



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Doctorado

Modelado y Control de Orden Arbitrario Enfocado a  
un Sistema Termodinámico con Cambio de Fase.

presentada por

**M.C. Montserrat Alegria Zamudio**

como requisito para la obtención del grado de

**Doctor en Ciencias en Ingeniería  
Electrónica**

Director de tesis

**Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez**

Codirector de tesis

**Dr. José Francisco Gómez Aguilar**

Cuernavaca, Morelos, México. Junio de 2022.

 <small>Centro Nacional de Investigación y Enseñanza Tecnológica</small>	<b>ACEPTACIÓN DE IMPRESIÓN DEL DOCUMENTO DE TESIS DOCTORAL</b>	<b>Código: CENIDET-AC-006-D20</b>
		<b>Revisión: 0</b>
	<b>Referencia a la Norma ISO 9001:2008 7.1, 7.2.1, 7.5.1, 7.6, 8.1, 8.2.4</b>	<b>Página 1 de 1</b>

Cuernavaca, Mor., a 13 de junio de 2022

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza  
Subdirector Académico  
P r e s e n t e

At'n: Dr. Carlos Daniel García Beltrán  
Claustro Doctoral  
Ing. Electrónica

Presidente del  
del Departamento de

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial de la estudiante **Montserrat Alegria Zamudio**, manifiestan que después de haber revisado el documento de tesis titulado "Modelado y Control de Orden Arbitrario Enfocado a un Sistema Termodinámico con Cambio de Fase", realizado bajo la dirección del Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez y la codirección del Dr. José Francisco Gómez Aguilar, el trabajo se ACEPTA para proceder a su impresión.

A T E N T A M E N T E

  
Dr. Juan Reyes Reyes  
CENIDET

  
Dr. Gerardo Vicente Guerrero  
Ramírez  
CENIDET

  
Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza  
CENIDET

  
Dr. José Alfredo Hernández Pérez  
CIICAP

  
Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez  
CENIDET

  
Dr. José Francisco Gómez Aguilar  
CENIDET

Reciba un cordial saludo.

c.c.p: Lic. Silvia del Carmen Ortiz Fuentes/ jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
c.c.p: Dr. Hugo Estrada Esquivel / jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica.  
c.c.p: Expediente.

CENIDET-AC-006-D20

Rev. 0



Cuernavaca, Mor.,

14/junio/2022

No. De Oficio:

SAC/86/2022

Asunto:

Autorización de  
impresión de tesis

**MONTSERRAT ALEGRÍA ZAMUDIO  
CANDIDATA(O) AL GRADO DE MAESTRA(O) EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
PRESENTE**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Modelado y Control de Orden Arbitrario Enfocado a un Sistema Termodinámico con Cambio de Fase", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

Excelencia en Educación Tecnológica®  
"Educación Tecnológica al Servicio de México"



**DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO** SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA

C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica  
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/CHG



# Dedicatoria

*A mis padres.*

*Una meta más cumplida, todo lo que he sido, soy y seré es reflejo de sus actos de amor, confianza y paciencia, gracias por ser mi ejemplo de vida y siempre estar a mi lado en cada paso que doy. Los amo.*

*A Diego.*

*Gracias por ser siempre esa mano amiga, ese consejo necesario y ese empujón a dar siempre más y lo mejor, por ser parte de esta meta, gracias. Te amo.*

*A mis hijos Valeria y Alessis.*

*Por que todo es para ustedes, por ustedes y con ustedes, son mi mayor alegría e inspiración. Los amo.*

# Agradecimientos

*A Dios.* Gracias por la oportunidad que me das de crecer en edad, sabiduría y gracia delante de ti y delante de los demás.

includepdf[]

*A mis padres.* Mami gracias por estar siempre para mí y darme la oportunidad de desarrollarme como profesionalista, madre e hija, siempre te estaré eternamente agradecida te amo, papi que puedo decir, aunque en cuerpo no estés aquí tu espíritu siempre me acompaña y me cobija, gracias por darme la oportunidad de tener un padre tan maravilloso, te amo.

*A Diego.* Gracias amor por estar siempre a mi lado, apoyarme y sobre todo por darme la dicha de compartir una vida contigo. Gracias por aceptarme y darme esta hermosa familia. Te amo.

*A mi hija Valeria.* Gracias por ser la niña dulce y amorosa, por apoyarme siempre, entenderme y aceptarme, gracias por darme la alegría de ser tu mamá y tu amiga, te amo hija mía.

*A mi hijo Alessis.* Alessito llegaste a iluminar e inspirar mi vida, gracias por tus sonrisas tan acertadas y darme la dicha de ser tu mamá. Te amo.

*A mis hermanos.* Gracias por estar siempre para apoyarme y siempre tener las palabras apropiadas para mí. **Fer, Paco y Andy** los amo.

*Al Dr. Fabricio.* No tengo palabras para agradecerle todo lo que hizo por mí, por aceptarme e inspirarme, por apoyarme en los tiempos difíciles, así como su apoyo en toda esta etapa que fue más allá del doctorado, gracias por la amistad y las conversaciones sinceras. Gracias por todo Doc.

*Al Dr. José Francisco.* Gracias por inspirarme en esta aventura del doctorado y del cálculo fraccionario, así como por aceptarme y tener siempre las palabras adecuadas para mí cada que lo buscaba por un consejo, por apoyarme en mis tiempos difíciles y ofrecerme siempre su amistad sincera. Gracias por todo Doc.

*A mis revisores:* Dr. Juan Reyes Reyes, Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza, Dr. José Alfredo Hernández Pérez por sus valiosos comentarios, observaciones, disponibilidad y ayuda.

*A mis amigos. Gracias por el apoyo y el cariño brindado en esta etapa, espero poder seguir compartiendo experiencias a su lado. Susy, Diana, Hugo, Iván, Edumis, Chuy, Moi y Emmanuel.*

*Al Tecnológico Nacional de México y al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico por brindarme los medios necesarios para obtener mayores conocimientos y así crecer profesionalmente. Además, por todas las atenciones otorgadas por el personal.*

*A CONACYT por el apoyo económico que me brindaron para la realización del trabajo de tesis.*

# Resumen

En este trabajo de tesis se realizó el modelado, control y diseño de observadores de un sistema termodinámico con cambio de fase usando cálculo fraccionario. El caso de estudio es un condensador helicoidal de tubos concéntricos con flujos a contracorriente que forma parte de un sistema de bombas de calor por absorción integrado a un purificador de agua. Primero, se consideró el modelado matemático del sistema termodinámico representado por las ecuaciones de transferencia de energía para cada una de las fases involucradas en el proceso de condensación (Vapor sobrecalentado, vapor-líquido, líquido subenfriado), implementando un ajuste paramétrico en el modelado para cada una de las fases, posteriormente se desarrolló un modelo de orden arbitrario utilizando la definición de la derivada fraccionaria de Riemman-Liouville aprovechando las propiedades no locales y de memoria de la definición, donde el grado de libertad extra que nos genera el orden de la derivada es útil para caracterizar la dinámica del sistema sin comprometer la naturaleza del sistema y sin aumentar la complejidad del modelo matemático, el cálculo de los órdenes utilizados se obtuvieron mediante el algoritmo de optimización PSO. Posteriormente se realizó el diseño de un esquema de detección y diagnóstico de fallas basando en un banco de dos observadores adaptativos de orden fraccionario para detectar y aislar la falla en los sensores de temperatura del condensador, tomando en cuenta que el sistema no cuenta con la instrumentación necesaria que permita medir los flujos que entran al sistema, se toma ventaja de la estimación de parámetros de los observadores adaptativos para estimar el flujo volumétrico que entra al sistema. Finalmente, para completar el esquema de control tolerante a fallas se integró un controlador PI de orden fraccionario para regular la temperatura de salida del condensado, como consecuencia esto permite que el sistema continúe operando incluso en presencia de falla en uno de los sensores.

# Abstract

In this thesis work, the modeling, control and design of observers of a thermodynamic system with phase change was carried out using fractional calculus. The case study is a helical condenser with concentric tubes with countercurrent flows that is part of an absorption heat pump system integrated into a water purifier. First, the mathematical modeling of the thermodynamic system represented by the energy transfer equations for each of the phases involved in the condensation process (superheated steam, vapor-liquid, subcooled liquid) was considered, implementing a parametric adjustment in the modeling to each of the phases, later an arbitrary order model was developed using the definition of the fractional derivative of Riemman-Liouville, taking advantage of the non-local and memory properties of the definition, where the extra degree of freedom generated by the order of the Derivative is useful to characterize the dynamics of the system without compromising the nature of the system and without increasing the complexity of the mathematical model, where the orders used were obtained by means of the PSO optimization algorithm. Subsequently, the design of an FDI scheme was carried out based on a bank of two adaptive observers of fractional order to detect and isolate the failure in the condenser temperature sensors, taking into account that the system does not have the necessary instrumentation to measure the flows entering the system, it takes advantage of the parameter estimation of the adaptive observers to estimate the volumetric flow entering the system. Finally, to complete the fault-tolerant control scheme, a fractional order PI controller was integrated to regulate the condensate outlet temperature, as a consequence this allows the system to continue operating even in the presence of a fault in one of the sensors.

# Índice general

Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	IX
Acrónimos	X
<b>1. Antecedentes y motivación.</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción.	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.3. Objetivos.	3
1.3.1. Objetivo general.	3
1.3.2. Objetivos específicos.	3
1.4. Hipótesis.	4
1.4.1. Justificación	4
1.4.2. Alcances.	5
1.4.3. Metas.	5
1.5. Metodología.	5
1.6. Organización del documento.	6
<b>2. Estado del arte y marco teórico.</b>	<b>7</b>
2.1. Estado del arte.	7
2.1.1. Antecedentes.	7
2.1.2. Modelado de sistemas termodinámicos.	8
2.1.3. Modelado de sistemas con cálculo fraccionario.	10
2.1.4. Observadores de orden fraccionario.	11
2.1.5. Control fraccionario.	13
2.2. Marco teórico.	14
2.2.1. Modelado de sistemas termodinámicos.	14
2.2.2. Proceso de purificación de agua.	15
2.2.3. Proceso de condensado.	18
2.2.4. Condensador helicoidal de tubos concéntricos.	19
2.2.5. Cálculo fraccionario.	20
2.2.6. Integral fraccionaria.	22
2.2.7. Derivada fraccionaria.	24
2.2.8. Estabilidad de sistemas fraccionarios no lineales.	26
2.2.9. Estabilidad asintótica de sistemas no lineales de orden fraccionario	29
2.2.10. Observadores y el esquema FDI.	30

2.2.11. PID de orden fraccionario. . . . .	32
2.2.12. Esquema de Detección de fallas . . . . .	32
2.2.13. Control tolerante a fallas. . . . .	33
2.3. Conclusiones . . . . .	36
<b>3. Modelado matemático</b>	<b>38</b>
3.1. Intercambiadores de calor . . . . .	38
3.1.1. Modelos representativos de los intercambiadores de calor . . . . .	39
3.2. Modelado de orden fraccionario del condensador . . . . .	42
3.3. Transferencia de calor en la condensación. . . . .	47
3.3.1. Condensación de película . . . . .	48
3.3.2. Condensación en tubos . . . . .	49
3.3.3. Análisis de estabilidad. . . . .	53
3.4. Conclusiones . . . . .	57
<b>4. Resultados</b>	<b>58</b>
4.1. Modelo de orden fraccionario . . . . .	58
4.2. Esquema FDI basado en observadores adaptativos de orden fraccionario	60
4.2.1. Observador adaptativo de orden fraccionario con $T_{co}$ como señal medida . . . . .	61
4.2.2. Observador adaptativo de orden fraccionario con $T_{ho}$ como señal medida . . . . .	62
4.3. Control PI de orden fraccionario. . . . .	67
4.4. Control Tolerante a Fallas. . . . .	70
4.5. Conclusiones . . . . .	72
<b>5. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>74</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	74
5.1.1. Modelado de orden arbitrario en un sistema de cambio de fase. .	74
5.1.2. Diagnóstico de fallas en sensores. . . . .	74
5.1.3. Control tolerante a fallas de orden fraccionario . . . . .	75
5.1.4. Trabajos futuros . . . . .	75
5.1.5. Aportación . . . . .	76
5.1.6. Ventajas y limitaciones . . . . .	77
5.1.7. Publicaciones realizadas . . . . .	77
<b>Anexos</b>	<b>88</b>
<b>A. Anexo A</b>	<b>89</b>
A.1. Datos del condensador . . . . .	89
A.2. Parámetros del sistema . . . . .	90
<b>B. Anexo B</b>	<b>92</b>
B.1. Publicaciones realizadas . . . . .	92
B.2. Publicación sometida . . . . .	95

# Índice de figuras

2.1. Transferencia de calor. . . . .	15
2.2. Ciclo de purificación de agua. . . . .	16
2.3. Bombas de calor. . . . .	17
2.4. Funciones de los componentes de las bombas de calor por absorción. . . . .	18
2.5. Proceso de condensación. . . . .	19
2.6. Configuración de los flujos en el condensador. . . . .	20
2.7. Esquema de diagnóstico de fallas. . . . .	33
2.8. Sistema tolerante a fallas. . . . .	34
2.9. Diferencias entre las fallas. . . . .	35
2.10. Reconfiguración del control. . . . .	36
3.1. Comparación entre las temperaturas de salida estimadas por el modelo presentado por (Carbot, 2015) y los datos experimentales. . . . .	40
3.2. Comparación entre las temperaturas de salida estimadas por el modelo presentado por (Alegria-Zamudio et al., 2019) y los datos experimentales. . . . .	42
3.3. Secciones del Intercambiador de Calor (condensador). . . . .	43
3.4. Esquema de la dinámica del condensador. . . . .	44
3.5. Flujo de condensado en un tubo horizontal a grandes velocidades. . . . .	49
4.1. Modelo de orden fraccionario del condensador. . . . .	59
4.2. Error del modelo de orden fraccionario del condensador . . . . .	59
4.3. Banco de observadores. . . . .	60
4.4. Observadores de orden fraccionario (dinámica). . . . .	63
4.5. Observadores de orden fraccionario. . . . .	64
4.6. Error de estimación de los observadores de orden fraccionario. . . . .	64
4.7. Falla en el sensor de temperatura $T_{co}$ . . . . .	66
4.8. Falla en el sensor de temperatura $T_{ho}$ . . . . .	67
4.9. Esquema de control. . . . .	68
4.10. Desempeño del control FOPI. . . . .	69
4.11. Control FOPI. . . . .	69
4.12. FOPI error. . . . .	70
4.13. Esquema de control tolerante a fallas de orden fraccionario. . . . .	71
4.14. Control tolerante a fallas de orden fraccionario: falla en ( $T_{ho}$ ). . . . .	72
4.15. Control tolerante a fallas de orden fraccionario: falla en ( $T_{co}$ ). . . . .	73
A.1. Dinámicas de las temperaturas del condensador cuando $q_1 = q_2 = 0,9999$ . 90	

# Índice de tablas

4.1. MSE del modelo de orden fraccionario del condensador. . . . .	60
4.2. Desviación estándar del modelo de orden fraccionario del condensador.	60
4.3. MSE de la temperatura estimada del condensador (FOAO1). . . . .	65
4.4. MSE de la temperatura estimada del condensador (FOAO2). . . . .	65
4.5. Matriz de fallas . . . . .	65
4.6. MSE del controlador de orden fraccionario. . . . .	70
A.1. Dimensiones del condensador . . . . .	89
A.2. Parámetros del sistema . . . . .	90

# Acrónimos

Notación	Equivalente en español	Equivalente en inglés.
<i>IC</i>	Intercambiador de Calor	
<i>FDI</i>	Diagnóstico y aislamiento de fallas	Fault Diagnosis and Isolation
<i>FTC</i>	Control Tolerante a Fallas	Fault Tolerant Control
<i>PID</i>	Proporcional Integral Derivativo	
<i>FDI</i>	Detección y Aislamiento de Fallas	Fault Detection and Isolation
<i>FOAO</i>	Observadores adaptativos de orden fraccionario	Fractional order adaptative observer
<i>CF</i>	Cálculo fraccionario	Fractional Calculus
<i>LMTD</i>	Diferencia de Temperatura media logarítmica	Logarithm mean temperature difference

## Nomenclatura

<i>p</i>	Presión ( <i>bar</i> )
<i>Vol</i>	Volumen ( $m^3$ )
<i>T</i>	Temperatura ( $^{\circ}C$ )
<i>T<sub>sat</sub></i>	Temperatura de saturación ( $^{\circ}C$ )
<i>Re</i>	Número de Reynolds
<i>m</i>	Flujo másico ( $kg/s$ )
$\mu$	Viscosidad ( $kg/m \cdot s$ )
<i>C<sub>p</sub></i>	Calor específico ( $KJ/kg^{\circ}C$ )
<i>h<sub>fg</sub></i>	Calor latente de vaporización ( $KJ/kg$ )
<i>A</i>	Área de transferencia de calor ( $m^2$ )
<i>h</i>	Coefficiente de transferencia de calor por convección ( $W/m^2 \cdot C$ )
<i>D</i>	Diámetro equivalente ( $m$ )
<i>g</i>	Gravedad ( $m/s^2$ )
<i>r</i>	Radio( $m$ )
<i>w</i>	Flujo volumétrico( $m^3/s$ )
<i>V</i>	Velocidad( $m/s$ ) ( $w/(\rho\pi r^2)$ )

## Letras griegas

$\lambda$	Conductividad térmica ( $W/mC$ )
$\rho$	Densidad ( $kg/m^3$ )
$\mu$	Viscosidad del líquido ( $kg/ms$ )
$\gamma$	Orden de la derivada

**Subíndices**

<i>i</i>	Entrada
<i>o</i>	Salida
<i>h</i>	Caliente
<i>c</i>	Frío
<i>sat</i>	Saturado
<i>V</i>	Vapor sobrecalentado
<i>B</i>	Bifase
<i>L</i>	Líquido subenfriado
<i>int</i>	Interno
<i>ext</i>	Externo

# Capítulo 1

## Antecedentes y motivación.

### 1.1. Introducción.

*"La energía no puede crearse ni destruirse, solo puede cambiar de una forma a otra."* En 1847, Joule formuló la ley de la conservación de la energía que afirma que la cantidad total de energía de cualquier sistema físico aislado permanece invariante con el tiempo, aunque dicha energía puede transformarse en otras formas de energía. La energía se considera como la capacidad que tiene un cuerpo o sistema para realizar un trabajo y producir cambios en ellos mismos o en otros cuerpos o sistemas. La termodinámica se utiliza para describir procesos de transferencia de calor que permiten realizar trabajo sin importar el estado físico de las sustancias o materiales que se estén estudiando, por lo tanto, la termodinámica está presente en diferentes áreas de la ingeniería, ya que nos permite determinar las propiedades de la materia que están involucradas con la obtención, regulación y aprovechamiento de la energía. Si consideramos una masa de agua, sabemos que ésta puede existir en diferentes formas, si es líquida se puede convertir en vapor si se calienta o sólida cuando se enfría. El desarrollo del modelo de este tipo de procesos involucra ecuaciones de transferencia de energía para cada una de las fases involucradas en el proceso, como es el caso de la condensación serían las fases de vapor, vapor-líquido y líquido, por lo que la complejidad al modelar este tipo de sistemas se considere apropiado usar herramientas o métodos alternativos que permitan caracterizar el sistema de manera más apropiada sin hacer los modelos conocidos más complejos. Con esa premisa, en este trabajo se propone un

modelo termodinámico del condensador usando diferentes correlaciones semi-empíricas a las reportadas en (Castro et al., 2016; Acevedo et al., 2020) mejorando las estimaciones realizadas por modelos anteriores y evitando hacer los modelos conocidos más completos al realizar un modelo de orden fraccionario basado en la definición clásica de Riemann-Liouville. En años actuales, el cálculo fraccionario se ha convertido en un método útil para el modelado y control de procesos en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería, ésta se encarga de estudiar los órdenes de operadores de integración y derivación que no son solo fraccionarios, sino también reales, complejos y con funciones variables en el tiempo, por lo que también se conoce como orden arbitrario de integración y derivación (Gómez-Aguilar et al., 2014). Los sistemas con cambio de fase son ampliamente utilizados en varios sectores de la industria como la farmacéutica, la industria alimenticia, petroquímica o generación de energía eléctrica, por lo que para garantizar la operación de estos sistemas son instrumentados con diferentes actuadores y sensores, sin embargo estos dispositivos son propensos a fallas, por lo tanto, los sistemas de detección y diagnóstico de fallas tienen un papel importante al permitir la continua y correcta operación de estos sistemas aún en presencia de fallas en alguno de sus componentes, evitando así detener el proceso, además de proveer un ambiente seguro para el personal que opera el sistema. En este trabajo se propone un banco de observadores fraccionarios que permite la estimación de las temperaturas de salida del condensador usando solo una temperatura de salida medida, además un sistema de detección y aislamiento de fallas basado en observadores adaptativos de orden fraccionario para generar redundancia analítica que permita detectar y aislar fallas en los sensores de temperatura del condensado, con la finalidad de integrarlo en un sistema de control tolerante a fallas que permita el continuo funcionamiento del sistema aún en presencia de fallas, basado en un control Proporcional-Integral ( $PI^\gamma$ ) de orden fraccionario.

## 1.2. Planteamiento del problema

El proceso de cambio de fase en las sustancias es muy importante en el área de la termodinámica, ya que nos permite diseñar sistemas que aprovechen las ventajas de dicho fenómeno para mejorar el desempeño de sistemas industriales que utilicen

este proceso. Este proceso por naturaleza tiene una dinámica compleja ya que ciertas propiedades medibles como la temperatura y la densidad sufren cambios, sin embargo existen otras propiedades no medibles; como lo es el coeficiente convectivo, por lo tanto son calculados por medio de relaciones semi-empíricas, a pesar de su complejidad estos procesos son altamente utilizados en la industria, por lo tanto, es importante por motivos de control tener modelos simples que representen la dinámica del sistema, así como la estimación de variables que no son posible medir pero son de importancia para analizar y verificar el cambio de fase en el sistema.

En este trabajo de investigación se atenderá la problemática del modelado de un condensador integrado a un sistema de bombas de calor de un sistema de purificación de agua, donde el calor útil del absorbedor es utilizado para llevar a cabo la evaporación de agua impura, teniendo como problema la falta de instrumentación en el sistema y la falta de información de la dinámica del condensador integrado al sistema de bombas de calor, lo cual dificulta mantener el funcionamiento continuo del sistema en general, por lo que la siguiente problemática se presenta en el control del condensador, el que en consecuencia permitirá el continuo funcionamiento del sistemas de bombas de calor. Esta problemática será atacada utilizando el cálculo fraccionario como método de modelado y control.

## **1.3. Objetivos.**

### **1.3.1. Objetivo general.**

Diseñar un modelo de orden fraccionario que describa la dinámica de las temperaturas de un intercambiador de calor cuando el cambio de fase suceda en el sistema y proponer un esquema de control tolerante a fallas que regule la temperatura de salida del sistema aún en presencia de fallas.

### **1.3.2. Objetivos específicos.**

- Generalizar el modelo termodinámico del condensador, que describa las dinámicas de las temperaturas.

- Diseñar un conjunto de observadores del intercambiador de calor con cambio de fase, que estimen las temperaturas de salida del sistema.
- Diseñar un esquema de diagnóstico y aislamiento de fallas utilizando el enfoque fraccionario.
- Diseñar un control de orden fraccionario que regule la temperatura de salida del sistema.
- Diseñar un control tolerante a fallas utilizando el enfoque fraccionario aplicado a un condensador.

## 1.4. Hipótesis.

Al modelar un sistema termodinámico que involucre el proceso de condensación basado en el uso de operadores fraccionarios, será posible aplicar un esquema de detección y aislamiento de fallas en sensores basado en observadores fraccionarios, con el fin de obtener un esquema de control tolerante a fallas que permitirá el continuo y correcto funcionamiento aún en presencia de fallas.

### 1.4.1. Justificación

Los sistemas termodinámicos habitualmente forman parte de redes industriales complejas por lo que su operación tiende a tener características específicas para lograr un proceso continuo.

Los sistemas termodinámicos con cambio de fase presentan dinámicas complejas debido a los cambios en los parámetros físicos del sistema y debido a que algunos de estos parámetros no son medibles por lo que son calculados por medio de correlaciones semiempíricas, por lo que el principal problema al modelar la dinámica de la condensación es cuando el cambio de fase ocurre, teniendo como consecuencia que la dinámica general de un proceso de condensación da como resultado un modelo matemático complejo. Con el fin de no complicar los modelos existentes, se presenta el cálculo fraccionario, que aunque no es una teoría nueva, ha sido presentado ampliamente para el modelado, supervisión y controlador en diferentes investigaciones (Bas and Ozarslan, 2018;

Belkhatir and Laleg-Kirati, 2017; Jesus and Machado, 2008; Mondol et al., 2018). Las ventajas que ha presentado el cálculo fraccionario y el uso de operadores de orden no entero es que permiten una mejor caracterización de varios sistemas respetando la dinámica y naturaleza del sistema.

#### 1.4.2. Alcances.

En este trabajo de investigación se estudia y se desarrolla un modelo matemático del condensador helicoidal de tubos concéntricos con flujos a contracorriente con cambio de fase que forma parte del sistema de bombas de calor que se encuentra integrado a un purificador de agua, al cual se le diseñará e implementará un sistema de diagnóstico y aislamiento de fallas, que será capaz de detectar y estimar fallas en los sensores, para que el sistema siga funcionando aún en presencia de fallas.

#### 1.4.3. Metas.

- Obtener el modelo termodinámico de orden fraccionario que describa las dinámicas de las temperaturas del condensador
- Obtener la estimación de las temperaturas del condensador utilizando observadores de orden fraccionario.
- Obtener el esquema funcional del diagnóstico y aislamiento de fallas del condensador.
- Obtener un control de orden fraccionario que regule la temperatura de salida del sistema.
- Obtener el esquema de control tolerante a falla basado en enfoque fraccionario del condensador.

### 1.5. Metodología.

- Revisión bibliográfica del modelado matemático de un condensador de tubos concéntricos.

- Revisión bibliográfica de modelado matemático utilizando el cálculo fraccionario.
- Revisión bibliográfica de observadores y controladores de orden fraccionario en sistemas termodinámicos.
- Modelado matemático de dinámica de las temperaturas de salida del condensador.
- Diseño de observadores del condensador en un esquema tipo dos.
- Diseño de un esquema de detección y aislamiento de fallas del condensador.
- Diseño de un Control PID de orden fraccionario aplicado al condensador.
- Diseño de un esquema de control tolerante a fallas en sensores aplicado al condensador.

## 1.6. Organización del documento.

Este documento de tesis se encuentra dividido en cinco capítulos, a continuación, se describe de manera puntual el contenido de cada capítulo.

En el **capítulo 2** se presenta la revisión del estado del arte sobre el modelado de sistemas termodinámicos con cambio de fase ordinario y aplicando cálculo fraccionario, observadores de orden fraccionario, control de orden fraccionario, además se presenta un marco teórico correspondiente al condensador, cálculo fraccionario, observadores fraccionarios y control de orden fraccionario, así como detección y diagnóstico de fallas, para finalizar con control tolerante a fallas.

En el **capítulo 3** se presenta el modelado matemático de orden fraccionario del condensador, el cual será la base para el desarrollo de este trabajo de investigación.

En el **capítulo 4** se presentan los resultados obtenidos del modelado, observadores, control, del esquema FDI y finalmente del esquema de control tolerante a fallas propuesto.

En el **capítulo 5** se presentan las conclusiones y trabajos futuros así como las aportaciones y los productos obtenidos de este trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Estado del arte y marco teórico.

En esta sección se presenta la revisión bibliográfica de los temas relacionados con el cálculo fraccionario y los sistemas termodinámicos que presentan cambio de fase, con la finalidad de encontrar un área de oportunidad en el desarrollo de modelo, diseño de observadores y una estrategia de control para regular la temperatura de salida del condensador que permita aprovechar las ventajas del cálculo fraccionario en estas áreas.

Los tópicos que se consideraron en la revisión bibliográfica son las siguientes: modelado de sistemas termodinámicos, modelado de sistemas utilizando el enfoque fraccionario, diseño de observadores utilizando derivadas de orden fraccionario, así como control de orden fraccionario. Así mismo, se presenta un marco teórico con la finalidad de introducir los conceptos básicos de los condensadores y el cálculo fraccionario y su aplicación en desarrollo de observadores y control.

### 2.1. Estado del arte.

#### 2.1.1. Antecedentes.

Como principales antecedentes de esta investigación en el CENIDET se han desarrollado trabajos acerca de Intercambiadores de calor sin cambio de fase como los presentados por (Escobar-Jimenez et al., 2017; Rojas, 2015; Alegría-Zamudio et al., 2018). Con sistemas con cambio de fase como el condensador presenta un modelo no lineal del condensador helicoidal donde los exponentes de la relación de Churchill fueron

modificados para incrementar la aproximación del modelo a los datos experimentales, así como un esquema de detección y diagnóstico de fallas basado en observadores de alta ganancia. (Escobar-Jiménez, 2012a) presentó un diseño de control tolerante a fallas aplicado a un evaporador helicoidal de tubos concéntricos con flujos a contracorriente, usando un banco de observadores e integrando una ley de control adaptativo que permite la continua operación de sistema aún en presencia de falla.

En cuanto al modelado de sistemas termodinámicos usando cálculo fraccionario en CENIDET se han desarrollado trabajos como los reportados en (García, 2017; Guerrero Ozuna, 2016; Hernández et al., 2016), donde (García, 2017) presentó un esquema de control tolerante a fallas aplicado a un intercambiador de calor sin cambio de fase utilizando observadores de Luenberger de orden fraccionario. En (Guerrero Ozuna, 2016) se presentó un modelo generalizado con ecuaciones diferenciales fraccionarias de un regenerador de energía utilizando el enfoque de Riemann-Liouville. (Soriano, 2016) presentó el diseño de un observador Luenberger de orden fraccionario para sistemas SISO de orden entero con parámetros conocidos.

### 2.1.2. Modelado de sistemas termodinámicos.

Usando técnicas de modelado en estado estable de la compresión de vapor (Sanama and Xia, 2022) presenta la problemática del modelado de este tipo de sistema al buscar modelar y predecir la presión y la entalpía del vapor, donde se validó satisfactoriamente con datos experimentales el modelo propuesto utilizando modelos de transferencia de energía. Los condensadores son clave en las plantas de refrigeración con aplicaciones industriales por lo que (Giovannini and Lorenzini, 2022) busca describir por medio de modelos de transferencia de calor y masa en estado estable de un equipo de enfriamiento buscando describir el fenómeno de transporte en un condensador evaporativo y predecir el poder de enfriamiento comparando los datos con los del fabricante dentro de ciertas condiciones de operación. (Benyekhlef et al., 2021) usa redes neuronales artificiales para predecir la resistencia al ensuciamiento en una planta nuclear, tomando en cuenta el coeficiente de transferencia de calor tanto interno como externo, la temperatura de enfriamiento del agua de mar, la temperatura del condensador, la presión del condensador, así como la eficiencia térmica. Para mejorar el manejo de del calor

de la tubería de calor de bucle en la industria aeroespacial y electrónica (Qu et al., 2021) presenta un modelo de transferencia de calor en estado estable de un evaporador tipo bucle asimétrico, donde la distribución del flujo másico en la línea del líquido es modificado, donde se toma en cuenta la temperatura entre las dos cámaras y la temperatura ambiente. En (DINGA et al., 2014) se presenta un modelo híbrido para describir el comportamiento dinámico de un condensador de flujo bifásico, aplicado en aires acondicionado y sistemas de refrigeración, la formulación del modelo está basada en balances de masa y energía, principios termodinámicos, no se toma en cuenta la ecuación de momentum por que la caída de presión es despreciable. Algunos parámetros y variables cuyos cambios son muy pequeños durante el funcionamiento del sistema, son cambiados a parámetros desconocidos y estos son determinados usando el método de mínimos cuadrados usando datos experimentales. Este modelo predice de manera adecuada el comportamiento dinámico del condensador y puede ser utilizado para el diseño de sistemas de control avanzados. En (Colorado et al., 2011) se presenta un modelo predictivo que describe el comportamiento dinámico de un condensador helicoidal vertical de doble tubo que es utilizado en un transformador de calor de absorción integrado a un proceso de purificación de agua. El condensador usa agua como fluido de trabajo conectado en contracorriente, donde la transferencia de calor por conducción en la pared del tubo interno es considerada y el cambio de fase se lleva a cabo en el tubo interno. El modelo se evalúa de forma dinámica para evaluar las principales variables de operación que afectan al condensador con el objetivo de optimizar y controlar el sistema. En (Flores et al., 2013) se realiza un estudio experimental para calcular el coeficiente de transferencia de calor de condensación de vapor de agua en un condensador de doble tubo helicoidal, también presenta el cálculo del coeficiente de transferencia de calor por condensación, esto utilizando dos métodos: el primero por medio del balance de energía y ecuaciones de transferencia de calor y el segundo por la técnica de Wilson plot. En (Castro, 2016) presenta el modelo matemático no lineal de un condensador de tubos concéntricos con flujos a contracorriente, aplicado a un sistema de diagnóstico de fallas en sensores, este modelo representa la dinámica híbrida del proceso, donde este modelo se basa en el balance de energía y en correlaciones empíricas, sin embargo, por las consideraciones utilizadas solo es funcional en la región de operación en la que se

encuentre el fluido. En (Garrido, 2007) se presenta un modelo dinámico para describir la transferencia de energía de un evaporador de doble tubo helicoidal vertical de flujo a contracorriente, empleado cuando el calor se recicla de un transformador térmico. El modelo dinámico considera las ecuaciones de masa, momentum y energía en los fluidos. La fracción volumétrica de vapor, el tensor de esfuerzos en la pared y el coeficiente convectivo de transferencia de calor son obtenidos de correlaciones empíricas. Un modelo por Redes neuronales es utilizado para el cálculo de las propiedades termodinámicas en cada punto de la malla, tanto en el flujo de una sola fase como en el flujo bifásico. En (Colorado-Garrido et al., 2009) se presenta un modelo predictivo que describe el comportamiento de la transferencia de calor y la dinámica del fluido de un evaporador helicoidal vertical de doble tubo, el modelo considera las ecuaciones de continuidad, momentum y energía en cada flujo. La presión del tubo interno y la temperatura en anillo de entrada son dos parámetros importantes para determinar el incremento de la temperatura del vapor de salida. En (Escobar-Jiménez, 2012b) presenta el modelo no lineal de un evaporador de doble tubo, que se compone de dos tubos concéntricos circulares con líquido que fluye en el interior del tubo interno y el otro líquido que fluye dentro del espacio anular entre los tubos. Su aplicación es la generación de vapor sobrecalentado para suministrarlo al absorbedor de una bomba de calor. Considera el cálculo en línea de las variables, flujo de calor y coeficiente de transferencia.

### 2.1.3. Modelado de sistemas con cálculo fraccionario.

(Hanif, 2022) presenta un enfoque computacional para el análisis de la transferencia de calor fraccionario de fluidos de Maxwell con calentamiento constante, el análisis se realiza aplicando la derivada de Caputo-Fabrizio. (Viera-Martin et al., 2022) presenta un análisis de las redes neuronales y su aplicación al cálculo fraccionario, donde las redes neuronales artificiales son una herramienta para el modelado de sistemas ampliamente utilizado en las ciencias y la ingeniería donde se habla del método aplicado a procesos de transferencia de calor. Utilizando las derivadas de Caputo-Fabrizio y Atangana-Baleanu (Siddique et al., 2021) realiza un análisis de transferencia de energía de convección en flujos en una placa vertical infinita con fenómeno de transporte térmico, determinando las expresiones del número de Nusselt y el coeficiente de fricción.

(Mondol et al., 2018) utiliza el cálculo fraccionario para modelar la ley de enfriamiento de Newton con derivadas de orden arbitrario, demostrando el aumento de la viscosidad del líquido (agua, aceite de mostaza y mercurio) cuando se enfría. En (Alkahtani, 2016) se presenta el análisis de circuito por medio de las leyes de Kirchhoff del circuito de Chua, nuevos comportamientos caóticos fueron obtenidos por medio de las simulaciones realizadas variando los valores del orden fraccionario. El autor concluye que el operador fraccionario Atangana-Baleanu es adecuado para modelar problemas reales. El uso del cálculo fraccionario para modelar sistemas físicos complejos también ha sido considerado por (Gomez-Aguilar et al., 2016), donde los autores demuestran la existencia de heterogeneidades en los componentes electrónicos que causan efectos disipativos irreversibles al aplicar CF al modelado de circuitos electrónicos y cargas no lineales. En (Žecová and Terpák, 2015) utiliza la definición de Grünwald-Letnikov para obtener el modelo generalizado para la conducción de calor; presenta los resultados variando el orden de las derivadas comparado con los datos experimentales. Los autores en (Hammar et al., 2015) tratan con identificación de sistemas discretos de orden fraccionario, basado en modelos Hammerstein no lineal, dichos sistemas consisten en un bloque estático no lineal, seguido de un sistema dinámico lineal. En (Zecova et al., 2014) los autores presentan un modelo termodinámico de transferencia de calor uni-dimensional usando integrales y derivadas de orden fraccionario, utilizando la definición de Grünwald-Letnikov, comprueba que involucrando una derivada fraccionaria, la solución del sistema es más robusto. En (Wang et al., 2012) se presentan las ecuaciones diferenciales fraccionarias en el tiempo que describen la conducción del calor en un medio fractal, como fibras de lana y pelo de oso polar usando la derivada de Riemann-Liouville. Usando la derivada de Grünwald-Letnikov (Sierociuk and Petráš, 2011) modela un sistema de transferencia de calor utilizando redes neuronales artificiales.

#### 2.1.4. Observadores de orden fraccionario.

El cálculo fraccionario no solo es utilizado en el modelado de sistemas sino también en el diseño de observadores, (Khan and Khan, 2022) presenta un observador terminal de tiempo finito aplicado a un sistema caótico de orden fraccionario, donde su tiempo

de convergencia depende solamente de los parámetros considerados. (Liu et al., 2022) presenta el diseño de un observador funcional impulsivo para sistemas no lineales de orden fraccionario que satisfacen restricciones cuadráticas incrementales. (Liang et al., 2022) presenta observadores de estado difusos de orden fraccionario para la estimación de estados no medibles. En (Xiong et al., 2021) se presenta el diseño del algoritmo de un observador *Super-Twisting* discreto, el diseño está basado en observadores de orden fraccionarios para sistemas no lineales, con el cual lograron disminuir el *chattering* por medio del método fraccionario de Adams-Moulton. En (Alegria-Zamudio et al., 2019) se presenta la estimación de un condensador utilizando observadores de alta ganancia fraccionario utilizando la definición de Atangana-Baleanu demostrando la efectividad del esquema propuesto, en (Ouhaine et al., 2017) los autores utilizaron el modelado de la transferencia de calor en espacio estado para un sistema fotovoltaico híbrido usando ecuaciones diferenciales parciales de orden fraccionario y aplicaron un observador de orden reducido fraccionario en el dominio del tiempo para estimar la temperatura en diferentes nodos. En cuanto a aplicar los observadores a sistemas mecánicos (Coronel-Escamilla et al., 2017) propone un observador de estado fraccionario con ganancia constante para estimar la fuerza ejercida sobre un sistema mecánico midiendo solo desplazamiento y lo aplica a un sistema masa-resorte. (Djehali et al., 2016) propone un observador en modos deslizantes para la detección y estimación de fallas de sistemas de orden fraccionario no lineales, donde el tiempo finito de convergencia es definido con la teoría de estabilidad de Lyapunov. Al introducir cálculo fraccionario al diseño del observador garantiza que los estados estimados alcancen los estados del sistema original, logrando que el error de estimación converja a cero. En cuanto a la detección y diagnóstico de falla (Pisano et al., 2014) considera un conjunto de observadores dinámicos discontinuos, aplicado en la detección y aislamiento de fallas, los autores proponen observadores en modos deslizantes de segundo orden para algunas clases de dinámicas de cambio incierto de orden fraccionario; usando la función de Lyapunov para la convergencia de los observadores. En cuanto a la estimación de estados (Dzieliński and Sierociuk, 2006) presenta el diseño de un observador tipo Luenberger para sistemas de orden fraccionario discretos utilizando la derivada de Grünwald-Letnikov.

### 2.1.5. Control fraccionario.

El cálculo fraccionario es el área de las matemáticas que maneja las derivadas e integrales de cualquier orden arbitrario (orden fraccionario o entero, real o complejo) y en los últimos años también ha sido utilizado en el desarrollo de controladores, en (Liang et al., 2022) presenta un control difuso adaptable basado en observadores con retroalimentación de salida para una clase de sistemas no lineales de orden fraccionario con restricciones de estado completo. (Vu et al., 2022) presenta un controlador PI de orden fraccionario (FOPI) aplicado en sistemas de control paralelos en cascada para sistemas estables, inestables y sistemas con retardos. (Jamil et al., 2022) presenta un review de controladores PI de orden fraccionario aplicado en control de temperatura en sistemas de calentamiento de inducción, control de biorreactores, etc, mostrando las ventajas que presenta el FOPI en cuanto a producción, calidad y precisión. (Rhouma et al., 2022) presento el diseño de un controlador  $\dot{\text{predictivo}}$  robusto fraccionario para procesos con incertidumbres de orden fraccionario. En (Alinezhad and Allahviranloo, 2017) los autores trabajan con control óptimo fraccionario con ambigüedad, modelándola con métodos difusos, determinando el mejor control difuso que satisfaga la dinámica del sistema y minimizando el índice de rendimiento difuso. (Abdolhosseini and Bigdeli, 2014) presenta la implementación de un controlador funcional predictivo en sistemas de orden fraccionario, considerando el efecto de varias aproximaciones como el análisis de sensibilidad y sintonización de los parámetros del controlador funcional predictivo, tomando en cuenta los efectos del retardo y el análisis del ruido del sistema de orden fraccionario comprobaron que el sistema de orden fraccionario y el control da resultados aceptables. En (Shen et al., 2013) se presenta un control robusto tolerante a fallas en actuadores para sistemas de orden fraccionario con incertidumbre, donde el controlador asegura que el sistema cerrado resultante sea estable en presencia de una falla. El método de control más común utilizado en los intercambiadores de calor es el control retroalimentado PID, sin embargo este no puede ser un control de calidad debido al retardo y a la sobre compensación del controlador, por lo que en (Petráš, 2011) se muestra la mejora en la calidad del controlador PID utilizando el CF, modificando a un orden no entero en la parte diferencial e integral, comparando el controlador PID y el  $PI^\alpha D^\beta$  fraccionario en lazo cerrado de un sistema. En (Boudjehem and Boudjehem,

2010) se presenta un sistema de orden fraccionario en un control predictivo basado en modelo (MPC) para describir las dinámicas de la planta usada para construir la ley de control. Se muestra que el uso del MPC de orden fraccionario alcanza mejor desempeño de control comparado con el MPC convencional que usa modelos de orden entero. Los autores en (Jesus and Machado, 2008) comparan diferentes metodologías de control aplicados a un sistema de difusión de calor basado en los conceptos de CF, comparando el  $PI^\alpha D^\beta$  fraccionario y el Smith Predictor utilizando la derivada de Grünwald-Letnikov. En (Qu et al., 2006) se propone un modelo matemático que provee ajuste paramétrico y un método de control basado en modelo utilizando control prealimentado.

## 2.2. Marco teórico.

### 2.2.1. Modelado de sistemas termodinámicos.

La termodinámica estudia la cantidad de transferencia de calor cuando un sistema pasa por un estado de equilibrio a otro. Existen tres mecanismos básicos de la transferencia de calor:

- *La conducción* se define como la transferencia de energía de las partículas más energéticas de una sustancia hacia las partículas más cercanas.
- *La convección* es el modo de transferencia de calor entre una superficie sólida y el líquido o gas adyacente que está en movimiento.
- *La radiación* es la energía emitida por la materia en forma de ondas electromagnéticas o fotones.

El calor se puede definir como la forma de energía se puede transferir de un sistema a otro que resulta de la diferencia de temperatura entre dos sistemas. Para que se pueda dar la transferencia de calor debe existir una diferencia de temperatura como se muestra en la Figura 2.1, y ésta se puede definir como la fuerza impulsora para la transferencia de calor.

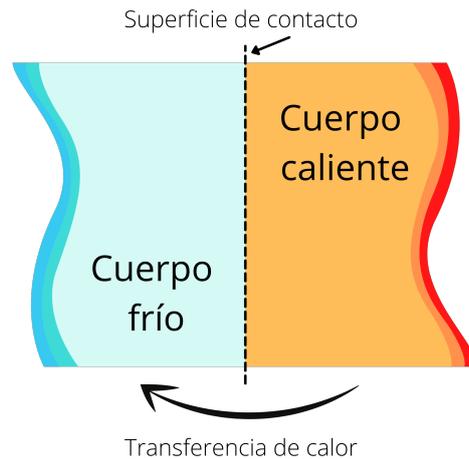


Figura 2.1: Transferencia de calor.

Las calderas, los intercambiadores de calor, *los condensadores*, los radiadores, los calentadores, los hornos, los refrigeradores, los evaporadores y los colectores solares son equipos de transferencia de calor y son diseñados tomando en cuenta el análisis de transferencia de calor y su análisis se puede realizar de forma experimental o de forma analítica por medio de análisis y cálculos. Por lo tanto, la búsqueda de descripciones de este tipo de sistemas comprende ecuaciones que relacionan entre sí los cambios de las variables importantes.

Cuando se trabaja con equipos de transferencia de calor es importante considerar las condiciones reales de operación, así como es importante considerar las degradaciones graduales en el funcionamiento del equipo, para tener un análisis realista del sistema, por lo tanto, la solución obtenida por el modelo matemático no debe aplicarse para situaciones que no cumple con las suposiciones originales.

### 2.2.2. Proceso de purificación de agua.

Los sistemas de purificación de agua asistidos por bombas de calor aprovechan el calor útil del absorbedor para llevar a cabo la evaporación del agua impura. Esto presenta grandes ventajas sobre los sistemas de purificación de agua tradicionales, ya que operan con energía térmica de baja calidad como lo presenta (Huicochea et al., 2004). El calor útil de la bomba de calor es producto de la reacción exotérmica entre la mezcla de Trabajo Bromuro de Litio ( $LiBr$ ) y el fluido del trabajo, donde el agua

impura pasa a través del absorbedor donde el agua impura absorbe una cantidad de calor de la mezcla de trabajo y un cambio de fase resulta de esto, de estado líquido a estado gaseoso. El destilado que proviene del absorbedor es condensado obteniendo así agua purificada como producto final, la Figura 2.2 muestra el ciclo de purificación del agua del sistema.

## Proceso de purificación de agua



Figura 2.2: Ciclo de purificación de agua.

Una bomba de calor es una máquina que extrae calor de un sistema de calor a cierta temperatura y libera calor a una temperatura mayor. Un sistema de bombas de calor por absorción trabaja con el ciclo termodinámico que se presenta en la Figura 2.3. El ciclo de trabajo de las bombas de calor comienza cuando un calor de desecho de baja calidad entra al evaporador y otra al generador ( $Q_{GE}$ ). En el generador la mezcla es concentrada en el fluido de trabajo donde parte de ese fluido de trabajo es evaporado como resultado del intercambio de calor con la fuente de calor de desecho, para así después ser enviado al condensador donde será condensado al eliminar una

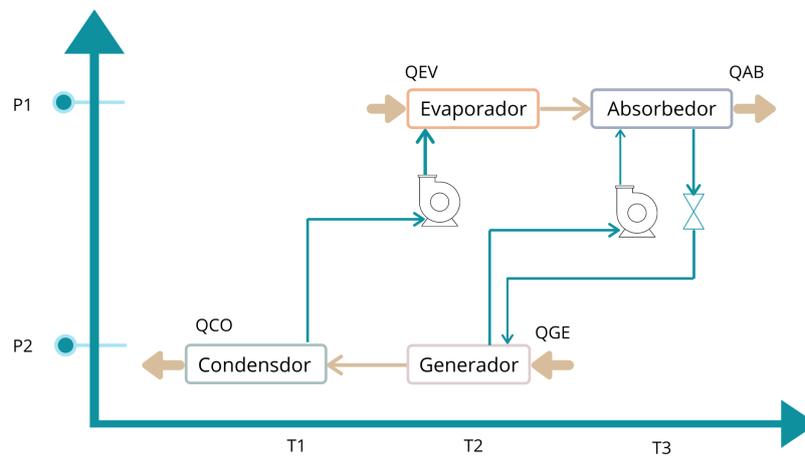


Figura 2.3: Bombas de calor.

cantidad de calor ( $Q_{CO}$ ), donde el condensado obtenido es bombeado al evaporador ( $Q_{EV}$ ) donde se evapora para pasar al absorbedor donde será absorbido por la mezcla diluida de fluido de trabajo que viene del generador, liberando así una cantidad de calor útil ( $Q_{AB}$ ). Finalmente, la mezcla de trabajo pasa al generador para comenzar el ciclo nuevamente. En la Figura 2.4 se definen los elementos que conforman las bombas de calor.



Figura 2.4: Funciones de los componentes de las bombas de calor por absorción.

### 2.2.3. Proceso de condensado.

El fenómeno conocido como condensación se da cuando la temperatura de un vapor se reduce por debajo de su temperatura de saturación,  $T_{sat}$ . Esto suele ocurrir cuando el vapor entra en contacto con una superficie sólida cuya temperatura está por debajo de la temperatura de saturación,  $T_s$ .

En la naturaleza se pueden encontrar dos formas distintas de condensación: en película y por gotas. En el primero el condensado moja la superficie y forma una película de líquido sobre la superficie, la cual resbala hacia abajo debido a la gravedad, y el espesor de la película aumenta en la dirección del flujo a medida que más vapor se condensa sobre ella. En la condensación por gotas el vapor condensado forma pequeñas gotas sobre la superficie, en lugar de una película continua, hasta que la superficie se cubre de un número incontable de gotas de diferentes diámetros.

Cuando ocurre la condensación en película la superficie se cubre por ésta y como el espesor de esta va aumentando se forma una “pared líquida” entre la superficie sólida y el vapor que se comporta como una resistencia a la transferencia de calor. El calor

de vaporización  $h_{fg}$  liberado a medida que el vapor se condensa, debe pasar a través de esta resistencia antes de que pueda llegar a la superficie sólida y ser transferido al medio que está del otro lado.

Durante la condensación, algunas variables como la densidad, el coeficiente global de transferencia de calor y la capacidad calorífica sufren cambios bruscos, ya que cuando el fluido se condensa y experimenta el cambio de fase las propiedades físicas del sistema tienen cambios abruptos que son difíciles de modelar, por lo que es importante considerar las tres regiones de operación del fluido que se encuentran en la sección interior del tubo al aplicar las relaciones empíricas correspondientes para el cálculo de los coeficientes de transferencia de calor para cada sección.

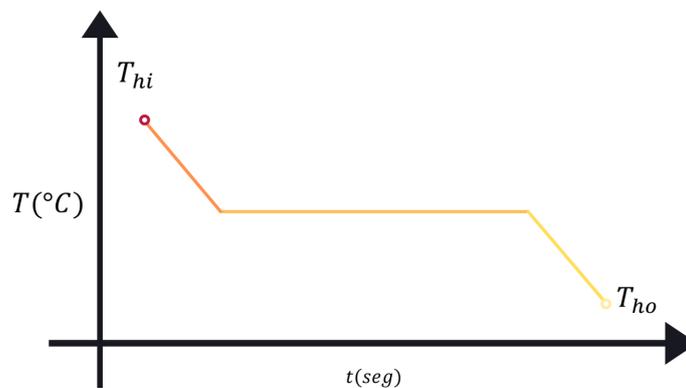


Figura 2.5: Proceso de condensación.

#### 2.2.4. Condensador helicoidal de tubos concéntricos.

Un condensador se puede definir como un intercambiador de calor que tiene como función cambiar de fase gaseosa a fase líquida el fluido que lo recorra mediante un intercambio de calor. La condensación se puede producir utilizando aire mediante el uso de ventiladores (aero-condensadores) o con un fluido de trabajo. El fluido más común utilizado como refrigerante es el agua.

El condensador considerado es un IC helicoidal de doble tubo a contracorriente y el equipo está formado por dos tubos concéntricos de acero. En la Figura (2.6) se muestra las direcciones de los flujos del condensador, en el tubo interno entra vapor saturado el cual será enfriado por debajo de su temperatura de saturación ( $T_{sat}$ ) y cambiará de

fase a lo largo del condensador, mientras que en el tubo externo del condensador entra agua de enfriamiento el cual absorbe el calor liberado en el proceso de cambio de fase.

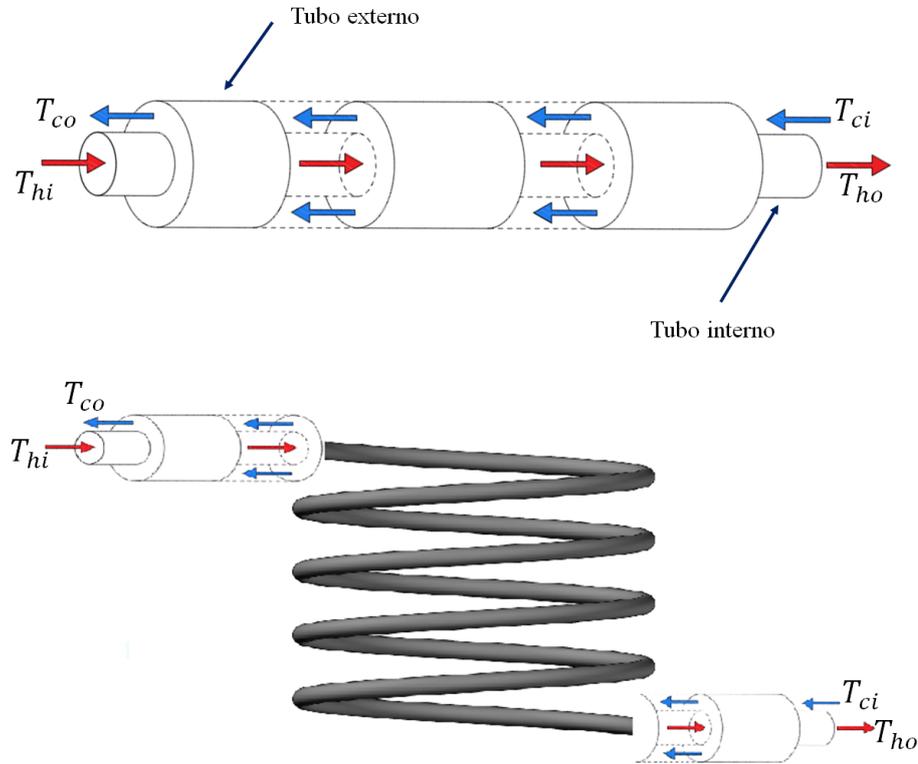


Figura 2.6: Configuración de los flujos en el condensador.

### 2.2.5. Cálculo fraccionario.

El cálculo fraccionario es la parte del análisis matemático que se encarga del estudio de los llamados operadores de integración y derivación fraccionarios sobre dominios de funciones reales y complejas. Las integrales y derivadas fraccionarias tienen propiedades no-locales, y se refiere a cuando lo que ocurre en un instante de tiempo depende de un promedio en un intervalo que contiene ese instante, lo que significa que las derivadas fraccionarias dependen del dominio y las condiciones de contorno, por lo que considera la historia y la naturaleza de cualquier sistema o fenómeno físico, lo que conlleva que se pueden modelar sistemas con efectos no locales en el tiempo o efectos de memoria ya que la evaluación en un instante de tiempo depende de los valores pasados de la función (Aguilar, 2012).

La derivada fraccional es tan antigua como la formulación ordinaria. En 1695 L'Hopital se preguntó qué quiere decir  $\frac{d^n f}{dx^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$ , Leibniz discutió el resultado como “una aparente paradoja a la cual algún día se obtendrán consecuencias útiles”. Desde entonces varios investigadores trataron de ponerle una definición a la derivada fraccional; entre ellos Riemann y Liouville (Rocha, 2003), la mayoría de ellos utiliza la forma integral para la derivada fraccionaria. La primera aplicación de cálculo fraccionario fue hecha por Abel en 1823 (Ross, 1974), aplicando el cálculo fraccionario en la solución de una ecuación integral que se origina en la formulación del problema de tautocrona: el cual consiste en determinar la forma de la curva de modo que el tiempo de descenso de un objeto que se desplaza hacia abajo de la curva bajo gravedad uniforme sea independiente del punto de inicio del objeto.

Al ser los operadores fraccionarios una generalización de los operadores ordinarios se pierden algunas propiedades fundamentales (Aguilar, 2012) que son:

- No existe una interpretación geométrica y física clara.
- La ley de los índices ( $D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$ ) solo es válida para espacios de funciones muy específicas.
- La derivada del producto de dos funciones es difícil de obtener.
- La regla de la cadena no se puede aplicar de manera directa.

Existen funciones que son utilizadas en CF. La función Gamma que generaliza la expresión de los factoriales, y la función que generaliza a la función exponencial es la función de Mittag-Leffler.

### **Función Gamma**

La función gamma está definida de la siguiente manera (Petráš, 2011):

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt,$$

es decir:

$$\Gamma(n) = (n - 1)!, \tag{2.1}$$

donde  $n$  es un número real positivo. La ecuación anterior (2.1) la reescribimos como:

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n), \quad (2.2)$$

con esto podemos demostrar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2!, \\ &\vdots \\ \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) = n!, \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación (2.2) representa la generalización de la función factorial.

### Función Mittag-Leffler

Otra función que juega un rol importante en el cálculo fraccionario fue introducida por Humbert y Agarwal en 1953. Es la función de Mittag-Leffler (Petráš, 2011):

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2.3)$$

Para  $\beta = 1$  obtenemos la función de Mittag-leffler de un parámetro:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_{\alpha}(z), \quad (2.4)$$

donde  $\alpha > 0$ .

#### 2.2.6. Integral fraccionaria.

A continuación, se presentan algunas definiciones de los operadores de integración fraccionaria.

La  $n$ -enésima derivada de una función  $f$  está definida recursivamente por:

$$D^n f(t) = D[D^{n-1} f(t)], \quad n \in N. \quad (2.5)$$

En el caso de que  $n = 0$  se obtiene la función original  $f(t)$ , lo que garantiza que la función no está siendo alterada.

De igual manera la  $n$ -enésima integral de una función  $f$  está definida recursivamente por:

$$I^n f(t) = \int_0^t I^{n-1} f(t) dt, \quad n \in N, \quad (2.6)$$

en donde  $D^0 f(t) = I^0 f(t) dt$ .

Cauchy planteó una manera de describir la Ec. 2.6 y demostró que  $I^n f(t)$  puede ser reducida a una integral de convolución.

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

donde:

- $t$  y  $0$  son los límites de integración.
- $n$  es el orden de la integración.

Ésta se conoce como la fórmula de Cauchy y sirve de antecedente de la integral fraccionaria.

### **Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville.**

La forma clásica del cálculo fraccionario está dada por la integral de Riemann-Liouville (RL). Considerando la Ec. 2.7 y cambiando a  $n$  por un número  $\alpha < 0$  y remplazando al factorial por la función Gamma, la definición de integral por Riemann-Liouville está dada por:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.8)$$

donde:

- $t$  y  $a$  son los límites de integración, por lo tanto  $t > a$ .
- $\alpha$  es el orden de la integral fraccionaria.
- $\Gamma$  es la función Gamma.

### 2.2.7. Derivada fraccionaria.

#### Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville.

El operador de derivación generalizado se caracteriza por sus efectos no locales debido a la presencia de una integral en su formulación la cual depende del intervalo donde este definida como se muestra en la Ec. 2.9. La derivada de Riemann-Liouville presenta un kernel de potencia ( $tx^\alpha$ ), es importante recalcar que los sistemas físicos no siguen la distribución de la ley de potencia, sin embargo se puede aplicar a sistemas de epidemiología, geología, hidrología, problemas caóticos, fractales, térmicos (Atangana and Gómez-Aguilar, 2018). La siguiente definición es la definición de derivada de Riemann-Liouville de orden  $\alpha$  la cual se presenta en la Ec. 2.9:

$${}^RL D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (2.9)$$

donde

- $n$  es un número que satisfaga la siguiente desigualdad  $n - 1 < \alpha \leq n$ .
- $\alpha$  es el orden de la derivada fraccionaria.
- $a$  y  $t$  son los límites de operación  ${}^RL D_t^\alpha f(t)$ .
- $\Gamma(\cdot)$  es la función Gamma.

Cuando  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  el caso del cálculo ordinario se recupera. Esta derivada fue propuesta por Riemann y Liouville y es la derivada de la convolución de una función dada y un kernel de potencia. En esta definición de derivada fraccionaria clásica, el operador es no local. Como la integral y las derivadas fraccionarias no dependen solo del comportamiento de la función en un solo punto sino del comportamiento de una región más amplia, esta no localidad es usualmente útil modelando procesos físicos que tienen efectos de memoria (Baleanu, 2020).

#### Derivada Fraccionaria de Caputo.

Esta definición de derivada fraccionaria utiliza las mismas operaciones de la definición de Riemann-Liouville pero invirtiendo el orden de la aplicación. En esta derivada

las condiciones iniciales de la función son de orden entero.

La derivada fraccionaria de Caputo (C) para una función  $f(t)$ , está definida como:

$${}_0^C D_t^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\eta)}{(t-\eta)^{\gamma-n+1}} d\eta, \quad (2.10)$$

donde  $n = 1, 2, \dots \in N$  y  $n-1 < \gamma \leq n$ , donde  $\gamma$  representa el orden fraccionario.

### Derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio.

Al cambiar el kernel  $(t-\eta)^\gamma$  con un kernel exponencial, definido con la función  $\exp(-\frac{\gamma}{1-\gamma}t)$  y  $\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}$  por  $\frac{M(\gamma)}{1-\gamma}$ , de la derivada de Caputo, se tiene la derivada de Caputo-Fabrizio (Caputo and Fabrizio, 2015):

$${}_0^{CF} D_t^\gamma f(t) = \frac{M(\gamma)}{(1-\gamma)} \int_0^t f^{(n)}(\tau) \exp\left[-\frac{\gamma(t-\tau)}{1-\gamma}\right] d\tau, \quad (2.11)$$

donde  $M(\gamma)$  es una función de normalización tal que  $M(0) = M(1) = 1$ . La derivada es cero cuando  $f(t)$  es constante, y al contrario de la derivada de Caputo el kernel no tiene singularidad para  $t = \tau$ .

El kernel utilizando en la derivada de Caputo-Fabrizio, es un kernel exponencial. El decaimiento exponencial ocurre naturalmente en una amplia variedad de situaciones, muchos procesos de decaimiento, a menudo se tratan como exponencial, y son realmente solo exponenciales siempre y cuando la muestra sea grande y la ley de grandes números se mantenga. Algunas de las aplicaciones físicas donde funciona el kernel exponencial son reacciones químicas, la carga eléctrica, dinámica de fluidos, luminiscencia, farmacología y toxicología, física óptica, radioactividad, termoelectricidad y vibraciones (Atangana and Gómez-Aguilar, 2018).

### Derivada Fraccional de Atangana-Baleanu.

Esta derivada también se le considera como un filtro regulador fraccionario de memoria infinita, la no-localidad del kernel permite una mejor descripción de la memoria dentro de la estructura y los medios con diferentes escalas.

La derivada fraccionaria de Atangana-Baleanu en el sentido de Liouville-Caputo

está dada por:

$${}_{0}^{ABC}D_t^\gamma f(t) = \frac{B(\gamma)}{1-\gamma} \int_0^t f^{(n)}(\tau) E_\gamma \left[ -\gamma \frac{(t-\tau)^\gamma}{1-\gamma} \right] d\tau, \quad (2.12)$$

donde  $f \in H^1(a, b)$ ,  $b > a$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ .  $B(\gamma)$  es una función de normalización y  $\gamma$  es el orden de la derivada.

La derivada de Atangana-Baleanu, utiliza un kernel Mittag-Leffler, el cual es una extensión de la función exponencial, todos los fenómenos físicos descritos por la ley exponencial pueden ser descritas de manera no-local usando la función generalizada de Mittag-Leffer, ésta es esencial para describir comportamientos de largos periodos de tiempo. Este kernel es una generalización de ambos kernels: el exponencial y el de potencia (Atangana and Gómez-Aguilar, 2018).

### 2.2.8. Estabilidad de sistemas fraccionarios no lineales.

La estabilidad de sistemas no lineales de orden fraccionarios es muy compleja y es un tema de importancia en los sistemas de control, sin embargo el análisis de estabilidad de sistemas no lineales de orden fraccionario se mantienen como un problema abierto a estudio, por lo que, (Liu et al., 2016) propone un análisis de estabilidad a sistemas de orden fraccionario no lineales con la derivada de Riemann-Liouville aplicando el método directo de Lyapunov, donde presentan condiciones suficientes en la estabilidad asintótica de sistemas de orden fraccionario no lineal.

**Propiedad 2.1.** Si  $p > q > 0$ , donde la Ec. 2.13:

$${}_{t_0}D_t^q ({}_{t_0}D_t^{-p} x(t)) = {}_{t_0}D_t^{q-p} x(t), \quad (2.13)$$

se mantiene para funciones “suficientemente buenas” de  $x(t)$ . Esta relación se mantiene si  $x(t)$  es integrable. En (Duarte-Mermoud et al., 2015; Qin et al., 2014) el autor propone los siguientes lemas con la derivada fraccionaria de Caputo con funciones generales de Lyapunov.

**Lemma 2.2.1.** (Duarte-Mermoud et al., 2015). Si  $x(t) \in \mathbf{R}$  es una función continua y diferenciable. Entonces para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ ,

$$\frac{1}{2} {}_t^C D_t^q x^2(t) \leq x(t) {}_t^C D_t^q x(t), \quad \forall q \in (0, 1). \quad (2.14)$$

**Lemma 2.2.2.** (Qin et al., 2014). *Se tiene que  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  es un vector de una función diferenciable. Entonces, para cualquier instante  $t \geq t_0$ , la siguiente relación se mantiene.*

$$\frac{1}{2} {}_t^C D_t^q (x^T(t) P x(t)) \leq x^T(t) P {}_t^C D_t^q x(t), \quad (2.15)$$

donde  $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$  es constante, cuadrada, simétrica y una matriz definida positiva. Donde estos resultados fueron extendidos a la definición de derivada fraccionaria a de Riemann-Liouville por (Liu et al., 2016).

**Lemma 2.2.3.** *Si se tiene  $x(t) \in \mathbf{R}$  es una función continua y diferenciable. Si la derivada de  $x(t)$  es integrable, entonces la siguiente desigualdad se mantiene*

$$\frac{1}{2} {}_t^C D_t^q x^2(t) \leq x(t) {}_t^C D_t^q x(t), \quad \forall q \in (0, 1), \forall t \geq t_0. \quad (2.16)$$

*Prueba.* Para probar la relación 2.16 es equivalente probar que

$$x(t) {}_t^C D_t^q x(t) - \frac{1}{2} {}_t^C D_t^q x^2(t) \geq 0, \quad \forall q \in (0, 1). \quad (2.17)$$

De acuerdo con la fórmula de Newton-Leibniz:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}(\tau) d\tau = x(t_0) + {}_t^C D_t^{-1} x(t), \quad (2.18)$$

reemplazando 2.18 en 2.9, se tiene

$$\begin{aligned} {}_t^C D_t^q x(t) &= {}_t^C D_t^q x(t_0) + {}_t^C D_t^{q-1} \dot{x}(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-q)} \times \left[ \frac{x(t_0)}{(t-t_0)^q} + \int_{t_0}^t (t-\tau)^{-q} \dot{x}(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

por lo tanto

$$x(t) {}_t^C D_t^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \times \left[ \frac{x(t)x(t_0)}{(t-t_0)^q} + \int_{t_0}^t (t-\tau)^{-q} x(t) \dot{x}(\tau) d\tau \right]. \quad (2.20)$$

Realizando cálculos similares al segundo término de la desigualdad 2.17

$$\frac{1}{2} {}_{t_0}D_t^q x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \times \left[ \frac{x^2(t_0)}{2(t-t_0)^q} + \int_{t_0}^t (t-\tau)^{-q} x(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau \right], \quad (2.21)$$

por lo tanto, la desigualdad presentada en la Ec.2.17 puede ser reescrita como

$$\frac{1}{\Gamma(1-q)} \left[ \frac{x(t)x(t_0) - \frac{1}{2}x^2(t_0)}{(t-t_0)^q} + \int_{t_0}^t (t-\tau)^{-q} (x(t) - x(\tau)) \dot{x}(\tau) d\tau \right] \geq 0, \quad (2.22)$$

integrando por partes el segundo término de la Ec. 2.22

$$\int_{t_0}^t (t-\tau)^{-q} (x(t) - x(\tau)) \dot{x}(\tau) d\tau = \frac{(x(t) - x(t_0))^2}{2(t-t_0)^q} + \frac{q}{2} \int_{t_0}^t \frac{(x(t) - x(\tau))^2}{(t-\tau)^{q+1}} d\tau \quad (2.23)$$

Por lo que, la Ec.2.22 se reduce a

$$\frac{1}{\Gamma(1-q)} \left[ \frac{x^2(t)}{2(t-t_0)^q} + \frac{q}{2} \int_{t_0}^t \frac{(x(t) - x(\tau))^2}{(t-\tau)^{q+1}} d\tau \right] \geq 0. \quad (2.24)$$

Por lo que, la expresión 2.24 es verdadera, y esto completa la prueba.

*Remark 2.1.* En el caso cuando  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ , el Lemma 2.2.3 sigue siendo cierto, entonces tenemos

$$\frac{1}{2} {}_{t_0}D_t^q (x^T(t)x(t)) \leq x^T(t) {}_{t_0}D_t^q x(t), \quad \forall q \in (0, 1), \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.25)$$

**Lemma 2.2.4.** *Si  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  es un vector de una función diferenciable. La siguiente desigualdad se mantiene*

$$\frac{1}{2} {}_{t_0}D_t^q (x^T(t)Px(t)) \leq x^T(t)P {}_{t_0}D_t^q x(t), \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.26)$$

donde  $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$  es una matriz semi-definida positiva, constante, cuadrada y simétrica.

### 2.2.9. Estabilidad asintótica de sistemas no lineales de orden fraccionario

Un criterio algebraico simple de estabilidad asintótica está dado al tomar la derivada de orden entero a la función de Lyapunov. Considere el siguiente sistema fraccionario no lineal (Liu et al., 2016):

$${}_{t_0}D_t^q x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad (2.27)$$

donde  $0 < q < 1$ ,  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  es el vector de estados,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  es una matriz constante y  $f(t, x) \in \mathbf{R}^n$  con  $f(t, 0) = 0$  es continuamente Lipschitz, que existe una constante no negativa  $L$  tal que para cualquier  $x, y \in \mathbf{R}^n$ ,

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \|. \quad (2.28)$$

**Theorem 2.2.5.** *Supongamos que  $f$  es continuamente Lipschitz, la solución trivial del sistema de la Ec. 2.27 es asintóticamente estable si existe una matriz definida positiva  $P$  tal que la siguiente desigualdad se mantenga.*

$$A^T P + PA + \eta I_n < 0, \quad (2.29)$$

donde  $\eta = L^2 + \| P \|^2$ .

*Prueba.* Se escoge la función de Lyapunov:  $V(t) = {}_{t_0}D_t^{q-1}(x^T(t)Px(t))$ .

Del Lema 2.2.4 obtenemos la derivada  $V(t)$  a lo largo de las trayectorias del sistema 2.27 como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= {}_{t_0}D_t^q(x^T(t)Px(t)) \leq 2x^T P {}_{t_0}D_t^q x(t) \\ &= x^T(t)(PA + A^T P)x(t) + 2x^T(t)Pf(t, x(t)). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se obtiene de la Ec. 2.28 que

$$\begin{aligned} 2x^T(t)Pf(t, x(t)) &\leq x^T(t)P^2x(t) + f^T(t, x(t))f(t, x(t)). \\ &\leq (L^2 + \| P \|^2) \| x(t) \|^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

De la Ec. 2.29, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq x^T(t)(A^T P + PA + \eta I_n)x(t) < 0, \\ \forall(t, x) &\in \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^n - \{0\}). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Por lo tanto, la solución trivial del sistema de orden fraccionario es asintóticamente estable, lo que queda demostrado y completa la prueba.

### 2.2.10. Observadores y el esquema FDI.

En términos generales, un observador es un sistema dinámico que proporciona la estimación asintótica de los estados actuales a partir del conocimiento de las entradas y salidas del sistema.

#### Observador adaptativo.

Un observador adaptativo es un algoritmo recursivo utilizado para estimar los estados de un sistema con parámetros desconocidos y/o para estimar estados y los parámetros desconocidos. En (Besançon, 2000), el autor propone un observador adaptativo que permite la estimación asintótica de los estados a pesar de tener entradas desconocidas, considerando sistemas no lineales de la forma dada en 2.33:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \alpha(y, \zeta, u, t) + \beta(y, \zeta, u, t)\theta \\ u &\in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p, \theta \in \mathbb{R}^q, \alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{\zeta} &= Z(y, \zeta, u, t), \zeta \in \mathbb{R}^r, \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son funciones no lineales y las variables  $y$  son las salidas medibles,  $u$  la entrada de control,  $\zeta(t)$  es el vector de estados no medibles y  $\theta$  es el vector de entradas desconocidas, el observador adaptativo no lineal presentado por (Besançon, 2000) se presenta en la ec. 2.34

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}} &= \alpha(y, \hat{\zeta}, u, t) + \beta(y, \hat{\zeta}, u, t)\hat{\theta} - k_y(\hat{y} - y), k_y > 0, \\ \dot{\hat{\zeta}} &= Z(y, \hat{\zeta}, u, t), \\ \dot{\hat{\theta}} &= -k_\theta \beta^T(y, \hat{\zeta}, u, t)(\hat{y} - y)^T, k_\theta > 0, \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas medidas del sistema (estados medibles),  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de estados no medibles,  $u \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas medidas y acotadas y  $\theta \in \mathbb{R}^q$  es el vector de parámetros desconocidos,  $\alpha(y, u, t)$  y  $\beta(y, u, t)$  son dos funciones globalmente Lipchitz con respecto a  $\zeta(t)$ . A continuación presentamos la generalización del observador adaptativo, considerando el sistema no lineal de orden fraccionario de la forma presentada en la Ec. 2.35:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^q y &= \alpha(y, \zeta, u, t) + \beta(y, \zeta, u, t) \theta, \\ u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p, \theta \in \mathbb{R}^q, \alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^n, \\ {}_0D_t^q \zeta &= Z(y, \zeta, u, t), \quad \zeta \in \mathbb{R}^r, \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde  $y(t)$  es el vector de salidas medidas del sistema,  $\zeta(t)$  es el vector de estados no medibles,  $u$  es el vector de entradas medidas y acotadas,  $\theta$  es el vector de parámetros desconocidos y  $q$  es el orden de la derivada del sistema. Para cualquier sistema no lineal de la forma adaptativa presentado en la Ec. 2.35, el observador adaptativo presentado por (Besançon, 2000) en su forma generalizada de orden fraccionario se presenta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\gamma y &= \alpha(y, \hat{\zeta}, u, t) + \beta(y, \hat{\zeta}, u, t) \hat{\theta} - k_y (\hat{y} - y), \quad k_y > 0, \\ {}_0D_t^\gamma \zeta &= Z(y, \hat{\zeta}, u, t), \\ {}_0D_t^\gamma \theta &= -k_\theta \beta^T(y, \hat{\zeta}, u, t) (\hat{y} - y)^T, \quad k_\theta > 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

de tal forma que para todo  $\hat{y}(0), \hat{\zeta}(0)$  y  $y(0), \zeta(0)$  y cualquier  $u(0)$  medible acotada, el error de estimación  $\|\hat{y}(t) - y(t)\|$  y  $\|\hat{\zeta}(t) - \zeta(t)\|$  tienden a cero asintóticamente cuando el tiempo  $t$  tiende a infinito, mientras  $\|\hat{\theta}(t) - \theta(t)\|$  permanece acotado. Donde  $\gamma$  es el orden de la derivada del observador. Las constantes  $k_y$  y  $k_\theta$  son las ganancias del observador, generalmente son positivas y pueden tener diferentes valores; es recomendable que  $k_y < k_\theta$ .

### 2.2.11. PID de orden fraccionario.

El controlador Proporcional-integral-derivativo (PID) es la forma más común de retroalimentación. Hoy en día en el control de procesos más del 95 % de los lazos de control son del tipo PID (Tejado et al., 2019). El uso del control del PID consiste en aplicar la combinación apropiada de tres tipos de acciones correctivas a la señal del error, la cual representa cuan lejano o cercano se encuentra de la señal de salida deseada. La generalización de un PID de orden no entero está dada por la Ec. 2.37:

$$u(t) = k_p e(t) + T_i {}_0D_t^{-\lambda} e(t) + T_d {}_0D_t^{\delta} e(t), \quad (2.37)$$

donde  $k_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  son las ganancias de la acción proporcional, integral y derivativa, respectivamente,  $\lambda, \delta \in \mathbf{R}^+$  son los órdenes no enteros de los términos integral y derivativo, respectivamente, y  $D$  es el operador de derivada fraccionaria definido como Riemann-Liouville. Tomando  $\lambda = 1$  y  $\delta = 1$ , obtenemos el controlador PID clásico.

### 2.2.12. Esquema de Detección de fallas

Una falla se entiende como una desviación no permitida de las propiedades características lo que llevaría a no cumplir con el propósito original de un sistema. Para supervisar un proceso y analizar las posibles fallas en un sensor, actuador o equipo, existen diferentes enfoques para detectar, diagnosticar y/o aislar fallas. Este tipo de sistemas son llamado Detección y Diagnóstico de fallas (FDD por sus siglas en inglés), Detección y aislamiento de fallas (FDI por sus siglas en inglés). Para un proceso dinámico, el FDD es una técnica muy usada para detectar una falla en el proceso o en algún elemento físico del equipo, como un sensor o un actuador. Este tipo de técnicas permite identificar y localizar el elemento o elementos fallados. El análisis que se lleva a cabo en el FDD proporciona información importante al operador, acerca de la magnitud de la falla, por lo que los tres principales objetivos del FDD son los siguientes:

- *Detección de falla.* El sistema proporciona información acerca de la presencia de falla y el momento que ocurre.
- *Localización de la falla.* El sistema proporciona información acerca del tipo de

falla e identifica el elemento fallado.

- *Estimación de la falla.* El sistema proporciona la información acerca de la magnitud de la falla y el comportamiento de la falla.

El FDI es una técnica usada en sistemas de control tolerante a fallas (FTC por sus siglas en inglés), el cual proporciona información importante al FTC acerca de la falla en el proceso, lo que permite la reconfiguración de la ley de control en el FTC. La función del FDI es detectar, localizar y aislar el elemento fallado la Fig. 2.7 muestra el esquema general del diseño del FDD y FDI.

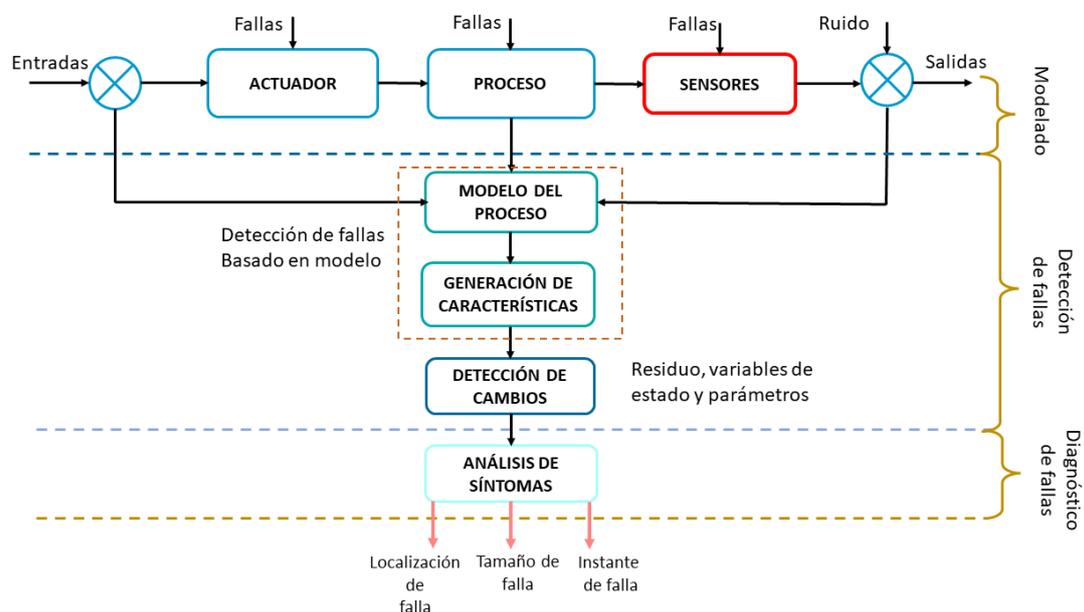


Figura 2.7: Esquema de diagnóstico de fallas.

### 2.2.13. Control tolerante a fallas.

En general, una falla se define como cualquier tipo de mal funcionamiento del sistema, lo cual lleva a una anomalía no aceptable en el comportamiento general del sistema. Estas fallas pueden ocurrir en diferentes elementos como sensor, actuadores o componentes. Para evitar la degradación o daños mayores en el equipo así como poner en riesgo el operador y las personas que trabajan en el sistema, la falla debe ser localizada rápidamente y tomar acciones para detener su propagación a través de decisiones o elementos de control cuyo objetivo es hacer un sistema tolerante a fallas,

con el cual el sistema sea capaz de recuperar su operación después de que ocurre una falla, con un periodo de desempeño degradado, donde el algoritmo permite al sistema adaptarse a la falla así recuperando el desempeño requerido del sistema.

Un sistema tolerante a fallas debe ser capaz de inicializar alguna acción de recuperación con el fin de evitar una futura degradación del sistema, debe evitar regiones de desempeño inaceptable o peligro, regresando al sistema a la región de desempeño requerido. Un sistema de control tolerante a fallas es un sistema que tiene la habilidad de acomodar un componente dañado automáticamente, además de ser capaz de mantener la estabilidad del sistema, así como mantener un desempeño aceptable aún en presencia de fallas (Zhang and Jiang, 2008).

Desde el punto de vista de la teoría de sistemas, el control tolerante a fallas se ocupa de la interacción entre el sistema dado y el controlador, donde el término controlador es usado desde una perspectiva muy general, ya que no solo incluye la ley de control por retroalimentación o prealimentación, sino también la etapa de decisión que determina la configuración del control. Esta etapa de análisis del comportamiento de planta es con el objetivo de identificar fallas o cambios en la ley de control con el fin de mantener el sistema en lazo cerrado en una región de desempeño aceptable. Los controladores son usualmente diseñados para las fallas de la planta para que así en lazo cerrado cumplan con las especificaciones de desempeño dado, por lo cual satisfacen su función, mientras que el control tolerante a fallas se ocupa de la situación en la que la planta es objeto de una falla  $f$ , lo que impide que el sistema general satisfaga su objetivo en el futuro.

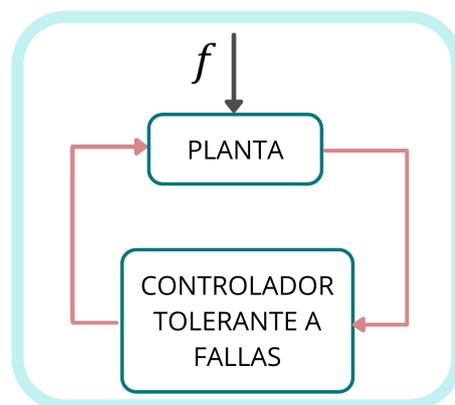


Figura 2.8: Sistema tolerante a fallas.

Generalmente, la manera de hacer un sistema tolerante a fallas consiste en dos pasos:

- **Diagnóstico de fallas:** La existencia de fallas tiene que ser detectadas así como identificadas.
- **Re-diseño del control:** El controlador tiene que adaptarse a la situación con falla para que el sistema en general continúe cumpliendo su objetivo.

Las fallas usualmente se califican como se muestra:

- **Falla en planta:** Estas fallas cambian las propiedades dinámicas del sistema.
- **Falla en sensores:** Las propiedades de las plantas no son afectadas, pero las lecturas el sensor presentan errores sustanciales.
- **Falla en actuadores:** Las propiedades de las planta no son afectadas, pero las influencia del controlador es interrumpida o modificada.

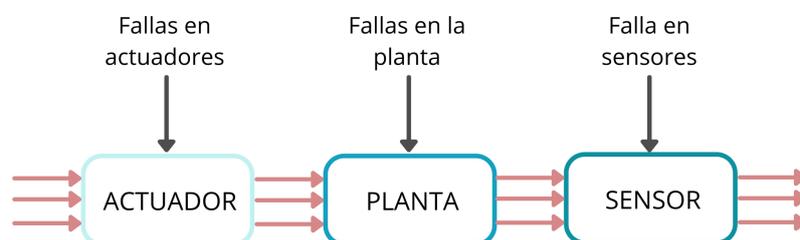


Figura 2.9: Diferencias entre las fallas.

Dado que las fallas pueden causar daños sustanciales en la maquinaria y riesgo para la vida humana, los ingenieros han investigado su apariencia e impactos durante décadas. Se han definido e investigado diferentes nociones como seguridad, confiabilidad, disponibilidad y fiabilidad (Blanke et al., 2006).

- **Seguridad** describe la ausencia de peligro. Un sistema de seguridad es una parte del equipo de control que protege el sistema de daños permanentes.
- **Confiabilidad** es la probabilidad de que un sistema logre su función prevista durante un período de tiempo específico en condiciones normales.

- **Disponibilidad** es la probabilidad de que un sistema esté operativo cuando sea necesario.
- **Fiabilidad** agrupa las propiedades de funcionalidad, disponibilidad y seguridad.

Las dos maneras principales del rediseño del controlador se distinguen como: **Acomodación de falla y reconfiguración de control**

- **Acomodación de fallas.** Acomodación de fallas significa adaptar los parámetros del controlador a las propiedades dinámicas de la planta defectuosa.
- **Reconfiguración del control.** Si la corrección de fallas es imposible, se debe reconfigurar el circuito de control completo. La reconfiguración incluye la selección de una nueva configuración de control donde se utilizan señales de entrada y salida alternativas. La selección de estas señales depende de las fallas existentes. Luego, se debe diseñar una nueva ley de control en línea (Fig. 2.10).

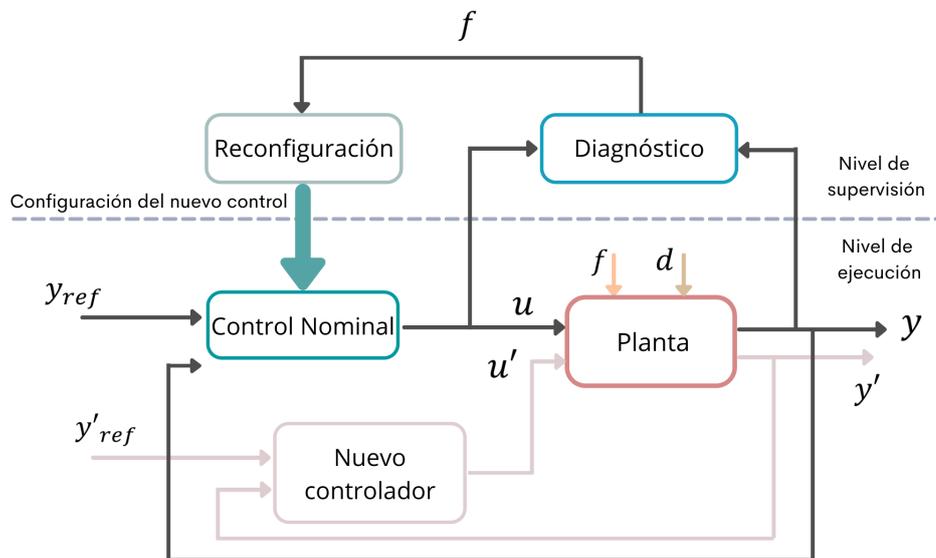


Figura 2.10: Reconfiguración del control.

## 2.3. Conclusiones

Diferentes enfoques de modelado de sistemas termodinámicos fueron presentados, como las redes neuronales o el modelado utilizando las ecuaciones de balance de energía,

donde se pudo observar que debido a las aplicaciones de los condensadores los modelos en su gran mayoría se realizan estado estable por motivos de control y de la naturaleza de los sistemas que forma parte este tipo de sistemas.

Los sistemas termodinámicos con cambio de fase presentan una dinámica muy compleja, sin embargo su estudio se ha concentrado en mejorar las aproximaciones de los modelos utilizando diferentes correlaciones semi-empíricas que logran aproximar de manera adecuada el comportamiento esperado de estos sistemas, sin embargo, estos modelos al buscar mejorar las aproximaciones se han ido haciendo más complejos, por lo cual no todos son útiles con fines de control, por lo que se han buscado opciones que caractericen de manera adecuada los sistemas sin complicar los modelos ya existentes. Al buscar no complicar los modelos conocidos se considera el cálculo fraccionario como un área de oportunidad para analizar estos sistemas, lo que ha favorecido a la aplicación de las definiciones de derivada fraccionaria que en los últimos años se ha logrado apreciar más sus aportaciones dando lugar a nuevas dinámicas y mejorando las aproximaciones de sistemas y modelos ya conocidos sin la necesidad de hacer más complejos los modelos existentes, por lo que se busca aprovechar las propiedades de no localidad y de memoria que ofrece el cálculo fraccionario, siempre tomando en cuenta la naturaleza o física conocida del fenómeno respetando así las dinámicas ya conocidas del sistema a representar.

En cuanto a la supervisión y control desde el enfoque fraccionario, se puede observar que se ha buscado la caracterización de los diseños conocidos para el desarrollo de observadores y controladores por medio de las definiciones de diferentes derivadas fraccionarias, aprovechando así las diferentes características que este tipo de derivadas presentan como la memoria, con el fin lograr mejora en las estimaciones o tener una ley de control adecuada. Presentando como ventaja que gracias a el orden de la derivada se tenga un parámetro extra que permita ajustar de mejor manera el controlador y los observadores.

# Capítulo 3

## Modelado matemático

Las múltiples aplicaciones de la transferencia de calor requieren diferentes tipos de accesorios y configuraciones del equipo para lograr la transferencia deseada, esto ha conducido a numerosos diseños de intercambiadores de calor (Çengel et al., 2006). En esta sección, se presenta el método de modelado utilizado en el sistema utilizando la derivada de orden fraccionario de Riemann-Liouville.

### 3.1. Intercambiadores de calor

Los intercambiadores de calor son aparatos que permiten el intercambio de calor entre dos fluidos, a continuación, se mencionan algunos de los tipos de intercambiadores de calor y sus configuraciones:

- El intercambiador de doble tubo, es el más simple de los intercambiadores de calor y consiste de dos tubos concéntricos de diámetros diferentes; donde uno de los fluidos pasa por el tubo más pequeño, en tanto que el otro lo hace por el espacio anular entre ellos, en el cual se puede dar dos tipos de disposiciones del flujo: flujo paralelo de los dos fluidos, donde ambos fluidos se mueven en la misma dirección y en contraflujo, donde los flujos entran por los extremos opuestos y fluyen en direcciones opuestas.
- El intercambiador compacto, está diseñado específicamente para lograr una gran transferencia de área superficial de transferencia de calor por unidad de volumen,

un ejemplo de estos serían los radiadores de autos, los intercambiadores de calor de cerámica de vidrio de las turbinas de gas.

- El intercambiador de tubos y coraza son de los más utilizados en la industria, los cuales contienen un gran número de tubos empacados en una carcasa con sus ejes paralelos al de este, donde unos de los fluidos se mueve por dentro de los tubos, mientras que el otro se mueve por fuera pasando por la coraza.

Los modelos matemáticos de los condensadores han sido estudiados por diferentes autores como (Hernández et al., 2016; Colorado et al., 2011; Colorado-Garrido et al., 2009; Huicochea and Siqueiros, 2009) donde trabajan con un modelo para describir la transferencia de calor y el comportamiento de la dinámica del fluido en un condensador vertical helicoidal. En (García-Valladares et al., 2004) se presenta la simulación de la dinámica de un condensador de doble tubo donde se comparan diferentes aspectos numéricos. En (Wang, 1997) el autor presenta un método numérico para calcular las variaciones de variables relevantes que determinen el flujo y las características de transferencia de calor del flujo condensado en el tubo.

### 3.1.1. Modelos representativos de los intercambiadores de calor

El modelo del intercambiador de tipo doble tubo o tubos concéntricos con flujo a contracorriente, el cual se encuentra en el CENIDET presentado por (Carbot, 2015), donde el flujo en el tubo interno es el fluido caliente y el flujo en la región anular es el fluido frío, donde algunas suposiciones son tomadas en cuenta: El volumen constante en ambos tubos, no existe transferencia de calor entre el tubo externo y el medio ambiente, las temperaturas de entrada son medibles, por lo que al aplicar un balance de energía, tomando en cuenta como fuerza conductora la diferencia de temperaturas a la entrada, por lo que la dinámica del intercambiador de calor obtenida por el balance de energía para cada uno de los lados del intercambiador está dada por la ecuación 3.1:

$$\begin{aligned} \dot{T}_{co} &= \frac{Fv_c}{Vol_c}(T_{ci} - T_{co}) + \frac{U(T, Fv)A_{ext}}{\rho_c(p, h)Cp_c(p, T)Vol_c}(T_{ho} - T_{co}) \\ \dot{T}_{ho} &= \frac{Fv_h}{Vol_h}(T_{hi} - T_{ho}) + \frac{U(T, Fv)A_{int}}{\rho_h(p, h)Cp_h(p, T)Vol_h}(T_{co} - T_{ho}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

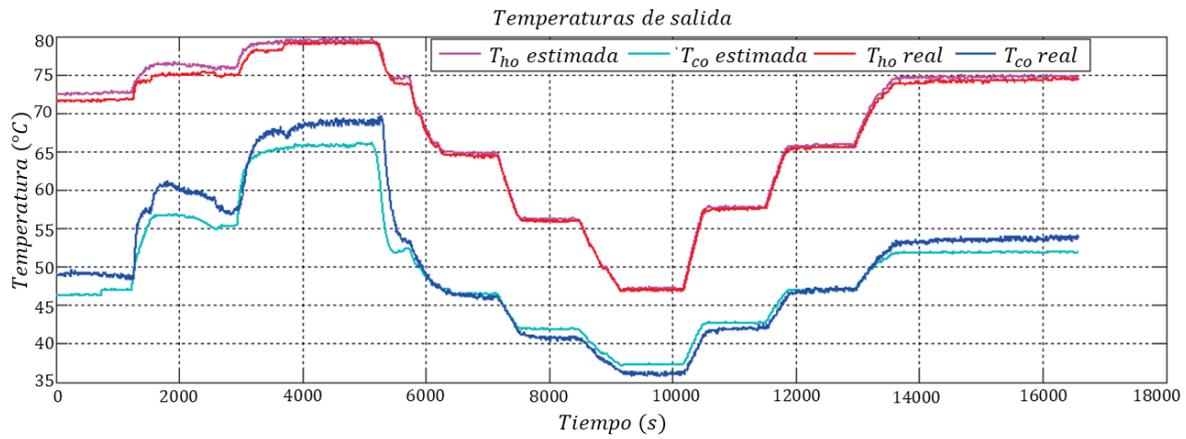


Figura 3.1: Comparación entre las temperaturas de salida estimadas por el modelo presentado por (Carbot, 2015) y los datos experimentales.

Este modelo presentado en la Fig.3.1 representa un enfriador, que consta de dos entradas y dos salidas de agua,  $T_{ci}$  representa la temperatura de entrada del agua de enfriamiento,  $T_{hi}$  representa la temperatura de entrada del agua caliente, la cual será enfriada,  $T_{co}$  representa la temperatura de salida del agua de enfriamiento y  $T_{ho}$  representa la temperatura de salida del agua caliente.

Las condiciones de operación del intercambiador de calor (IC) consideradas son las siguientes: el flujo de agua caliente se mantiene constante en  $1,667 \times 10^{-6} m^3/s$  y el flujo de agua fría varía en un intervalo de  $6,667 \times 10^{-6} m^3/s$  y  $8,922 \times 10^{-6} m^3/s$ , donde la temperatura inicial del agua fría se encuentra en el intervalo de  $26^\circ C$  y  $26^\circ C$   $29^\circ C$ , mientras que la temperatura inicial del agua caliente varía en un intervalo de  $49^\circ C$  y  $83^\circ C$ . Se puede observar que el modelo del intercambiador permite estimar de manera correcta las temperaturas de salida del sistema.

En el caso del modelo del condensador (Alegria-Zamudio et al., 2019; Castro et al., 2016) emplean para el cálculo del coeficiente convectivo del flujo bifásico ( $h_{bf}$ ) la correlación de Kozeki's

$$\frac{h_{bf}}{h_l} = 2,5 \left( \frac{1}{X_{tt}} \right)^{0,75} h \quad (3.2)$$

Esta correlación involucra el parámetro de Martinelli  $X_{tt}$  y es empleada tanto en flujo laminar como turbulento. La fracción volumétrica de vapor  $\varepsilon_g$  en el tubo líquido en la

fase liquido-vapor fue calculada mediante la ecuación:

$$X_{tt} = \left( \frac{1 - X_g}{X_g} \right)^{0,9} \left( \frac{\rho_s}{\rho_l} \right)^{0,5} \left( \frac{\mu_l}{\mu_s} \right)^{0,1} \quad (3.3)$$

donde  $X_g$  es la calidad del vapor,  $\rho_s$  es la densidad del vapor y  $\mu_s$  es la viscosidad.

$$\begin{aligned} \dot{T}_{co} &= \frac{Fv_c}{Vol_c} (T_{ci} - T_{co}) + \frac{U(T, Fv) A_{ext}}{\rho_c(p, h) C_{p_c}(p, T) Vol_c} \Delta T_L \\ \dot{T}_{ho} &= \frac{Fv_h}{Vol_h} (T_{hi} - T_{ho}) + \frac{U(T, Fv) A_{int}}{\rho_h(p, h) C_{p_h}(p, T) Vol_h} \Delta T_L \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde la fuerza conductora  $\Delta T_L$ , es la diferencia media logarítmica de temperatura y se define como:

$$\Delta T_L = \frac{(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{\ln \left( \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)} \quad (3.5)$$

donde  $\Delta T_1 = T_{hi} - T_{co}$  y  $\Delta T_2 = T_{ho} - T_{ci}$

Este modelo presentado en la Fig. 3.2 representa un condensador de doble tubo helicoidal de flujos a contracorriente, que consta de dos entradas y dos salidas de agua,  $T_{ci}$  representa la temperatura de entrada del agua de enfriamiento,  $T_{hi}$  representa la temperatura de entrada del vapor, la cual será enfriado hasta lograr un cambio de fase,  $T_{co}$  representa la temperatura de salida del agua de enfriamiento y  $T_{ho}$  representa la temperatura de salida del líquido condensado.

Las condiciones de operación del condensador consideradas son las siguientes: el flujo de vapor caliente se mantiene constante en  $1,3 \times 10^{-7} m^3/s$  y el flujo de agua fría es de  $0,023 \times 10^{-6} m^3/s$ , donde la temperatura inicial del agua fría se encuentra a  $21,19^\circ C$ , mientras que la temperatura inicial del vapor es de  $77,90^\circ C$ . La presión del tubo interno es de  $0,22bar$  y la presión de la sección anular es de  $0,83bar$ .

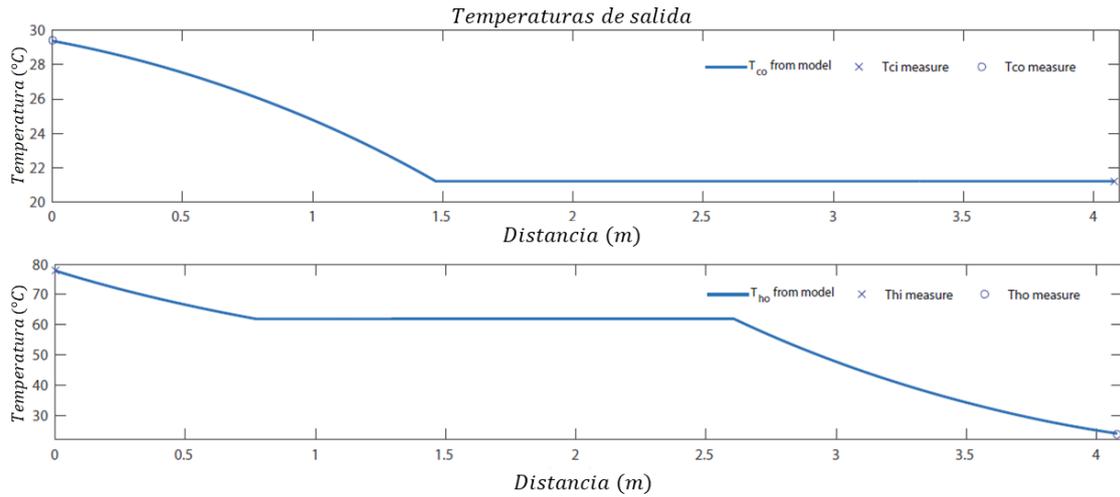


Figura 3.2: Comparación entre las temperaturas de salida estimadas por el modelo presentado por (Alegria-Zamudio et al., 2019) y los datos experimentales.

### 3.2. Modelado de orden fraccionario del condensador

Dos tipos de IC comunes en la práctica son los condensadores y los evaporadores. Debido a que un fluido común absorbe o libera una gran cantidad de calor a temperatura constante durante un proceso de cambio de fase, la razón de transferencia de calor en un IC se puede expresar de manera análoga a la ley de enfriamiento de Newton como:

$$\dot{Q} = UA_s \Delta T_m, \quad (3.6)$$

donde  $U$  es el coeficiente total de transferencia de calor,  $A_s$  es el área de transferencia de calor y  $\Delta T_m$  es una diferencia promedio de temperatura apropiada entre los dos fluidos. El problema principal del modelo dinámico del proceso de condensación es cuando ocurre el cambio de fase, debido a que las propiedades físicas como la densidad ( $\rho$ ), capacidad calorífica ( $C_p$ ) y variables caloríficas como la entalpía ( $H$ ) y el coeficiente convectivo de transferencia de calor ( $h$ ) tienen cambios abruptos en su comportamiento. En un sistema de condensación, uno de los fluidos pasa por un proceso de cambio de fase, es decir, energía en forma de calor es removida del vapor sobre calentado, este vapor fluye a través del tubo del intercambiador de calor donde sufrirá un cambio de fase el cual ocurrirá cuando éste tenga contacto con una superficie a menor temperatura y sea sometido a una presión de vacío, es decir, una presión debajo de la atmosférica hasta

que alcance la temperatura de saturación  $T_{sat}$ . El efecto de enfriamiento es producido al introducir agua fría en la sección anular del intercambiador de calor como se muestra en la Figura 3.3 donde la sección anular se representa de color azul (agua fría) y la sección interna se representa de color rojo (Vapor).

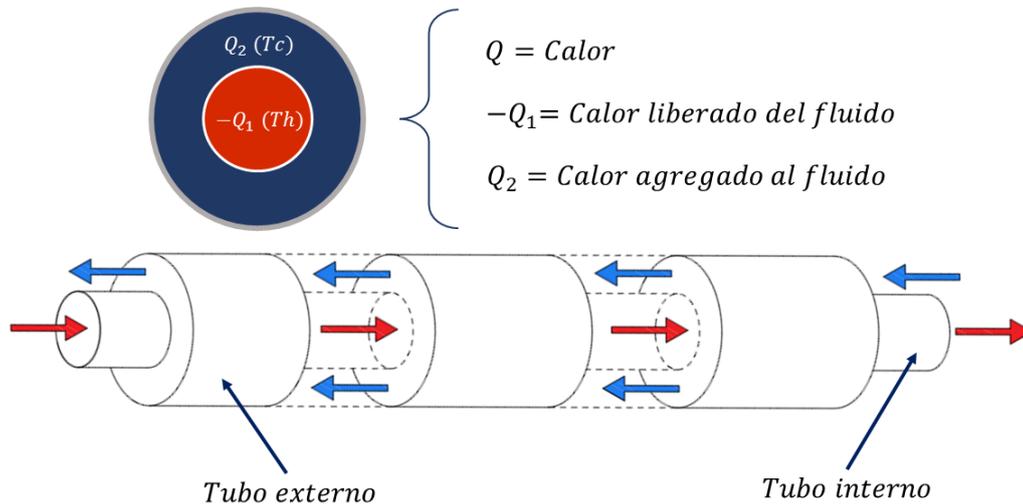


Figura 3.3: Secciones del Intercambiador de Calor (condensador).

Las consideraciones siguientes fueron tomadas en cuenta para la realización del modelo matemático donde:

1. El coeficiente global de transferencia de calor ( $U$ ) depende de la temperatura ( $T$ ), del flujo volumétrico ( $F_v$ ) y la presión ( $p$ ).
2. No existe transferencia de calor entre el tubo externo y el medio ambiente.
3. Las propiedades físicas del agua como la densidad ( $\rho$ ) y capacidad calorífica ( $C_p$ ) son evaluadas en función de la temperatura ( $T$ ) y la presión ( $p$ ).
4. Se evalúan las zonas del fluido en el proceso de condensación (Vapor sobrecalentado, bifásico y líquido subenfriado).

De acuerdo con las suposiciones definidas anteriormente, la dinámica del sistema se obtiene mediante un balance de energía del intercambiador de calor usado en este trabajo, el cual es un condensador helicoidal de doble tubo de flujo a contracorriente, el cual está compuesto por dos tubos, donde el vapor entra y fluye por el tubo interno,

mientras que en la sección anular entra y fluye el agua de enfriamiento. La función de este es condensar el vapor que viene del generador al remover el calor a través de un circuito de enfriamiento auxiliar usando agua, esta agua proviene de una torre de enfriamiento la cual garantiza que la temperatura de agua fría que entre al sistema se mantenga constante y es ajena al sistema de bombas de calor. La dinámica del condensador se puede caracterizar como se muestra en la Fig. 3.4, donde se puede observar la interacción de intercambio de calor en el proceso de condensación. La fuerza

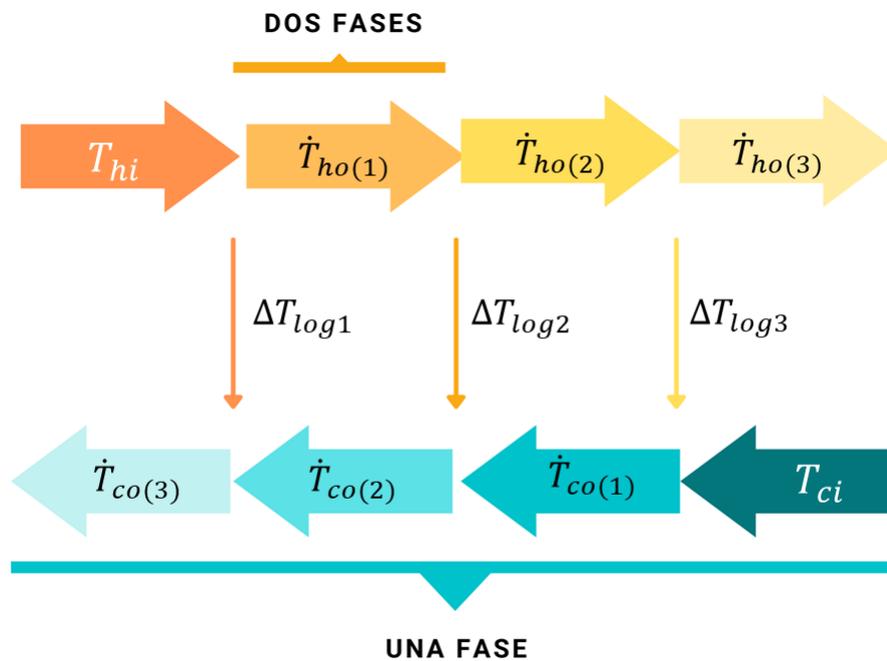


Figura 3.4: Esquema de la dinámica del condensador.

conductor utilizada en este trabajo es la diferencia de temperaturas medias logarítmica (LMTD por sus siglas en inglés) para intercambiadores de flujo a contracorriente y se define de la siguiente manera.

$$\Delta T_L = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)}, \quad (3.7)$$

donde  $\Delta T_1 = T_{h,in} - T_{c,out}$ , y  $\Delta T_2 = T_{h,out} - T_{c,in}$ , en caso de que  $\Delta T_2 = \Delta T_1$  se propone

la siguiente consideración

$$\Delta T_L = \begin{cases} \frac{(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)} & \text{si } \Delta T_2 \neq \Delta T_1 \\ \Delta T_1 & \text{si } \Delta T_2 = \Delta T_1 \end{cases} \quad (3.8)$$

La LMTD usada para el sistema se presenta en la Ec. 3.9

$$\begin{aligned} LMTD_1 &= \left( \frac{(Th_{o1} - T_{co2}) - (Th_{i1} - T_{co3})}{\ln\left(\frac{Th_{o1} - T_{co2}}{Th_{i1} - T_{co3}}\right)} \right) \\ LMTD_2 &= \left( \frac{(Th_{o2} - T_{co1}) - (Th_{o1} - T_{co2})}{\ln\left(\frac{Th_{o2} - T_{co1}}{Th_{o1} - T_{co2}}\right)} \right) \\ LMTD_3 &= \left( \frac{(Th_{o3} - T_{ci}) - (Th_{o2} - T_{co1})}{\ln\left(\frac{Th_{o3} - T_{ci}}{Th_{o2} - T_{co1}}\right)} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

El intercambio de calor en este proceso es calculado por el coeficiente global de transferencia de calor para cada uno de los fluidos, como se muestra en la Ec. 3.10.

$$\begin{aligned} U_{ext} &= \frac{1}{\frac{A_{ext}}{A_{int}h_{(h,\varphi)}} + \frac{A_{ext}\ln\left(\frac{A_{ext}}{A_{int}}\right)}{\lambda_w 2\pi L} + \frac{1}{h_c}}, \\ U_{int} &= \frac{1}{\frac{A_{in}}{A_{ext}h_c} + \frac{A_{int}\ln\left(\frac{A_{int}}{A_{ext}}\right)}{\lambda_w 2\pi L} + \frac{1}{h_{(h,\varphi)}}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $h_h$  representa el coeficientes convectivo del vapor (fluido a condensar) y  $h_c$  coeficientes convectivo del agua fría (fluido de enfriamiento), y  $\lambda_w$  es la conductividad térmica. De aquí en adelante el subíndice  $\varphi$  será usado para referirse a la sección interna (anular) del tubo. El coeficiente convectivo  $h_{(\varphi)}$  para una sola fase puede ser calculado para cada uno de los tubos con la Ec. 3.11:

$$h_\varphi = \frac{Nu_\varphi}{\left(\frac{D}{\lambda_\varphi}\right)}. \quad (3.11)$$

Para solamente una fase este coeficiente es determinado por el número de Nusselt (Nu) en casa uno de las secciones del condensador. Para el régimen laminar, la correlación

de Sieder-Tate está dada por la Ec. 3.12:

$$Nu = 1,816 \left( RePr \left( \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0,14}. \quad (3.12)$$

Para el régimen turbulento, se usó la correlación de Dittus-Boelter presentada en (Escobar et al., 2011), la cual se muestra a continuación:

$$Nu = 0,023Re^{0,8}Pr^{0,3}, \quad (3.13)$$

donde  $Pr$  and  $Re$  están dados por:

$$Pr = \frac{Cp\mu_\varphi}{\lambda_\varphi}, \quad (3.14)$$

$$Re = \frac{\rho_\varphi D_\varphi V_\varphi}{\mu_\varphi}, \quad (3.15)$$

donde  $Cp$  es la capacidad calorífica,  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $\lambda$  es la conductividad térmica,  $\rho$  es la densidad,  $D$  es el diámetro del tubo y  $V_\varphi$  es la velocidad y se calcula como se muestra a continuación.

$$V_h = \frac{W_{mh}}{\rho_h \pi r^2}, \quad (3.16)$$

$$V_c = \frac{W_{mc}}{\rho_c \pi (r_{int,anu}^2 - (r_{int} + esp_{int})^2)}, \quad (3.17)$$

donde  $W_{m(h,c)}$  es el flujo másico del fluido caliente y el fluido frío, respectivamente,  $r_{int}$  es el radio interior del tubo interno,  $esp_{int}$  es el grosor de la pared de la tubería interior,  $r_{int,anu}$  es el radio interior de la sección anular. La ebullición y la condensación a pesar de mostrar características únicas se consideran como transferencias de calor por convección, ya que están relacionadas con el movimiento del fluido, además difieren de las otras formas de convección en que dependen del calor latente de vaporización  $h_{fg}$  del fluido y de la tensión superficial  $\sigma$  en la interfase líquido-vapor, además de las propiedades de ese fluido en cada fase.

Cuando hablamos de sistemas termodinámicos, se relacionan las propiedades p-V-T (presión, volumen y temperatura) por medio de relaciones empíricas, y por propiedades se debe entender cualquier característica medible de una sustancia. La vaporización y la condensación a temperatura y presión constante son procesos en equilibrio y la presión de equilibrio se conoce como presión de vapor. Saturado quiere decir lo mismo que vapor y líquido en equilibrio uno con otro. Si un gas está a punto de condensar su primera gota de líquido, el gas se conoce como gas saturado, si un líquido está a punto de vaporizarse, recibe el nombre de líquido saturado.

### 3.3. Transferencia de calor en la condensación.

El fenómeno conocido como condensación se da cuando la temperatura de un vapor se reduce por debajo de su temperatura de saturación,  $T_{sat}$ . Esto suele ocurrir cuando el vapor entra en contacto con una superficie sólida cuya temperatura esté por debajo de la temperatura de saturación,  $T_s$ .

En la naturaleza se pueden encontrar dos formas distintas de condensación: en película y por gotas. En el primero el condensado moja la superficie y forma una película de líquido sobre la superficie, la cual resbala hacia abajo debido a la gravedad, y el espesor de la película aumenta en la dirección del flujo a medida que más vapor se condensa sobre ella. En la condensación por gotas el vapor condensado forma pequeñas gotas sobre la superficie, en lugar de una película continua, hasta que la superficie se cubre de un número incontable de gotas de diferentes diámetros.

Cuando ocurre la condensación en película la superficie se cubre por ella y como el espesor de esta va aumentando se forma una "pared líquida" entre la superficie sólida y el vapor que se comporta como una resistencia a la transferencia de calor. El calor de vaporización  $h_{fg}$  liberado a medida que el vapor se condensa, debe pasar a través de esta resistencia antes de que pueda llegar a la superficie sólida y ser transferido al medio que está del otro lado.

### 3.3.1. Condensación de película

Durante la condensación se libera calor en la cantidad  $h_{fg}$  (calor latente de vaporización) y es transferido a través de la película hasta la superficie de la superficie que se encuentra a temperatura  $T_s$ . Para que ocurra la condensación la condición de  $T_s < T_{sat}$  se debe cumplir. La temperatura del condensado es  $T_{sat}$  en la interfase y disminuye gradualmente hasta  $T_s$ .

El calor latente de vaporización  $h_{fg}$  es el liberado cuando se condensa una unidad de masa de vapor y normalmente representa la transferencia por unidad de masa de condensado. En un proceso real el condensado se enfría todavía más hasta alguna temperatura promedio entre  $T_{sat}$  y  $T_s$ , liberando más calor, por lo tanto la transferencia de calor será mayor. La transferencia de calor en la condensación también depende si el flujo de condensado es laminar o turbulento, y el número de Reynolds proporciona el criterio para el régimen de flujo el cual se define como:

$$Re = \frac{4\dot{m}}{p\mu_l}, \quad (3.18)$$

en donde Rohsenow demostró que se puede tomar en cuenta el enfriamiento del líquido al remplazar  $h_{fg}$  por el calor latente de vaporización modificado  $h_{gf}^*$  como:

$$h_{fg}^* = h_{fg} + 0,68C_{pl}(T_{sat} - T_s), \quad (3.19)$$

en donde  $C_{pl}$  es el calor específico del líquido a la temperatura promedio de la película.

Cuando el vapor que entra al condensador ingresa como vapor sobrecalentado a una temperatura  $T_v$  en lugar de vapor saturado. En este caso el vapor debe enfriarse hasta su temperatura de saturación,  $T_{sat}$  antes de que pueda condensarse, y el calor debe transferirse a la pared. La cantidad de calor liberado cuando una unidad de masa de vapor sobrecalentado a una temperatura  $T_v$  se enfría hasta  $T_{sat}$ , es  $C_{pv}(T_v - T_{sat})$  en donde  $C_{pv}$  es el calor específico del vapor a la temperatura promedio ( $T_v - T_{sat}$ ). En este caso el calor latente modificado de vaporización queda.

$$h_{fg}^* = h_{fg} + 0,68C_{pl}(T_{sat} - T_s) + C_{pv}(T_v - T_{sat}). \quad (3.20)$$

Tomando en cuenta estas consideraciones la razón de transferencia de calor se puede expresar como:

$$\dot{Q}_{condensado} = hA_s(T_{sat} - T_s) = mh_{fg}^*, \quad (3.21)$$

donde  $A_s$  es el área de transferencia de calor (sobre el cual ocurre la condensación). Al despejar  $\dot{m}$  y sustituyendo en la Ec. (3.18) da otra relación de Reynolds.

$$Re = \frac{4\dot{Q}}{p\mu_l h_{fg}^*} = \frac{4A_s h(T_{sat} - T_s)}{p\mu_l h_{fg}^*}. \quad (3.22)$$

La temperatura del líquido varía desde  $T_{sat}$ , sobre la interfase líquido-vapor hasta  $T_s$ , en la superficie de la pared del tubo, por lo tanto, las propiedades del líquido deben evaluarse a la temperatura de la película  $T_f = (T_{sat} + T_s)/2$ , la cual es aproximadamente la temperatura promedio del líquido. Sin embargo, el  $h_{fg}$  debe evaluarse a  $T_{sat}$  puesto que no es afectado por el subenfriamiento del líquido.

### 3.3.2. Condensación en tubos

Es importante recordar que en el caso del condensador estas correlaciones son útiles cuando, el cambio de fase ocurre, debido a que el análisis de la transferencia de calor de condensación dentro del tubo interno es complicado debido a la velocidad del vapor y la rapidez con la que se acumula el líquido sobre las paredes de los tubos influye fuertemente sobre ella como se muestra en la Figura 3.5

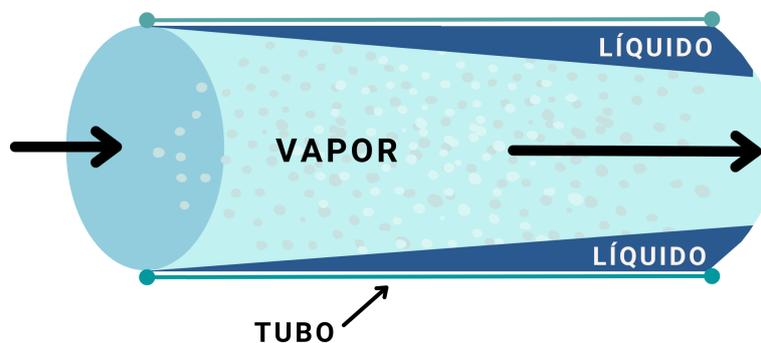


Figura 3.5: Flujo de condensado en un tubo horizontal a grandes velocidades.

Para bajas velocidades del vapor, en el caso del condensador la correlación presen-

tada en (Cengel, 2014) y es utilizada para la condensación dentro de tubos:

$$h_{int} = 0,555 \left[ \frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)\lambda_l^3}{\mu_l(T_{sat} - T_s)} \left( h_{fg} + \frac{3}{8}c_{pl}(T_{sat} - T_s) \right) \right]^{1/4}, \quad (3.23)$$

donde  $T_{sat} = f(p_h)$ , es válido para

$$Re = \left( \frac{\rho_v V_v D}{\mu_v} \right) < 35000, \quad (3.24)$$

donde, el número de Reynolds puede ser evaluado en las condiciones de admisión del tubo, por medio de su diámetro interno como longitud característica.

El desarrollo del modelo termodinámico del condensador se basó en el principio de la conservación de la energía "La energía no se crea ni se destruye, solo se transforma", es decir, el cambio en la energía total de un sistema en el curso de un proceso es igual a la diferencia entre la energía total que entra y la energía total que sale durante ese proceso, como se muestra en la ecuación 3.25

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Energía total} \\ \text{que entra en} \\ \text{el sistema} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Energía total} \\ \text{que sale} \\ \text{del sistema} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio en la} \\ \text{energía total} \\ \text{del sistema} \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

Donde para un sistema cerrado estacionario, sin trabajo, la razón de la cantidad neta de transferencia de calor que entra o sale del sistema se define como:

$$\dot{Q} = \dot{m}c_v\Delta T \quad (3.26)$$

En función del coeficiente global de transferencia de calor se define como en la ecuación 3.6. Donde  $m_v$  es el calor específico a volumen constante, donde  $\dot{m}$  es el gasto de masa que fluye en un tubo y se expresa como:

$$\dot{m} = \rho V A_c \quad (3.27)$$

Donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $V$  es la velocidad promedio de este en la dirección

del flujo y  $A_c$  es el área de la sección transversal del tubo:

$$A_c = \pi D^2/4 \quad (3.28)$$

El modelo matemático se desarrolló identificando las formas de energía involucradas en la transferencia de calor; como es un proceso que involucra cambio de fase y debido a que un sistema con fase gaseosa se encuentra a un nivel más alto de energía (interna) por lo que es asociado con el calor latente ( $h_{lat}$ ). Para el modelado de este trabajo se utiliza el calor específico a presión constante ( $C_p$ ), que está relacionado con el calor específico a volumen constante ( $C_v$ ) por la siguiente relación  $C_p = C_v + R$  donde  $R$  es la constante de gas. Este sistema involucra la transferencia de calor por convección, que toma en cuenta los efectos combinados de la conducción y el movimiento de fluidos, y es importante recalcar que entre más rápido es el movimiento de un fluido mayor será la transferencia de calor, por lo que la transferencia de calor por convección se puede definir como:

$$\dot{Q}_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty) \quad (3.29)$$

Donde  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección,  $A_s$  es el área superficial a través de la cual tiene lugar la transferencia de calor y  $T_s$  es la temperatura de la superficie y  $T_\infty$  es la temperatura del fluido. En este trabajo se utilizaron las ecuaciones 3.11 y 3.23 para el cálculo del coeficiente convectivo del fluido en una sola fase y dos fases, respectivamente. El cálculo de las propiedades termodinámicas del agua se realizaron de acuerdo (Holmgren, 2006).

Los modelos basados en la derivada de Riemann-Liouville son usados para describir procesos con comportamiento de ley de potencias debido al kernel de función de potencia ( $tx^{\alpha}$ ) en la definición de la transformada integral (Baleanu, 2020). Esto puede aplicarse en epidemiología, geología, hidrología, geohidrología, geografía, deporte, ciencia térmica, sistemas dinámicos, problemas caóticos, fractal (Atangana and Gómez-Aguilar, 2018). Tomando las propiedades de la definición de Derivada de Riemann-Liouville presentada en la ecuación 2.9 se presenta el modelo termodinámico del condensador de orden fraccionario de orden  $\sigma$ .

Por lo que el modelo del condensador de orden fraccionario queda descrito de la

siguiente manera y se muestra 3.30:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_1^{(1-q_1)}} {}_0^{\text{RL}} D_t^{q_1} Tho_1 &= \left[ \frac{w_{h,in}}{Vol_{int}} (Thi - Tho_1) - \frac{U_{int}(p, w, T) A_{int}}{Cp_h \rho_h Vol_{int}} \left( \frac{(Tho_1 - Tco_2) - (Thi - Tco_3)}{\ln \left( \frac{Tho_1 - Tco_2}{Thi - Tco_3} \right)} \right) \right], \\
\frac{1}{\sigma_2^{(1-q_2)}} {}_0^{\text{RL}} D_t^{q_2} Tco_3 &= \left[ \frac{w_{c,in}}{Vol_{ext}} (Tco_2 - Tco_3) + \frac{U_{ext}(p, w, T) A_{ext}}{Cp_c \rho_c Vol_{ext}} \left( \frac{(Tho_1 - Tco_2) - (Thi - Tco_3)}{\ln \left( \frac{Tho_1 - Tco_2}{Thi - Tco_3} \right)} \right) \right], \\
\frac{1}{\sigma_1^{(1-q_1)}} {}_0^{\text{RL}} D_t^{q_1} Tho_2 &= \left[ \frac{w_{h,in}}{Vol_{int}} (Tho_1 - Tho_2) - \frac{U_{int}(p, w, T) A_{int}}{Cp_h \rho_h Vol_{int}} \left( \frac{(Tho_2 - Tco_1) - (Tho_1 - Tco_2)}{\ln \left( \frac{Tho_2 - Tco_1}{Tho_1 - Tco_2} \right)} \right) \right], \\
\frac{1}{\sigma_2^{(1-q_2)}} {}_0^{\text{RL}} D_t^{q_2} Tco_2 &= \left[ \frac{w_{c,in}}{Vol_{ext}} (Tco_1 - Tco_2) + \frac{U_{ext}(p, w, T) A_{ext}}{Cp_c \rho_c Vol_{ext}} \left( \frac{(Tho_2 - Tco_1) - (Tho_1 - Tco_2)}{\ln \left( \frac{Tho_2 - Tco_1}{Tho_1 - Tco_2} \right)} \right) \right], \\
\frac{1}{\sigma_1^{(1-q_1)}} {}_0^{\text{RL}} D_t^{q_1} Tho_3 &= \left[ \frac{w_{h,in}}{Vol_{int}} (Tho_1 - Tho_2) - \frac{U_{int}(p, w, T) A_{int}}{Cp_h \rho_h Vol_{int}} \left( \frac{(Tho_3 - Tci) - (Tho_2 - Tco_1)}{\ln \left( \frac{Tho_3 - Tci}{Tho_2 - Tco_1} \right)} \right) \right], \\
\frac{1}{\sigma_2^{(1-q_2)}} {}_0^{\text{RL}} D_t^{q_2} Tco_1 &= \left[ \frac{w_{c,in}}{Vol_{ext}} (Tci - Tco_1) + \frac{U_{ext}(p, w, T) A_{ext}}{Cp_c \rho_c Vol_{ext}} \left( \frac{(Tho_3 - Tci) - (Tho_2 - Tco_1)}{\ln \left( \frac{Tho_3 - Tci}{Tho_2 - Tco_1} \right)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

donde  $q_1$  y  $q_2$  representan el orden para cada uno de los fluidos del condensador.  $w_{c,in}$  y  $w_{h,in}$  son el flujo volumétrico de entrada del fluido refrigerante y el vapor, respectivamente.  $Cp, \rho$  son la capacidad calorífica y la densidad de este cambio de acuerdo con el estado de la materia que se evalúa. El coeficiente general de transferencia de calor de cada uno ( $U_1$  y  $U_2$ ) es función de la presión, la temperatura y el flujo. Para ser coherentes con la dimensionalidad medida en la práctica y considerando (Gómez-Aguilar et al., 2012; Baleanu, 2020; Aguilar, 2012), introducimos los parámetros  $\sigma$  de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{\sigma_i^{1-q_i}} \cdot \frac{d^{q_i}}{dt^{q_i}}, \quad n - 1 < q_i \leq n, \tag{3.31}$$

donde  $n \in \mathbf{R}$ ,  $\sigma$  tiene las dimensiones de tiempo (segundos), el subíndice  $i = 1, 2$  representa los fluidos involucrados en el sistema de condensación. Esta expresión representa una derivada temporal ya que su dimensión es segundos a la inversa  $1/s$ . El parámetro  $\sigma$  caracteriza la estructura temporal fraccionaria del operador temporal fraccionario (Gómez-Aguilar et al., 2012).

### 3.3.3. Análisis de estabilidad.

Tomando la estructura del sistema no lineal presentado en 2.27 y considerando el modelo de orden fraccionario del condensador dado en la Ec. 3.30, tenemos

$${}_0D_t^\gamma x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad (3.32)$$

donde  $x(t) = (Th_{o1}(t), T_{co3}(t), Th_{o2}(t), T_{co2}(t), Th_{o3}(t), T_{co1}(t))^T$  es el vector de estados y

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} k_{h1}(Thi - Th_{o1}) - k_{h2} \left( \frac{(Th_{o1} - T_{co2}) - (Thi - T_{co3})}{\ln\left(\frac{Th_{o1} - T_{co2}}{Thi - T_{co3}}\right)} \right) \\ k_{c1}(T_{co2} - T_{co3}) + k_{c2} \left( \frac{(Th_{o1} - T_{co2}) - (Thi - T_{co3})}{\ln\left(\frac{Th_{o1} - T_{co2}}{Thi - T_{co3}}\right)} \right) \\ k_{h1}(Th_{o1} - Th_{o2}) - k_{h2} \left( \frac{(Th_{o2} - T_{co1}) - (Th_{o1} - T_{co2})}{\ln\left(\frac{Th_{o2} - T_{co1}}{Th_{o1} - T_{co2}}\right)} \right) \\ k_{c1}(T_{co1} - T_{co2}) + k_{c2} \left( \frac{(Th_{o2} - T_{co1}) - (Th_{o1} - T_{co2})}{\ln\left(\frac{Th_{o2} - T_{co1}}{Th_{o1} - T_{co2}}\right)} \right) \\ k_{h1}(Th_{o1} - Th_{o2}) - k_{h2} \left( \frac{(Th_{o3} - T_{ci}) - (Th_{o2} - T_{co1})}{\ln\left(\frac{Th_{o3} - T_{ci}}{Th_{o2} - T_{co1}}\right)} \right) \\ k_{c1}(T_{ci} - T_{co1}) + k_{c2} \left( \frac{(Th_{o3} - T_{ci}) - (Th_{o2} - T_{co1})}{\ln\left(\frac{Th_{o3} - T_{ci}}{Th_{o2} - T_{co1}}\right)} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Calculando la matriz Jacobiana de  $\phi(t)$

$$\frac{\partial \phi(t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} k_{h1}(Thi - Th_{o1}) - k_{h2} \left( \frac{(Th_{o1} - T_{co2}) - (Thi - T_{co3})}{\ln\left(\frac{Th_{o1} - T_{co2}}{Thi - T_{co3}}\right)} \right) \\ k_{c1}(T_{co2} - T_{co3}) + k_{c2} \left( \frac{(Th_{o1} - T_{co2}) - (Thi - T_{co3})}{\ln\left(\frac{Th_{o1} - T_{co2}}{Thi - T_{co3}}\right)} \right) \\ k_{h1}(Th_{o1} - Th_{o2}) - k_{h2} \left( \frac{(Th_{o2} - T_{co1}) - (Th_{o1} - T_{co2})}{\ln\left(\frac{Th_{o2} - T_{co1}}{Th_{o1} - T_{co2}}\right)} \right) \\ k_{c1}(T_{co1} - T_{co2}) + k_{c2} \left( \frac{(Th_{o2} - T_{co1}) - (Th_{o1} - T_{co2})}{\ln\left(\frac{Th_{o2} - T_{co1}}{Th_{o1} - T_{co2}}\right)} \right) \\ k_{h1}(Th_{o1} - Th_{o2}) - k_{h2} \left( \frac{(Th_{o3} - T_{ci}) - (Th_{o2} - T_{co1})}{\ln\left(\frac{Th_{o3} - T_{ci}}{Th_{o2} - T_{co1}}\right)} \right) \\ k_{c1}(T_{ci} - T_{co1}) + k_{c2} \left( \frac{(Th_{o3} - T_{ci}) - (Th_{o2} - T_{co1})}{\ln\left(\frac{Th_{o3} - T_{ci}}{Th_{o2} - T_{co1}}\right)} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Resolviendo obtenemos la siguiente matriz

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

donde

$$\begin{aligned}
m_{11} &= -s_1 \frac{k_{h1} + k_{h2}}{\ln \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} - k_{h2} \frac{T_{co2} - T_{co3} + T_{hi} - T_{ho1}}{\ln \left( \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} \right)^2 (T_{co2} - T_{ho1})}}, \\
m_{12} &= -s_1 \frac{k_{h2}}{\ln \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} - k_{h2} \frac{(T_{co2} + T_{co3} - T_{hi} - T_{ho1})}{\ln \left( \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} \right)^2 (T_{co2} - T_{co1})}}, \\
m_{13} &= 0, \\
m_{14} &= s_1 \frac{k_{h2}}{\ln \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} - k_{h2} \frac{(T_{co2} - T_{co3} + T_{hi} - T_{ho1})}{\ln \left( \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} \right)^2 (T_{co2} - T_{ho1})}}, \\
m_{15} &= 0, \\
m_{16} &= 0, \\
m_{21} &= s_2 \frac{k_{c2}}{\ln \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} - k_{c2} \frac{T_{co2} - T_{co3} + T_{hi} - T_{ho1}}{\ln \left( \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} \right)^2 (T_{co2} - T_{ho1})}}, \\
m_{22} &= -s_2 \frac{k_{c1} + k_{c2}}{\ln \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} + k_{c2} \frac{(T_{co2} + T_{co3} - T_{hi} - T_{ho1})}{\ln \left( \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} \right)^2 (T_{co3} - T_{hi})}}, \\
m_{23} &= 0, \\
m_{24} &= s_2 \frac{k_{c1} - k_{c2}}{\ln \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} + k_{c2} \frac{(T_{co2} - T_{co3} + T_{hi} - T_{ho1})}{\ln \left( \frac{T_{co2} - T_{ho1}}{T_{co3} - T_{hi}} \right)^2 (T_{co2} - T_{ho1})}}, \\
m_{25} &= 0, \\
m_{26} &= 0, \\
m_{31} &= s_1 \frac{k_{h1} + k_{h2}}{\ln \frac{T_{co1} - T_{ho2}}{T_{co2} - T_{ho1}} - k_{h2} \frac{T_{co1} - T_{co2} + T_{ho1} - T_{ho2}}{\ln \left( \frac{T_{co1} - T_{ho2}}{T_{co2} - T_{ho1}} \right)^2 (T_{co2} - T_{ho1})}}, \\
m_{32} &= 0, \\
m_{33} &= -s_1 \frac{k_{h1} + k_{h2}}{\ln \frac{T_{co1} - T_{ho2}}{T_{co2} - T_{ho1}} - k_{h2} \frac{T_{co1} - T_{co2} + T_{ho1} - T_{ho2}}{\ln \left( \frac{T_{co1} - T_{ho2}}{T_{co2} - T_{ho1}} \right)^2 (T_{co1} - T_{ho2})}}, \\
m_{34} &= -s_1 \frac{k_{h2}}{\ln \frac{T_{co1} - T_{ho2}}{T_{co2} - T_{ho1}} - k_{h2} \frac{(T_{co1} - T_{co2} + T_{ho1} - T_{ho2})}{\ln \left( \frac{T_{co1} - T_{ho2}}{T_{co2} - T_{ho1}} \right)^2 (T_{co2} - T_{ho1})}}, \\
m_{35} &= 0, \\
m_{36} &= s_1 \frac{k_{h2}}{\ln \frac{T_{co1} - T_{ho2}}{T_{co2} - T_{ho1}} - k_{h2} \frac{T_{co1} - T_{co2} + T_{ho1} - T_{ho2}}{\ln \left( \frac{T_{co1} - T_{ho2}}{T_{co2} - T_{ho1}} \right)^2 (T_{co1} - T_{ho2})}},
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
m_{41} &= s_2 \frac{k_{c2}}{\ln \frac{T_{co1}-T_{ho2}}{T_{co2}-T_{ho1}} + k_{c2} \frac{T_{co1}+T_{co2}+T_{ho1}-T_{ho2}}{\ln \left( \frac{T_{co1}-T_{ho2}}{T_{co2}-T_{ho1}} \right)^2 (T_{co2}-T_{ho1})}}, \\
m_{42} &= 0 \\
m_{43} &= s_2 \frac{k_{c2}}{\ln \frac{T_{co1}-T_{ho2}}{T_{co2}-T_{ho1}} - k_{c2} \frac{T_{co1}+T_{co2}-T_{ho1}-T_{ho2}}{\ln \left( \frac{T_{co1}-T_{ho2}}{T_{co2}-T_{ho1}} \right)^2 (T_{co1}-T_{ho2})}}, \\
m_{44} &= -s_2 \frac{k_{c1} + k_{c2}}{\ln \frac{T_{co1}-T_{ho2}}{T_{co2}-T_{ho1}} + k_{c2} \frac{(T_{co1}+T_{co2}-T_{ho1}-T_{ho2})}{\ln \left( \frac{T_{co1}-T_{ho2}}{T_{co2}-T_{ho1}} \right)^2 (T_{co2}-T_{ho1})}}, \\
m_{45} &= 0, \\
m_{46} &= s_2 \frac{k_{c1} - k_{c2}}{\ln \frac{T_{co1}-T_{ho2}}{T_{co2}-T_{ho1}} + k_{c2} \frac{T_{co1}+T_{co2}-T_{ho1}-T_{ho2}}{\ln \left( \frac{T_{co1}-T_{ho2}}{T_{co2}-T_{ho1}} \right)^2 (T_{co1}-T_{ho2})}}, \\
m_{51} &= 0, \\
m_{52} &= 0, \\
m_{53} &= s_1 \frac{k_{h1} + k_{h2}}{\ln \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} - k_{h2} \frac{T_{ci}-T_{co1}+T_{ho2}-T_{ho3}}{\ln \left( \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} \right)^2 (T_{co1}-T_{ho2})}}, \\
m_{54} &= 0, \\
m_{55} &= -s_1 \frac{k_{h1} + k_{h2}}{\ln \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} - k_{h2} \frac{T_{ci}-T_{co1}+T_{ho2}-T_{ho3}}{\ln \left( \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} \right)^2 (T_{ci}-T_{ho3})}}, \\
m_{56} &= -s_1 \frac{k_{h2}}{\ln \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} - k_{c2} \frac{T_{ci}-T_{co1}+T_{ho2}-T_{ho3}}{\ln \left( \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} \right)^2 (T_{co1}-T_{ho2})}}, \\
m_{61} &= 0, \\
m_{62} &= 0, \\
m_{63} &= s_2 \frac{k_{c2}}{\ln \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} + k_{c2} \frac{T_{ci}+T_{co1}-T_{ho2}-T_{ho3}}{\ln \left( \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} \right)^2 (T_{co1}-T_{ho2})}}, \\
m_{64} &= 0, \\
m_{65} &= s_2 \frac{k_{c2}}{\ln \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} - k_{c2} \frac{T_{ci}+T_{co1}-T_{ho2}-T_{ho3}}{\ln \left( \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} \right)^2 (T_{ci}-T_{ho3})}}, \\
m_{66} &= -s_2 \frac{k_{c1} + k_{c2}}{\ln \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} + k_{c2} \frac{T_{ci}+T_{co1}-T_{ho2}-T_{ho3}}{\ln \left( \frac{T_{ci}-T_{ho3}}{T_{co1}-T_{ho2}} \right)^2 (T_{co1}-T_{ho2})}},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

donde  $k_{h1} = \frac{w_{h,in}}{Vol_{int}}$ ,  $k_{h2} = \frac{U_{int}A_{int}}{C_{ph}\rho_h Vol_{int}}$ ,  $k_{c1} = \frac{w_{c,in}}{Vol_{ext}}$  y  $k_{c2} = \frac{U_{ext}A_{ext}}{C_{pc}\rho_c Vol_{ext}}$ ,  $T_{hi}$  y  $T_{ci}$ , son las temperaturas iniciales del vapor y el agua de enfriamiento respectivamente ,y

$s_1 = \sigma^{(1-q_1)}$  y  $s_2 = \sigma^{(1-q_2)}$  donde  $q_1 = q_2 = 0,9999$  y donde  $(T_{ho_1}(t), T_{co_3}(t), T_{ho_2}(t), T_{co_2}(t), T_{ho_3}(t), T_{co_1}(t))^T$  son los estados del sistema y  $0 < \gamma < 1$ . Los valores usados para el cálculo de la matriz  $A$  se muestran en el Anexo A.2 , por lo que tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} -0,0535 & 0,0646 & 0 & 0,0483 & 0 & 0 \\ -0,0235 & -0,9707 & 0 & 1,0062 & 0 & 0 \\ -0,0649 & 0 & -0,0759 & 0,0701 & 0 & 0,0707 \\ 0,0092 & 0 & 0,0069 & -0,9919 & 0 & 0,9758 \\ 0 & 0 & -0,1000 & 0 & -0,3622 & 0,1052 \\ 0 & 0 & -0,0140 & 0 & -0,1930 & -0,9687 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

se elige  $P = 0,045I_6$ , lo que implica que  $\| P \| = 0,045$

$$P = \begin{bmatrix} 0,0450 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0450 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0450 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0450 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0450 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0450 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

del teorema 2.2.5, tenemos la siguiente desigualdad:

$$A^T P + P A + \| P \|^2 I_6 < 0, \quad (3.40)$$

haciendo los cálculos correspondientes, tenemos

$$A^T P + P A + \| P \|^2 I_6 = \begin{bmatrix} -0,0028 & 0,0019 & -0,0029 & 0,0026 & 0 & 0 \\ 0,0019 & -0,0853 & 0 & 0,0453 & 0 & 0 \\ -0,0029 & 0 & -0,0048 & 0,0035 & -0,0045 & 0,0025 \\ 0,0026 & 0,0453 & 0,0035 & -0,0872 & 0 & 0,0439 \\ 0 & 0 & -0,0045 & 0 & -0,0306 & -0,0039 \\ 0 & 0 & 0,0025 & 0,0439 & -0,0039 & -0,0852 \end{bmatrix} < 0. \quad (3.41)$$

Dado  $f(x(t))$  es el término de orden superior en  $x(t)$ , existe  $\delta > 0$ , cuando  $\|x(t)\|$  es suficientemente pequeño, por lo que elegimos un  $L > 0$  suficientemente pequeño de modo que  $A^T P + PA + \eta I_6 < 0$ , donde  $\eta = \|P\|^2 + L$ , lo que implica que la solución trivial del modelo de condensador de orden fraccionario presentado en la Ec. 3.30 es asintóticamente estable según el Teorema 2.2.5.

### 3.4. Conclusiones

En esta sección se presentó el modelado termodinámico de orden fraccionario de un condensador de tubos concéntricos helicoidal de flujos a contracorriente, donde se aplicaron relaciones semi-empíricas para fluidos que se encuentran una sola fase y para el fluido cuando este cambia de fase, las cuales nos permitieron estimar de manera correcta el comportamiento esperado de un fluido cuando pasa por un cambio de fase. Se utilizó la definición de la derivada de Riemann-Liouville para la generalización del modelo matemático del sistema de intercambio de calor con cambio de fase utilizando el orden de la derivada para caracterizar la dinámica del condensador en base al error calculado, donde se describió la dinámica propia de este tipo de sistemas respetando las fases que se presentan en éste tipo de sistemas (vapor, vapor-líquido, líquido) con la ventaja de un grado de libertad extra dado por el orden de la derivada de orden fraccionario utilizando el mismo modelo del condensador. Se pudo comprobar que al generalizar y cambiar el orden de la derivada se logró disminuir el error entre los datos medidos y los estimados por el modelo, así mismo se presenta el análisis de estabilidad del sistema no lineal con la derivada del cual nos dice que el sistema es estable de acuerdo al Teorema 2.2.5.

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Modelo de orden fraccionario

El propósito de este análisis es desarrollar una comparación entre el modelo Ec. 3.30 y los datos experimentales. Para la optimización del modelo se utilizó un algoritmo PSO, este algoritmo nos permitirá encontrar los valores óptimos de  $q_1$ ,  $q_2$ , y  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , que tiene como objetivo caracterizar la dinámica del condensador helicoidal de doble tubo con flujos a contracorriente.

Para simular el modelo se utilizaron datos experimentales. Las entradas del modelo son el flujo volumétrico  $W_{c,in} = 6,3555 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $W_{h,in} = 5,5556 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$ . La presión en la tubería interna y externa donde ocurren las condensaciones es  $p_h = 0,20 \text{ bar}$  and  $p_c = 0,89 \text{ bar}$ , respectivamente. Las temperaturas de entrada del sistema son medibles y varían en un intervalo entre  $77,9 \text{ }^\circ\text{C}$  -  $78,6 \text{ }^\circ\text{C}$ , el agua de enfriamiento varía entre  $20,8 \text{ }^\circ\text{C}$  -  $21,4 \text{ }^\circ\text{C}$ . Finalmente, los valores optimizados son  $q_1 = 0,99$ ,  $q_2 = 0,9997$ ,  $\sigma_1 = 0,90$  y  $\sigma_2 = 0,9995$ , estos valores permiten describir correctamente la dinámica del sistema sin perder la física conocida de un sistema con cambio de fase, donde la temperatura durante el cambio de fase permanece constante y se alcanza la temperatura de saturación del sistema necesaria para producir el cambio de fase.

La Fig. 4.1 muestra buenos resultados del modelo fraccionario optimizado, en la Fig. 4.2 se muestra el error entre los valores medidos y los estimados por el modelo de orden fraccionario.

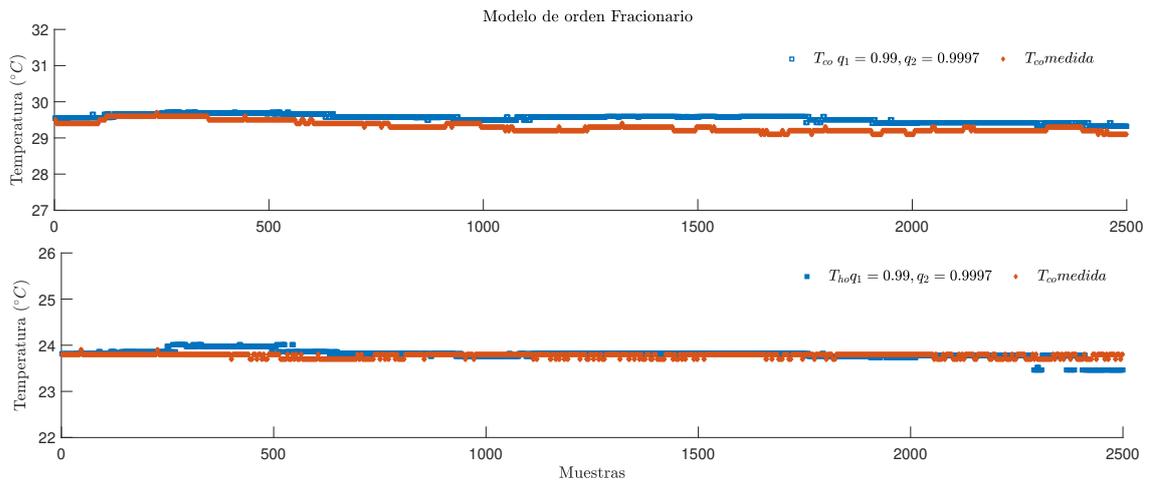


Figura 4.1: Modelo de orden fraccionario del condensador.

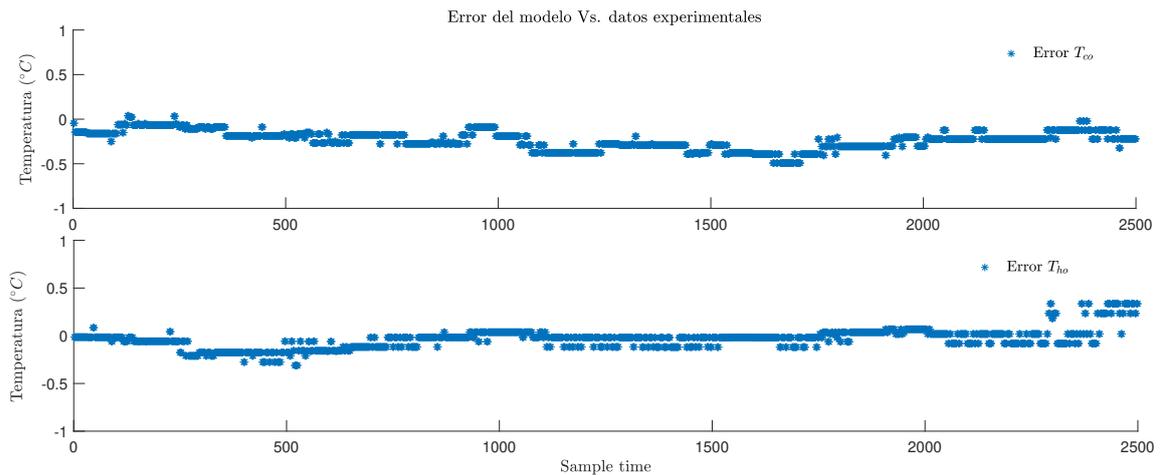


Figura 4.2: Error del modelo de orden fraccionario del condensador

Para cuantificar los resultados obtenidos, el error cuadrático medio ( $MSE$ ) entre la temperatura medida experimentalmente y la temperatura estimada por el modelo de orden fraccionario se muestran en la Tabla 4.1.

Para cuantificar la dispersión de los datos obtenidos por el modelo, el cálculo de la desviación estándar se presenta en la Tabla 4.2.

Tabla 4.1: MSE del modelo de orden fraccionario del condensador.  
MSE del modelo del condensador

	MSE de $T_{co}$	MSE de $T_{ho}$
$\gamma_{ord} = 1$	0,8520	0,1592
$\gamma_1 = 0,99, \gamma_2 = 0,9997$	0,1040	0,0120

Tabla 4.2: Desviación estándar del modelo de orden fraccionario del condensador.  
Desviación estándar del modelo del condensador

	$T_{co}$	$T_{ho}$
Desviación estándar $\gamma_1 = 0,99, \gamma_2 = 0,9997$	0,8457	0,3988

## 4.2. Esquema FDI basado en observadores adaptativos de orden fraccionario

Se realizó un sistema FDI basado en el diseño de observadores adaptativos de orden fraccionario (OAOF) para generar redundancia analítica que nos permita detectar y aislar fallas en los sensores de temperatura del condensador. El algoritmo FDI compara la señal medida de los sensores con las señales generadas por los observadores para detectar comportamientos anormales en la medición de los sensores. La redundancia analítica se generó utilizando un banco de dos observadores adaptativos de orden fraccionario con la estructura que se muestra en la Fig. 4.3.

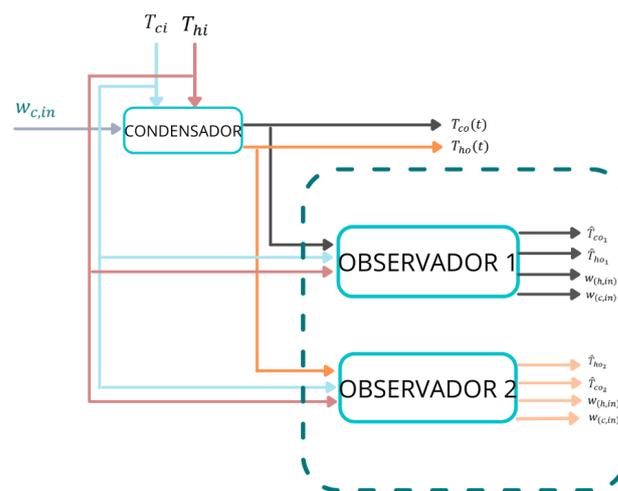


Figura 4.3: Banco de observadores.

### 4.2.1. Observador adaptativo de orden fraccionario con $T_{co}$ como señal medida

Considerando el modelo de orden fraccionario presentado en Ec.3.30 y el observador adaptativo presentado en Ec.2.36, el diseño del observador adaptativo de orden fraccionario 1 (OAOF 1) se realiza utilizando la salida de medida  $T_{co}$  para estimar ambos estados, obtenemos:

$$\begin{aligned}
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob1}}\hat{T}_{co(2,3),1}(t) &= \left\{ \left[ \frac{\hat{w}_{c,in}}{Vol_{ext}}(\hat{T}_{co(2,2),1} - \hat{T}_{co(2,3),1}) + \frac{U(p, w, T)A_{ext}}{Cp(2,3)\rho(2,3)Vol_{ext}}\Delta\hat{T}_{L1} \right] \sigma_2^{(1-\gamma_2)} \right\} \\
&\quad - k_y \left( \hat{T}_{co(2,3),1} - T_{co,measure} \right), \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob1}}\hat{T}_{ho(1,3),1}(t) &= \left\{ \left[ \frac{\hat{w}_{h,in}}{Vol_{int}}(\hat{T}_{ho(1,2),1} - \hat{T}_{ho(1,3),1}) - \frac{U(p, w, T)A_{int}}{Cp(1,3)\rho(1,3)Vol_{int}}\Delta\hat{T}_{L1} \right] \sigma_1^{(1-\gamma_1)} \right\} \\
&\quad - k_y \left( \hat{T}_{co(2,3),1} - T_{co,measure} \right), \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob1}}\hat{T}_{ho(1,1),1}(t) &= \left[ \frac{\hat{w}_{h,in}}{Vol_{int}}(T_{h,in} - \hat{T}_{ho(1,1),1}) - \frac{U(p, w, T)A_{int}}{Cp(1,1)\rho(1,1)Vol_{int}}\Delta\hat{T}_{L1} \right] \sigma_1^{(1-\gamma_1)}, \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob1}}\hat{T}_{ho(1,2),1}(t) &= \left[ \frac{\hat{w}_{h,in}}{Vol_{int}}(\hat{T}_{ho(1,1),1} - \hat{T}_{ho(1,2),1}) - \frac{U(p, w, T)A_{int}}{Cp(1,2)\rho(1,2)Vol_{int}}\Delta\hat{T}_{L1} \right] \sigma_1^{(1-\gamma_1)}, \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob1}}\hat{T}_{co(2,2),1}(t) &= \left[ \frac{\hat{w}_{c,in}}{Vol_{ext}}(\hat{T}_{co(2,1),1} - \hat{T}_{co(2,2),1}) + \frac{U(p, w, T)A_{ext}}{Cp(2,2)\rho(2,2)Vol_{ext}}\Delta\hat{T}_{L1} \right] \sigma_2^{(1-\gamma_2)}, \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob1}}\hat{T}_{co(2,1),1}(t) &= \left[ \frac{\hat{w}_{c,in}}{Vol_{ext}}(T_{c,in} - \hat{T}_{co(2,1),1}) + \frac{U(p, w, T)A_{ext}}{Cp(2,1)\rho(2,1)Vol_{ext}}\Delta\hat{T}_{L1} \right] \sigma_2^{(1-\gamma_2)}, \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob1}}\hat{w}_{c,in}(t) &= -k_\theta \left( \frac{1}{Vol_{ext}}(\hat{T}_{co(2,2),3} - \hat{T}_{co(2,3),3}) \right) \left( \sigma_1^{(1-\gamma_1)} \right) \left( \hat{T}_{co3} - \hat{T}_{co} \right) \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob1}}\hat{w}_{h,in}(t) &= -k_\theta \left( \frac{1}{Vol_{int}}(\hat{T}_{ho(1,2),3} - \hat{T}_{ho(1,3),3}) \right) \left( \sigma_3^{(1-\gamma_3)} \right) \left( \hat{T}_{ho3} - \hat{T}_{ho} \right)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

### 4.2.2. Observador adaptativo de orden fraccionario con $T_{ho}$ como señal medida

El diseño del observador adaptativo de orden fraccionario 2 (OAOF 2) se realiza utilizando la salida de medida  $T_{ho}$  para estimar ambos estados, obtenemos:

$$\begin{aligned}
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob2}}\hat{T}_{co(2,3),2}(t) &= \left\{ \left[ \frac{w_{c,in}}{Vol_{ext}}(\hat{T}_{co(2,2),2} - \hat{T}_{co(2,3),2}) + \frac{U(p,w,T)A_{ext}}{Cp(2,3)\rho(2,3)Vol_{ext}}\Delta\hat{T}_{L2} \right] \sigma_2^{(1-\gamma_2)} \right\} \\
&\quad - k_y \left( \hat{T}_{ho(1,3),2} - T_{ho,measure} \right), \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob2}}\hat{T}_{ho(1,3),2}(t) &= \left\{ \left[ \frac{\hat{w}_{h,in}}{Vol_{int}}(\hat{T}_{ho(1,2),2} - \hat{T}_{ho(1,3),2}) - \frac{U(p,w,T)A_{int}}{Cp(1,3)\rho(1,3)Vol_{int}}\Delta\hat{T}_{L2} \right] \sigma_1^{(1-\gamma_1)} \right\} \\
&\quad - k_y \left( \hat{T}_{ho(1,3),2} - T_{ho,measure} \right), \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob2}}\hat{T}_{ho(1,1),2}(t) &= \left[ \frac{\hat{w}_{h,in}}{Vol_{int}}(T_{h,in} - \hat{T}_{ho(1,1),2}) - \frac{U(p,w,T)A_{int}}{Cp(1,1)\rho(1,1)Vol_{int}}\Delta\hat{T}_{L2} \right] \sigma_1^{(1-\gamma_1)}, \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob2}}\hat{T}_{ho(1,2),2}(t) &= \left[ \frac{\hat{w}_{h,in}}{Vol_{int}}(\hat{T}_{ho(1,1),2} - \hat{T}_{ho(1,2),2}) - \frac{U(p,w,T)A_{int}}{Cp(1,2)\rho(1,2)Vol_{int}}\Delta\hat{T}_{L2} \right] \sigma_1^{(1-\gamma_1)}, \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob2}}\hat{T}_{co(2,2),2}(t) &= \left[ \frac{\hat{w}_{c,in}}{Vol_{ext}}(\hat{T}_{co(2,1),2} - \hat{T}_{co(2,2),2}) + \frac{U(p,w,T)A_{ext}}{Cp(2,2)\rho(2,2)Vol_{ext}}\Delta\hat{T}_{L2} \right] \sigma_2^{(1-\gamma_2)}, \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob2}}\hat{T}_{co(2,1),2}(t) &= \left[ \frac{\hat{w}_{c,in}}{Vol_{ext}}(T_{c,in} - \hat{T}_{co(2,1),2}) + \frac{U(p,w,T)A_{ext}}{Cp(2,1)\rho(2,1)Vol_{ext}}\Delta\hat{T}_{L2} \right] \sigma_2^{(1-\gamma_2)}, \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob2}}\hat{w}_{c,in}(t) &= -k_\theta \left( \frac{1}{Vol_{ext}}(\hat{T}_{co(2,2),3} - \hat{T}_{co(2,3),3}) \right) \left( \sigma_1^{(1-\gamma_1)} \right) \left( \hat{T}_{co3} - \hat{T}_{co} \right) \\
{}_0^{RL}D_t^{\gamma_{ob2}}\hat{w}_{h,in}(t) &= -k_\theta \left( \frac{1}{Vol_{int}}(\hat{T}_{ho(1,2),3} - \hat{T}_{ho(1,3),3}) \right) \left( \sigma_3^{(1-\gamma_3)} \right) \left( \hat{T}_{ho3} - \hat{T}_{ho} \right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Una vez diseñados los observadores, procederemos a comparar los valores estimados por los observadores y los valores experimentales de la planta, como se muestra a continuación:

- El propósito de este análisis es realizar la validación de los observadores presentados en Ecs. 4.1 y 4.2 utilizando un dato del sistema, para probar que la dinámica del sistema se esté respetando. Para esta prueba las entradas al modelo son los flujos volumétricos  $W_{c,in} = 6,3555 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $W_{h,in} = 5,5556 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$ . La presión en la tubería interna y externa donde ocurren las condensaciones es  $p_h = 0,20 \text{ bar}$  y  $p_c = 0,89 \text{ bar}$ , respectivamente. La temperatura de entrada del

sistema se puede medir y es de  $78,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  y la temperatura del agua de enfriamiento es de  $20,9\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

En la Fig. 4.4 se muestra la dinámica del sistema y la estimación de los observadores de orden fraccionario, en un punto, donde se puede ver que los observadores están siguiendo la dinámica del sistema.

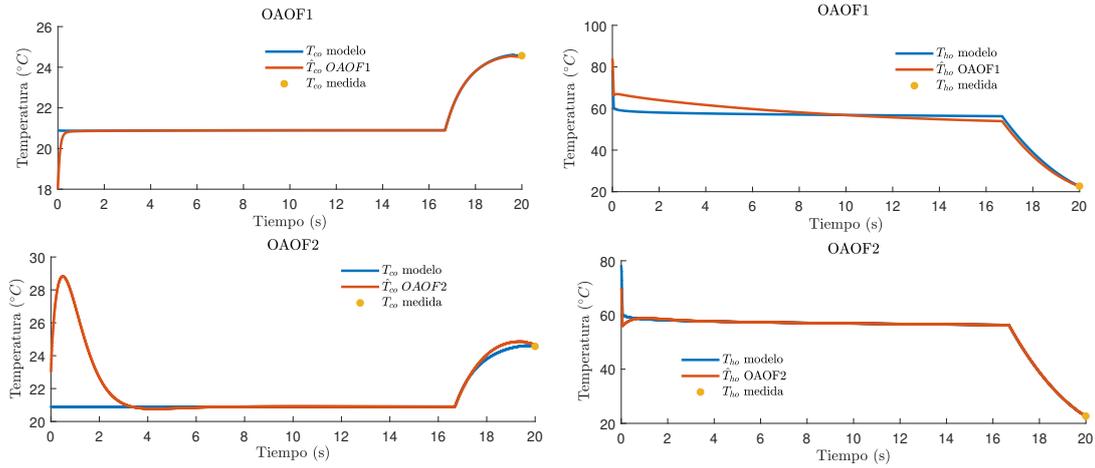


Figura 4.4: Observadores de orden fraccionario (dinámica).

Los errores entre los datos experimentales y la estimación de los observadores para la temperatura del condensado  $T_{ho}$  son  $FOAO1 = 0,0929$  y  $FOAO2 = 0,02343$ , y para la temperatura del agua de enfriamiento  $T_{co}$  son  $FOAO1 = 0,06344$  y  $FOAO2 = 0,1108$ .

- El propósito de este análisis es realizar la validación de los observadores presentados en Ecs. 4.1 y 4.2 usando 2500 datos obtenidos experimentalmente. Las entradas del modelo son los flujos volumétricos  $W_{c,in} = 6,3555 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $W_{h,in} = 5,5556 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$ . La presión en las tuberías interna y externa donde ocurren la condensación son  $p_h = 0,20 \text{ bar}$  y  $p_c = 0,89 \text{ bar}$ , respectivamente. La temperatura del vapor varía entre  $77,9\text{ }^{\circ}\text{C}$  -  $78,6\text{ }^{\circ}\text{C}$  y la temperatura del agua de enfriamiento varía entre  $20,8\text{ }^{\circ}\text{C}$  -  $21,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

La Fig. 4.6 muestra los errores de observadores fraccionarios.

Para cuantificar el desempeño de los observadores fraccionarios, el error cuadrático medio ( $MSE$ ) entre la temperatura medida y las temperaturas estimadas por los observadores, se muestran en la Tabla 4.3 para OAOF 1 y la Tabla 4.4 para OAOF 2.

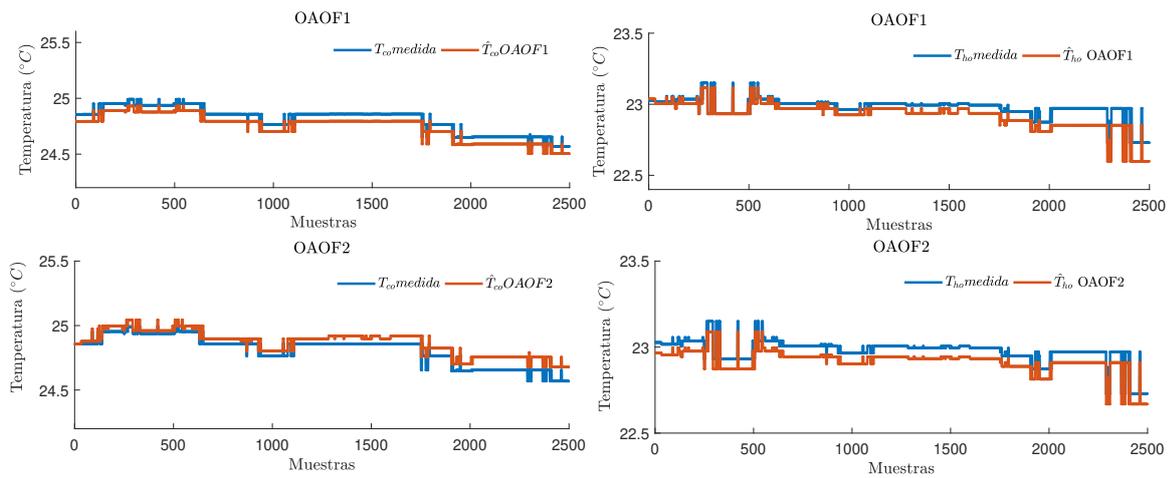


Figura 4.5: Observadores de orden fraccionario.

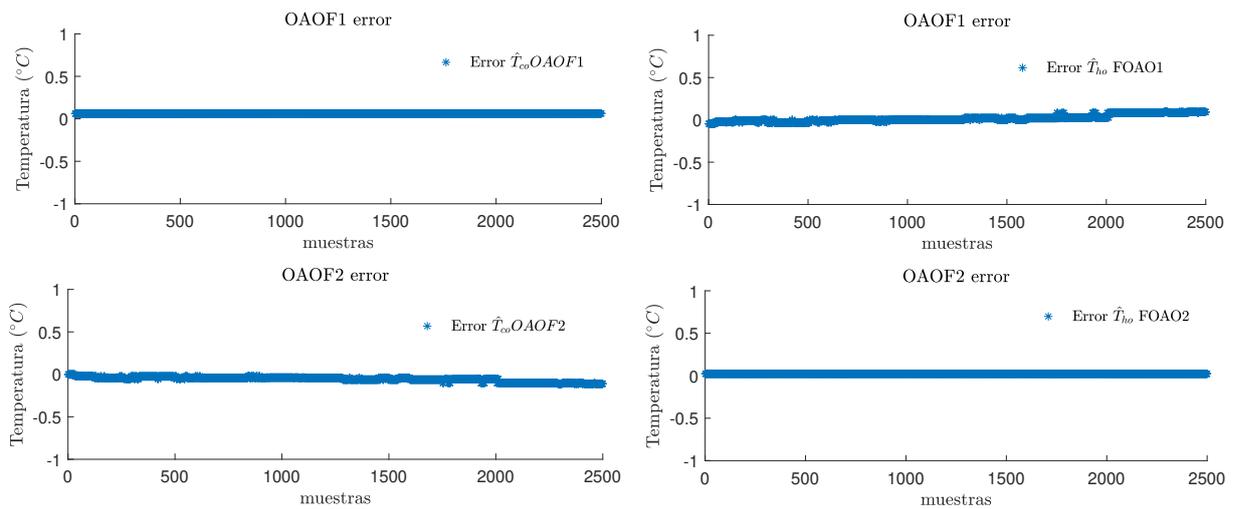


Figura 4.6: Error de estimación de los observadores de orden fraccionario.

El OAOF 1 estima ambas temperaturas de salida  $T_{ho}$  y  $T_{co}$  utilizando como entrada la temperatura del vapor  $T_{hi}$  y la temperatura de entrada del agua de enfriamiento  $T_{ci}$ , el OAOF 1 nos permite conocer el valor de  $T_{ho}$  incluso si éste no es medido. El OAOF 2 estima ambas temperaturas de salida  $T_{ho}$  y  $T_{co}$  utilizando como entrada la temperatura del vapor  $T_{hi}$  y la temperatura de entrada del agua de enfriamiento  $T_{ci}$ , el OAOF 2 nos permite conocer el valor de  $T_{co}$  incluso si éste no es medido.

La diferencia entre la señal medida y la señal estimada por los observadores de orden

Tabla 4.3: MSE de la temperatura estimada del condensador (FOAO1).

FOAO1 MSE		
	MSE of $T_{co}$	MSE of $T_{ho}$
$\gamma_4 = 0,99$	0,0039	0,0018

Tabla 4.4: MSE de la temperatura estimada del condensador (FOAO2).

FOAO2 MSE		
	MSE of $T_{co}$	MSE of $T_{ho}$
$\gamma_4 = 0,996$	0,0039	$5,6221 \times 10^{-04}$

fraccionario se puede comparar, teniendo como resultado un residuo. Este residuo se compara contra un umbral para activar o no una alarma. En este trabajo de tesis el umbral está determinado por la precisión del sensor, en este caso para el sensor de temperatura la precisión es  $\pm 0,5\% - 1^\circ C$  por lo que el umbral depende de la magnitud de la medición. Los residuos están dados por:

$$\begin{aligned} r_1 T_{co} &= |T_{co}(t) - \hat{T}_{co1}|, \\ r_2 T_{ho} &= |T_{ho}(t) - \hat{T}_{ho1}|. \end{aligned} \tag{4.3}$$

De acuerdo con la Ec. 4.3, se definió una matriz de firma de fallas presentada en la Tabla 4.5, lo que permite localizar e identificar fallas en los sensores de temperatura.

Tabla 4.5: Matriz de fallas

Fault	$r_1 T_{co}$	$r_2 T_{ho}$
$T_{co}$	1	0
$T_{ho}$	0	1

Este sistema FDI se puede utilizar para evitar una interrupción del proceso cuando falla uno de los sensores. Además, cuando una de las señales físicas medidas por uno de los sensores falla, se reemplaza por la señal generada por los observadores fraccionarios. Si  $r_1 T_{co}$  es mayor que el umbral indica una falla en el sensor de temperatura  $T_{co}$ , entonces el sistema FDI cambiara a la señal generada por el OAOF 2. Por otro lado, si  $r_2 T_{ho}$  es mayor que el umbral indica una falla en el sensor de temperatura  $T_{ho}$ , entonces el sistema FDI conmutara a la señal generada por el OAOF 1.

- Falla en  $T_{co}$ : En esta prueba se introdujeron diferentes fallas mediante software al sensor de temperatura  $T_{co}$ . El observador fraccionario 2 (OAOF 2) no depende de la medición de  $T_{co}$ , por lo tanto, el observador fraccionario 2 no se ve afectado por ninguna de las fallas en este sensor de temperatura, lo que permite estimar ambas temperaturas  $\hat{T}_{co}$  y  $\hat{T}_{ho}$  en el condensador.

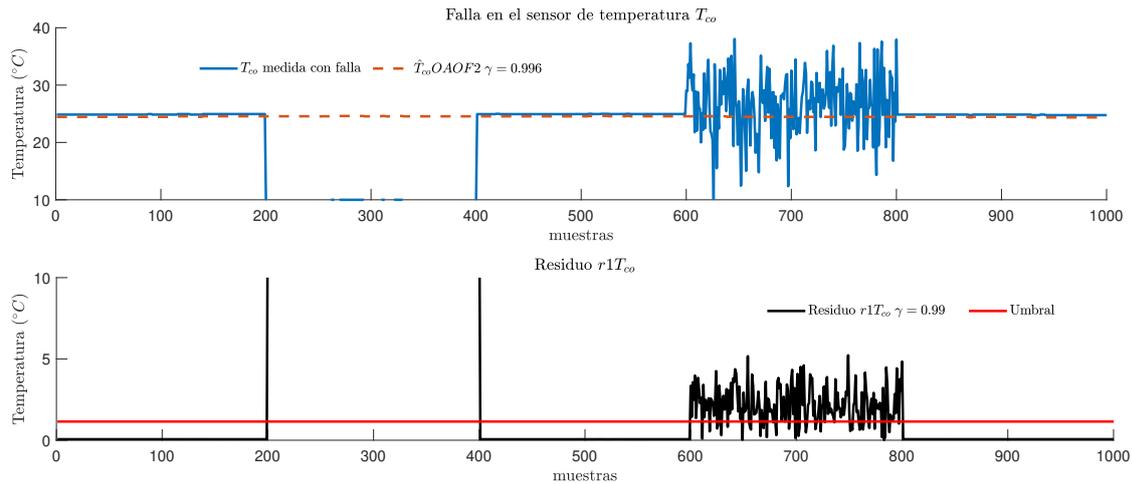


Figura 4.7: Falla en el sensor de temperatura  $T_{co}$ .

En la Fig. 4.7 se muestra que la señal de temperatura medida  $T_{co}$  está sujeta a diferentes escenarios de falla en diferentes momentos. En las muestras 200 a 400, una falla total en el sensor de temperatura  $T_{co}$  se introduce mediante software, que aparece en la figura, donde se observa que el residuo  $r_1 T_{co}$  es mayor que el umbral. En el intervalo de las muestras 600 a 800 se introduce mediante software una falla parcial en el sensor de temperatura  $T_{co}$ , la falla parcial se representa por medio de una señal de ruido que oscila entre  $\pm 15^\circ C$ , aun con la presencia de estas fallas el OAOF 2 es capaz de estimar  $T_{co2}$  y  $T_{ho2}$ . De acuerdo con el residuo  $r_1 T_{co}$  mostrado en la Fig. 4.7, se puede concluir que el sistema FDI permite detectar y localizar fallas en el sensor de temperatura  $T_{co}$ .

- Falla en  $T_{ho}$ . En esta prueba se introdujeron diferentes fallas mediante software al sensor de temperatura  $T_{ho}$ . El observador fraccionario 1 (OAOF 1) no depende de la medición de  $T_{ho}$ , por lo tanto, el observador fraccionario 1 no se ve afectado por ninguna de las fallas en este sensor de temperatura, lo que permite estimar ambas temperaturas  $\hat{T}_{co}$  y  $\hat{T}_{ho}$  en el condensador.

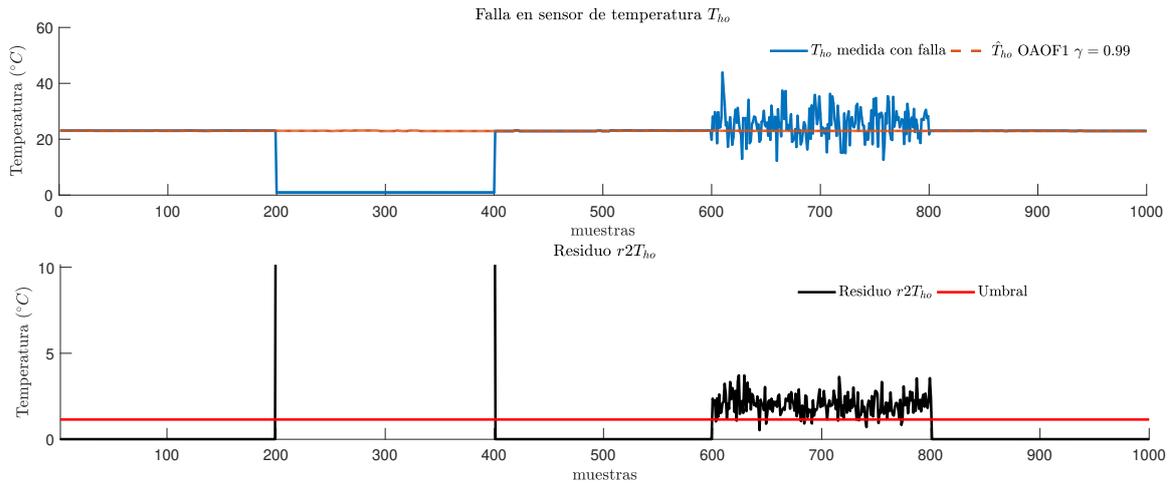


Figura 4.8: Falla en el sensor de temperatura  $T_{ho}$ .

En la Fig. 4.8 se muestra que la señal de temperatura medida  $T_{ho}$  está sujeta a diferentes escenarios de falla en diferentes momentos. En las muestras 200 a 400, una falla total en el sensor de temperatura  $T_{ho}$  se introduce mediante software, que aparece en la figura, donde se observa que el residuo  $r_2T_{ho}$  es mayor que el umbral. En el intervalo de las muestras 600 a 800 se introduce mediante software una falla parcial en el sensor de temperatura  $T_{ho}$ , la falla parcial se representa por medio de una señal de ruido que oscila entre  $\pm 4$  °C, aun con la presencia de estas fallas el OAOF 1 es capaz de estimar  $T_{co1}$  y  $T_{ho1}$ . De acuerdo con el residuo  $r_2T_{ho}$  mostrado en la Fig. 4.8, se puede concluir que el sistema FDI permite detectar y localizar fallas en el sensor de temperatura  $T_{ho}$ .

### 4.3. Control PI de orden fraccionario.

La importancia del control de procesos es mantener el sistema bajo condiciones controladas, asegurando así la integridad del personal y la operación correcta del sistema.

El objetivo final es obtener un esquema de control tolerante a fallas, por eso es necesario implementar una ley de control capaz de controlar la temperatura de salida del condensado, por tal razón se utilizó una ley de control proporcional integral de orden fraccionario (FOPI) (Ec. 2.37).

En la Fig.4.9 se muestra el esquema de control en lazo cerrado del condensador, donde  $T_{ref}$  es la temperatura deseada, lo que garantiza que el vapor se ha condensado por completo, el condensado ingresará al siguiente sistema, el cual es un evaporador.  $W_{c,in}$  es el flujo de agua de enfriamiento y es la variable manipulada,  $T_{ho}$  es la temperatura de salida del sistema, es decir, el condensado.

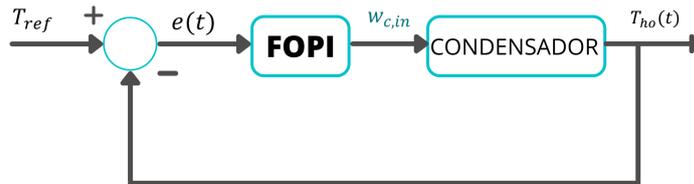


Figura 4.9: Esquema de control.

La ley de control del condensador se muestra en Ec.4.4

$$w_{c,in}(t) = k_p e(t) + T_i {}_0D_t^{-\lambda} e(t), \quad (4.4)$$

$$e(t) = T_{ref} - T_{ho}(t).$$

Donde  $e(t)$  es el error. Esta ley de control fue evaluada en simulación y los resultados obtenidos se presentan a continuación.

- El propósito de este análisis es realizar la validación del FOPI. La entrada al sistema es el flujo volumétrico de vapor  $W_{h,in} = 5,5556 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$ . La presión en la tubería interna y externa donde ocurre la condensación es  $p_h = 0,20 \text{ bar}$  y  $p_c = 0,89 \text{ bar}$ , respectivamente. La temperatura del vapor varía entre  $77,9 \text{ }^\circ\text{C}$  -  $78,6 \text{ }^\circ\text{C}$  y la temperatura del agua de enfriamiento varía entre  $20,8 \text{ }^\circ\text{C}$  -  $21,4 \text{ }^\circ\text{C}$ , finalmente la temperatura de referencia ( $T_{ref}$ ) es  $23 \text{ }^\circ\text{C}$ .
- *Desarrollo de la prueba:* La Fig. 4.10 muestra el desempeño del control, ya que el objetivo del control es regular la temperatura de salida del condensador, ésta se definió en un valor fijo. Las ganancias y el orden del controlador fraccionario se ajustaron utilizando el algoritmo PSO, donde  $k_p = 9,89 \times 10^{-5}$ ,  $T_i = 1,8182 \times 10^{-5}$ ,  $\lambda = ,99$ . Como sabemos, este tipo de sistema trabaja con presión

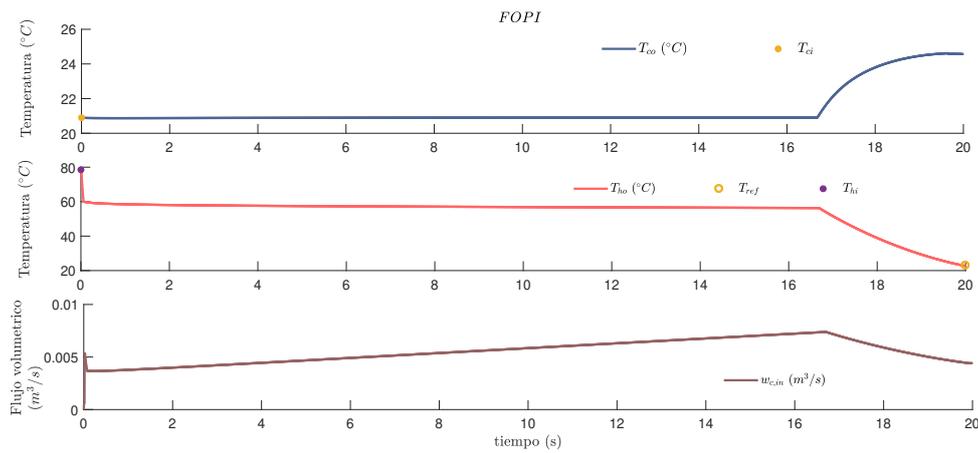


Figura 4.10: Desempeño del control FOPI.

de vacío, es decir, presión por debajo de la atmosférica, por lo que grandes cambios de temperatura pueden representar un cambio en la dinámica del sistema o dar lugar a inestabilidad, por lo que el proceso no será continuo. Uno de los objetivos del sistema controlado es obtener condensado en la salida para que todo el sistema de bomba de calor funcione de forma continua y sin interrupciones. La Fig. 4.10 muestra el comportamiento esperado del proceso de condensación con la ley de control implementada, manteniendo la dinámica conocida del sistema y la temperatura de salida del sistema cerca de la temperatura deseada.

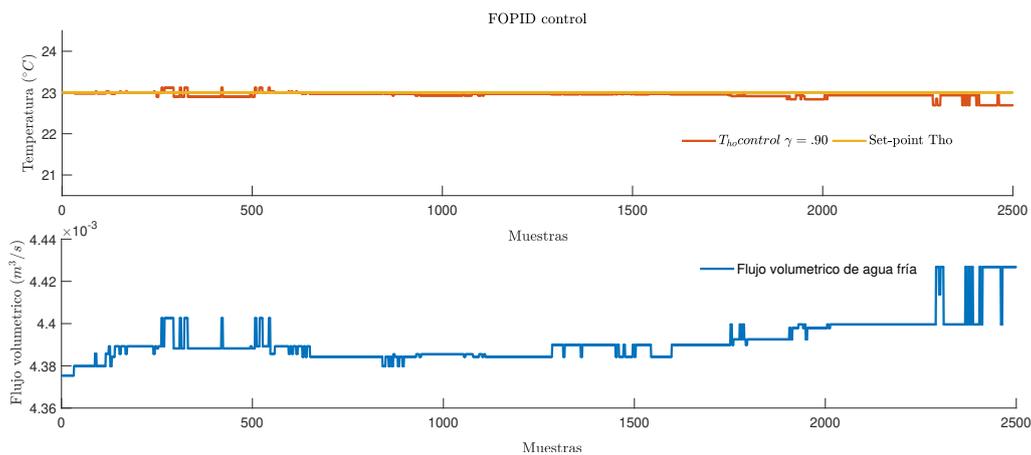


Figura 4.11: Control FOPI.

En la Fig. 4.11 se presenta la temperatura de salida regulada del sistema utilizando el control FOPI, también se observa el error de la variable controlada, donde el máximo

error permitido para tener un desempeño adecuado es  $\pm 1,15^{\circ}C$ . La Fig. 4.12 muestra el error entre la temperatura de referencia y la temperatura obtenida mediante el control FOPI.

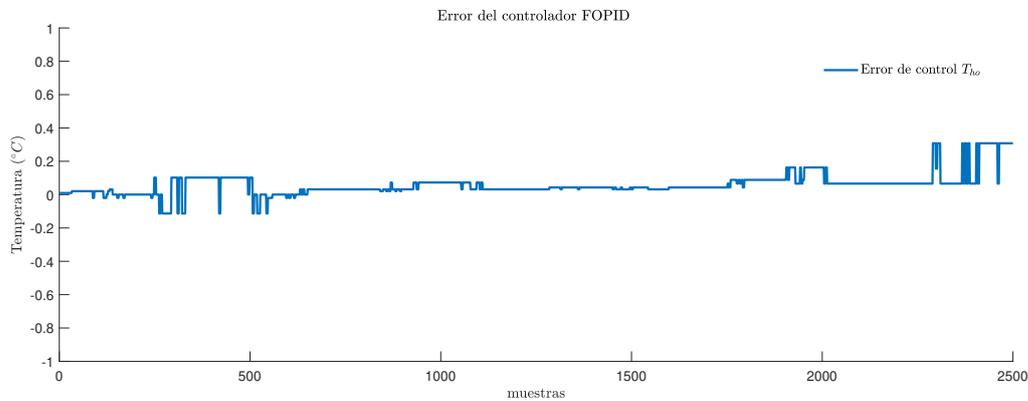


Figura 4.12: FOPI error.

Para cuantificar el desempeño del controlador, se obtuvo el error cuadrático medio (MSE) entre la temperatura deseada y el controlador de orden fraccionario. Los resultados se muestran en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6: MSE del controlador de orden fraccionario.  
error FOPI

MSE de $T_{ho}$	
$\lambda = 0,99$	0.0085

#### 4.4. Control Tolerante a Fallas.

El esquema general del sistema de CTF se muestra en la Fig. 4.13. Los componentes principales del sistema de CTF son el sistema de FDI y la ley de control. El sistema FDI se basa en el diseño de un banco de observadores adaptativos para generar redundancia analítica que nos permita detectar y aislar fallas en los sensores de temperatura del condensador. El algoritmo FDI compara la señal medida por los sensores con la señal generada por los observadores para detectar un comportamiento inusual en la medición de los sensores. Mientras que la ley de control nos permite mantener regulada la temperatura de salida del condensador, garantizando su correcto funcionamiento. Cuando

ocurre una falla en el sensor  $T_{ho}$ , el sistema FDI la detecta y conmuta la señal fallada por la señal generada por el observador, realizando la reconfiguración del controlador, permitiendo el funcionamiento continuo del sistema.

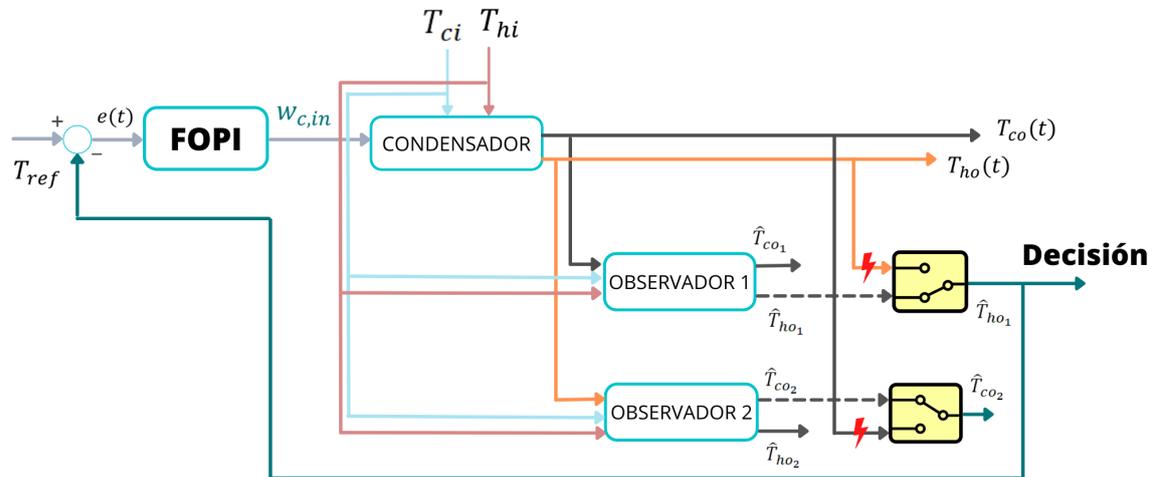


Figura 4.13: Esquema de control tolerante a fallas de orden fraccionario.

- El objetivo de esta prueba es analizar el esquema de control tolerante a fallas de orden fraccionario, para ello, se introdujeron fallas mediante software en la medición del sensor de temperatura  $T_{ho}$ .

En la Fig. 4.14 se muestra que la señal de temperatura medida  $T_{ho}$  está sujeta a diferentes escenarios de falla en diferentes momentos. En las muestras 200 a 400, una falla total en el sensor de temperatura  $T_{ho}$  se introduce mediante software, que aparece en la figura, donde se observa que el residuo  $r_2 T_{ho}$  es mayor que el umbral. En el intervalo de las muestras 600 a 800 se introduce mediante software una falla parcial en el sensor de temperatura  $T_{ho}$ , la falla parcial se representa por medio de una señal de ruido que oscila entre  $\pm 10^\circ C$ , aun con la presencia de estas fallas el OAOF 1 es capaz de estimar  $T_{co1}$  y  $T_{ho1}$ . De acuerdo con el residuo  $r_2 T_{ho}$  mostrado en la Fig. 4.14, se puede concluir que el sistema FDI permite detectar y aislar fallas. Además, el sistema de CTF de orden fraccionario conmuta la señal con falla a la señal estimada por el observador para mantener el funcionamiento continuo del condensador.

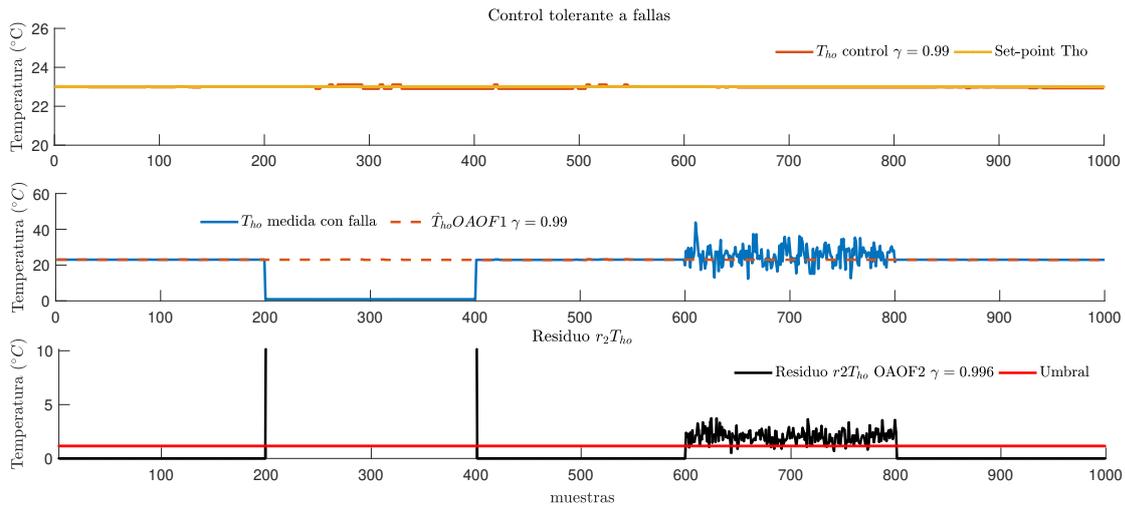


Figura 4.14: Control tolerante a fallas de orden fraccionario: falla en  $(T_{ho})$ .

- El objetivo de esta prueba es analizar el esquema de control tolerante a fallas de orden fraccionario, para ello, se introdujeron fallas mediante software en la medición del sensor de temperatura  $T_{co}$ .

En la Fig. 4.15 se muestra que la señal de temperatura medida  $T_{co}$  está sujeta a diferentes escenarios de falla en diferentes momentos. En las muestras 200 a 400, una falla total en el sensor de temperatura  $T_{co}$  se introduce mediante software, que aparece en la figura, donde se observa que el residuo  $r_1 T_{co}$  es mayor que el umbral. En el intervalo de las muestras 600 a 800 se introduce mediante software una falla parcial en el sensor de temperatura  $T_{co}$ , la falla parcial se representa por medio de una señal de ruido que oscila entre  $\pm 15^\circ C$ , aun con la presencia de estas fallas el OAOF 1 es capaz de estimar  $T_{co2}$  y  $T_{ho2}$ . De acuerdo con el residuo  $r_1 T_{co}$  mostrado en la Fig. 4.15, se puede concluir que el sistema FDI permite detectar y aislar fallas. Además, el sistema de CTF de orden fraccionario conmuta la señal con falla a la señal estimada por el observador para mantener el funcionamiento continuo del condensador.

## 4.5. Conclusiones

Se desarrolló un sistema de detección de fallas el cual está compuesto por observadores adaptativos, este sistema se utiliza para detectar fallas en los sensores de

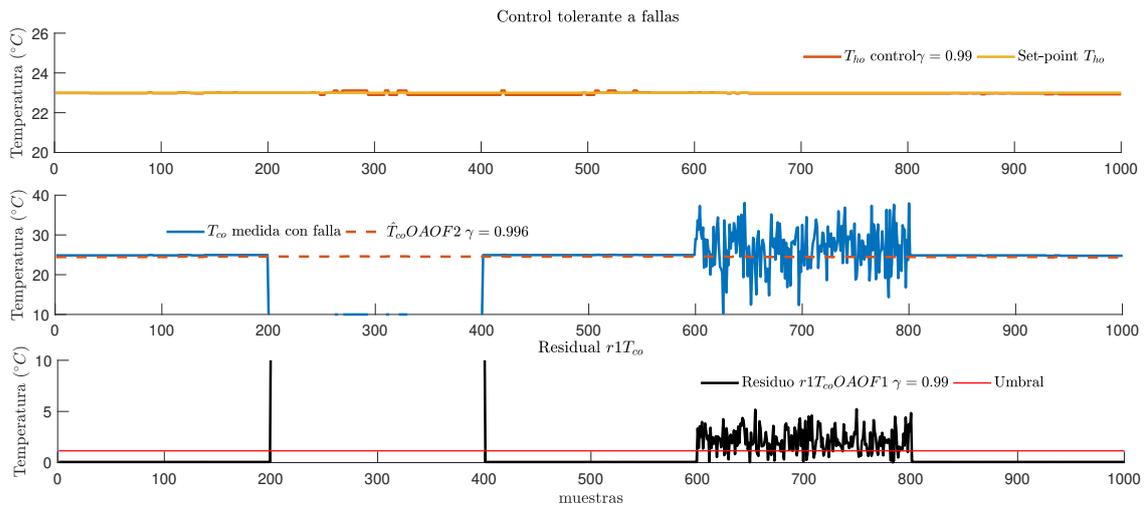


Figura 4.15: Control tolerante a fallas de orden fraccionario: falla en ( $T_{co}$ ).

temperatura del condensador. Además, se desarrolló un controlador PI que mantiene la temperatura de salida del agua condensada en un valor deseado. Finalmente, la conjunción del sistema de detección y aislamiento de fallas nos permitió obtener un sistema de control tolerante a fallas para el condensador, el cual funciona incluso con fallas en algunos de los sensores de temperatura.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajos futuros

### 5.1. Conclusiones

#### 5.1.1. Modelado de orden arbitrario en un sistema de cambio de fase.

Se realizó el modelado matemático de la dinámica del cambio de fase de un condensador helicoidal de tubos concéntricos de flujo a contracorriente que forma parte de un sistema de bombas de calor integrado a un purificador de agua, utilizando un enfoque fraccionario con la definición de derivada de Riemann-Liouville. A partir de los resultados obtenidos, se concluye que el enfoque fraccionario para el modelado de sistemas termodinámicos es una herramienta útil, ya permite mejorar la aproximación del modelo a los datos experimentales sin aumentar la complejidad del modelo matemático existente. Esta definición con ordenes valores de cercanos a la unidad permitieron representar el fenómeno de difusión presente en los sistemas termodinámicos, logrando así una mejor representación dinámica del condensador.

#### 5.1.2. Diagnóstico de fallas en sensores.

El modelo de orden fraccionario realizado fue utilizado para el diseño de observadores adaptativos de orden fraccionario utilizando la derivada de Riemann-Liouville, donde el parámetro estimado fue el flujo de entrada al sistema. Donde los resultados obtenidos en comparación con los datos experimentales permitieron validar el modelo,

así como los observadores, para posteriormente los observadores diseñados se utilizaron para un sistema FDI para detectar fallas en los sensores de temperatura de salida del sistema. Este sistema FDI es capaz de detectar fallas, así como de determinar que sensor contiene la falla y el tiempo de ocurrencia de la falla, sin embargo, debido al esquema utilizado sistema necesita al menos una señal medida, por lo que no es posible determinar múltiples fallas.

### 5.1.3. Control tolerante a fallas de orden fraccionario

Se realizó el diseño de un controlador PI de orden fraccionario que regule la temperatura de salida del condensado garantizando así la continua operación del sistema. Una vez más considerando el modelo de orden fraccionario de las dinámicas de las temperaturas, los observadores adaptativos de orden fraccionario y el esquema de detección y diagnóstico de fallas. Finalmente se diseñó un sistema de CTF el cual está compuesto por el controlador PI de orden fraccionario que regula la temperatura de salida del condensado, el cual fue acoplado al sistema FDI donde se genera la redundancia analítica por medio de los observadores fraccionarios, y donde el residuo generado por el sistema FDI se analiza y se toma una decisión, si existe una falla se realiza la reconfiguración del controlador, conmutando la señal generada por el sistema FDI por la del señal del sensor con falla, donde los resultados obtenidos demostraron la efectividad del método propuesto.

### 5.1.4. Trabajos futuros

Diferentes trabajos se pueden derivar a partir de la investigación de este trabajo de tesis, como se muestra a continuación:

- Implementar experimentalmente los algoritmos propuestos.
- Utilizar otra definición de derivadas fraccionarias en el modelo propuesto, con el fin de comparar las dinámicas obtenidas contra los datos experimentales y como afectan los diferentes kernel a este sistema.

- Complementar el modelo considerando los cambios en el volumen del fluido, utilizando las ecuaciones de Calor y volumen.
- Generalizar el controlador propuesto por Zavala-Rio para la regulación de la temperatura, acotando los flujos de entrada (PI acotado).
- Modelar fallas tipo ensuciamiento y relacionar los efectos de estas fallas en el sistema y en el coeficiente global de transferencia de calor.
- Diseñar un esquema de control tolerante a fallas, para las fallas tipo ensuciamiento.

### 5.1.5. Aportación

La originalidad de este trabajo, se centra en la aplicación de un enfoque de modelado y control utilizando la perspectiva teórica del cálculo fraccionario, adicionalmente se aplicó en un caso de estudio que no se había analizado desde el punto de vista termodinámico anteriormente, logrando así calcular por medio de un modelo termodinámico de orden fraccionario las dinámicas en la temperatura de un sistema que presenta cambio de fase, el modelado sirvió como base para el desarrollo de un sistema de control tolerante a fallas basado en observadores y un controlador PI de orden fraccionario. Por lo que las aportaciones de este trabajo de tesis son las siguientes:

- Modelado termodinámico de orden fraccionario de un condensador helicoidal de tubos concéntrico de flujos a contracorriente utilizando la derivada de Riemann-Liouville.
- Desarrollo de un controlador PI de orden fraccionario para la regulación de la temperatura de salida del condensador, con el fin de mantener el estado estable en el sistema de bombas de calor.
- Desarrollo de un sistema de detección y aislamiento de fallas aplicado a los sensores de temperatura del condensador helicoidal de tubos concéntrico de flujos a contracorriente.
- Desarrollo de un sistema de control tolerante a fallas en sensores del condensador.

- Publicación de artículos en revistas indexadas.

### 5.1.6. Ventajas y limitaciones

Se presentarán algunas de las ventajas presentadas por este trabajo de tesis, así como de la metodología propuesta.

- Gracias al orden de la derivada fraccionaria y al fenómeno de difusión que representa, es posible modelar el sistema, logrando mejorar las aproximaciones a las dinámicas presentes en el sistema.
- Al incluir nuevos grados de libertad al sistema incrementa la información que puede obtenerse de la naturaleza del sistema.
- Es posible recuperar el operador ordinario donde  $\gamma = 1$ .

A continuación, se presentarán algunas de las imitaciones que se presentaron en el desarrollo de esta tesis, así como de la metodología.

- No existe una interpretación geométrica y física clara, es decir, que no se ha logrado un consenso entre las diferentes interpretaciones de la derivada fraccionaria.
- Los grandes tiempos de cómputo al usar una derivada de orden fraccionaria para la simulación del sistema dinámico, así como los grandes tiempos de cómputo para poder estimar los órdenes de la derivada utilizando PSO.
- Los métodos propuestos para el análisis de estabilidad de sistemas fraccionarios con la derivada de Riemann-Liouville aún sigue en proceso de estudio, por lo que se siguen proponiendo métodos novedosos para el análisis de sistemas.

### 5.1.7. Publicaciones realizadas

- Alegría-Zamudio, M., Escobar-Jiménez, R. F., & Gómez-Aguilar, J. F. (2018). Fault tolerant system based on non-integers order observers: application in a heat exchanger. *ISA transactions*, 80, 286-296.

- Alegria-Zamudio, M., Escobar-Jiménez, R. F., Gómez-Aguilar, J. F., García-Morales, J., & Hernández-Pérez, J. A. (2019). Double pipe heat exchanger temperatures estimation using fractional observers. *The European Physical Journal Plus*, 134(10), 1-16.

# Bibliografía

- Abdolhosseini, M. and Bigdeli, N. (2014). Predictive functional control for fractional order system. *International Journal of Electronics Communication and Computer Engineering*, 5(1):16.
- Acevedo, A., Hernandez, J., Juarez, D., Parrales, A., Saravanan, R., and Huicochea, A. (2020). Thermodynamic analysis of cooling and heating systems for energy recovery. *International Journal of Refrigeration*, 115:172–181.
- Aguilar, J. F. G. (2012). Aplicación del cálculo fraccionario al modelado de sistemas biofísicos, bioeléctricos y mecánicos.
- Alegría-Zamudio, M., Escobar-Jiménez, R., and Gómez-Aguilar, J. (2018). Fault tolerant system based on non-integers order observers: application in a heat exchanger. *ISA transactions*, 80:286–296.
- Alegria-Zamudio, M., Escobar-Jiménez, R. F., Gómez-Aguilar, J. F., García-Morales, J., and Hernández-Pérez, J. A. (2019). Double pipe heat exchanger temperatures estimation using fractional observers. *European Physical Journal Plus*, 134(10).
- Alinezhad, M. and Allahviranloo, T. (2017). On the solution of fuzzy fractional optimal control problems with the caputo derivative. *Information Sciences*, 421:218–236.
- Alkahtani, B. S. T. (2016). Chua’s circuit model with atangana–baleanu derivative with fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals*, 89:547–551.
- Atangana, A. and Gómez-Aguilar, J. (2018). Decolonisation of fractional calculus rules: breaking commutativity and associativity to capture more natural phenomena. *The European Physical Journal Plus*, 133(4):1–22.

- Baleanu, D. (2020). Comments on:“the failure of certain fractional calculus operators in two physical models” by m. ortigueira, v. martynyuk, m. fedula and jat machado. *Fractional calculus and applied analysis*, 23(1):292–297.
- Bas, E. and Ozarslan, R. (2018). Real world applications of fractional models by atangana–baleanu fractional derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, 116:121–125.
- Belkhatir, Z. and Laleg-Kirati, T. M. (2017). High-order sliding mode observer for fractional commensurate linear systems with unknown input. *Automatica*, 82:209–217.
- Benyekhlef, A., Mohammedi, B., Hanini, S., Boumahdi, M., Rezrazi, A., and Laidi, M. (2021). A contribution to the modelling of fouling resistance in heat exchanger-condenser by direct and inverse artificial neural network. *Kemija u industriji: Časopis kemičara i kemijskih inženjera Hrvatske*, 70(11-12):639–650.
- Besançon, G. (2000). Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & control letters*, 41(4):271–280.
- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., Staroswiecki, M., and Schröder, J. (2006). *Diagnosis and fault-tolerant control*, volume 2. Springer.
- Boudjehem, D. and Boudjehem, B. (2010). The use of fractional order models in predictive control. In *3rd Conference on Nonlinear Science and Complexity, symposium: Fractional Calculus Applications, (Ankara, Turkey)*.
- Caputo, M. and Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):1–13.
- Carbot, D. (2015). Control tolerante a fallas en actuadores, con aplicación a un sistema termodinámico. *Centro Nacional de Investigación y desarrollo tecnológico*, pages 1–131.
- Castro, M. A. L. (2016). Diagnóstico de fallas con diseño de observadores de alta ganancia para sistemas no lineales con dinámica híbrida.

- Castro, M. L., Escobar, R., Torres, L., Aguilar, J. G., Hernández, J., and Olivares-Peregrino, V. (2016). Sensor fault detection and isolation system for a condensation process. *ISA transactions*, 65:456–467.
- Cengel, Y. (2014). *Heat and mass transfer: fundamentals and applications*. McGraw-Hill Higher Education.
- Çengel, Y. A., Boles, M. A., and Cázares, G. N. (2006). *Termodinámica*. Number QC311 C4 1996. McGraw-Hill.
- Colorado, D., Hernández, J., García-Valladares, O., Huicochea, A., and Siqueiros, J. (2011). Numerical simulation and experimental validation of a helical double-pipe vertical condenser. *Applied energy*, 88(6):2136–2145.
- Colorado-Garrido, D., Santoyo-Castelazo, E., Hernández, J., García-Valladares, O., Siqueiros, J., and Juarez-Romero, D. (2009). Heat transfer of a helical double-pipe vertical evaporator: Theoretical analysis and experimental validation. *Applied Energy*, 86(7-8):1144–1153.
- Coronel-Escamilla, A., Gómez-Aguilar, J., Torres, L., Escobar-Jimnez, R., and Olivares-Peregrino, V. (2017). Fractional observer to estimate periodical forces. *ISA transactions*.
- DINGA, X., CAI, W., DUAN, P., and YAN, J. (2014). Hybrid dynamic modeling for two phase flow condensers. *Applied thermal engineering*, 62(2):830–837.
- Djehali, N., Djennoune, S., Bettayeb, M., Ghanes, M., and Barbot, J.-P. (2016). Observation and sliding mode observer for nonlinear fractional-order system with unknown input. *ISA transactions*, 63:1–10.
- Duarte-Mermoud, M. A., Aguila-Camacho, N., Gallegos, J. A., and Castro-Linares, R. (2015). Using general quadratic lyapunov functions to prove lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1-3):650–659.
- Dzieliński, A. and Sierociuk, D. (2006). Observer for discrete fractional order state-space systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(11):511–516.

- Escobar, R., Astorga-Zaragoza, C., Téllez-Anguiano, A., Juárez-Romero, D., Hernández, J., and Guerrero-Ramírez, G. (2011). Sensor fault detection and isolation via high-gain observers: Application to a double-pipe heat exchanger. *ISA transactions*, 50(3):480–486.
- Escobar-Jimenez, R., Carbot-Rojas, D., Gómez-Aguilar, J., Alvarado-Martínez, V., Téllez-Anguiano, A., and Hernandez-Perez, J. (2017). Actuator fault tolerant control based on a mimo-mpc: Application in a double-pipe heat exchanger. *Chemical Engineering Communications*, 204(1):86–96.
- Escobar-Jiménez, R. F. (2012a). *Tesis doctoral*. PhD thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- Escobar-Jiménez, R. F. (2012b). *Tesis doctoral*. PhD thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- Flores, O., Velázquez, V., Meza, M., Horacio, H., Juárez, D., and Hernández, J. (2013). Estimación del coeficiente de transferencia de calor global a bajas presiones en un condensador helicoidal integrado a un transformador térmico. *Revista mexicana de ingeniería química*, 12(2):303–313.
- García, J. O. O. (2017). Esquema tolerante a fallas basado en observadores de orden fraccionario. aplicado a sensores de temperatura de un intercambiador de calor.
- García-Valladares, O., Pérez-Segarra, C., and Rigola, J. (2004). Numerical simulation of double-pipe condensers and evaporators. *International Journal of Refrigeration*, 27(6):656–670.
- Garrido, D. C. (2007). Transferencia de energía en un evaporador de doble tubo helicoidal vertical para un transformador térmico.
- Giovannini, M. and Lorenzini, M. (2022). Numerical model of an evaporative condenser for the food refrigeration industry. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 2177, page 012009. IOP Publishing.

- Gómez-Aguilar, J., Razo-Hernández, R., and Granados-Lieberman, D. (2014). A physical interpretation of fractional calculus in observables terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response. *Revista mexicana de física*, 60(1):32–38.
- Gómez-Aguilar, J., Rosales-García, J., Bernal-Alvarado, J., Córdova-Fraga, T., and Guzmán-Cabrera, R. (2012). Fractional mechanical oscillators. *Revista mexicana de física*, 58(4):348–352.
- Gomez-Aguilar, J., Yopez-Martinez, H., Escobar-Jimenez, R., Astorga-Zaragoza, C., and Reyes-Reyes, J. (2016). Analytical and numerical solutions of electrical circuits described by fractional derivatives. *Applied Mathematical Modelling*, 40(21-22):9079–9094.
- Guerrero Ozuna, I. E. (2016). Análisis dinámico de un sistema de regeneradores de energía para establecer acciones de control, enfoque basado en cálculo fraccionario.
- Hammar, K., Djamah, T., and Bettayeb, M. (2015). Fractional hammerstein system identification using polynomial non-linear state space model. In *Control, Engineering & Information Technology (CEIT), 2015 3rd International Conference on*, pages 1–6. IEEE.
- Hanif, H. (2022). A computational approach for boundary layer flow and heat transfer of fractional maxwell fluid. *Mathematics and Computers in Simulation*, 191:1–13.
- Hernández, A. H., Flores, O., Huicochea, A., Álvarez, A., Sierra, F. Z., Silva, S., and Hernández, J. A. (2016). Theoretical–experimental analysis of the heat transfer in a helical condenser for a heat transformer integrated to a water purification system. *Desalination and Water Treatment*, 57(48-49):23132–23146.
- Holmgren, B. M. (2006). X Steam for Matlab. pages 1–5.
- Huicochea, A. and Siqueiros, J. (2009). Increase of cop for an experimental heat transformer using a water purification system. *Desalination and Water Treatment*, 12(1-3):305–312.
- Huicochea, A., Siqueiros, J., and Romero, R. (2004). Portable water purification system integrated to a heat transformer. *Desalination*, 165:385–391.

- Jamil, A. A., Tu, W. F., Ali, S. W., Terriche, Y., and Guerrero, J. M. (2022). Fractional-order pid controllers for temperature control: A review. *Energies*, 15(10):3800.
- Jesus, I. S. and Machado, J. T. (2008). Fractional control of heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics*, 54(3):263–282.
- Khan, A. and Khan, N. (2022). A novel finite-time terminal observer of a fractional-order chaotic system with chaos entanglement function. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(2):640–656.
- Liang, M., Chang, Y., Zhang, F., Wang, S., Wang, C., Lu, S., and Wang, Y. (2022). Observer-based adaptive fuzzy output feedback control for a class of fractional-order nonlinear systems with full-state constraints. *International Journal of Fuzzy Systems*, 24(2):1046–1058.
- Liu, L., Shang, Y., Di, Y., Fu, Z., and Cai, X. (2022). Impulsive functional observer design for fractional-order nonlinear systems satisfying incremental quadratic constraints. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 41(6):3130–3152.
- Liu, S., Wu, X., Zhou, X.-F., and Jiang, W. (2016). Asymptotical stability of riemann–liouville fractional nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, 86(1):65–71.
- Mondol, A., Gupta, R., Das, S., and Dutta, T. (2018). An insight into newton’s cooling law using fractional calculus. *Journal of Applied Physics*, 123(6):064901.
- Ouhsaine, L., Boukal, Y., El Ganaoui, M., Darouach, M., Zasadzinski, M., Mimet, A., and Radhy, N. E. (2017). A general fractional-order heat transfer model for photovoltaic/thermal hybrid systems and its observer design. *Energy Procedia*, 139:49–54.
- Petráš, I. (2011). *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Springer Science & Business Media.
- Pisano, A., Rapaić, M. R., and Usai, E. (2014). Discontinuous dynamical systems for fault detection. a unified approach including fractional and integer order dynamics. *Mathematics and Computers in Simulation*, 95:111–125.

- Qin, Z., Wu, R., and Lu, Y. (2014). Stability analysis of fractional-order systems with the riemann–liouville derivative. *Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal*, 2(1):727–731.
- Qu, Y., Qiao, S., and Zhou, D. (2021). Steady-state modelling of dual-evaporator loop heat pipe. *Applied Thermal Engineering*, 193:116933.
- Qu, Y., Xu, L., Fang, X., Wang, J., and Gu, S. (2006). A new approach to heat exchanger control based on model control. *International Journal of Information and Systems Sciences*, 2(1):31–41.
- Rhouma, A., Hafsi, S., and Bouani, F. (2022). Global optimization in robust fractional control of uncertain fractional order systems: A thermal application using the stm32 microcontroller. *Electronics*, 11(2):268.
- Rocha, M. (2003). Una breve introducción al cálculo fraccional. *Laberintos e Infinitos*, (8).
- Rojas, D. A. C. (2015). Control tolerante a fallas en actuadores, con aplicación a un sistema termodinámico.
- Ross, B. (1974). Fractional calculus and its applications. *Lecture notes in mathematics*, 457.
- Sanama, C. and Xia, X. (2022). Modelling and experimental investigation of a vapor compression system under steady state regime. *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, 11(2).
- Shen, H., Song, X., and Wang, Z. (2013). Robust fault-tolerant control of uncertain fractional-order systems against actuator faults. *IET Control Theory & Applications*, 7(9):1233–1241.
- Siddique, I., Tlili, I., Bukhari, S. M., and Mahsud, Y. (2021). Heat transfer analysis in convective flows of fractional second grade fluids with caputo–fabrizio and atangana–baleanu derivative subject to newtonian heating. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 25(3):291–311.

- Sierociuk, D. and Petráš, I. (2011). Modeling of heat transfer process by using discrete fractional-order neural networks. In *2011 16th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics*, pages 146–150. IEEE.
- Soriano, M. A. H. (2016). Diseño de un observador de luenberger de orden fraccionario.
- Tejado, I., Vinagre, B. M., Traver, J. E., Prieto-Arranz, J., and Nuevo-Gallardo, C. (2019). Back to basics: Meaning of the parameters of fractional order pid controllers. *Mathematics*, 7(6):530.
- Viera-Martin, E., Gómez-Aguilar, J., Solis-Perez, J., Hernández-Pérez, J., and Escobar-Jiménez, R. (2022). Artificial neural networks: a practical review of applications involving fractional calculus. *The European Physical Journal Special Topics*, pages 1–37.
- Vu, T. N. L., Chuong, V. L., Truong, N. T. N., and Jung, J. H. (2022). Analytical design of fractional-order pi controller for parallel cascade control systems. *Applied Sciences*, 12(4):2222.
- Wang, C.-c. (1997). A numerical method for thermally non-equilibrium condensing flow in a double-pipe condenser. *Applied thermal engineering*, 17(7):647–660.
- Wang, Q.-L., He, J.-H., and Li, Z.-B. (2012). Fractional model for heat conduction in polar bear hairs. *Thermal Science*, 16(2):339–342.
- Xiong, X., Sharma, R. K., Kamal, S., Ghosh, S., Bai, Y., and Lou, Y. (2021). Discrete-time super-twisting fractional-order observer with implicit euler method. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, pages 1–1.
- Žecová, M. and Terpák, J. (2015). Fractional heat conduction models and thermal diffusivity determination. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
- Zecova, M., Terpak, J., and Dorcak, L. (2014). The modeling of heat conduction using integer-and fractional-order derivatives. In *Control Conference (ICCC), 2014 15th International Carpathian*, pages 710–715. IEEE.

Zhang, Y. and Jiang, J. (2008). Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems. *Annual reviews in control*, 32(2):229–252.

# Anexos

# Anexo A

# Anexo A

## A.1. Datos del condensador

Tabla A.1: Dimensiones del condensador

<b>Parameter</b>	<b>Internal pipe</b>	<b>External pipe</b>
Longitud ( $L$ )	4080 <i>mm</i>	4080 <i>mm</i>
Diámetro externo ( $d_{ext}$ )	9,5 <i>mm</i>	19,5 <i>mm</i>
Diámetro interno ( $d_{int}$ )	17,3 <i>mm</i>	15,45 <i>mm</i>
Grosor de la pared ( $e$ )	2,3 <i>mm</i>	4,05 <i>mm</i>
Diámetro helicoidal ( $D$ )	194 <i>mm</i>	194 <i>mm</i>
Radio helicoidal ( $a$ )	97 <i>mm</i>	97 <i>mm</i>
Distancia entre tubos ( $b$ )	60 <i>mm</i>	60 <i>mm</i>
Vueltas ( $n$ )	4,5	4,5
Altura ( $Al$ )	310 <i>mm</i>	310 <i>mm</i>

## A.2. Parámetros del sistema

Tabla A.2: Parámetros del sistema

Parámetro	Valor	Unidad
$T_{hi}$	78,001	$^{\circ}C$
$T_{ci}$	21,3999	$^{\circ}C$
$T_{ho1}$	21,2803	$^{\circ}C$
$T_{ho2}$	36,7020	$^{\circ}C$
$T_{ho3}$	23,7865	$^{\circ}C$
$T_{CO1}$	22,0889	$^{\circ}C$
$T_{CO2}$	29,4332	$^{\circ}C$
$T_{CO3}$	29,4903	$^{\circ}C$
$k_{h1}$	0,0052	-
$k_{c1}$	0,9826	-
$k_{h2}$	0,3539	-
$k_{c2}$	0,0709	-
$S_1$	1,0005	-
$S_2$	1,0001	-

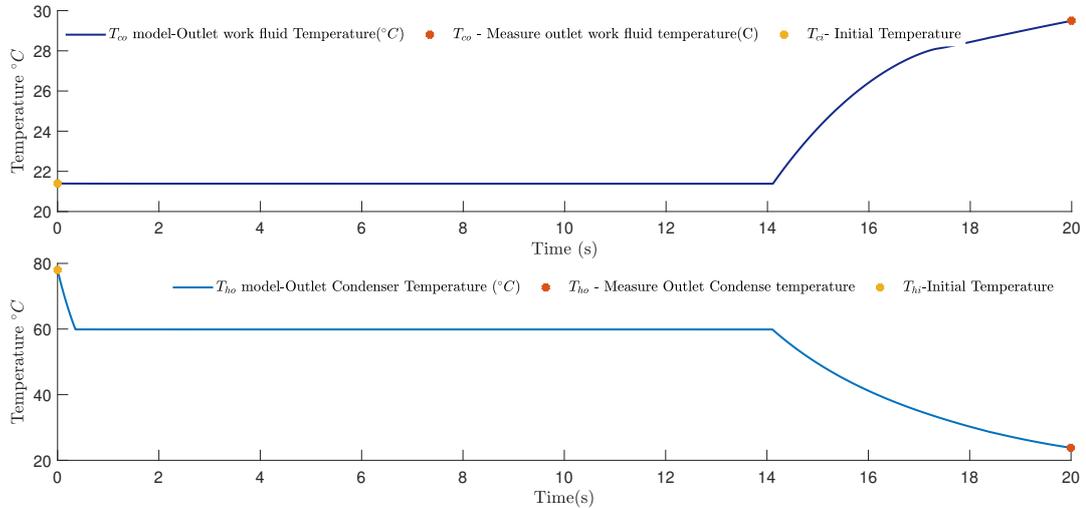


Figura A.1: Dinámicas de las temperaturas del condensador cuando  $q_1 = q_2 = 0,9999$ .

Para simular el modelo se utilizaron datos experimentales. El flujo de vapor de entrada al condensador sale del generador con un valor de  $W_{h,in} = 5,5556 \times 10^{-7} m^3/s$  a una temperatura de  $78,001^{\circ}C$ , mientras que el agua de enfriamiento es proporcionada por un circuito de enfriamiento externo por medio de una torre de enfriamiento a una temperatura de  $21,3999^{\circ}C$  y flujo de  $W_{c,in} = 5,6555 \times 10^{-4} m^3/s$ . La tubería interna

se somete a una presión por debajo de la atmosférica  $p_c = 0,20 \text{ bar}$  y la tubería externa es una presión atmosférica  $p_c = 0,89 \text{ barra}$ . Finalmente, los valores optimizados fueron  $q_1 = 0,9999$ ,  $q_2 = 0,9999$ ,  $\sigma_1 = 0,073$  y  $\sigma_2 = 0,3995$ , estos valores permiten describir correctamente la dinámica del sistema sin perder la física conocida de un sistema de cambio de fase, donde la temperatura durante el cambio de fase permanece constante y se alcanza la temperatura de saturación del sistema necesaria para producir el cambio de fase. La Fig. A.1 muestra la optimización del modelo fraccionario del condensador. El error absoluto calculado para  $T_{co} = 0,0080$  y para la salida condensada  $T_{ho} = 0,0151$ .

## Anexo B

## Anexo B

### B.1. Publicaciones realizadas

# Double pipe heat exchanger temperatures estimation using fractional observers<sup>\*</sup>

M. Alegria-Zamudio<sup>1</sup>, R.F. Escobar-Jiménez<sup>2,a</sup>, J.F. Gómez-Aguilar<sup>3,b</sup>, J. García-Morales<sup>2</sup>, and J.A. Hernández-Pérez<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Posgrado del Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Int. Internado Palmira S/N, Palmira C.P.62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico

<sup>2</sup> Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Int. Internado Palmira S/N, Palmira C.P.62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico

<sup>3</sup> CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Int. Internado Palmira S/N, Palmira C.P.62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico

<sup>4</sup> Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas (CIICAp-IICBA), Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM), Av. Universidad 1001, Col. Chamilpa, 62209, Cuernavaca, Morelos, Mexico

Received: 30 January 2019 / Revised: 31 March 2019

Published online: 9 October 2019

© Società Italiana di Fisica / Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature, 2019

**Abstract.** This work presents a high-gain fractional observers (HGFO) design in the Atangana-Baleanu-Caputo (ABC) sense applied to heat transfer process in specific to a condenser device. The aim of the HGFOs is to achieve the best outlet temperatures estimation as well as both fluid temperatures dynamics using different values of the derivative order, and using only one measured temperature for the observer design; therefore, for this purpose, two high-gain fractional observers were designed: one uses the outlet temperature of the cooling fluid and the other uses the outlet temperature of the condensed fluid. Simulations results carried out using experimental temperatures show the effectiveness of the proposed method.

## 1 Introduction

Heat exchangers are part of complex industrial processes as electric energy generation, nuclear power plants, chemical and petrochemical plants, water purification plants. So thanks to the wide use of these type of devices and to its diverse configurations and characteristics, several authors have dedicated to the heat exchangers study [1–4] mainly because it is useful to design controllers or fault tolerant control schemes [5].

As a generalization of the classical derivative, the fractional derivative has emerged. Recently, different authors have used fractional derivatives for modeling real-world systems using derivatives like the Riemman-Liouville-Caputo [6, 7] or Atangana-Baleanu [8], obtaining more accurate results than using ordinary derivatives. With this idea, many authors had used fractional observers as an alternative to the classical derivatives for estimating, reconstruct signals, adjust and fitting signals. In [9] the authors proposed Luenberger fractional order observers for nonlinear commensurate fractional order systems and used numerical examples to show the effectiveness of the approach. In [10], the authors design a fractional-order observer using a sampled-based event-triggered strategy to a second-order leader system for tracking consensus. In [11], the authors proposed a high-gain fractional order observer for estimating a heat exchanger outlet temperatures. The results showed the observer robustness for reconstructing faulty signals. In [12], the authors proposed a fractional order Kalman filters as an observer to fit signals using an optimization algorithm for optimizing the order of the observer. In [10], the authors develop a sliding mode fractional order observer for estimate the fractional order of the differential equations of the mismatched disturbance directly. In [13], the authors estimated periodical forces using a fractional state observer. The authors in [14] presented a nonlinear fractional order disturbance observer

<sup>\*</sup> Focus Point on “Fractional Differential Equations in Physics: Recent Advantages and Future Direction” edited by D. Baleanu, C. Cattani, M.V. Shitikova, H.G. Sun, Y. Zhang.

<sup>a</sup> e-mail: esjiri@cenidet.edu.mx (corresponding author)

<sup>b</sup> e-mail: jgomez@cenidet.edu.mx



Contents lists available at ScienceDirect

ISA Transactions

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/isatrans](http://www.elsevier.com/locate/isatrans)

Practice article

## Fault tolerant system based on non-integers order observers: Application in a heat exchanger

M. Alegría-Zamudio<sup>a</sup>, R.F. Escobar-Jiménez<sup>b,\*</sup>, J.F. Gómez-Aguilar<sup>c</sup><sup>a</sup> Posgrado del Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Int. Internado Palmira S/N, Palmira, C.P.62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico<sup>b</sup> Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Int. Internado Palmira S/N, Palmira, C.P.62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico<sup>c</sup> Conacyt-Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Int. Internado Palmira S/N, Palmira, C.P.62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico

## ARTICLE INFO

## Keywords:

Fractional observers  
 Fault tolerant system  
 Fault diagnosis and isolation  
 High-gain observers  
 Heat exchangers

## ABSTRACT

This work presents a fault-tolerant (FT) scheme based on the application of non-integer order observers also called fractional observers, the case of study is a double pipe countercurrent heat exchanger (HE). The aim of the FT is to detect sensors faults as soon as possible, and to provide a healthy signal in order to replace the faulty sensor signal by the fractional observer estimation. To develop the FT scheme a bank of high gain fractional order observers (HGFOO) is proposed. The Riemann-Liouville (RL) fractional derivative definition is used to solve each fractional observer. Experimental measures from a HE were used to test the performance of the fractional observers and the control scheme. The results show the robustness of the proposed observers.

## 1. Introduction

In the last twenty years, the fractional calculus theory has been widely studied and applied to describe the behavior of different processes [1,2] and systems [3], also in automatic control area the fractional calculus has been a powerful tool to solve practical problems [4]. The advantages of the fractional calculus over the ordinary calculus lies in the possibility of using different kernels and its general formulation provides an additional freedom degree because of the derivative order. The fractional derivatives of non-integer orders are used in physics and engineering to describe the processes and systems with spatial and temporal nonlocality (usually called dynamic memory of the system), nonlocality means that fractional differentiation involves integration over time from the past up to the present point of interest [5]. The order of the fractional derivative can be interpreted as an index of memory. Fractional calculus has been adopted by different areas of the engineering mainly automatic control area has given special attention to this field of the mathematics, that is because this method provides more accuracy in the processes and systems modeling and higher robustness in their control.

The FT systems applied to HE devices have been subject of study of different authors [6–8]. However, all these FT schemes were based on integer order models, observers and control systems. Applications of FT systems using fractional calculus have not been strongly explored. In Ref. [9] authors presented a research on robust FT control for uncertain fractional order systems. The authors presented numerical simulations

to show the effectiveness of the proposed method. So, FT schemes based on fractional observers are an opportunity area to be explored. The fractional observers theory has been widely studied for different authors. For instance, in the work presented by Ref. [10] the author designed a nonlinear observer to synchronize fractional-order chaotic systems. The author concluded that this approach is simple and global. Related to the design of Luenberger observers in Ref. [11], the authors presented the design of a Luenberger observer for discrete fractional order systems. The equations of the observer were derived and presented in the form of a theorem. In Ref. [12], a fractional order sliding mode observer was developed, the observer was designed to estimate the states variables. Theoretical results of two chaotic systems showed the effectiveness of the observer. Another interesting work based on the fractional order Lyapunov approach was presented in Ref. [13], in this work, simple fractional order observers were proposed for estimating the states variables of linear and nonlinear systems. Authors presented two examples to show the effectiveness of the observers, for the first example a linear system was considered. The case of study was a heat transfer system and for the second example a fractional-order Lü's system was considered. The authors conclude that both observers guarantee that the state estimation error converges to zero asymptotically. In order to obtain sufficient conditions to ensure the stability of a class of uncertain fractional order linear systems, authors in Ref. [14] proposed simple linear matrix inequalities by means of a fractional-order deterministic observer, simulations results showed the efficiency and the straightforwardness of the design. Authors in Ref. [15],

\* Corresponding author.

E-mail address: [esjiri@cenidet.edu.mx](mailto:esjiri@cenidet.edu.mx) (R.F. Escobar-Jiménez).<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2018.06.007>Received 23 February 2018; Received in revised form 24 May 2018; Accepted 13 June 2018  
0019-0578/ © 2018 ISA. Published by Elsevier Ltd. All rights reserved.

## B.2. Publicación sometida

*Fault detection and isolation system based on  
discrete-time fractional-order observers: Application in  
a heat exchanger*

*R. F. Escobar-Jiménez<sup>a,1</sup>, M. Alegría-Zamudio<sup>a</sup>, J. F. Gómez-Aguilar<sup>b</sup>, A.C.  
Téllez-Anguiano<sup>c</sup>, V.H. Olivares-Peregrino<sup>a</sup>*

<sup>a</sup>*Tecnológico Nacional de México/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.  
Int. Internado Palmira S/N, Palmira C.P.62490, Cuernavaca, Morelos, México*

<sup>b</sup>*CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col.  
Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca Morelos, México.*

<sup>c</sup>*Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Morelia, Departamento de Ingeniería  
Electrónica, Avenida Tecnológico 1500, Morelia, Michoacán, México*

---

**Abstract**

Sensor Fault Detection and Isolations systems have been studied widely by several authors of different fields of science (engineering, mathematics, physics) to ensure continuous operation of the systems. In this research, a Fault Detection and Isolation (FDI) system based on Discrete Fractional-Order High-Gain Observers (DFOHGO) is designed and evaluated for the outlet temperature sensors of a heat exchanger. The development of the fractional-order observers is based on the Grunwald-Letnikov fractional-order derivative. The FDI is based on a bank of two DFOHGOs to carry out a residual evaluation. The results showed that the DFOHGOs provide accurate estimations of the temperatures allowing the switching between the faulty sensor signal and the temperature estimations provided by the DFOHGOs.

*Keywords:* FDI system, Discrete-time fractional-order observers, Fractional