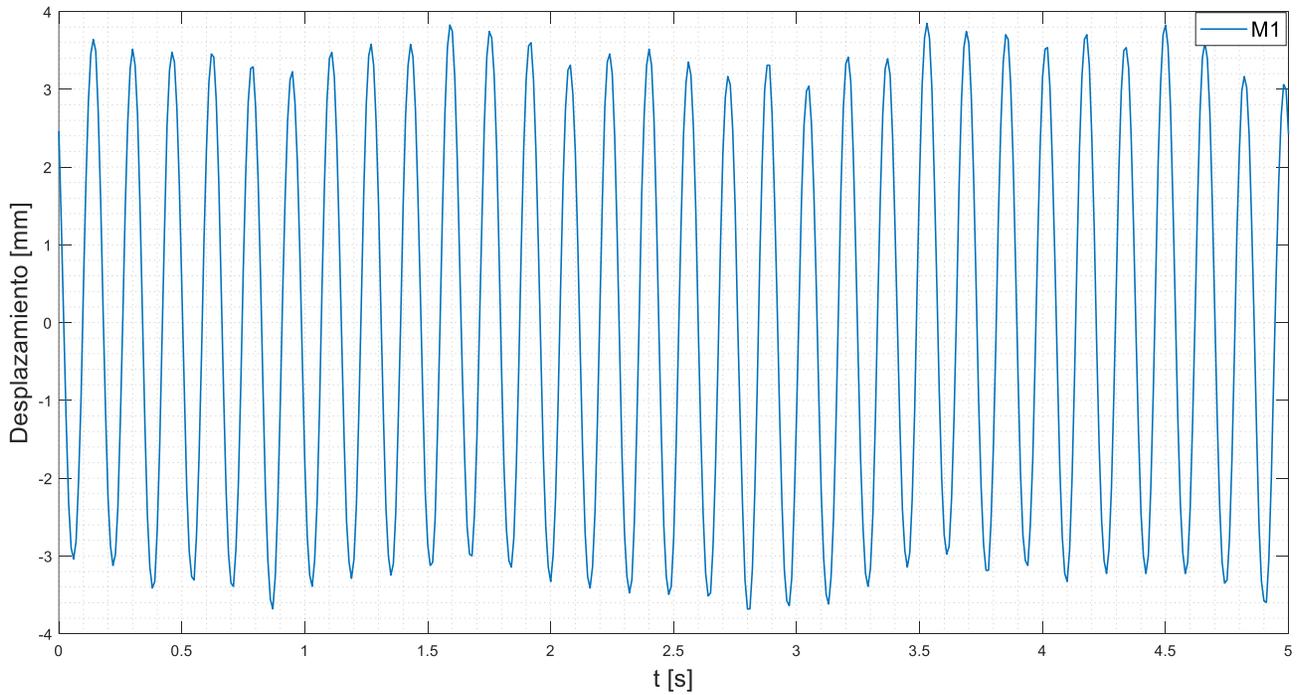


Figura 5.23. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 5.9 Hz (segunda frecuencia natural) sin inersor.

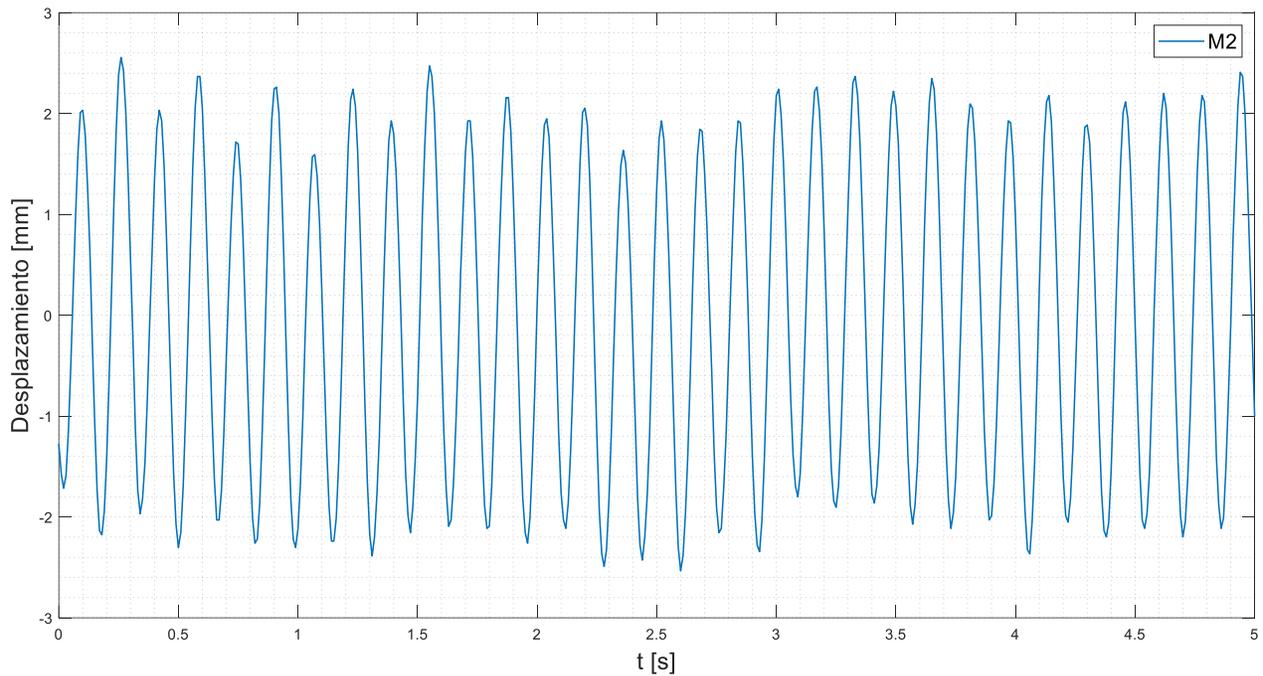


Figura 5.24. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 5.9 (segunda frecuencia natural) Hz sin inersor.

Se realizó un análisis con una frecuencia mayor a la segunda frecuencia natural. Se puede observar un comportamiento irregular en los datos recolectados, posiblemente, por los elementos mecánicos que se encargan de convertir el movimiento lineal en movimiento de rotación. En la Figura 5.25 se muestra el comportamiento de la masa 1, y en la Figura 5.26 se presenta el comportamiento de la masa 2, que tiene una amplitud de poco más de 2 mm.

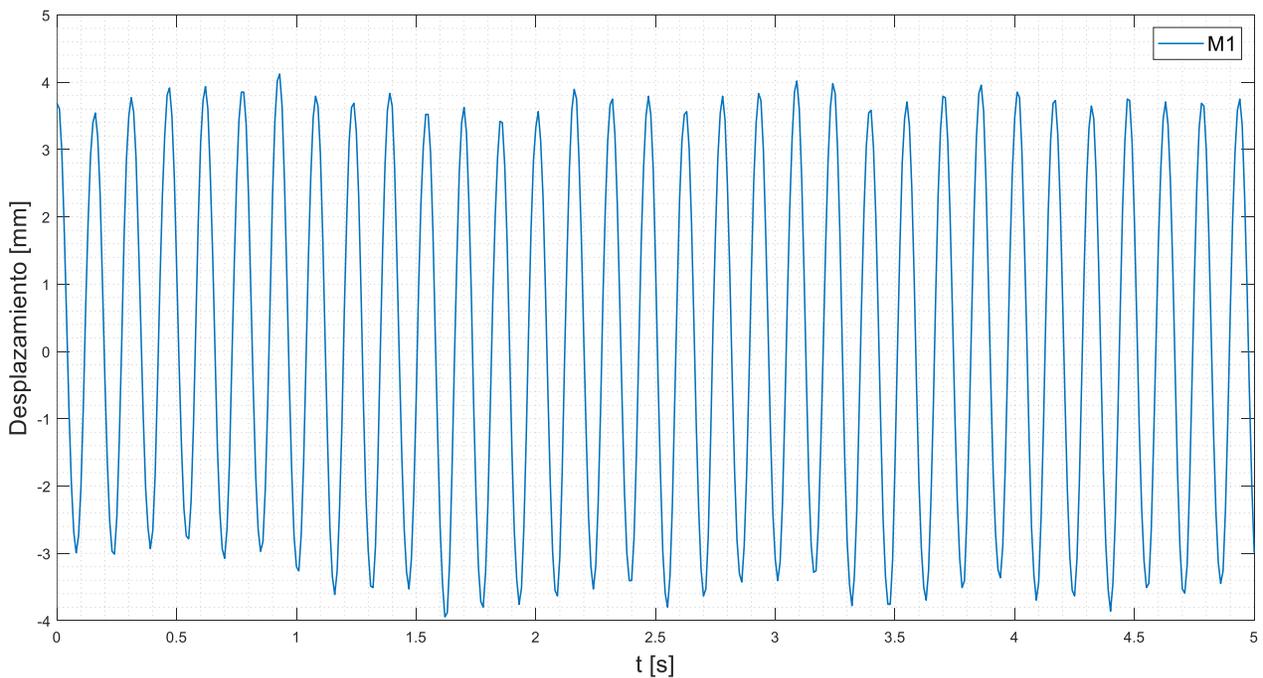


Figura 5.25. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 6.2 Hz sin inersor.

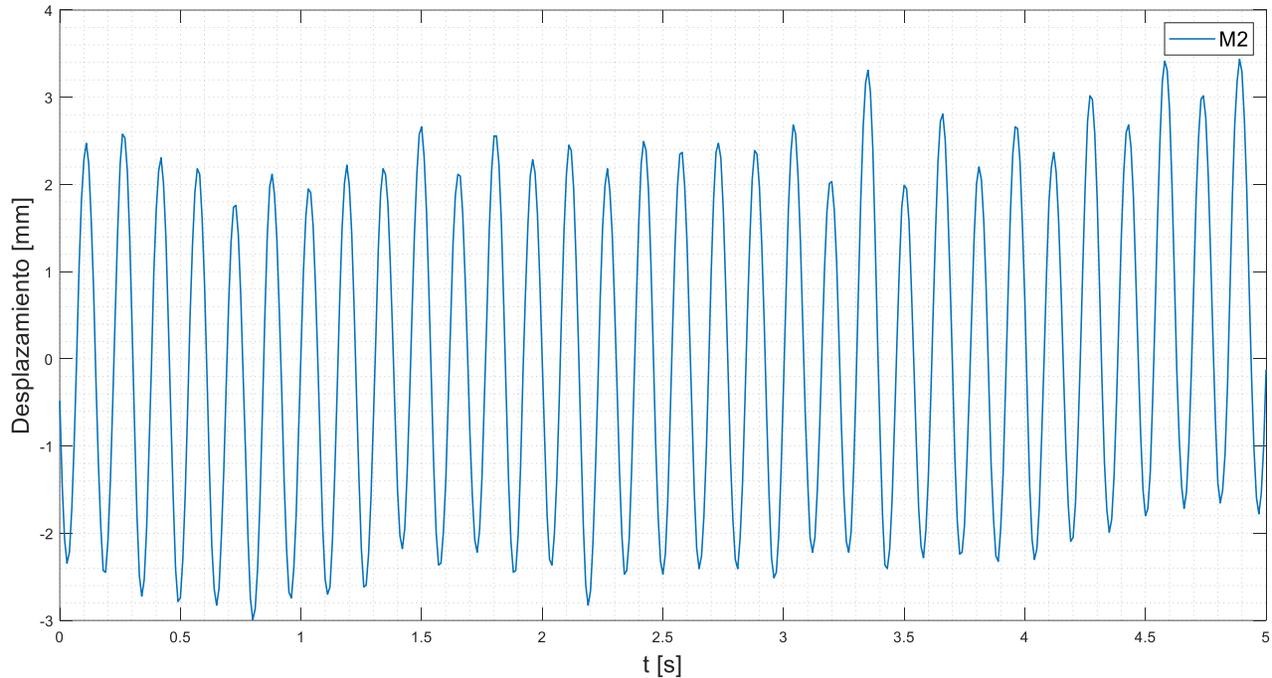


Figura 5.26. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 6.2 Hz sin inersor.

Se hicieron análisis con el inersor en las mismas frecuencias y con las mismas amplitudes que sus homólogos para hacer una comparación apropiada. Se comenzó con el análisis a una frecuencia de 2 Hz. Como en los anteriores casos, en la masa 1 no se aprecia ningún cambio con respecto a la excitación dado que esta se encuentra conectada de forma directa con el excitador. En la Figura 5.27 se muestra el comportamiento de la masa 1, y en la Figura 5.28 se muestra el comportamiento de la masa 2, se puede observar que no hay un cambio significativo con respecto al análisis sin inersor.

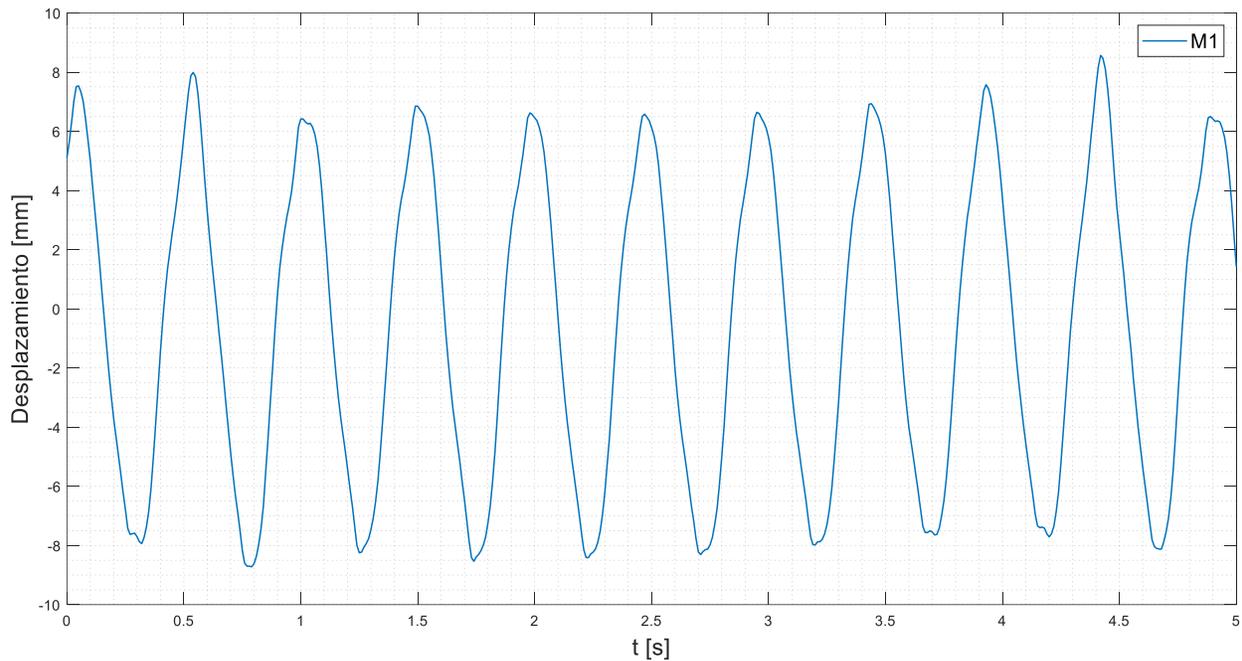


Figura 5.27. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2 Hz con inersor.

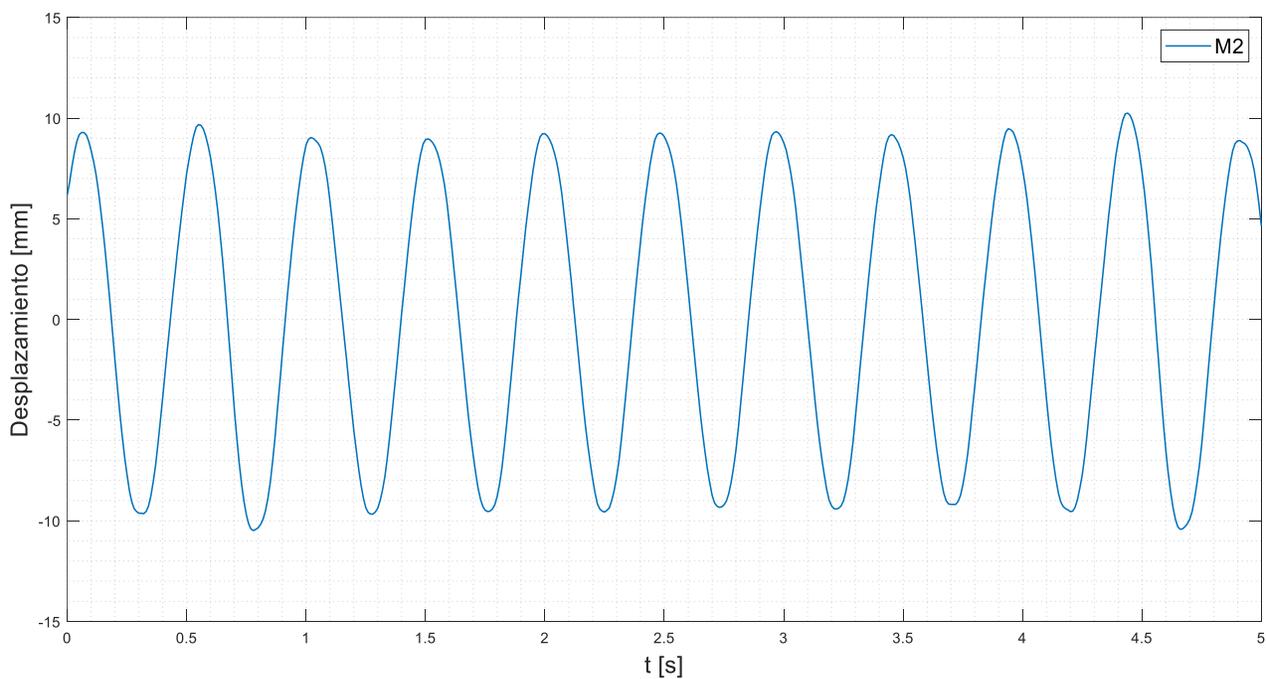


Figura 5.28. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2 Hz con inersor.

En resonancia con su primera frecuencia natural se tiene el comportamiento en la masa 1, mostrado en la Figura 5.29. Mientras que el comportamiento de la masa 2 se muestra en la Figura 5.30. Se puede notar una ligera disminución en la amplitud de la masa 2 con respecto al análisis sin inersor, pero la disminución es muy pequeña para tomarse en cuenta.

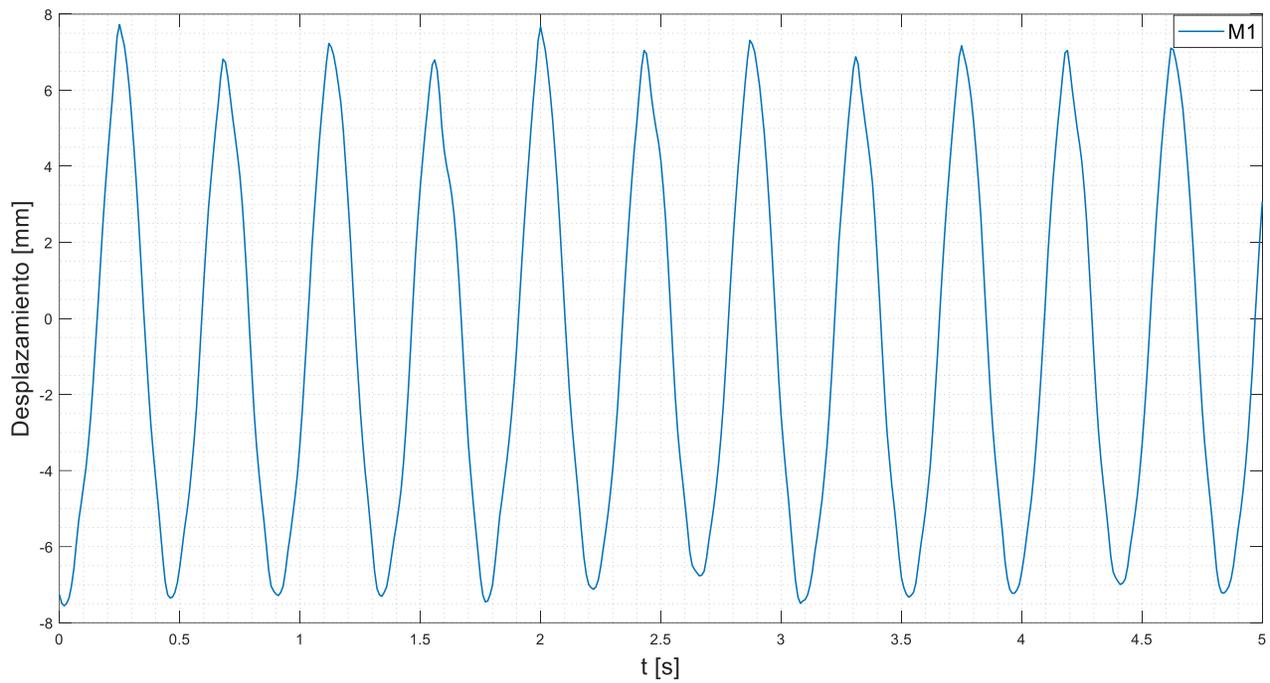


Figura 5.29. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2.3 Hz (primera frecuencia natural) con inersor.

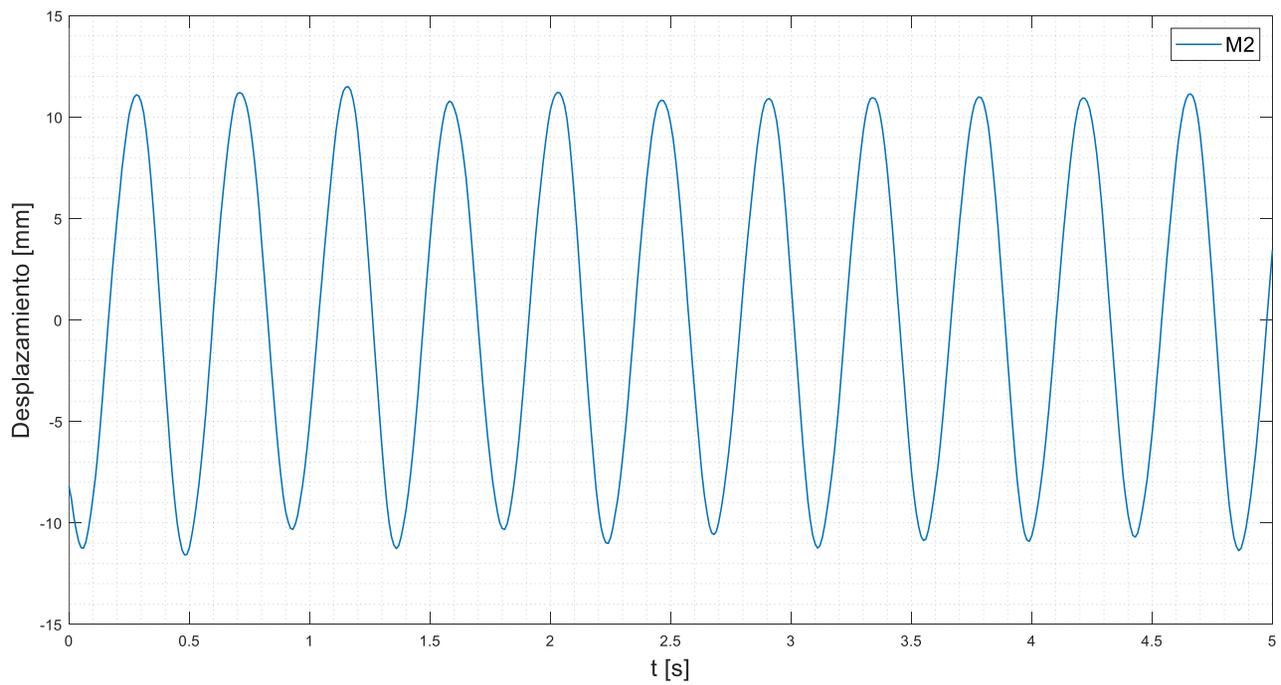


Figura 5.30. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2.3 (primera frecuencia natural) Hz con inersor.

Se efectuó el análisis a la frecuencia de 2.5 Hz. En la Figura 5.31 se puede apreciar el comportamiento de la masa 1. En la Figura 5.32 se puede observar el comportamiento de la masa 2, se puede notar que no hay mucha diferencia con respecto al análisis sin inersor, es decir, tampoco influye el inersor en la atenuación de vibración en esta frecuencia.

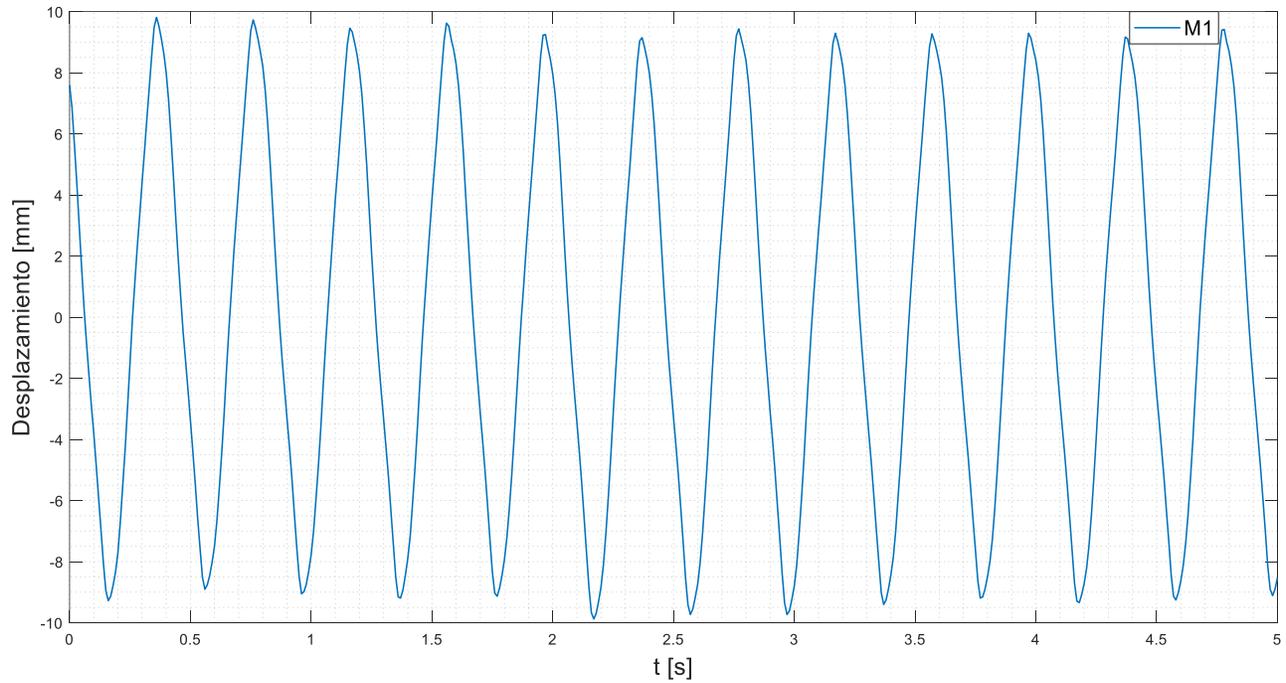
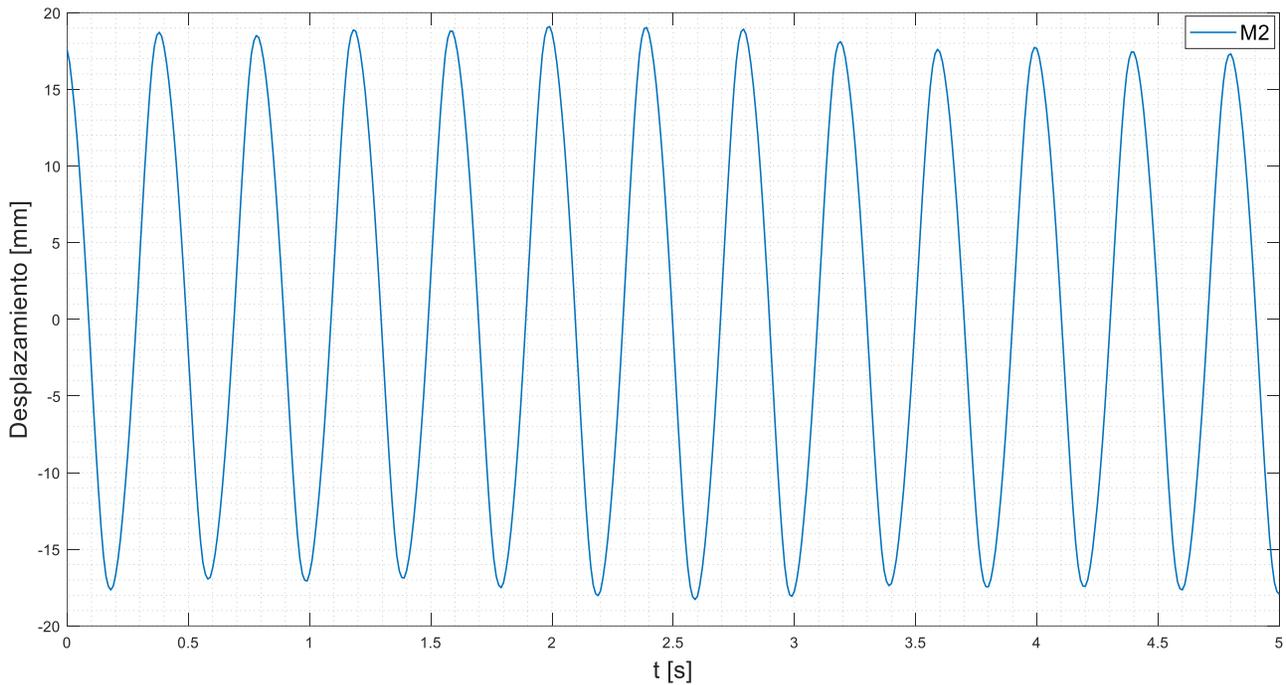


Figura 5.31. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 2.5 Hz con inersor.



*Figura 5.32. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 2.5 Hz con inersor.*

Al analizar el comportamiento del sistema en frecuencias cercanas a la segunda frecuencia natural se puede notar una mayor influencia del inersor en la reducción de vibración de la masa 2. Comenzando con el análisis de una frecuencia de 5.5 Hz., en la Figura 5.33 se muestra el comportamiento de la masa 1. En la Figura 5.34 se muestra el comportamiento de la masa 2, en esta se puede notar una disminución de la amplitud con respecto al análisis realizado sin el inersor de hasta un 30%, lo que nos indica que el inersor tiene una mayor influencia en la atenuación en valores cercanos a la segunda frecuencia natural..

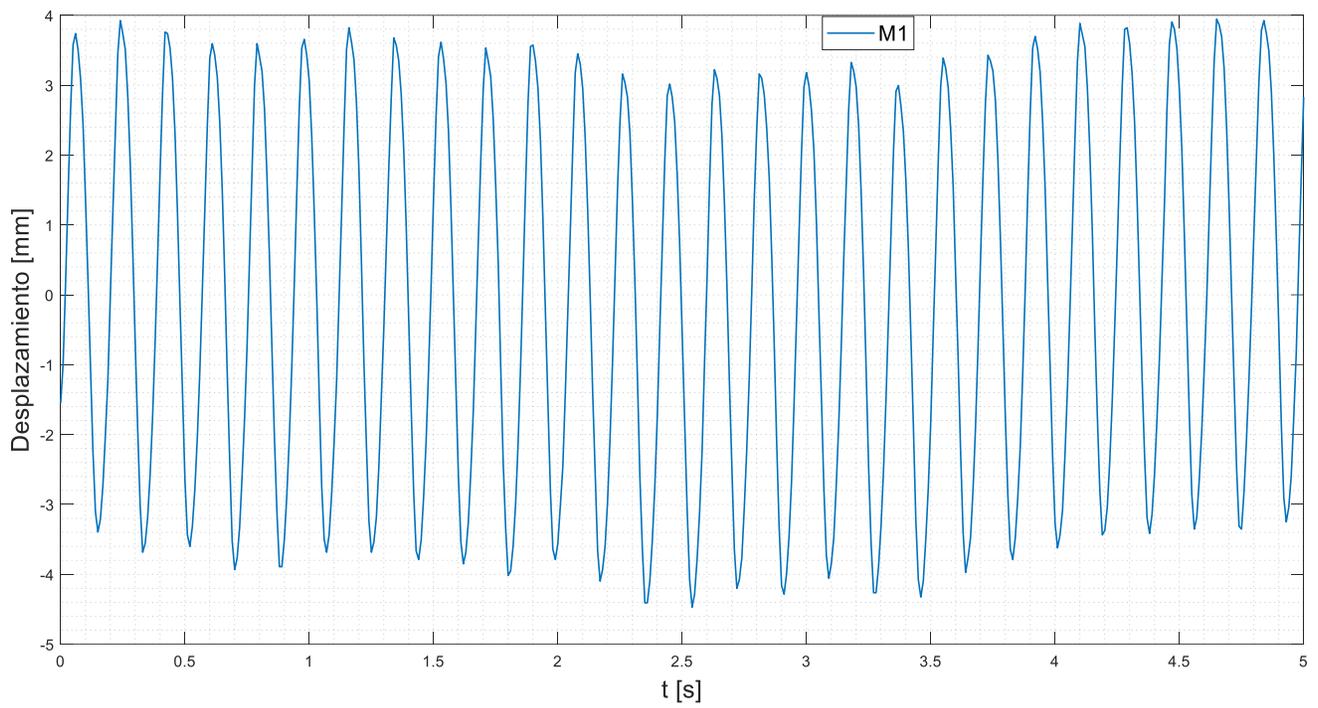


Figura 5.33. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 5.5 Hz con inersor.

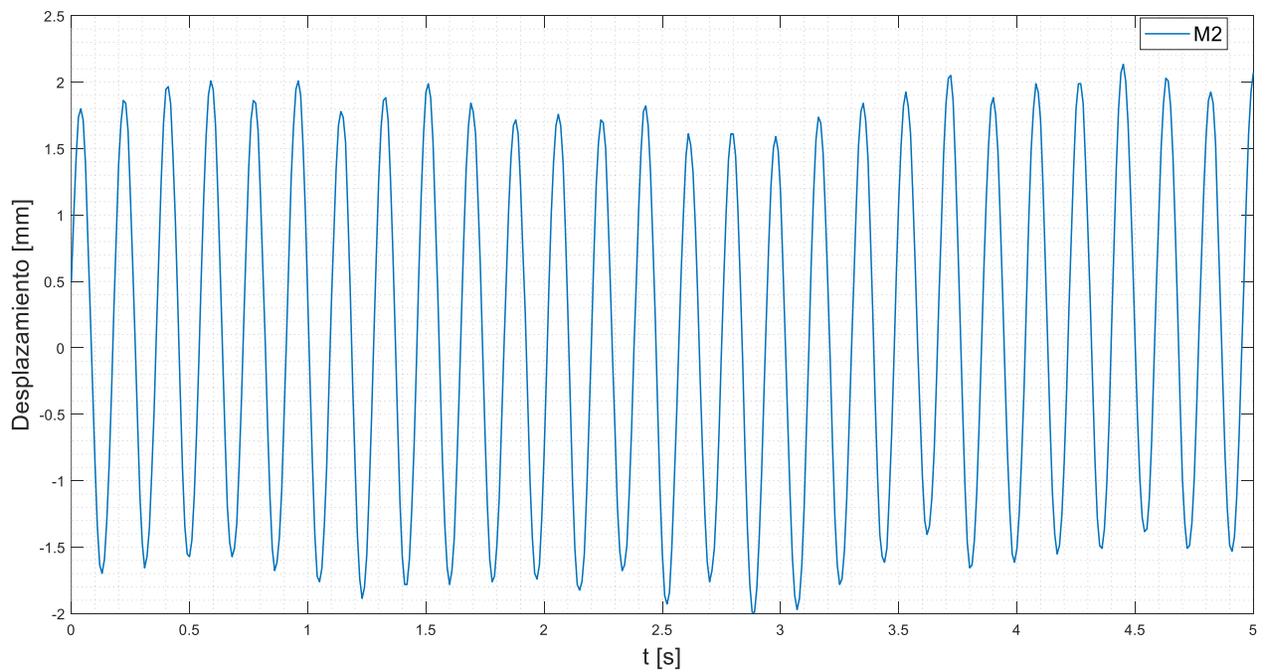


Figura 5.34. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 5.5 Hz con inersor.

En su segunda frecuencia natural se puede observar una disminución en la amplitud de la masa 2 de aproximadamente 35% (Figura 5.36) con respecto al análisis realizado sin el inersor, este es el mayor porcentaje de atenuación logrado en este análisis experimental, alrededor de una tercera parte de la amplitud se logró atenuar con el inersor en el sistema, siendo un logro este diseño. En la Figura 5.35 se puede observar el comportamiento de la masa 1.

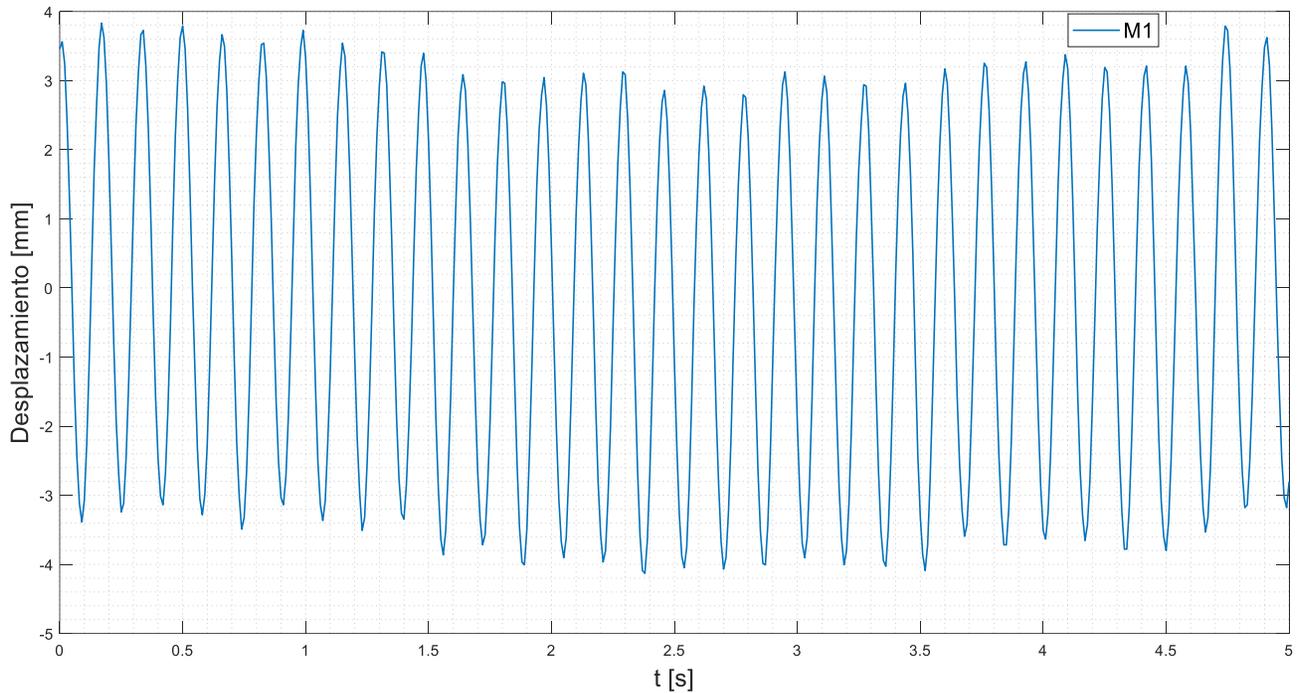


Figura 5.35. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 5.9 Hz (segunda frecuencia natural) con inersor.

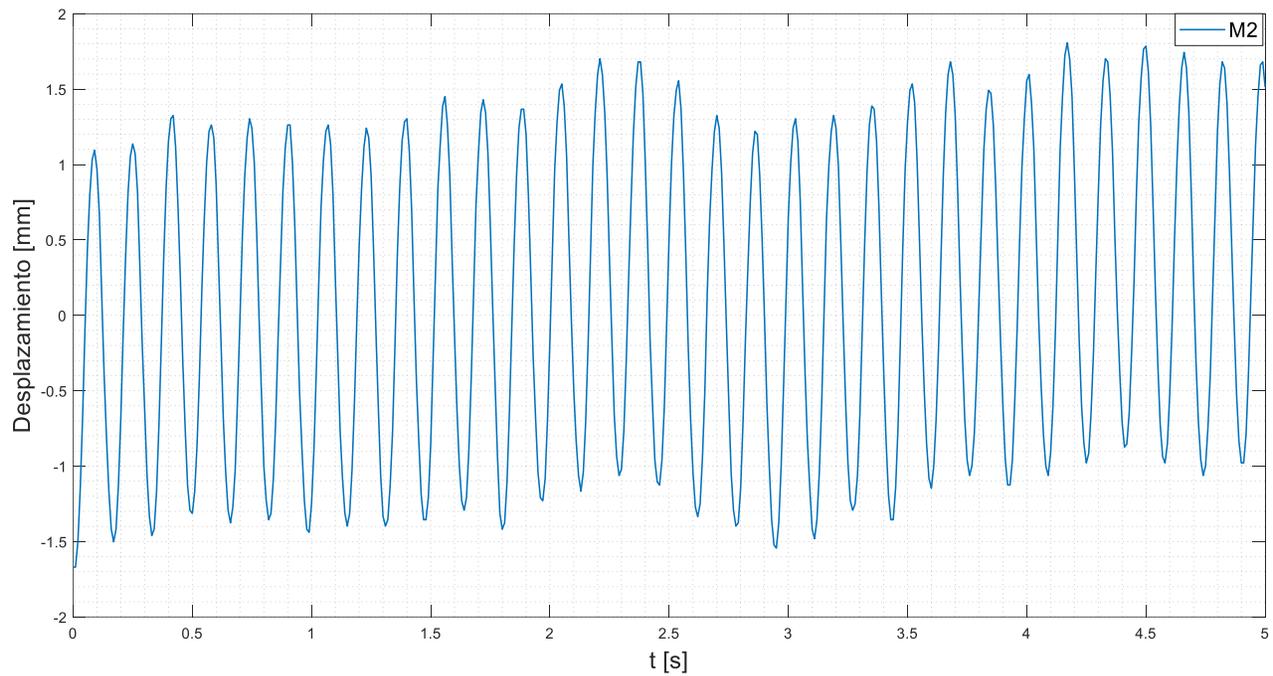


Figura 5.36. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 5.9 Hz (segunda frecuencia natural) con inersor.

Por último, se presenta el análisis a una frecuencia de 6.2 Hz. En La Figura 5.37 se puede observar el comportamiento de la masa 1. En la Figura 5.38 se aprecia el comportamiento de la masa 2, también se puede notar una disminución importante de la amplitud con respecto al análisis sin inersor, el cual atenúa la vibración un 31%.

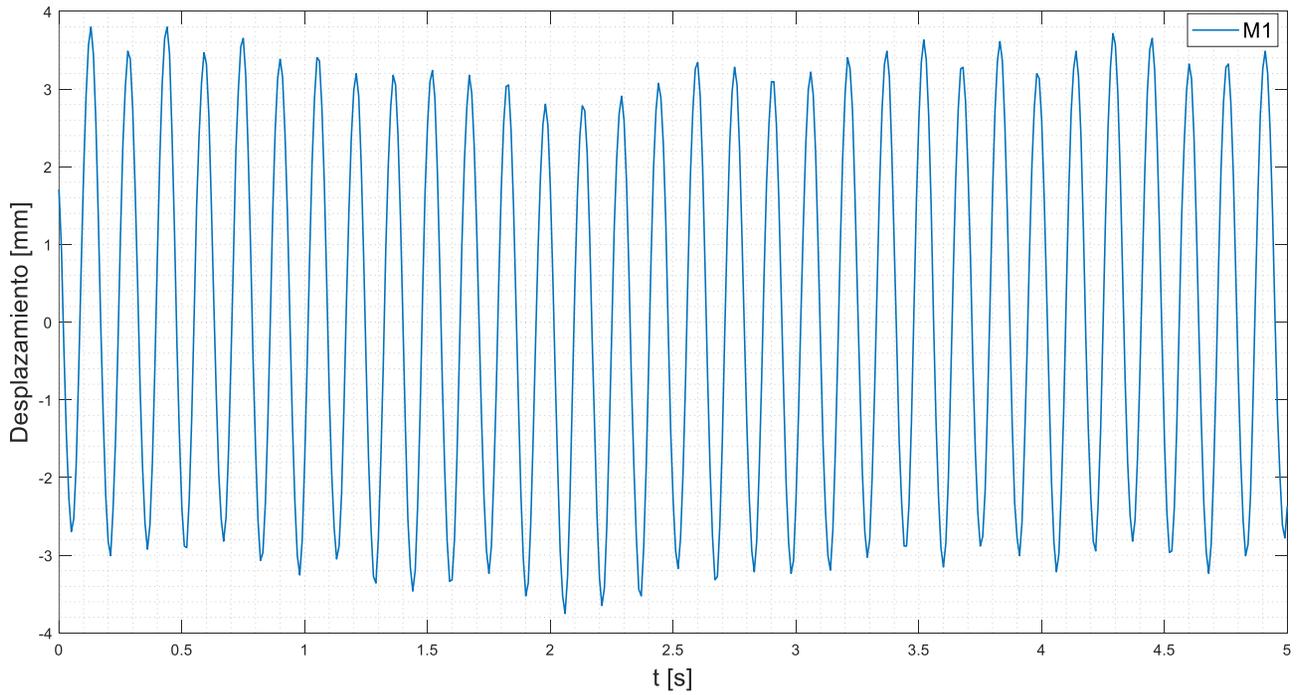


Figura 5.37. Comportamiento de la masa 1 a una frecuencia de 6.2 Hz con inersor.

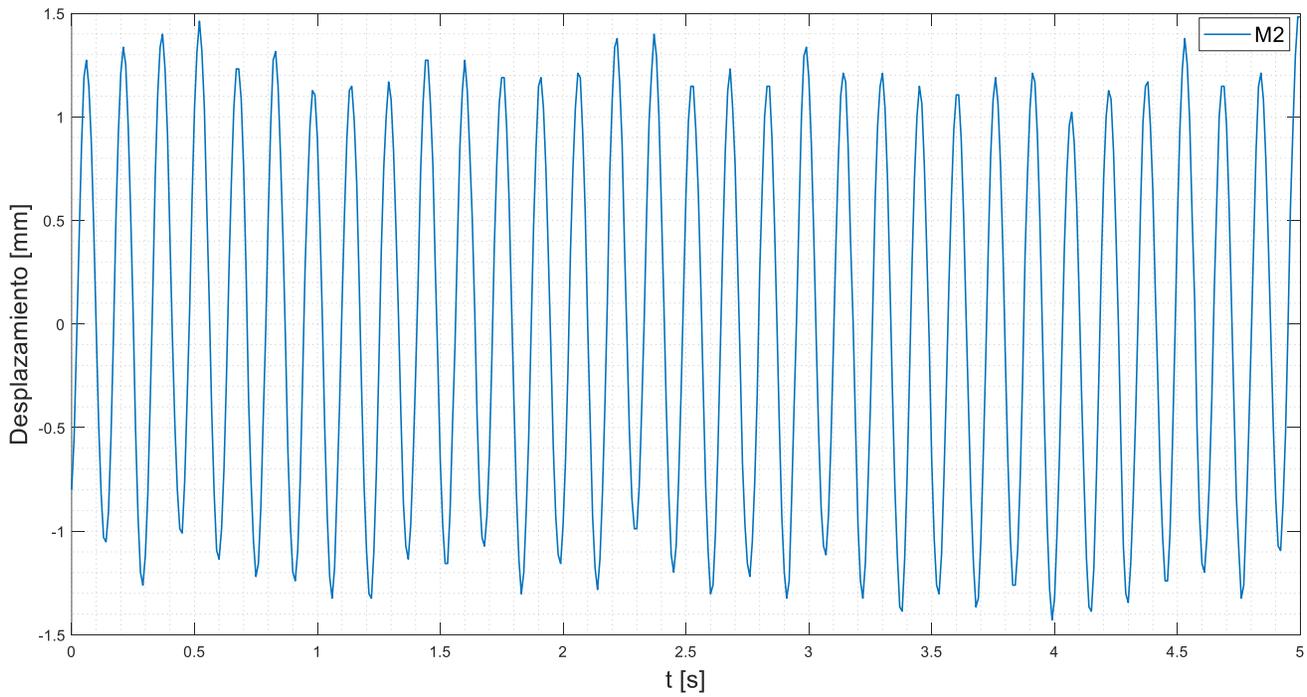


Figura 5.38. Comportamiento de la masa 2 a una frecuencia de 6.2 Hz con inersor.

Se puede observar que el comportamiento del sistema en las frecuencias cercanas a la primera frecuencia natural, tanto con inersor como sin él, no hay una diferencia significativa en cuanto a la amplitud de vibración, esto se debe a que el inersor mecánicamente no trabaja, es decir, para que el volante de inercia gire, debe haber movimientos contrarios entre las masas a las que está conectado, algo que no ocurre en este caso, dado que el movimiento de las masas es hacia el mismo sentido, cambiando un poco únicamente en la amplitud de movimiento, pero no lo suficiente para hacer eficaz el trabajo del volante de inercia. En cambio, en valores cercanos a la segunda frecuencia natural se pudo observar la mayor influencia del inersor en el sistema, con atenuaciones en la vibración de hasta el 35% en resonancia, debido a que el inersor es efectivo cuando sus terminales tienen movimientos contrarios una con respecto a la otra. Estos movimientos hacen que el volante se cargue de energía cinética y al moverse las masas en sentido opuesto el volante transmite su energía almacenada para contraponerse a este movimiento y a su vez almacenar nuevamente energía en sentido contrario para repetir el proceso infinitas veces (en vibración forzada). Con este diseño de inersor se logró la atenuación de un poco más de un tercio de la amplitud de vibración que se tiene en este sistema sometido a frecuencias cercanas a su segunda frecuencia natural.

# CONCLUSIONES

Se modificó el diseño de una plataforma experimental que contaba con 3 masas y un amortiguador, al cual se le retiró una masa y el amortiguador. También se le tuvo que acoplar una base para el excitador y separar las dos masas restantes lo suficiente para que entraran los nuevos resortes. Se hicieron pruebas de excitación sin el inersor para ver el comportamiento de esta plataforma y validar el correcto control del excitador.

Se hizo el modelo matemático de la plataforma sin inersor para encontrar las frecuencias naturales del sistema utilizando el formalismo de Euler-Lagrange. Se programó el excitador a frecuencias cercanas a las naturales para analizar su comportamiento. Cabe resaltar que en todo momento la masa a analizar principalmente era la masa M2, dado que la masa M1 está siempre conectada al excitador por lo que el desplazamiento de M1 solo se tomó en cuenta para ver la amplitud y la frecuencia de excitación.

Se modeló el sistema tanto en el software de MSC AdamsView como en MATLAB Simulink y se valida el comportamiento en resonancia del sistema, se hicieron las pruebas con valores de frecuencia menores a las naturales y también mayores para tener más valores de comparación con respecto al análisis experimental y también al análisis que se hizo con el inersor acoplado a la plataforma. En ambos softwares se mostró el mismo comportamiento, en el que se observó que en la primera frecuencia natural el movimiento de ambas masas se sincroniza desplazándose en el mismo sentido, pero con amplitudes diferentes, amplitudes que van aumentando conforme pasa el tiempo por la resonancia del sistema. Mientras que en la segunda frecuencia natural los desplazamientos de las masas son contrarios y, al igual que en la primera frecuencia natural, la amplitud de esta va aumentando conforme pasa el tiempo. En este análisis de simulación el comportamiento fue el mismo que en la tesis presentada por Barredo, aunque él presentó parámetros diferentes el comportamiento fue el mismo.

También se hizo la simulación del sistema con inersor, en el cual se pudo observar que la influencia del inersor en la primera frecuencia natural es prácticamente nula, mientras que en la segunda frecuencia natural el inersor presenta su mayor influencia sobre el sistema, reduciendo considerablemente la amplitud de vibración de la masa M2. Barredo explica que en condiciones de resonancia en la segunda frecuencia natural es donde se observará un mayor efecto del inersor en el sistema.

No se pudieron optimizar los parámetros del sistema, dado que no se encontraron resortes del tamaño y rigidez requeridos, así como también el dispositivo de amortiguador no se tomó en cuenta, solo el amortiguamiento viscoso generado en los rodamientos de las masas. El volante de inercia se calculó a partir de los valores conocidos del sistema, aunque tampoco fue un valor optimizado.

Se diseñó el volante de inercia y se optó por el aluminio como el material del cual estaría hecho. Mientras que para la cremallera y el piñón se optó por una impresión 3D para reducir costos

de fabricación. Se ensamblaron todas las partes del inersor y se acopló a la plataforma para hacer el análisis experimental.

Los resultados obtenidos en el análisis fueron favorables, dado que se logró reducir la amplitud de la masa M2 hasta en un 35% en su segunda frecuencia natural dado que, por definición, las fuerzas que se generan en las terminales del inersor son directamente proporcionales a la aceleración relativa entre ellas. Esto quiere decir que para que haya un mayor aprovechamiento del efecto del inersor es necesario que las terminales se muevan en sentidos contrarios para generar una mayor inercia que ayude a contrarrestar el movimiento del sistema, lo cual se pudo corroborar ya que las masas tienen movimientos contrarios entre sí, lo que produce que el inersor genere fuerzas que se oponen al movimiento de las masas y produzca mayor absorción de vibración en la masa 2. En condiciones de resonancia el inersor genera fuerzas opuestas para provocar un equilibrio dinámico en los desplazamientos de las masas inerciales.

Como trabajos futuros se puede considerar anexar a la plataforma un dispositivo de amortiguamiento para analizar su influencia en diferentes configuraciones en la plataforma MRA. También se puede buscar un motor de mayor potencia y velocidad para ampliar las frecuencias y amplitudes a las que se pueda someter la plataforma. Se puede programar un incremento de frecuencia en el tiempo y así poder observar claramente el momento en que la plataforma entra en resonancia. Otro aspecto a mejorar son los encoders que pueden ser sustituidos por acelerómetros para hacer más eficiente la lectura de desplazamiento de las masas.

En general el inersor balancea las fuerzas dinámicas que tienen sentido contrario entre las masas que conecta de un sistema mecánico, almacenando la energía cinética en los volantes de inercia y transmitiéndola a sus terminales momentáneamente. Una aplicación esencial del inersor es a absorbedores de vibración dinámica y a sistemas de suspensión pasiva, por ejemplo, para contrarrestar las fuerzas que se generan en los neumáticos a causa de las irregularidades en el camino. Este modelo en específico fue diseñado para esta plataforma, aunque se puede aplicar a sistemas de suspensión en los cuales no se tenga tanto interés en el espacio que se vaya a utilizar dado que el volante utiliza un espacio considerable. Se podría poner a prueba en un sistema de suspensión de un *“buggy”*, siendo estos carros pequeños y con un espacio suficientes en su sistema de suspensión para agregar un inersor.

# REFERENCIAS

- Balachandran, B., & Magrab, E. B. (2018). *Vibrations*. (C. C. U. Press, Ed.) (3rd editio).
- Barredo, E. (2016). *Análisis del efecto de un inersor en la respuesta dinámica de sistemas mecánicos en resonancia*. CENIDET.
- Benitez, L. (2012). *Engranajes, Diseño, Lubricación, Análisis de Fallas y Mantenimiento*. Universidad Nacional de Colombia.
- Chen, H. J., Su, W. J., & Wang, F. C. (2017). Modeling and analyses of a connected multi-car train system employing the inerter. *Advances in Mechanical Engineering*, 9(8), 1–13. <https://doi.org/10.1177/1687814017701703>
- Chen, M. (2015). Passive mechanical synthesis and n-port resistive networks. *Department of Mechanical Engineering*, 1–54.
- Chen, M., Hu, Y., Huang, L., & Chen, G. (2014). Influence of inerter on natural frequencies of vibration systems. *Journal of Sound and Vibration*. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.11.025>
- Chen, M., Hu, Y., Li, C., & Chen, G. (2017). Application of Semi-Active Inerter in Semi-Active Suspensions Via Force Tracking, 138(August 2016), 1–11. <https://doi.org/10.1115/1.4033357>
- Evangelou, S., Limebeer, D., Sharp, R., & Smith, M. (2004). Steering compensation for high-performance motorcycles. *2004 43RD IEEE Conference on Decision and Control (CDC), VOLS 1-5*, 749–754. <https://doi.org/10.1109/CDC.2004.1428746>
- Faraj, R., Holnicki-Szulc, J., Knap, L., & Senko, J. (2016). Adaptive inertial shock-absorber, 035031. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/3/035031>
- Garrido, H., Curadelli, O., & Ambrosini, D. (2013). Improvement of tuned mass damper by using rotational inertia through tuned viscous mass damper. *Engineering Structures*, 56, 2149–2153. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.08.044>
- Giaralis, A., & Petrini, F. (2017). Optimum design of the tuned mass-damper-inerter for serviceability limit state performance in wind-excited tall buildings. *Procedia Engineering*, 199, 1773–1778. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.453>
- Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2001). *Classical Mechanics* (3rd ed.). Addison Wesley.
- Guzman, M. (2011). *Diseño y construcción de un amortiguador electroreológico*. Tesis de Maestría. CENIDET.
- Høgsberg, J., Brodersen, M. L., & Krenk, S. (2016). Resonant passive-active vibration absorber with integrated force feedback control. *Smart Materials and Structures*, 25(4), 0. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/4/047001>
- Hu, Y., Chen, M. Z. Q., & Sun, Y. (2017). Comfort-oriented vehicle suspension design with skyhook inerter configuration. *Journal of Sound and Vibration*, 405, 34–47. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.05.036>
- Hu, Y., Chen, M. Z. Q., Xu, S., & Liu, Y. (2016). Semiactive Inerter and Its Application in Adaptive Tuned Vibration Absorbers, 1–7.
- Javidialesaadi, A., & Wierschem, N. E. (2018). Optimal design of rotational inertial double tuned

- mass dampers under random excitation. *Engineering Structures*, 165(March), 412–421. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.03.033>
- Kelly, S. G. (2012). *Mechanical Vibrations: Theory and Applications*. (C. Learning, Ed.) (SI).
- KOYANAGI, R., & TAKAHASHI, M. (2019). Design of Vibration Isolating Bed for Ambulances Using Inerter. *The Proceedings of the Dynamics & Design Conference, 2018(0)*, 726. <https://doi.org/10.1299/jsmedmc.2018.726>
- Li, Y., Jiang, J. Z., Neild, S., Kingdom, U., & Layouts, S. (n.d.). Inerter-Based Configurations for Main-Landing-Gear Shimmy Suppression, 1–10. <https://doi.org/10.2514/1.C033964>
- Liu, X., Jiang, J. Z., Titurus, B., Harrison, A. J. L., & McBryde, D. (2017). Testing and modelling of the damping effects for fluid-based inerters. *Procedia Engineering*, 199, 435–440. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.171>
- Liu, Y., Hu, Y., & Chen, M. Z. Q. (2015). Effect of play in inerter on vehicle suspension system. *Proceedings of the 2015 27th Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2015, 2497(1)*, 2497–2502. <https://doi.org/10.1109/CCDC.2015.7162341>
- Madhamshetty, K. (2018). Low-Rate Characterization of a Mechanical Inerter. *Machines*, 6. <https://doi.org/10.3390/machines6030032>
- Manuel, J. (2010). Engranos. *Revista Geográfica Venezolana*, 56(2), 309–325. Retrieved from <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=347743079009>
- Masferrer, L. R. (2005). Análisis Y Diseño De Volantes De Inercia De Materiales Compuestos, 254.
- Matamoros-Sanchez, A. Z., & Goodaoll, R. M. (2014). Applications of the inerter in railway vehicle suspension. *2014 UKACC International Conference on Control, CONTROL 2014 - Proceedings*, (July), 555–560. <https://doi.org/10.1109/CONTROL.2014.6915200>
- Mendez, E. C. (2015). *Diseño y construcción de un prototipo didáctico masa-resorte-amortiguador (MRA)*.
- Miller, M. (2005). Análisis y diseño de volantes de inercia de materiales compuestos. [https://doi.org/10.1016/S0300-8932\(09\)73148-3](https://doi.org/10.1016/S0300-8932(09)73148-3)
- NI. (n.d.). ¿Qué es myRIO? Retrieved from <http://www.ni.com/es-mx/shop/engineering-education/portable-student-devices/myrio-student-embedded-device/what-is-myrio.html>
- Ogata, K. (1987). *Dinámica de sistemas*. (P. Hall, Ed.).
- Oscilaciones2, O. (2012). Trenes de aterrizaje. Retrieved May 22, 2018, from <http://trenesdeaterrizaje.blogspot.mx/2012/03/sistema-de-amortiguacion.html>
- Peña, J. E. S. (2015). Diseño de un mecanismo de apertura y cierre de una estructura adaptable para la cámara de la pequeña y mediana empresa de pichincha ubicada en el centro de exposiciones Quito, 1–5.
- Pietrosanti, D. (2017). Optimal design and performance evaluation of systems with Tuned Mass Damper Inerter ( TMDI ). <https://doi.org/10.1002/eqe>
- Plus, R. (2017). Mecanismo de cremallera. Retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=betw6UVdr6Y>
- Proyecto FSE, P. (2015). Volantes de inercia. Retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=RWbyPBQuXYQ>
- Seto, W. W. (1986). *Vibraciones mecánicas*. Analogías eléctricas.
- Siami, A., Karimi, H., Cigada, A., & Zappa, E. (2018). Experimental Analysis of Inerter-Based Suspension Systems for Slender Structures. *Designs*, 2(2), 15. <https://doi.org/10.3390/designs2020015>
- Siordia Vásquez, X., González Ramírez, L., García Ramos, R., & García Martínez, J. (2017).

- Método de Euler-Lagrange en el modelado y control de un péndulo invertido sobre un carro *Revista de Ingeniería Eléctrica*, 1(3), 1–8.
- Sistemas, S. y. (2018a). masa-resorte-amortiguador: ecuación diferencial y función de transferencia. Retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=O9yIRbC7CoE>
- Sistemas, S. y. (2018b). Modelo de masa-resorte-amortiguador doble usando la metodología Euler- Lagrange. Retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=jBU1B4ivUv8>
- Smith, M. C. (2002). Synthesis of mechanical networks: The inerter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(10), 1648–1662. <https://doi.org/10.1109/TAC.2002.803532>
- Smith, M. C. (2003). The Inerter Concept and Its Application. *Society of Instrument and Control Engineers (SICE) Annual Conference*, (August), 40.
- Smith, M. C., & Wang, F. (2004). Performance Benefits in Passive Vehicle Suspensions 1 Introduction 2 Background on the inerter. *Vehicle System Dynamics*, 42(4), 235–257. <https://doi.org/10.1007/s12529-010-9117-6>
- Sun, J. Q. (n.d.). Design of passive interconnections in tall buildings subject to earthquake disturbances to suppress inter-storey drifts. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/744/1/012063>
- Sun, L., Hong, D., & Chen, L. (2017). Cables interconnected with tuned inerter damper for vibration mitigation. *Engineering Structures*, 151, 57–67. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.08.009>
- Swift, S. J., Smith, M. C., Glover, A. R., Papageorgiou, C., Gartner, B., & Houghton, N. E. (2013). Design and modelling of a fluid inerter. *International Journal of Control*, 86(11), 2035–2051. <https://doi.org/10.1080/00207179.2013.842263>
- Ugena, D. (2008). *Desarrollo de un almacenador cinético de energía*. Universidad Carlos III de Madrid.
- Wang, F. C., Chen, C. W., Liao, M. K., & Hong, M. F. (2007). Performance analyses of building suspension control with inerters. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 3786–3791. <https://doi.org/10.1109/CDC.2007.4434186>
- Wang, F. C., & Su, W. J. (2008). Inerter nonlinearities and the impact on suspension control. *Proceedings of the American Control Conference*, (1), 3245–3250. <https://doi.org/10.1109/ACC.2008.4586992>
- Wang, F. C., & Wu, S. Y. (2016). Vibration control of an optical table employing mechatronic inerter networks. *JVC/Journal of Vibration and Control*, 22(1), 224–234. <https://doi.org/10.1177/1077546314528365>
- Watanabe, M., Hayashi, T., & Yamakitao, M. (2014). Wobbling mass effects for a walking robot with inerters, 1073–1078.

# ANEXOS

Anexo 1. Hoja de datos de los encoders utilizados.

**Wiring:**

Green = A phase  
 White = B phase  
 Red = Vcc positive power supply  
 Black = Vo (Ground)  
 Another metal shielding layer interference.

**Output:**

AB two-phase quadrature output rectangular pulse, the circuit output is NPN open collector output type

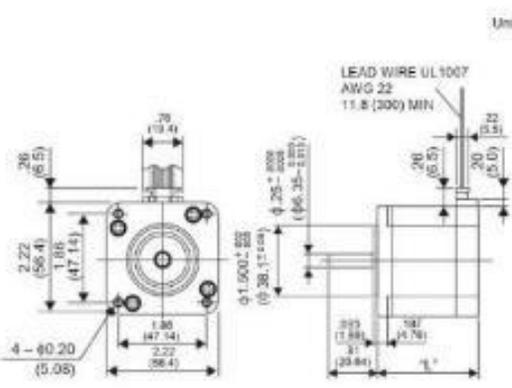
This type can be output with internal pull-up resistor available in Arduino, microcontrollers or PLC, such as Atmega, pic, 51 or microcontroller Mitsubishi PLC.

If Internal Pullup is not available, then you need to Pull-up Output Channel A & B with resistors supplied with product. i.e. resister between Green and RED, White and RED wire.

**Technical Details:**

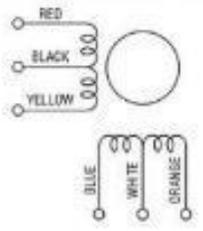
Item	Diameter 38mm shaft 6mm type incremental rotary encoder	
Resolution(P/R)	100	
Output Phase	AB Phase	
Output Type	NPN Open Collector	
Electrical	Supply Voltage	5-24VDC
	Current consumption	Max. 40mA
	Response frequency	Max. 20Khz
	Allowable revolution	Max. 2000 rev/min
Mechanical	Starting torque	Max. 20gf.cm (0.002N.m)
	Rotor inertia	Max. 15g.cm <sup>2</sup> (1.5*10 <sup>-6</sup> kg.m <sup>2</sup> )
	Shaft loading	Radial: Max. 2kgf Thrust: Max. 1kgf
	Mechanical Speed	Max. 5000 rev/min(*1)
Environmental	Ambient temperature	-10~70 (at non-freezing status), Storage:-25~85
	Ambient humidity	35~85%RH, Storage: 35~90%RH
	Protection	IP50 (IEC standard)
	Vibration	1.5mm amplitude at frequency of 10-55 Hz in each of X,Y, Z direction for 2 hours.
	Shock	Max. 40G
Unit weight	Approx: 180g	
Cable	1.5m (The cable length can be customized)	
Approval	CE ROHS	
(*1)	Mechanical speed > Allowable revolution, Please take allowable speed as standard when use	

# High Torque 23KM-C 1.8° HYBRID



P/N	"L"
23KM-C2XX	1.65 (42)
23KM-C3XX	1.97 (50)
23KM-C0XX	2.13 (54)
23KM-C7XX	2.99 (76)

## WINDING DIAGRAM



## GENERAL SPECIFICATIONS

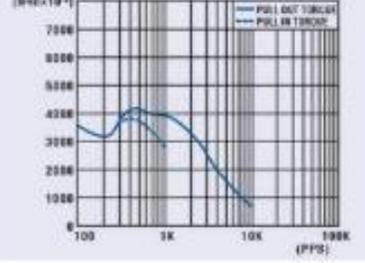
- Step Angle ..... 1.8°
- Step Angle Accuracy ..... +/-5%
- Temperature Rise ..... 80° C Max.
- Ambient Temperature Range ..... -20° to +50° C
- Insulation Resistance ..... 100MΩ Min., 500 VDC
- Dielectric Strength ..... 500 VAC for 1 min.
- Radial Play ..... 0.02 mm Max. (+50 g-load)
- End Play ..... 0.08 mm Max. (+50 g-load)
- Switching Sequence ..... See page 31

## MODEL SPECIFICATIONS

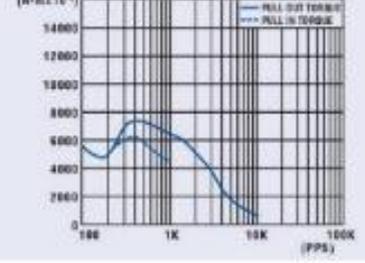
Model Number	Rated Voltage V	Rated Current/ Phase A	Winding Resistance/ Phase Ω	Holding Torque g-cm	Inductance mH	Rotor Inertia g-cm <sup>2</sup>	Detent Torque g-cm	Weight g
23KM-C250V	3.30	1.50	2.20	4,400	2.6	150.0	200	470
23KM-C379V	4.10	1.50	2.70	8,000	3.6	230.0	300	590
23KM-C032V	5.10	1.50	3.40	9,500	5.4	280.0	350	680
23KM-C716V	6.30	1.50	4.20	14,000	6.8	440.0	600	1,050

## TORQUE/SPEED CHARACTERISTICS

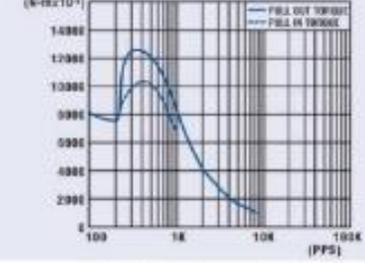
**Model: 23KM-C250V**  
Driver: Unipolar Chopper Dual • Supply Voltage: 24.0 (Volt)  
Drive Current: 1.50 (A/WDG) • Load Inertia: 161.0 (g-cm<sup>2</sup>)



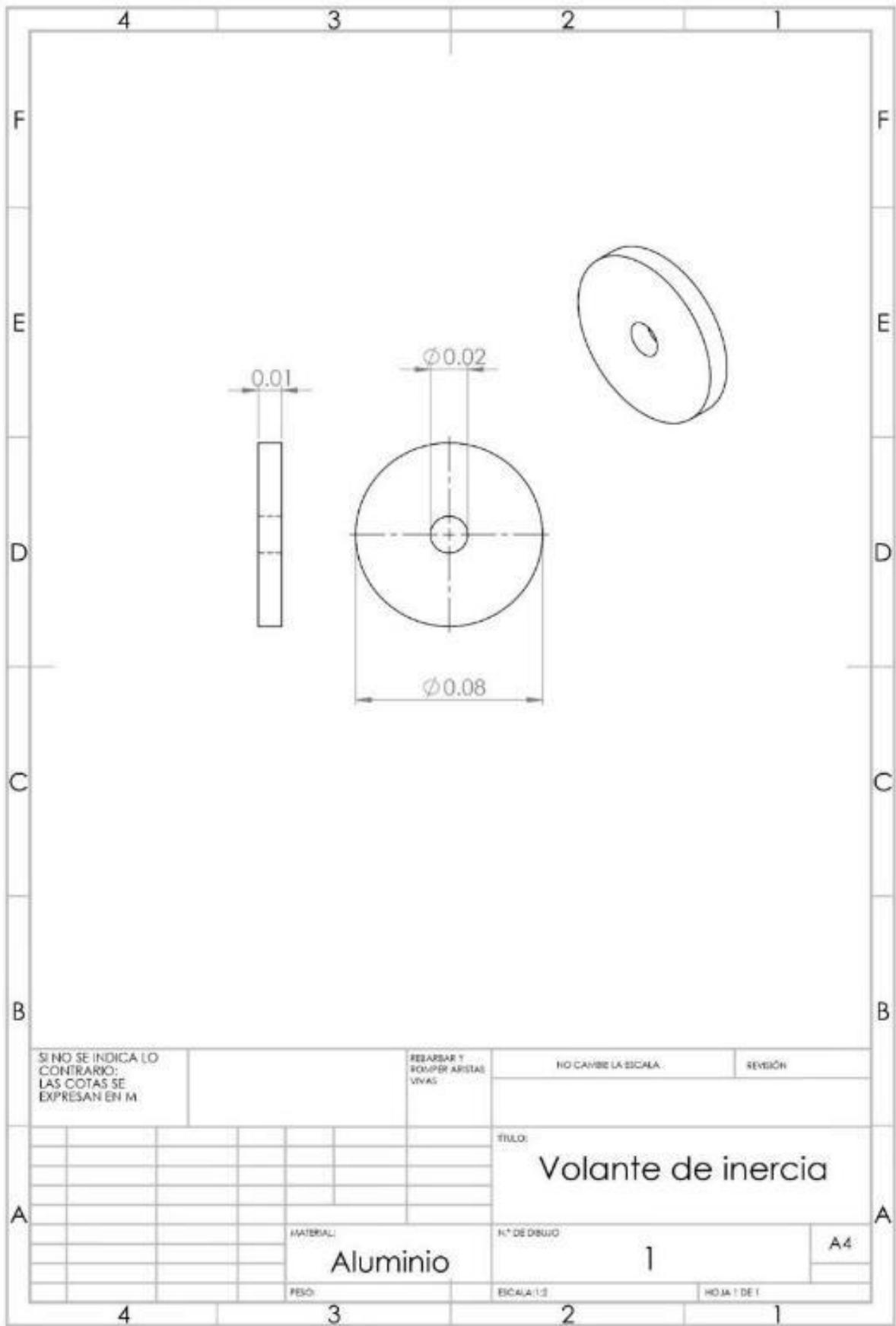
**Model: 23KM-C379V**  
Driver: Unipolar Chopper Dual • Supply Voltage: 24.0 (Volt)  
Drive Current: 1.50 (A/WDG) • Load Inertia: 261.0 (g-cm<sup>2</sup>)



**Model: 23KM-C716V**  
Driver: Unipolar Chopper Dual • Supply Voltage: 24.0 (Volt)  
Drive Current: 1.50 (A/WDG) • Load Inertia: 161.6 (g-cm<sup>2</sup>)

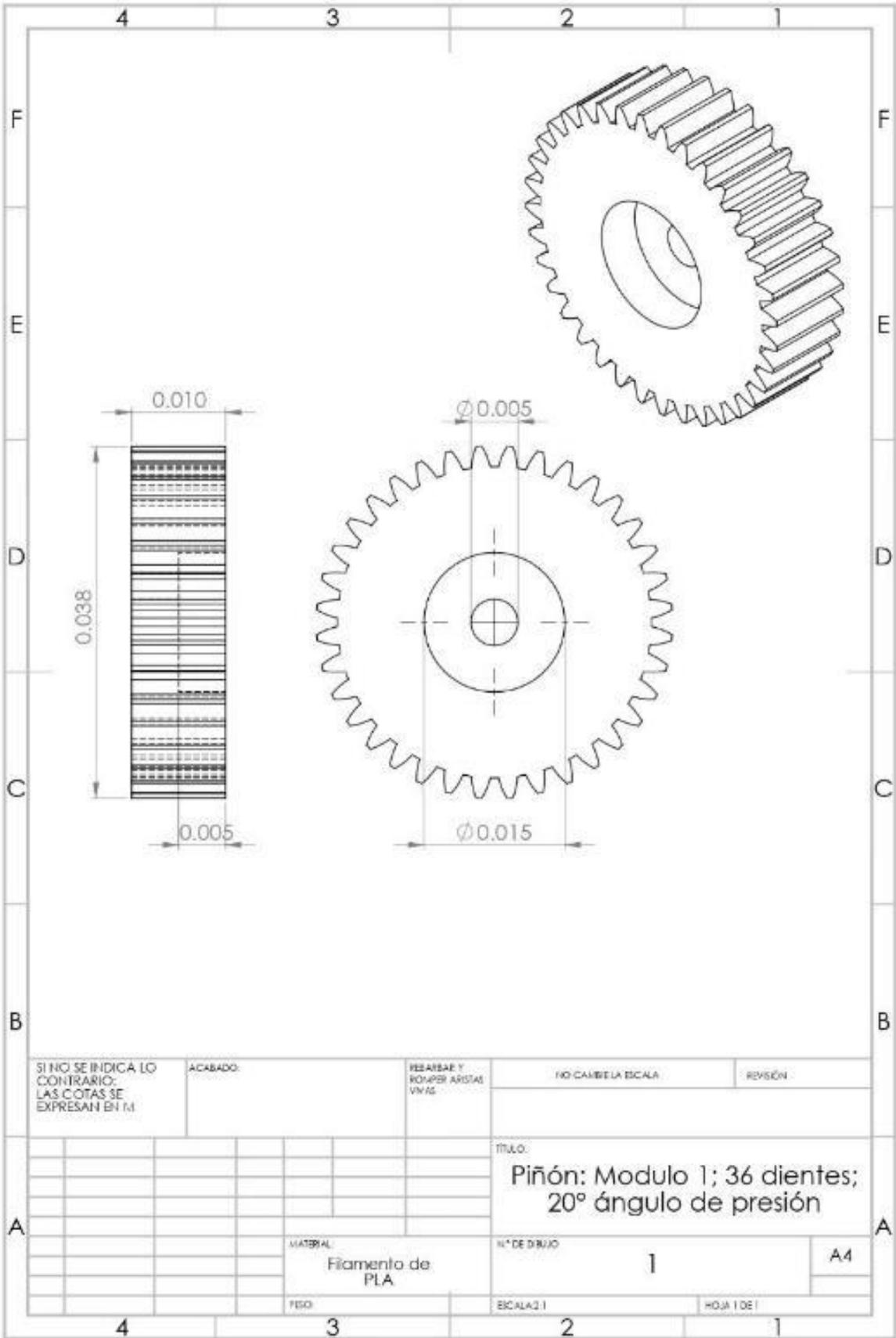


Anexo 3. Diseño del volante de inercia.



SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN M.		REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	NO CAMBIE LA ESCALA.	REVISIÓN
		TÍTULO: <b>Volante de inercia</b>		
		MATERIAL: <b>Aluminio</b>	N° DE DIBUJO: <b>1</b>	A4
RESO:		ESCALA: 1:3	HOJA 1 DE 1	

Anexo 4. Diseño del piñón del inersor.



Anexo 5. Diseño de la cremallera del piñón.

