



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Doctorado

Análisis Térmico de una Habitación con Techo de
Geometría Irregular y Cubiertas Reflectivas

presentada por

M.C. Javier Uriarte Flores

como requisito para la obtención del grado de
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Director de tesis

Dr. Jesús Perfecto Xamán Villaseñor

Cuernavaca, Morelos, México. Febrero de 2022.



Cuernavaca, Mor., 25/enero/2022

No. Oficio: DIM/33/2022

Asunto Aceptación de documento de tesis

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **M.C. JAVIER URIARTE FLORES** con número de control D15CE012, del doctorado en Ciencias en Ingeniería Mecánica le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis de grado titulado "**ANÁLISIS TÉRMICO DE UNA HABITACIÓN CON TECHO DE GEOMETRÍA IRREGULAR Y CUBIERTAS REFLECTIVAS**" y hemos encontrado que se han atendido todas las observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

A T E N T A M E N T E

DRA. YVONNE CHÁVEZ CHENA
DIRECTORA DE TESIS

DR. MIGUEL ÁNGEL CHAGOLLA ARANDA
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL

DR. JESÚS ARCE LANDA
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL

DR. IRVING OSIRIS HERNÁNDEZ LÓPEZ
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL

DR. MIGUEL ÁNGEL GIJÓN RIVERA
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL

C.c.p.: Lic. Silvia del Carmen Ortiz Fuentes Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza / Subdirector Académico
Expediente



Cuernavaca, Mor., 01/febrero/2022
No. Oficio: DIM/42/2022
Asunto: Autorización de impresión de tesis

**M.C. JAVIER URIARTE FLORES
CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN ING. MECÁNICA
P R E S E N T E.**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **"ANÁLISIS TÉRMICO DE UNA HABITACIÓN CON TECHO DE GEOMETRÍA IRREGULAR Y CUBIERTAS REFLECTIVAS"** han informado, que están de acuerdo con el documento presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su documento de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE
Excelencia en Educación Tecnológica®
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"



CENTRO NACIONAL DE
INVESTIGACIÓN Y
DESARROLLO
TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA MECÁNICA



**DR. MARIO ALEJANDRO GÓMEZ JIMÉNEZ
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA**

C.c.p. Depto. de Servicios Escolares Lic. Silvia Del Carmen Ortiz Fuentes
Expediente
MAG3/RMA



Cuernavaca, Mor.,

01/febrero/2022

No. De Oficio:

SAC/30/2022

Asunto:

Autorización de
impresión de tesis

JAVIER URIARTE FLORES
CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "ANÁLISIS TÉRMICO DE UNA HABITACIÓN CON TECHO DE GEOMETRÍA IRREGULAR Y CUBIERTAS REFLECTIVAS", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

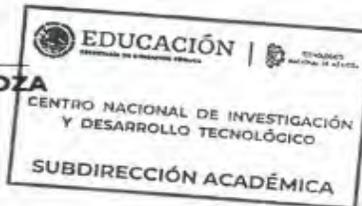
ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
"Educación Tecnológica al Servicio de México"

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

C. c. p. Departamento de Ingeniería Mecánica
Departamento de Servicios Escolares
Departamento de Comunicación y Eventos
Departamento de Recursos Materiales

CMAZ/CHG



Dedicatorias

Dedico este trabajo:

*Con mucho cariño a mis padres **Teresa y Esteban**, porque ustedes son el principal motivo por el cual yo he salido adelante aún en los momentos más difíciles. Hoy se muy bien que no existe papel ni tinta en este mundo que me alcance para terminar de agradecerles por todo su esfuerzo, su dedicación, sus enseñanzas, su apoyo, sus cuidados y el gran amor que me han brindado. Gracias por ser tan buenos conmigo, por seguir aguantándome después de tantos años y heredarme lo más valioso del mundo educación y valores.*

*De manera muy especial a mi asesor el **Dr. Jesús Perfecto Xamán Villaseñor †**, quien con su visión a futuro y sus ganas de seguir desarrollado herramientas en el área de CFD, me confió esta línea de trabajo, la cual seguiré evolucionando y lograr realizar ese libro que dejamos pendiente.*

*No hay prueba ni ley fundamenta
que determine el resultado en temas
del corazón y eso lo aseguro.*

Mr. G. H. Hardy

Cada día sabemos más y entendemos menos.

Albert Einstein

*Los hombres en algún punto son maestros de
su destino.*

Julio Cesar

*Un hombre provisto de papel, lápiz y goma, y
con sujeción a una disciplina, es en efecto una
máquina de Turing universal.*

Alan Turing

Aprende a vivir y sabrás morir bien.

Confucio

AGRADECIMIENTOS

A Dios por ayudarme a realizar este sueño.

*A mis padres **Teresa** y **Esteban** quienes me han apoyado en las decisiones que he tomado tanto en mi vida personal como en la profesional.*

De manera muy especial a mi asesor:

Dr. Jesús Perfecto Xamán Villaseñor †

Por brindarme la oportunidad y confianza de trabajar bajo su tutela un tema de suma importancia para su vida profesional, por su invaluable apoyo y colaboración para la realización de este proyecto, por su tiempo, sus charlas y por su compromiso para con los estudiantes. Por brindarme su amistad y consejo. Nunca olvidare como surgió la idea de este trabajo doctoral. Se te extrañara amigo.

*Al comité revisor: **Dra. Yvonne, Dr. Arce, Dr. Gijón, Dr. Osiris** y **Dr. Chagolla** por su tiempo, comentarios y retroalimentación en la revisión de este trabajo.*

*A mis amigos y compañeros: **Lennon, Irving, Rogelio, Pancho, Che Pan, Hermes, Edgar, Yessi, Martín, Mike, Ana, Samanta, Daniel** y **Carlos**, que de una u otra manera me apoyaron e hicieron más amena la realización de este trabajo.*

*A los doctores: **A. Oliva** y **C.D. Pérez-Segarra** por su invaluable apoyo académico y comentarios durante mi estancia en el Centro Tecnológico de Transferencia de Calor de la Universidad Politécnica de Catalunya, España.*

*Al **Dr. Wilton Pereira da Silva** de la Universidad Federal de Campina Grande, Brasil, por su apoyo académico en la recta final de este proyecto.*

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por brindarme la oportunidad de formarme académicamente y lograr una meta más.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero recibido.

Índice

Lista de Figuras	III
Lista de Tablas	V
Nomenclatura	VII
Resumen	X
Abstract	XII
1 Introducción	1
1.1 Revisión bibliográfica	5
1.1.1 Techos inclinados y/o a dos aguas	6
1.1.2 Techos con recubrimiento	15
1.1.3 Techos tipo bóveda y/o cúpula	20
1.2 Conclusión de la revisión bibliográfica	26
1.3 Objetivo	26
1.3.1 Objetivos específicos	26
1.4 Alcance	27
1.5 Estructura de la tesis	27
2 Modelo Físico y Matemático	29
2.1 Modelo Físico	30
2.2 Modelo Matemático	32
2.2.1 Modelo de Conducción (CFD)	32
2.2.2 Modelo de Balance de Energía Global (GEB)	35
3 Coordenadas Curvilíneas	37
3.1 Relaciones de Transformación	41
3.2 Vectores de Base	45
3.3 Transformación de las Ecuaciones de Generación	49
3.4 Solución de las Ecuaciones de Generación	58
3.5 Transformación de las Ecuaciones de Conservación	61
4 Balances de Energía	67
4.1 Primera Ley de la Termodinámica	67
4.2 Balances de Energía Global	70
5 Metodología de Solución Numérica	75

5.1	Dinámica de Fluidos Computacional	75
5.1.1	Métodos Numéricos	75
5.1.2	Discretización del Dominio Físico	78
5.1.3	Discretización del Modelo Matemático	79
5.1.4	Condiciones de frontera	83
5.2	Simulación Energética en Edificaciones	96
5.2.1	Balace de energía en el muro	96
5.2.2	Balace de energía en la habitación	99
5.2.3	Balace de energía en la ventana	101
5.2.4	Balace de energía en el suelo	103
5.2.5	Balace de energía en la tierra	105
5.2.6	CHTC	108
5.3	Verificación del Código Numérico	109
5.3.1	Coordenadas Generalizadas	109
5.3.2	Balace de Energía Global	117
6	Resultados	121
6.1	Parámetros de estudio	121
6.2	Evaluación del sistema	127
6.2.1	Temperatura - Día más Cálido	127
6.2.2	Temperatura - Día más Frío	133
6.2.3	Flujo de Calor	139
7	Conclusiones y Recomendaciones	147
7.1	Conclusiones	147
7.2	Recomendaciones para trabajos futuros	149
	Referencias Bibliográficas	151

Lista de Figuras

1.1	Porcentaje y/o número de equipos por región climática.	2
1.2	Componentes principales de la envolvente de una edificación.	3
1.3	Porcentaje de uso de material aislante por región climática.	4
1.4	Uso de material aislante por componente de edificación en la región cálida extrema.	4
2.1	Modelo físico del techo (CFD).	31
2.2	Modelo físico de la habitación (GEB).	31
2.3	Modelo CFD.	34
2.4	Diagrama del GEB.	35
2.5	Modelo GEB.	36
3.1	Tipos de geometrías.	37
3.2	Tipos de arreglos para la generación de mallas.	38
3.3	Clasificación de los métodos para generar mallas.	39
3.4	Dominios para mapear una geometría.	40
3.5	Mapeo de una geometría.	41
3.6	Vector de posición en el espacio.	45
3.7	Superficies y vectores en el sistema coordenado curvilíneo.	46
3.8	Concentración de líneas.	57
3.9	Aproximación con FDM.	58
3.10	Diagrama para determinar x y y	60
4.1	Elementos analizados con balances de energía.	70
4.2	Concepto de placa delgada.	71
4.3	Analogía entre los tipos de resistencias.	72
4.4	Resistencias térmicas.	73
5.1	Malla para el techo a dos aguas.	78
5.2	Malla para el techo tipo bóveda/cúpula.	78
5.3	Arreglo de la ubicación de los nodos y construcción de los elementos.	79
5.4	Arreglo de malla para variables escalares.	80
5.5	Volumen de control interno \mathbf{P} y sus vecinos.	82
5.6	Volúmenes de control internos y de frontera del dominio computacional.	84
5.7	Arreglos de nodos sobre las fronteras.	85
5.8	Balance en el volumen de control adyacente a la frontera este.	86
5.9	Balance en el volumen de control adyacente a la frontera norte.	88
5.10	Volumen de control en la frontera. Evaluación de $\partial\phi/\partial\eta$	90
5.11	Aproximación del perfil de ϕ en la frontera.	91
5.12	Balance en el volumen de control adyacente a la frontera oeste.	92

5.13	Distancia del nodo P a la frontera n y w	95
5.14	Diagrama esquemático del muro	96
5.15	Circuito térmico del intercambio energético en el muro.	96
5.16	Diagrama esquemático de un volumen de control	98
5.17	Diagrama esquemático de la habitación	99
5.18	Circuito térmico del intercambio energético en la habitación	99
5.19	Diagrama esquemático de la ventana	101
5.20	Circuito térmico del intercambio energético en la ventana	102
5.21	Diagrama esquemático del suelo	103
5.22	Circuito térmico del intercambio energético en el suelo	104
5.23	Diagrama esquemático de la tierra	105
5.24	Circuito térmico del intercambio energético en la tierra	105
5.25	Proceso de generación de código para CFD	110
5.26	Verificación del código de generación de malla.	111
5.27	Geometría de una superficie trapezoidal	112
5.28	Malla de una geometría trapezoidal.	112
5.29	Problema de difusión de calor con condiciones de frontera de primera clase.	113
5.30	Geometría de una superficie cuadrada con orificio al centro.	113
5.31	Generación de malla.	114
5.32	Distribución de temperatura del problema de difusión de calor con condiciones de frontera de segunda clase.	114
5.33	Geometría de una columna cuadrada.	115
5.34	Distribución de temperatura del problema de difusión de calor con multiples tipos de condiciones de frontera.	116
5.35	Problema de difusión de calor con multiples tipos de condiciones de frontera.	116
5.36	Conducción de calor en 1-D con pérdida convectiva	117
5.37	Conducción de calor en 1-D con pérdida convectiva, radiativa y flux	118
6.1	Orientación del techo.	122
6.2	Irradiación día más cálido	124
6.3	Irradiación día más frío	126
6.4	Temperatura a través del día más cálido	127
6.5	Temperatura superficie exterior	129
6.6	Temperatura de habitación	131
6.7	Temperatura de ventana	132
6.8	Temperatura a través del día más frío	133
6.9	Temperatura superficie interior	135
6.10	Temperatura de habitación	137
6.11	Temperatura del muro	138

Lista de Tablas

3.1	Conjunto de vectores en el sistema coordenado curvilíneo	48
3.2	Parámetros a reemplazar en la Ecuación 3.57	66
5.1	Comparación de las derivadas computacionales	111
5.2	de Freitas Carvalho Filho (2019)	115
5.3	Presente trabajo	115
5.4	Resultados de temperatura en una barra de dos materiales	117
5.5	Resultados de temperatura en una losa	119
6.1	Propiedades termofísicas	121
6.2	Propiedades ópticas del vidrio claro (Olazo Gómez, 2020)	122
6.3	Propiedades de los recubrimientos (Hernández Pérez, 2016)	122
6.4	Día más cálido (25/Jul/2018) de la ciudad de Mérida, Yucatán	123
6.5	Día más frío (22/Dic/2018) de la ciudad de Mérida, Yucatán	125
6.6	Carga de energía térmica (q_{in})	140
6.7	Flujos de calor promedio (q_{in}) (Día más Cálido)	141
6.8	Flujos de calor promedio (q_{in}) (Día más Frío)	144

Nomenclatura

Símbolos Romanos - Roman Symbols

C_1, C_2, C_4, C_5	coeficientes de difusión transformados
C_p	calor específico, $\text{J Kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
h	coeficiente de transferencia de calor convectivo, $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$
W	altura, m
HxG	espesor de la ventana, m
HxR	longitud de la cavidad, m
HxW	espesor del muro, m
HyF	altura del suelo, m
HyG	altura de la tierra, m
HyR	altura de la cavidad, m
J	Jacobiano de la transformación, m^{-3}
k	conductividad térmica, $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
$N - S$	Navier-Stokes
P	punto nodal
P, Q, R	funciones de control de malla
Ra	número de Rayleigh
S^ϕ	término fuente para ϕ
\hat{S}^ϕ	término fuente transformado para ϕ
T	temperatura, K
t	tiempo en el dominio físico, s
$\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}$	componentes contravariantes del vector velocidad con normalización métrica
U, V, W	componentes contravariantes del vector velocidad sin normalización métrica

W	espesor, m
x, y, z	ejes del sistema de coordenadas cartesianas

Símbolos Griegos - Greek Symbols

α^*	absortancia
λ	conductividad térmica, $W\ m^{-1}\ K^{-1}$
Δn	distancia física genérica, m
Γ	coeficiente de transporte
θ	ángulo de inclinación, °
ρ^*	reflectancia
ρ	densidad, $Kg\ m^{-3}$
τ	tiempo en el dominio transformado, s
α, β, γ	componentes del tensor métrico
τ^*	transmitancia
ξ, η, ζ	ejes del sistema de coordenadas generalizadas

Superíndices - Superscripts

0	tiempo anterior
T	físico
T	transformado

Subíndices - Subscripts

env	ambiente exterior
i, j	números representativos para las líneas ξ , η y ζ en el dominio transformado
e, w, n, s	interfaces del volumen de control
r	room
$S1$	irradiación solar a 90° con orientación este
$S2$	irradiación solar a 90° con orientación oeste
SD	irradiación solar sobre el techo abovedado
SE	irradiación solar a 35° con orientación este
SO	irradiación solar a 35° con orientación oeste
$x, y, z, \xi, \eta, \zeta$	derivadas de primer orden

Acrónimos / Abreviaturas - Acronyms / Abbreviations

<i>ASHRAE</i>	American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers
<i>BFC</i>	Boundary-Fitted Coordinates
<i>CFD</i>	Computational Fluid Dynamics
<i>ENER</i>	Eficiencia Energética
<i>FDM</i>	Finite Difference Method
<i>FEM</i>	Finite Element Method
<i>FVM</i>	Finite Volume Method
<i>GEB</i>	Global Energy Balance
<i>IEA</i>	International Energy Agency
<i>INEGI</i>	Instituto Nacional de Estadística y Geografía
<i>NOM</i>	Normal Oficial Mexicana
<i>PCM</i>	Phase-Change Material
<i>PDE</i>	Partial Differential Equation
<i>SENER</i>	Secretaría de Energía
<i>SIE</i>	Sistema de Información Energética
<i>SOR</i>	Successive Over Relaxation
<i>TDMA</i>	Tri-Diagonal Matrix Algorithm
<i>TRNSYS</i>	Transient System Simulation Tool

Resumen

En este trabajo se presenta el estudio numérico de la transferencia de calor por conducción en un techo de geometría irregular y recubrimiento acoplado a una habitación. Las componentes muro, ventana, suelo, tierra y techo fueron acopladas como condición de frontera al modelo de la habitación. Para el estudio se consideraron datos climáticos del día más cálido y del día más frío en Mérida, Yucatán. Se desarrolló un código numérico con dos técnicas: (1) coordenadas generalizadas y (2) balance de energía global. El techo de geometría irregular se resolvió con coordenadas generalizadas, resolviendo la ecuación de transferencia de calor por conducción, mientras que la técnica de balance de energía global se usó para determinar la temperatura en el sistema muro, habitación, ventana, suelo y tierra. Para analizar el desempeño térmico del sistema se compararon tres tipos de techos: (1) techo plano, (2) techo a dos aguas y (3) techo tipo bóveda/cúpula, y para cada una de estas configuraciones se consideraron tres tipos de recubrimientos: (1) gris, (2) blanco y (3) negro.

Se encontró que para el día más cálido el techo abovedado con recubrimiento blanco reduce un 18.52% las cargas de energía total mientras que con un techo a dos aguas solo se reducen un 0.25%, ambos en comparación con el techo plano. Por otro lado, para el día más frío, el techo a dos aguas con recubrimiento negro reduce el 50% de las cargas de energía total que reduce el techo abovedado con el mismo recubrimiento. Sin embargo el techo abovedado con recubrimiento blanco presenta una reducción del 19.52% de las cargas de energía total mientras que el techo a dos aguas con el mismo recubrimiento obtuvo una reducción del 2.97%. De acuerdo a los datos obtenidos, el techo abovedado tiene mayor potencial de desempeño térmico para ser usado en ciudades de clima cálido utilizando principalmente el recubrimiento blanco; sin embargo, al compararlo con el techo a dos aguas los recubrimientos gris y negro, el techo abovedado sigue presentando mayor potencial.

Abstract

A numerical study of the heat transfer by conduction in a roof with irregular geometry and coating coupled to a room is presented in this work. The wall, windows, floor, ground, and ceiling were coupled as a boundary condition to the room model. For the study, climate data of the warmest and coldest day of Merida, Yucatan, were considered. A numerical code with two techniques was developed: (1) generalized coordinates and (2) global energy balance. The irregular geometry ceiling was solved with the generalized coordinate approach, solving the heat transfer equation by conduction. On the other hand, the global energy balance technique was used to determine the wall, room, window, floor, and ground system temperature. To analyze the thermal performance of the system, three types of roofs were compared: (1) flat roof, (2) gable roof, and (3) vault/dome roof, and for each of these configurations, three types of coatings were considered: (1) gray, (2) white and (3) black.

It was found that for the warmest day, the vaulted ceiling with a white coating reduces total energy loads by 18.52 %, while with a gable roof, they are only reduced by 0.25 %, both compared to the flat roof. On the other hand, the black coated gable roof reduces 50 % of the total energy loads that the vaulted roof with the same coating reduces for the coldest day. However, the vaulted ceiling with white coating shows a reduction of 19.52 % in the total energy loads, while the gable roof with the same coating obtained a decrease of 2.97 %.

According to the data obtained, the vaulted ceiling has a greater potential for thermal performance to be used in cities with a warm climate, mainly using the white coating; however, when compared to the gable roof and gray and black coatings to the gable roof, the vaulted ceiling still has greater potential.

Capítulo 1

Introducción

Las actividades que realizamos en nuestra vida diaria están ligadas con el uso y producción de energía. Los seres humanos al consumir alimentos estamos adquiriendo energía, la cual es necesaria para realizar alguna actividad, otro ejemplo del uso de la energía es la energía eléctrica la cual se emplea para el funcionamiento de los aparatos eléctricos en sitios tales como oficinas, escuelas, hogares, etc. En la naturaleza se puede observar que se cumple la ley de conservación de la energía a través de la fotosíntesis. Por lo tanto, se puede decir que el mundo se mueve a través de la energía; por lo que, ésta contribuye al bienestar económico y social mediante la generación de riqueza que a su vez, da lugar a la creación de empleos y eleva el nivel de bienestar de las personas.

El hombre desde tiempos remotos ha buscado la manera de protegerse de los embates del clima y crear un ambiente térmicamente cómodo. Esto se refleja en la continua evolución de las edificaciones, desde los primeros refugios naturales hasta los edificios actuales con una ingeniería y técnica de construcción cada vez más sofisticada, lo cual ha provocado una demanda de energía a nivel mundial, ya que hoy en día crear un ambiente térmicamente cómodo todavía es uno de los parámetros más importantes a ser considerado cuando se diseñan edificaciones. Durante los últimos años, la investigación de nuevas tecnologías para mejorar la eficiencia energética en las edificaciones ha sido uno de los grandes temas de la sociedad y gobiernos, cuyo objetivo principal es reducir el consumo de energía eléctrica sin afectar el nivel de confort térmico.

En la actualidad a nivel mundial, las edificaciones representan el sector que consume más energía. De acuerdo a IEA, la energía promedio consumida por las edificaciones representa el 33 % del consumo energético mundial. En particular, en México el 69 % de la energía eléctrica se genera a partir de fuentes fósiles en las centrales termoeléctricas (SIE, 2019). Sin embargo, la producción de energía derivada del carbón y fuentes fósiles son factores preponderantes que contribuyen considerablemente a las emisiones de CO₂ que influyen al calentamiento global. En México, el sector residencial fue el tercer consumidor de energía con un consumo energético total del 17.78 % de la energía final total, de la cual gran parte de la energía fue destinada para el acondicionamiento al interior de las edificaciones, siendo superado solamente por la iluminación y la refrigeración de alimentos (SENER, 2019), de manera que se requiere que las edificaciones sean térmicamente eficientes para reducir el uso de equipos mecánicos.

De acuerdo al INEGI (2018), en México se utilizan 14.6 millones de ventiladores, de los cuales el 45 % de ellos se ubican en localizadas urbanas. La presencia de equipos de aire acondicionado se ha incrementado en los últimos años teniendo más de 7 millones de estos equipos en viviendas particulares, siendo la región cálida extrema y la región tropical del país (Figura 1.1a) las que utilizan la mayor cantidad de estos equipos que representan el 48.1 % (5.6 millones) y el 12.4 % (1.1 millones), respectivamente; por otro lado, a nivel nacional el 6.3 % de las viviendas en el país usan algún tipo de equipo de calefacción. En total se contabilizan cerca de 2.6 millones de equipos en uso, de los cuales, poco más de 2 millones se concentran en la región cálida extrema (20.4 %), 489 mil en la región templada (2.5 %) y en la región tropical 34 mil equipos (1.6 %) (Figura 1.1b).

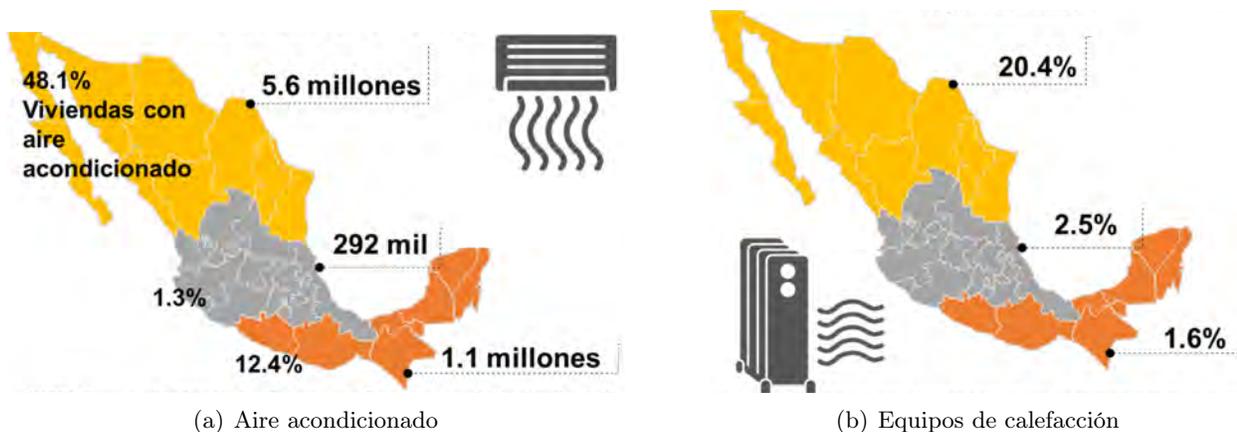


Figura 1.1: Porcentaje y/o número de equipos por región climática.

La envolvente de una edificación son las partes que forman una barrera entre el ambiente interior y exterior (Figura 1.2); ésta influye en el consumo energético y en concreto la envolvente debe diseñarse y construirse con el objetivo de mejorar el rendimiento energético, ya que juega un papel clave para determinar los niveles de confort, iluminación natural, ventilación y cantidad de energía requerida para enfriar o calentar la edificación, por lo que, la forma de la envolvente de una edificación tiene un efecto directo sobre el consumo de energía en dicha edificación. En particular, el techo es la componente de la envolvente más expuesta a los efectos climáticos y principalmente a la irradiación solar durante todo el día, lo cual contribuye enormemente a la ganancia de energía en comparación con las superficies verticales, con lo cual, el techo juega un papel crucial en la ganancia de energía y el confort térmico de una edificación.

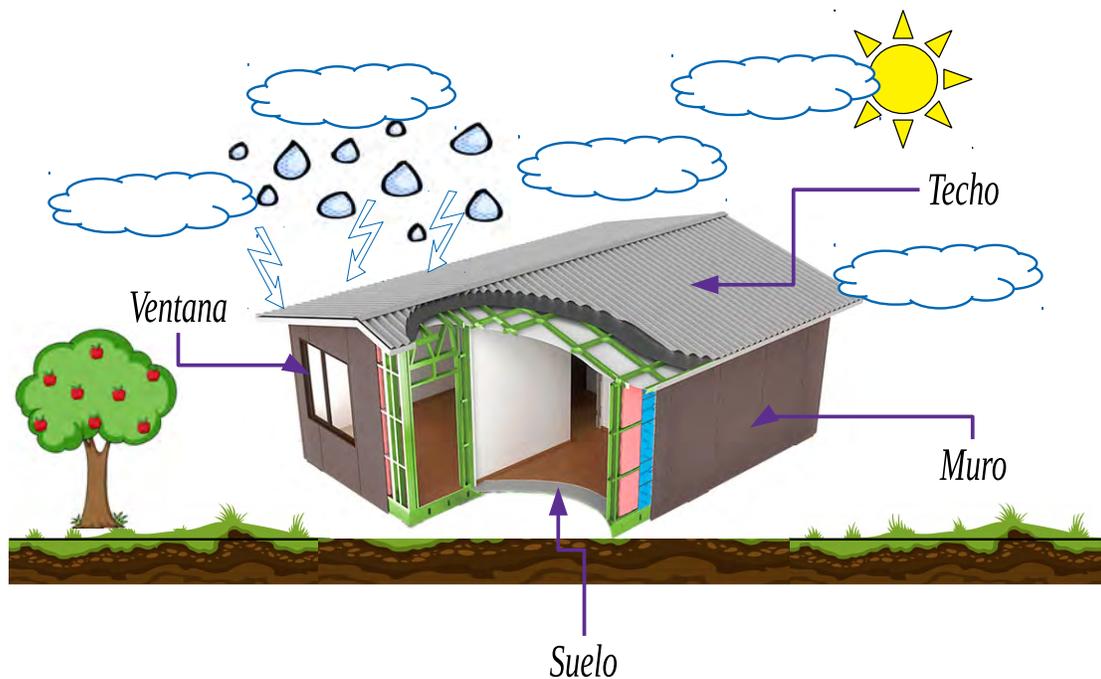


Figura 1.2: Componentes principales de la envolvente de una edificación.

De acuerdo a Sirimanna y Attalage (2016), en condiciones de cielo despejado puede incidir hasta aproximadamente 1 kW/m^2 de irradiación solar en la superficie de un techo, de la cual se absorbe normalmente entre el 20 y 95 % de esta irradiación. Omar *et al.* (2017) determinaron que la irradiación solar que recibe una superficie depende de la posición del sol y la hora del día o la época del año, de lo cual, indicaron que un techo horizontal recibe la mayor irradiación solar con casi el 35 % de la irradiación total que llega a las superficies de la edificación.

Hay varios parámetros que afectan el rendimiento térmico de un techo como la orientación, la pendiente, el tipo y geometría (plano, inclinado, bóveda, o una combinación de las anteriores) del techo y las propiedades de los materiales que conforman el techo, entre otros. Actualmente existen diferentes alternativas para mejorar el rendimiento térmico del techo entre las que se encuentran modificaciones a los estándares de construcción, el uso de nuevas tecnologías de ahorro de energía (materiales de cambio de fase, recubrimientos reflectivos, aislamiento térmico, entre otras tecnologías) y diseños robustos de techos como lo son los techos con técnica de enfriamiento por evaporación, techos verdes y techos ventilados (o sombreado) son posibles estrategias de solución para ayudar a mitigar el aumento de la demanda de energía eléctrica para acondicionar las edificaciones. De acuerdo al INEGI (2018), en la región cálida extrema de la República Mexicana (Figura 1.3) es en donde se tiene el mayor porcentaje de viviendas con algún tipo de aislamiento térmico (14.9%), así mismo, es en esta misma región en donde se identifica que el techo (89.6%) es la componente de la envolvente en donde se utiliza mayormente un tipo de aislamiento térmico, seguido de paredes (22.5%) y ventanas (13.9%) (Figura 1.4).

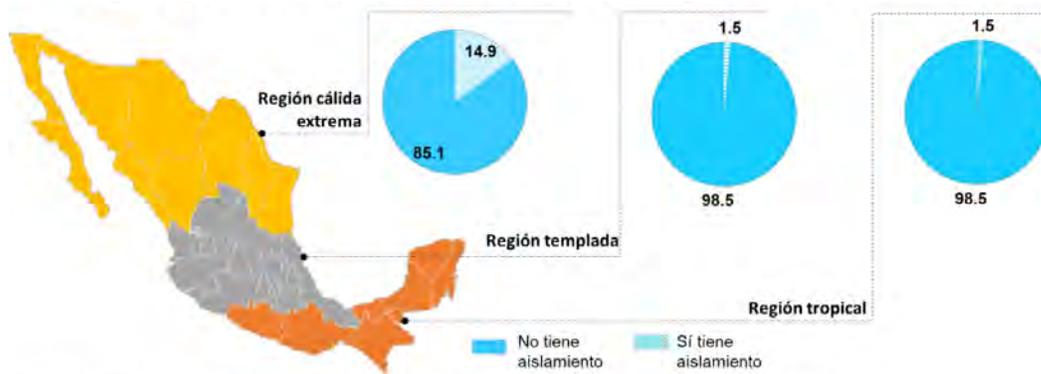


Figura 1.3: Porcentaje de uso de material aislante por región climática.



Figura 1.4: Uso de material aislante por componente de edificación en la región cálida extrema.

En México donde dos terceras partes del territorio nacional tienen clima cálido, existe la posibilidad de utilizar recubrimientos reflectivos como sistema pasivo para el control del flujo de calor a través del techo, donde el efecto de la reflectividad de la superficie del techo sobre el rendimiento térmico de la edificación a menudo se ignora, en cambio, existen diferencias significativas en la ganancia de energía de las superficies de techos con colores claros y oscuros. Sin embargo, existe poca información sobre la evaluación de recubrimientos reflectivos en techos con geometrías irregulares de edificaciones en Latinoamérica; entonces, existe una falta de exploración del tema en el ámbito nacional. Las técnicas promovidas por las normas oficiales mexicanas para reducir las ganancias de energía (NOM-008-ENER-2001, NOM-018-ENER-2011, NOM-020-ENER-2011 y NOM-024-ENER-2012) se enfocan en el uso de aislamiento térmico y sistemas de vidriado. No obstante, para construcciones terminadas la instalación de aislamiento puede ser difícil, por lo que usar techos verdes, techos ventilados y concretamente recubrimientos reflectivos puede ser una alternativa factible en combinación con la geometría del techo. Es importante resaltar que en México de los más de 30 millones de usuarios en el sector residencial, cerca del 45% de ellos (poco más de 13 millones) vive en regiones de clima cálido y las viviendas en este tipo de clima representan el 72% del consumo de energía del sector. En efecto, el techo de una edificación influye en el consumo energético y éste debe diseñarse y construirse con el objetivo de mejorar el rendimiento energético. De hecho, si el techo se diseña con precisión, el consumo de energía disminuye porque hay un menor flujo de calor transmitido a través de él. Por lo tanto, en este proyecto se pretende evaluar el desempeño térmico de techos de geometría irregular con recubrimiento considerando condiciones climáticas de la República Mexicana.

1.1. Revisión bibliográfica

Para llevar a cabo la elaboración de la revisión bibliográfica fue necesario realizar una clasificación de los estudios encontrados en la literatura, ya que la componente principal a estudiar es la geometría del techo y los recubrimientos reflectivos en él, por lo tanto, los estudios se agruparon en tres secciones: La primera sección trata sobre los estudios de la transferencia de calor en sistemas con techo de geometría a dos aguas e inclinados. La segunda sección aborda los estudios de transferencia de calor a través de diversos recubrimientos reflectivos en los techos, y por último, la tercera clasificación consta de la transferencia de calor en sistemas con techos tipo cúpula y/o bóveda.

1.1.1. Techos inclinados y/o a dos aguas

Asan y Namli (2000) determinaron la transferencia de calor al interior de un techo inclinado de sección transversal triangular bajo condiciones climáticas de un día de verano. Las ecuaciones gobernantes en variables secundarias se resolvieron por medio de la técnica de diferencias finitas. En el estudio, los autores tomaron en cuenta dos parámetros, I) relación de aspecto altura-base de la sección transversal del techo para seis casos (0.125, 0.25, 0.4, 0.6, 0.8 y 1) y II) el número de Rayleigh (Ra) en un intervalo de $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, para así determinar la influencia que estos tienen en el campo de flujo y la transferencia de calor en el fluido al interior del techo. Los resultados muestran que la relación altura-base tiene una gran influencia sobre los valores de temperatura y el comportamiento del fluido al interior del techo. Por otro lado, el efecto del Ra no es significativo para relaciones de altura-base menores a 1 y $Ra < 10^5$. Como conclusión final, los autores determinaron que la relación entre el número de Nusselt, el número de Ra y la relación altura-base es demasiada, pero ésta última es el factor de mayor consideración en el comportamiento del fluido al interior del techo.

Varol *et al.* (2007) estudiaron la transferencia de calor en un techo tipo gambrel para diferentes valores de Rayleigh (Ra), considerando dos casos, I) superficie superior con mayor temperatura que en la inferior y II) superficie superior con menor temperatura que en la inferior, en ambos casos se consideró un fluido Newtoniano, incompresible y en régimen de flujo laminar el cual fue modelado en dos dimensiones y estado permanente. De acuerdo a los resultados, para el caso I, se observó que se forma una celda convectiva en los extremos (media altura) del techo la cual reduce su tamaño conforme se incrementa el Ra , al igual que se incrementa la transferencia de calor por convección. Las isothermas son paralelas a las superficies para valores bajos de Ra , mientras que para un $Ra = 5 \times 10^6$, la temperatura al interior se incrementa y las isothermas dejan de ser paralelas a las superficies. Para el caso II, el comportamiento del fluido es similar para $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, sin embargo, para Ra más altos se comienza a perder la similitud en los patrones de flujo y temperatura. Las isothermas cercanas a la superficie caliente presentan discontinuidad ya que para el caso II se presenta el Rayleigh-Bénard convectivo. El número de Nusselt incrementa según se vaya incrementando el Ra , observándose que para bajos Ra el Nusselt es mayor para el caso I, pero para $Ra > 5 \times 10^6$ la situación se invierte y el Nusselt más alto lo presenta el caso II.

Koca *et al.* (2008) desarrollaron un estudio numérico para analizar el comportamiento térmico y el flujo del fluido al interior de un cobertizo triangular con alero para condiciones de clima frío. Las ecuaciones gobernantes fueron formuladas en términos de función de corriente y vorticidad para flujo en régimen laminar en dos dimensiones; la solución de las ecuaciones fue por medio del método de diferencias finitas. Se despreciaron los efectos de intercambio radiativo por radiación y consideraron que la gravedad solo actúa en una sola dirección. Del análisis de los resultados, los autores determinaron que la transferencia de calor disminuye con el incremento de la relación de aspecto del cobertizo para bajos Rayleigh, pero incrementa para altos Rayleigh. Los campos de temperatura y velocidades son afectados por la forma de la geometría, por lo cual, la razón de aspecto de ésta, es el parámetro más influyente en la determinación del comportamiento del fluido al interior del cobertizo. La longitud del alero es otro parámetro importante, el cual también influye sobre el comportamiento de la convección natural, de tal manera que, la transferencia de calor incrementa con la reducción de la longitud del alero.

Yew *et al.* (2013) estudiaron la integración entre el revestimiento de aislamiento térmico y tubos de aluminio para la ventilación de las cavidades para poder optimizar el rendimiento de los techos en términos de reflexión térmica y rechazo de calor. Los autores construyeron 4 modelos de tejado los cuales incluían revestimiento de aislamiento térmico, ventilación de la cavidad y la entrada del ático. Los trabajos experimentales se llevaron a cabo en el interior de una habitación con una temperatura aproximadamente de 27.5°C. Del análisis de los resultados, se determinó que el techo metálico con recubrimiento normal tuvo la temperatura más alta, mientras que el techo metálico con aislamiento térmico resultó con la temperatura más baja y el sistema que combinó el revestimiento de aislamiento térmico y la ventilación de la cavidad con la entrada del ático abierta dio como resultado el ático más fresco ya que obtuvo una reducción de temperatura de hasta 13°C en comparación con el sistema de techo convencional, esto es debido a la baja conductividad térmica del aislante térmico, así como el uso de tubos de aluminio en la cavidad del techo.

Guichard *et al.* (2014) realizaron un estudio teórico-experimental para determinar el comportamiento térmico de un techo inclinado incorporando PCM en su configuración. El estudio teórico se realizó mediante el programa de simulación ISOLAB, el cual utilizó el método C_P efectivo para tratar la transferencia de calor transitoria unidimensional en el PCM. La configuración del techo (inclinado 20° con respecto a la horizontal) utilizado para el estudio teórico y experimental fue (de arriba hacia abajo) lámina de acero galvanizado corrugado de 1 mm de espesor la cual fue pintada de azul marino, una brecha de aire de 280 mm de espesor, PCM de 5.26 mm de espesor y 12.5 mm de espesor de cartón de yeso. Para el estudio experimental se instrumentó un módulo el cual es considerado un cuarto típico en el sur de Francia. El módulo tiene un volumen interior de 30 m^3 constituido por paredes verticales opacas, con ventanas tipo ciego, una puerta de cristal y el techo que contiene PCM. El material PCM constituida por un 60% de una cera de parafina micro-encapsulada dentro de un co-polímero. De acuerdo a los resultados, se encontró que el estudio teórico reproduce satisfactoriamente los datos obtenidos de las mediciones experimentales, de los cuales se concluyó que la temperatura al interior del módulo experimental se redujo 2.4°C al implementar el PCM con respecto a un techo sin PCM.

Kong *et al.* (2014) desarrollaron un estudio teórico-experimental para analizar el comportamiento térmico de una habitación con dos tipos de sistemas de PCM, los cuales fueron I) ácido cáprico contenido en paneles instalados sobre la superficie exterior de una habitación de prueba (PCMOW) y II) ácido cáprico y 1-dodecanol contenido en paneles instalados sobre la superficie interior de una habitación de prueba (PCMIW), ambos instalados en las paredes y techo de la misma. La evaluación experimental consistió en la construcción de tres habitaciones de $2 \times 2 \times 2.4 \text{ m}$, una habitación con el PCMOW, otra con el PCMIW y la última habitación sin PCM la cual fue tomada como referencia. Para la validación experimental, realizaron dos métodos de operación, ventilación natural diurna y apertura de ventana y puerta nocturna. El modelo numérico fue desarrollado en dos dimensiones y en estado transitorio, el cual fue resuelto por medio del software FLUENT. Los resultados indican que para el método de operación de ventilación natural diurna, la temperatura de las superficies interiores de las habitaciones con PCM son menores que las de la habitación de referencia. La temperatura máxima de la superficie de la pared interior del PCMOW y PCMIW fueron 0.6 y 2.4 K, respectivamente, menor que la de la habitación de referencia y la temperatura máxima de la superficie interior del techo fue de 0.4 y 2.1 K, respectivamente, menor que la obtenida en la habitación de referencia.

Tong y Li (2014) desarrollaron un modelo teórico para predecir el flujo de calor a través de un techo inclinado ventilado; dicho modelo fue validado mediante datos experimentales. Para el modelo de CFD, los autores consideraron un techo con longitud en un intervalo de 1.5-10 m y una diferencia de temperaturas en un intervalo de 15-30 K. Las ecuaciones de N-S se resolvieron por medio del software FLUENT. Para la validación del modelo CFD, los autores construyeron un techo ventilado; la cavidad ventilada del techo tuvo una longitud fija de 1.5 m y un ancho de 0.8 m, la separación de la cavidad y la inclinación del techo se variaron. El modelo experimental se instaló en un laboratorio con temperatura controlada a 24°C. La estructura superior del techo se compuso de cuatro capas: (de arriba a abajo) cartón de yeso, espuma de poliestireno expandido, goma de silicona y placa de aluminio; mientras que la estructura inferior del techo estuvo compuesta por un tablero de yeso. Los autores llevaron a cabo cuatro pruebas experimentales para poder obtener el rendimiento térmico de las cavidades del techo con diferentes espacios de la cavidad e inclinaciones. Con base en los datos obtenidos, los autores determinaron que el modelo desarrollado y las correlaciones propuestas son aplicables al diseño y análisis energético de otro tipo de cavidades abiertas en edificios, como las fachadas ventiladas y chimeneas.

Li *et al.* (2015) realizaron un estudio numérico para analizar el desempeño térmico de 4 diferentes tipos de techos con y sin PCM usados en el Noreste y zona fría de China tomando en cuenta factores que modifican el comportamiento térmico de los techos como lo son: la radiación solar, la inclinación del techo, la temperatura de transición y calor latente del PCM, el espesor de la capa de PCM y los coeficientes de absorción de la superficie de la cubierta externa. El techo fue dividido en cuatro capas: (de arriba hacia abajo) la capa superior hecha de aleación de aluminio que funge como una capa protectora, la segunda capa hecha de cemento, la tercera capa varió entre hormigón o PCM y la capa inferior consistió en hormigón armado. Las consideraciones empleadas por los autores fueron: el PCM no tiene transferencia de masa con ningún material externo, es homogéneo e isotrópico, el punto de fusión, congelación y calor latente se consideraron constantes, la densidad y el coeficiente de conductividad térmica de las fase sólida y líquida del PCM son las mismas y no cambian con la temperatura, la resistencia térmica de contacto entre las capas internas son ignoradas, no se considera generación de calor, transferencia de calor por radiación y convección natural. Para modelar el proceso de solidificación/fusión en el PCM, los autores emplearon el método de entalpía-porosidad. Las ecuaciones gobernantes fueron discretizadas utilizando el método de volumen finito y éstas fueron resueltas por

medio del software FLUENT. Las medidas del techo fueron de 12 m de longitud y 3 m de ancho, el espesor de las capas que componen el techo son de 0.2, 2, 10 y 10 cm para la capa superior, segunda, tercera y capa inferior, respectivamente. Para determinar el efecto de la inclinación del techo, los autores definieron cinco casos: 0.05, 0.15, 0.33, 0.4 y 0.5. Los resultados indican que el efecto de la inclinación del techo sobre la temperatura promedio y el flujo de calor de la superficie superior es débil en comparación con la fracción líquida de la capa de PCM.

Fabbri y Brunetti (2015) estudiaron la influencia térmica de los áticos de edificios antiguos. Se compararon dos casos para una casa, uno con y otro sin ático, calculando los valores de los coeficientes de transferencia de calor. Los autores determinaron que eliminar o conservar el ático depende de la relación entre los valores de transmitancia de la superficie exterior e interior de techo.

Sojoudi *et al.* (2015) desarrollaron un estudio teórico sobre el efecto de la convección natural en un espacio en forma de ático calentado diferencialmente sobre las superficies inclinadas y una fuente de calor en una sección de la superficie inferior. Los autores analizaron diferentes parámetros entre ellos en número de Rayleigh (10^3 - 10^6), el tamaño (0.2-0.6) y la posición (0.3-0.7) de la fuente de calor y la relación de aspecto (0.2-1.0) del espacio, para un Prandtl de 0.72. En este trabajo los autores utilizaron el software ANSYS 15 para resolver las ecuaciones de N-S en régimen de flujo laminar con lo que determinaron que al incrementar el número de Rayleigh (dejando fijos los demás parámetros) la celda convectiva se alarga hacia la esquina derecha. El incremento de la fuente de calor genera pequeñas celdas convectivas en la esquina derecha.

Fontanini *et al.* (2016) estudiaron el impacto del clima en diferentes configuraciones de techo del tipo ático en diferentes ciudades de los EE.UU. por medio del modelo térmico llamado Fraunhofer (FATM), el cual está formulado en balances de energía global. Las superficies del ático y el aire contenido al interior del mismo, son tratados unidimensionalmente. Para el estudio, los autores consideraron seis tipos de geometrías de techo: a dos aguas, a dos aguas con "dormer", plano, a cuatro aguas, combinado y "mansard", y seis ciudades que fueron Atlanta, Baltimore, Los Ángeles, Minneapolis, Phoenix y Seattle. De acuerdo a los resultados, los autores determinaron que las cargas de enfriamiento y calentamiento son diferentes en cada ciudad debido a la posición geográfica de cada una de ellas; sin embargo,

la ciudad con la carga más alta de enfriamiento fue Phoenix, mientras que Seattle con la carga más baja. La carga de calentamiento más alta fue para la ciudad de Minneapolis y la más baja para Phoenix y Los Ángeles. Las cargas térmicas totales indican que para las ciudades de Baltimore, Los Ángeles, Minneapolis y Seattle tienen una reducción de estas en un intervalo del 5-23 %, mientras que por otro lado, para Atlanta y Phoenix se tiene un aumento entre un 11-43 %. El aumento más alto de la temperatura del techo se observó en la ciudad de Baltimore con un intervalo de 1.4-2.5°C; por otro lado, la reducción de temperatura del techo más alta se tuvo en la ciudad de Seattle en un intervalo de 1.4-3.1°C.

Guichard *et al.* (2016) realizaron un estudio teórico-experimental del comportamiento térmico de un techo compuesto de diferentes materiales entre los cuales se encuentra un PCM. Para el análisis numérico, el modelo matemático fue basado en el método de calor aparente para modelar el PCM y el método de diferencias finitas en 1-D fue implementado en un código sobre la plataforma Matlab. Las dimensiones del módulo experimental fueron de 3x3x3 m (altura, ancho y longitud). El techo se inclinó 20° con respecto a la horizontal, el cual está compuesto por cartón de yeso (1.25 cm de espesor), capa de aire (28 cm de espesor), lamina de acero galvanizado ondulado (0.1 cm de espesor) y PCM (0.526 cm de espesor) el cual está elaborado de cera de parafina micro encapsulada al 60 % dentro de un co-polímero laminado en ambos lados con una lámina de aluminio. Se colocaron sensores en el módulo experimental para tener las mediciones de las variables de interés. De acuerdo a los resultados, la diferencia porcentual entre la solución numérica y las mediciones experimentales es menor al 5 %, por lo cual los autores determinaron que el modelo es capaz de reproducir los resultados.

Li *et al.* (2016) estudiaron la transferencia de calor en un techo inclinado compuesto de cuatro capas, de las cuales una de ellas era un canal de aire. Exploraron la influencia de diversos factores, tales como, el espesor del canal de aire, la inclinación del techo y los coeficientes de absorción de la superficie exterior. Los autores utilizaron Fluent para resolver las ecuaciones de N-S en régimen de flujo turbulento con el modelo $k - \epsilon$. De acuerdo a los resultados obtenidos, los autores concluyeron que para mejorar la velocidad del flujo de aire en el canal recomiendan un espesor de 100 mm; mientras que para la inclinación recomiendan el rango de 33-40°. Por otro lado, el efecto de los coeficientes de absorción que fue en el rango de 0.60-0.90 es relativamente débil en comparación con otros factores.

Lu *et al.* (2016) realizaron un estudio experimental para determinar la eficiencia energética de un techo con PCM y materiales frescos. Se construyeron 3 módulos experimentales: I) techo con PCM, II) techo recubierto con material fresco y III) techo con PCM y recubierto con material fresco. Para reducir el impacto de los factores externos sobre el ambiente interior de los módulos durante el periodo del experimento, las puertas y ventanas de estos se mantuvieron cerradas. Con base en los resultados, el techo #3 obtuvo el mejor aislamiento térmico y eficiencia energética en comparación con el techo #2, de lo cual se puede concluir que usar PCM con recubrimiento en el techo puede reducir la temperatura de la superficie exterior de éste, por lo que, los resultados confirman que el techo #3 tiene la mayor eficiencia energética y mejora el ambiente, térmicamente hablando, al interior del módulo experimental. Con todo lo anterior, los autores concluyeron que el techo #3 puede reducir las cargas de calefacción y aire acondicionado para poder mantener un confort térmico al interior de los módulos experimentales.

Lucero-Álvarez *et al.* (2016) realizaron un análisis comparativo de los métodos de aislamiento comúnmente aplicados a viviendas en México, mediante una simulación en TRNSYS. El análisis consistió en tres casos: I) aislamiento solo en muros, II) aislamiento solo en techo y III) aislamiento en ambos. Los autores compararon el impacto económico de los tres casos para seis ciudades de México. El caso base consiste en una casa con cuatro muros de bloque de hormigón verticales de 15 cm de espesor con acabado de yeso al interior y mortero al exterior y dos ventanas que representan el 20 % de la superficie de los muros; el techo está conformado por una losa de hormigón horizontal de 15 cm con acabado de yeso al interior e impermeabilizado en el exterior. La simulación en TRNSYS contempla las ganancias internas de calor producidas por la iluminación, el uso de aparatos eléctricos y la ocupación de cuatro personas de 3:00 p.m. a 8:00 a.m. Con base en los resultados, los autores determinaron que es más eficiente para ciudades con inviernos fríos aislar el techo y los muros; aislando solo el techo es mejor para climas templados y para ciudades con clima cálido a lo largo del año solo es necesario aislar en los muros.

Sirimanna y Attalage (2016) desarrollaron un modelo matemático para analizar el desempeño térmico de los techos de las casas con superficies inclinadas y realizaron la comparación con resultados del comportamiento térmico de resultados experimentales. El modelo puede analizar el techo bajo diferentes condiciones climáticas, distintos materiales y geometrías, el cual está desarrollado en balances

globales. La evaluación del desempeño térmico experimental de los techos de las casas se llevó a cabo en áreas de Katubedda y Nittambuwa, Sri Lanka donde el clima tropical es predominante. Se seleccionaron 6 casas, de las cuales 4 tenían techo a 4 aguas y el resto a 2 aguas. Los techos están cubiertos por tejas de arcilla, asbesto y acero. Los resultados indicaron que los datos obtenidos numéricamente presentan curvas similares de temperatura que los datos experimentales teniendo una desviación de 1.1°C . También, se observó que, para todos los experimentos que se realizaron para diferentes tamaños de techos, configuraciones y materiales, la desviación máxima de la temperatura del resultado numérico con respecto al valor experimental fue menor de 2.1°C , por lo que los autores concluyeron que el modelo térmico desarrollado es capaz de analizar el desempeño térmico de un techo.

Amrani *et al.* (2017) estudiaron la transferencia de calor por convección y radiación térmica en un techo triangular para climas cálidos. Para el análisis, los autores consideraron el número de Rayleigh, la relación de aspecto y la longitud de los aleros. De los resultados obtenidos, los autores determinaron que la transferencia de calor aumenta conforme se incrementa el número de Rayleigh, pero ésta se mantiene constante para números de Rayleigh bajos. Por otro lado, la relación de aspecto afecta la estructura de las isotermas y las líneas de corriente, en donde para relaciones de aspecto pequeñas se forman celdas convectivas cerca del alero y la transferencia de calor por conducción se vuelve dominante. Los autores concluyeron que para mejorar el rendimiento energético en los edificios y reducir el intercambio de calor en los techos triangulares es necesario elegir una relación de aspecto ≥ 0.5 para climas cálidos.

Guichard *et al.* (2017) realizaron un estudio experimental para mejorar el confort térmico en un módulo experimental incorporando un techo compuesto que incluye PCM, el cual se instaló en la isla Reunión. El techo se inclinó 20° con respecto a la horizontal, el cual estuvo compuesto por cartón de yeso (1.25 cm de espesor), capa de aire (28 cm de espesor), lamina de acero galvanizado ondulado (0.1 cm espesor) recubierta de una pintura color azul oscuro y PCM (0.526 cm de espesor) el cual está elaborado de cera de parafina micro encapsulada al 60 % dentro de un co-polímero laminado en ambos lados con una lámina de aluminio. El módulo experimental fue instrumentado con aproximadamente 70 sensores que fueron situados alrededor de todo el módulo. En la evaluación del módulo, éste se mantuvo cerrado, sin utilizar ventilación mecánica o un sistema de aire acondicionado y las ventanas estuvieron obstruidas. Los resultados muestran que durante el día la temperatura máxima del aire al interior del

módulo sin PCM fue en promedio de 28.5°C, mientras que en el módulo con PCM fue de 26.8°C, una diferencia de 1.7°C. Durante la noche, la temperatura mínima del módulo fue en promedio de 19.7 y 20.8°C, sin y con PCM, respectivamente, con una diferencia de 1.1°C. De acuerdo con la ASHRAE, Standard 55 aplicada por los autores, el porcentaje de insatisfacción fue en promedio del 71.5 % para el módulo sin PCM y del 58.9 % para el módulo con PCM, con lo cual los autores concluyeron que el uso de PCM en el techo mejora el confort térmico al interior de la habitación.

Omar *et al.* (2017) realizaron un estudio teórico para determinar la reducción de las cargas de enfriamiento/calentamiento al implementar un techo ventilado que consistió en una estructura de dos placas planas separadas por un espacio el cual permite el flujo de aire. Las placas tuvieron una inclinación de 5° y con longitud de 5 m. Se consideraron dos configuraciones, 1) placas de metal y cavidad de aire, y 2) aislamiento en la placa de metal con interacción hacia el interior de la edificación. Para determinar los resultados, los autores utilizaron Fluent para resolver las ecuaciones de N-S en régimen de flujo turbulento con el modelo $k - \varepsilon$ realizable. El desempeño térmico de los techos fue determinado mediante un indicador de desempeño el cual indica que el techo ventilado redujo en un 50 % el flux de calor, esto es de 116 a 60 W/m² y utilizando un techo ventilado con aislamiento térmico las cargas térmicas se redujeron hasta en un 85 % obteniendo cargas de 17 W/m², ambos en comparación con un techo convencional (no-ventilado), con lo cual, los autores concluyeron que el techo ventilado aislado y no-aislado tienen beneficios, desde el punto de vista de ahorro en las cargas térmicas.

Kruger y Pretorius (2017) investigaron la transferencia de calor en cavidades que simulan un invernadero con un techo a dos aguas con inclinación de 45° y tres tamaños (0.25, 0.5, 0.75 %) de abertura en una de las superficies inclinadas del techo. Para el estudio, los autores utilizaron el software StarCCM+ en donde dieron solución a las ecuaciones de N-S en régimen de flujo turbulento utilizando el modelo $k - \varepsilon$. De acuerdo a los resultados, los autores encontraron que el tamaño de la abertura del techo tiene una influencia significativa en la distribución de temperatura y velocidad del aire al interior de la cavidad. Las temperaturas más bajas en la cavidad se obtuvieron con el tamaño de abertura de 0.75 en comparación con las otras dos aberturas. Con la abertura de menor tamaño (0.25) se presenta la menor transferencia de calor al interior de la cavidad.

1.1.2. Techos con recubrimiento

El estudio teórico-experimental sobre recubrimientos en edificaciones es muy amplio como se puede apreciar en Al-Obaidi *et al.* (2014), Lee *et al.* (2016), Pisello (2017), sin embargo escasos estudios se encontraron para techos de geometría irregular.

Uemoto *et al.* (2010) realizaron un estudio experimental para determinar el comportamiento térmico de pinturas acrílicas que contienen pigmentos reflectantes en comparación con las pinturas acrílicas convencionales aplicadas sobre láminas de fibrocemento corrugado. La reflectancia de las pinturas acrílicas se determinó por medio de un espectrofotómetro. Construyeron dos módulos de prueba en los cuales colocaron las láminas, las cuales estuvieron expuestas a la radiación emitida por una lámpara. De acuerdo a los resultados, los autores demostraron que las pinturas que contienen pigmentos reflectantes obtuvieron una reflectancia mucho mayor que las pinturas acrílicas convencionales; con lo cual, se obtuvo que la temperatura al interior del módulo de prueba con la lámina cubierta de pintura con pigmentos reflectantes fue 10°C menor que la temperatura obtenida en el módulo con la lámina con pintura convencional.

Joudi *et al.* (2011) realizaron un estudio teórico para determinar el flujo de energía térmica a través de un panel tipo sándwich variando la emisividad térmica de las superficies (interna y externa) y la reflectancia solar (TSR) de la superficie exterior para tres ciudades de Europa: Madrid, Estocolmo y Ámsterdam. El estudio se realizó mediante un programa de simulación dinámica Indoor Climate and Energy (IDA ICE). Las superficies y las capas que componen el panel tipo sándwich se trataron unidimensionalmente. De los resultados, el flujo de energía como función de la TSR, determino que para Madrid aumentando la TSR se reducen las cargas de enfriamiento; mientras que para Ámsterdam y Estocolmo se tiene un comportamiento similar entre ellas, teniendo cargas de calentamiento elevadas para una TSR de 0.7. Al variar la emisividad de la superficie exterior, en Madrid para valores pequeños de TSR e incrementando la emisividad, se reducen las cargas de enfriamiento; mientras que para un valor de TSR de 0.9 el efecto de la emisividad no es significativo teniendo así altas cargas de calentamiento. Comportamiento similar se observó para Estocolmo, de lo cual los autores concluyeron que la TSR y la emisividad pueden beneficiar y/o perjudicar el comportamiento térmico del panel, lo cual depende de

la región, temporada del año, así como entre el día y la noche, entre otros factores. Determinaron que para climas templados, puede haber un beneficio de optimizar la TSR y la emisividad para minimizar el uso de energía eléctrica.

Banionis *et al.* (2012) llevaron a cabo un estudio experimental para determinar la eficiencia de los recubrimientos reflectivos sobre las superficies de los techos ventilados. Para el estudio, se construyeron dos módulos experimentales idénticos variando en uno de ellos la composición del techo para poder realizar diferentes configuraciones y comparar los resultados con el techo que no tuvo modificaciones. De acuerdo a los resultados, se determinó que un recubrimiento con una emisividad de 0.09 aplicado sobre la superficie exterior de una capa de aislamiento térmico en un techo de acero ventilado, reduce el flujo de calor diario promedio entre un 23 y 25 % con respecto a los techos habituales durante el verano. La configuración con un material de construcción pesado con recubrimiento sobre la parte exterior y todo esto montado sobre la superficie externa de una capa de aislamiento térmico reduce el flujo de calor promedio diario a través del techo en un 4 %, mientras que por la noche esta reducción incrementa hasta un 6 %. En conclusión, los autores determinaron que el uso de los recubrimientos reflectivos en los techos ventilados establece una considerable reducción en la ganancia de energía durante periodos cálidos.

Joudi *et al.* (2013) realizaron un estudio teórico–experimental para determinar la configuración optima de la ubicación del recubrimiento en una edificación, la cual contaba con un techo a dos aguas con un ángulo de inclinación de 35°, y así cuantificar las cargas de enfriamiento y calentamiento bajo diferentes condiciones. El estudio teórico se realizó con el programa de simulación IDA ICE, mientras que el estudio experimental se construyeron 3 módulos de prueba, los cuales consistieron en, I) módulo con recubrimiento normal, II) módulo con recubrimiento reflectivo interior y normal al exterior y III) módulo con recubrimiento reflectivo interior y exterior, los cuales fueron modelados bajo condiciones climáticas de la ciudad de Borlänge, Suecia. Los módulos fueron acondicionados con equipo de aire acondicionado para evaluar la demanda de cargas de calefacción y enfriamiento. De los resultados obtenidos, los autores determinaron que el recubrimiento reflectivo en la superficie interior y exterior del techo es una buena opción para zonas de clima frío y zonas de clima cálido, respectivamente; por otro lado, el uso de recubrimiento reflectivo en la superficie interior y exterior es beneficioso para zonas con clima templado. De lo anterior, los autores concluyeron que la combinación de los recubrimientos

reflectivos sobre la superficie interior y exterior del techo contribuye a la reducción y/o incremento de cargas de calefacción y enfriamiento dependiendo de la zona geográfica en la que se encuentre la edificación.

Brito Filho y Santos (2014) analizaron un techo en dos ciudades de Brasil, Curitiba y Manaus, para determinar el comportamiento térmico del recubrimiento y aislamiento térmico. El techo se modeló con y sin aislante para diferentes recubrimientos y así determinar el ahorro de energía conforme al flujo de calor y la temperatura de la superficie interior y exterior del techo. De acuerdo con los resultados, la temperatura de la superficie exterior y el flujo de calor, en promedio diario anual, se redujeron en 11.26 y 98.08 %, comparando con el techo de referencia, el cual fue un techo de lámina de acero galvanizado, y el techo con aislamiento y recubrimiento selectivo. La aplicación de pintura blanca reduce, en promedio diario anual, la temperatura de la superficie exterior y el flujo de calor en 2.95 y 97.42 %, respectivamente. Si se aplica un recubrimiento selectivo a un techo sin aislamiento se reduce, en promedio diario anual, la temperatura de la superficie exterior y el flujo de calor un 22.61 y 64.27 %. Si no se utiliza aislamiento térmico y el recubrimiento selectivo se usa, la temperatura de la superficie exterior y el flujo de calor, en promedio diario anual, se reducen un 17.74 y 50.42 %. Los autores concluyeron que el uso de aislamiento térmico en los techos es bastante recomendado, principalmente porque reducen el flujo de calor y como consecuencia las cargas térmicas del edificio. Sin embargo, el uso de aislamiento térmico incrementa al mismo tiempo la temperatura de la superficie exterior del techo, y el efecto de aplicar recubrimientos conlleva a una reducción de la temperatura de la superficie exterior y el flujo de calor, por lo que las cargas térmicas se reducen. Por la alta reflectancia y emitancia, se reduce la ganancia de calor del sol y el fenómeno de conducción de calor a través del techo es menor.

Tong *et al.* (2014) evaluaron el comportamiento térmico de un techo con múltiples capas por medio del método de transformada de Fourier compleja, el cual fue validado mediante un estudio experimental en dos techos de múltiples capas. Para el desarrollo del modelo teórico, los autores realizaron las siguientes consideraciones: transferencia de calor por conducción entre la superficie interior y exterior del techo, supusieron que la longitud y el ancho del techo son mucho mayores que el espesor, de modo que la transferencia de calor se da en dirección perpendicular a la superficie del techo, y las capas que componen al techo son de material homogéneo con propiedades térmicas constantes en cada capa. El

estudio experimental se llevó a cabo en dos edificios de 12 pisos, el techo de éstos estaba compuesto como sigue, (de arriba hacia abajo) una losa de ferrocemento de 3 cm de espesor, un entrehierro ventilado de 22 cm de espesor, una losa de hormigón de 15 cm de espesor y una capa de yeso de cemento de 0.5 cm de espesor. Uno de los techos tiene recubrimiento en la superficie exterior de alta reflectividad. El modelo teórico fue realizado en el software Matlab, para un día cálido y lluvioso. Se encontró que el modelo teórico reproduce las temperaturas del techo con una desviación menor al 4 % con respecto a los datos experimentales. La aplicación de recubrimiento reduce la ganancia de flujo de calor de 234 a 135 Wh/m² en el techo convencional y ventilado, respectivamente; por lo que se concluye que la tecnología de techos pasivos y recubrimientos son muy eficientes ya que reducen las cargas de energía en los techos de hormigón en zonas de clima templado.

Zingre *et al.* (2015a) desarrollaron un estudio teórico-experimental para determinar la transferencia de calor a través de un techo con recubrimiento en la superficie exterior. El estudio teórico consistió en un modelo matemático utilizando el método de aproximación espectral considerando la transferencia de calor a través del techo unidimensional; mientras que el estudio experimental se realizó en dos departamentos de un edificio de 12 pisos. Los departamentos tenían un techo de concreto de 10 cm de espesor y una capa de yeso al interior de 1 cm de espesor. A uno de los departamentos se le colocó un recubrimiento blanco (reflectancia de 0.74) en la superficie exterior, mientras que el otro fue tomado como referencia como un departamento típico de Singapur. De acuerdo a los datos teóricos y experimentales, se observó que la diferencia entre éstos es de $\pm 1.5^{\circ}\text{C}$. Los autores encontraron que en un día soleado, el techo con recubrimiento reduce la temperatura máxima del techo, la temperatura del aire al interior del departamento, y la ganancia de energía diaria hasta 14.1°C , 2.4°C y 0.66 kWh/m^2 , y concluyeron que el recubrimiento proporciona una reducción significativa del flujo de calor a través del techo a medida que éste se someta a una menor velocidad del viento. Conforme se aumenta la velocidad del viento, el enfriamiento del techo mediante la transferencia de calor por convección aumenta, reduciendo así la cantidad de flujo de calor a través del techo.

Alqalaf y Alawadhi (2016) realizaron un estudio teórico-experimental para analizar el efecto de la reflectancia de un techo plano en un clima cálido. El estudio experimental consistió en un módulo de 1.5x1.5x2.0 m con una losa de concreto de 1.5x1.5x0.15 m, el cual fue equipado con termopares, sensores de flujo de calor y un módulo de adquisición de datos. El interior del módulo fue controlado por medio de una unidad de aire acondicionado. Se consideraron 2 losas, una de concreto y otra de concreto con recubrimiento blanco. Para el estudio teórico, los autores determinaron la transferencia de calor unidimensional a través del techo, ya que consideraron que el largo y ancho de la losa de concreto son mucho más grandes que el espesor de la misma. La ecuación de energía se resolvió utilizando la técnica de elemento finito. En base a los resultados teóricos y experimentales, los autores comprobaron que existe una gran similitud entre ellos con un error máximo menor al 8 %. De los datos experimentales para la losa de concreto, determinaron los coeficientes de transferencia de calor interno y externo de 26.5 y 15 W/mk, respectivamente. Al interior del módulo, la temperatura promedio durante el día fue de $25^{\circ}\text{C} \pm 0.5^{\circ}\text{C}$. También observaron que la losa de concreto con recubrimiento blanco tuvo el mejor desempeño térmico, ya que redujo la temperatura de la superficie interna hasta 6.1°C , por lo cual, concluyeron que el flujo de calor depende fuertemente de la reflectancia de la superficie de la losa. Cuando se incrementó la reflectancia de 0.2 a 0.4, la ganancia de calor se redujo aproximadamente 16 %; mientras que para valores de 0.8 el flujo de calor se redujo hasta en un 50 %.

Joudi *et al.* (2017) analizaron el efecto de la emisividad superficial sobre la distribución de aire y temperatura superficial en un módulo experimental con superficie interiores reflectantes. Los coeficientes de transferencia de calor convectivos de las superficies exteriores se calcularon mediante un programa de simulación de edificios. Los resultados obtenidos por medio del CFD se compararon con datos de dos módulos experimentales en Borlänge, Suecia. En base a los resultados, los autores concluyeron que el uso de superficies reflectantes aumenta los gradientes de temperatura de la superficie y del aire. Las superficies reflectantes interiores cambian el gradiente de temperatura para el aire interior y las superficies interiores simultáneamente en respuesta a condiciones climáticas externas.

1.1.3. Techos tipo bóveda y/o cúpula

De los primeros estudios realizados a techos abovedados se encuentran los realizados por Bahadori (Bahadori (1978), Bahadori y Haghghat (1985, 1986)), en donde introdujo el papel de los techos abovedados, de los cuales, analizó la influencia del techo sobre el flujo de aire alrededor de éste y el desempeño térmico de la estructura del techo compuesto de adobe y ladrillo considerando la geometría abovedada. Un año más tarde del Campo *et al.* (1987) realizaron el estudio de la convección natural en una cavidad semielíptica. Posteriormente, Pearlmutter (1993) realizó el primer intento de comparar cuantitativamente el comportamiento térmico de techos abovedados y planos por medio de un estudio teórico-experimental obteniendo las temperaturas de las superficies interiores de los techos. Más tarde, Gómez-Muñoz *et al.* (2003) determinaron el rendimiento solar de bóvedas semiesféricas bajo condiciones climáticas de la Paz, B.C. México, en el cual analizaron la incidencia de la irradiación solar y el efecto de sombreado que estas generan durante el transcurso del día. Morsi y Das (2003) realizaron el estudio del efecto de la convección natural en una cavidad calentada diferencialmente en las superficies verticales variando la forma de la cubierta superior de la cavidad, desde una cubierta horizontal hasta una cubierta abovedada; de igual manera Altaç (2017) analizaron el flujo y transferencia de calor en una cavidad en la cual modificaron la cubierta superior para diferentes alturas de la bóveda. Diversos estudios se enfocaron en la comparación del desempeño térmico de los techos abovedados con los techos planos entre los que se encuentran Tang *et al.* (2003b, 2006), Faghieh y Bahadori (2011) determinando los valores de temperatura en las superficies de los techos. Por otro lado, se encontraron estudios en los cuales se realizó el estudio del efecto que tienen los techos abovedados sobre el perfil de velocidad y presión alrededor de los modelos físicos, entre estos estudios se encuentran Hadavand *et al.* (2008), Hadavand y Yaghoubi (2008), Faghieh y Bahadori (2010), Hosseini *et al.* (2017). Dentro de los estudios en donde se analiza la incidencia de la irradiación solar sobre superficies abovedadas se encuentran Gómez-Muñoz *et al.* (2003), Tang *et al.* (2003a), Faghieh y Bahadori (2009), Najafi y Yaghoubi (2015), Sedighi *et al.* (2017), Lin y Yang (2017), Moustafa *et al.* (2018). A continuación se presenta una descripción detallada de los estudios más relevantes:

Bahadori y Haghghat (1985) realizaron el estudio del análisis de la ventilación natural debido a los efectos del viento en edificaciones que emplean techos abovedados por medio de un análisis de flujo de red. En el análisis los autores hicieron la suposición que la cúpula tenía una abertura en la superficie superior. De acuerdo a los resultados, se concluyó que los techos abovedados presentan tasas de flujo de aire más altas a través del edificio en comparación con los techos planos.

del Campo *et al.* (1987) realizaron el estudio de la convección natural en una cavidad semielíptica considerando una distribución de temperatura sinusoidal sobre la cavidad para poder simular el efecto de la irradiación solar. Las ecuaciones gobernantes fueron formuladas en términos de función de corriente, vorticidad y temperatura; la solución de estas ecuaciones fue por medio del método de elemento finito. Del análisis de los resultados, se determinó que el mecanismo de conducción de calor es dominante en las regiones adyacentes a las fronteras, mientras que la convección se desarrolla en el área central de la cavidad. Los resultados también indican que la mayor parte de calor es transportado a través de la parte superior de la cavidad, mientras que la parte inferior permanece casi isoterma y por tal razón es en su mayoría inactiva en el proceso de transferencia de calor.

Pearlmutter (1993) realizó un estudio teórico-experimental del comportamiento térmico del techo abovedado y plano. Construyó dos pares de módulos de pruebas, los cuales constaban de una base cuadrada de 50x50 cm y 50 cm de altura (desde el suelo hasta la base del techo). Los techos fueron hechos de lámina de metal galvanizada de 1 mm de espesor, las paredes y pisos de cada módulo fueron construidos con madera con 5 cm de poliestireno expandido (aislamiento). La superficie de un par de techos (plano y abovedado) se pintó de negro, mientras que el par restante se pintaron de blanco. De acuerdo a los resultados el autor determinó que el techo abovedado tiene el mejor desempeño térmico obteniendo temperaturas favorables para el confort térmico; y por otro lado, no se encontraron diferencias significativas en el comportamiento térmico del techo abovedado al orientarlo en las direcciones norte-sur o este-oeste.

Gómez-Muñoz *et al.* (2003) determinaron la incidencia de la irradiación solar sobre bóvedas semiesféricas, dicha superficie se ajustó por medio de pequeños rectángulos planos e integrando numéricamente el total de la energía solar incidente sobre el techo semiesférico. Se desarrolló un programa computacional para analizar cada uno de los rectángulos planos que cubrían toda la superficie del techo semiesférico. El techo semiesférico tenía un diámetro de 3 m el cual cubría una superficie de 56 m^2 , mientras que el área correspondiente para el techo plano era de 26 m^2 , que es igual al área de la base del techo semiesférico. De acuerdo a los resultados obtenidos, los autores determinaron que la radiación solar durante el día es menor para el techo semiesférico que el techo plano, principalmente alrededor del mediodía, cuando los rayos del sol son casi perpendiculares a la horizontal; con lo cual el techo semiesférico presenta 25 % menos ganancia de energía solar con respecto al techo plano.

Morsi y Das (2003) analizaron numéricamente, utilizando el método de volumen finito, la transferencia de calor por convección natural en una cavidad calentada diferencialmente en las superficies verticales variando la forma de la cubierta superior (techo), planos, inclinados y de tipo cúpula. Para determinar la forma de la cubierta superior, los autores determinaron una ecuación en la cual pueden variar dos constantes, la excentricidad y la altura, las cuales determinan la forma de la cubierta superior. Los resultados indican que el fenómeno de convección está altamente influenciado por la forma de la cubierta superior de la cavidad, determinando que las formas circular y elíptica proporcionan una mayor velocidad de transferencia de calor. Al comparar la cavidad cuadrada con la que tiene cubierta tipo cúpula, se observó que la componente de velocidad vertical es mayor al incrementar el número de Rayleigh, debido a que la cubierta superior tipo cúpula permite el paso suave al fluido cerca de la esquina superior de la pared caliente. Sin embargo, cuando el fluido entra en la zona de la cúpula, éste desacelera súbitamente, dando como resultado que la componente de velocidad horizontal sea más baja en la parte central de la cúpula; por lo cual, las cavidades con cubierta superior de tipo cúpula e inclinados son menos eficientes en términos de la velocidad de transferencia de calor en comparación con la cavidad cuadrada, debido a la menor área de transferencia de calor a lo largo de la pared isoterma caliente.

Tang *et al.* (2003a) desarrollaron un estudio numérico para determinar la radiación absorbida por un techo abovedado y un plano basándose en la geometría solar. Esta investigación mostró que un techo abovedado con un ángulo de media bóveda de 90° absorbe un 20 % más radiación directa, un 50 % más de radiación difusa y un 30 % más de radiación total (sin incluir la radiación reflejada del suelo) que la que recibe un techo plano. También se mostró que la relación entre la radiación absorbida por los techos abovedados y planos incrementa al aumentar el ángulo de media bóveda. Además, se demostró que un techo abovedado orientado al norte-sur presenta ventajas al reducir las ganancias de energía durante los meses de verano y aumenta las ganancias de energía durante los meses de invierno en comparación con uno orientado al este-oeste.

Faghieh y Bahadori (2009) realizaron un estudio para determinar la cantidad de irradiación solar absorbida por la componente del techo de una habitación y analizar el efecto de las losas tipo azulejo usadas como cubiertas del techo. Se analizaron 4 techos: 1) hemisférico, 2) cónico, 3) cúpula 1 (referencia) y 4) cúpula 2. Se asumió que todos los techos tienen la misma área, la cual es un círculo de 300 cm de radio y una altura de 300 cm. Para estimar la irradiación solar sobre el techo, los autores dividieron la superficie de cada techo en superficies pequeñas y asumieron que cada una de ellas podría considerarse una superficie plana, e implementaron relaciones matemáticas propuestas por Duffie y Beckman y el modelo de índice de claridad para determinar la energía absorbida por el techo ubicado en cierta localidad. Los resultados muestran que la radiación directa es la principal componente de la irradiación solar que tiene efecto significativo sobre el techo (sin losas de azulejo), siendo el 70 y 77 % de la irradiación solar total para el techo abovedado y el plano, respectivamente. Los autores concluyeron que la relación de aspecto de los techos tiene un papel importante para determinar la cantidad de irradiación solar incidente en la componente, ya que empleando techo abovedado con menor relación de aspecto contribuyen a un mayor beneficio para el enfriamiento pasivo en regiones desérticas con alta irradiación solar. También, se encontró que los techos abovedados reciben mayor cantidad de radiación solar que los techos planos con la misma área, pero esta irradiación, en los techos abovedados, se puede disminuir utilizando losas de azulejo en la parte superior del techo que reducen la irradiación total absorbida por el techo; por lo que determinaron que las baldosas de cristal pueden ayudar a reducir la irradiación total absorbida por el techo, particularmente en meses calurosos del año.

Faghieh y Bahadori (2011) realizaron un estudio para evaluar el comportamiento térmico de los techos tipo cúpula para determinar el porcentaje de reducción de temperatura del aire al interior de las edificaciones durante los meses cálidos en comparación con los techos planos. Para el análisis del clima cálido se consideró un material ordinario y azulejo en la parte exterior del techo; esto se realizó mediante un software comercial. Se consideró que la transferencia de calor por radiación entre las superficies internas del techo y las paredes es despreciable, al igual que la transferencia de calor por convección entre el aire al interior y el techo. La geometría considerada fue un cilindro con una altura de 3 m y un diámetro de 6 m, la altura de la bóveda y el espesor de la pared fueron de 3 m y 15 cm, respectivamente. De acuerdo a los resultados, la temperatura del aire al interior de la edificación con techo tipo cúpula y plano, sometidos bajo las mismas condiciones climáticas, muestran que el techo tipo cúpula obtuvo menor temperatura en días cálidos. Por otro lado, al incorporar baldosas de cristal sobre las superficies de los techos tipo cúpula éstas redujeron la temperatura de 42.38 a 39.3°C; por lo que los autores concluyeron que los techos tipo cúpula tienen el mejor desempeño térmico en días cálidos en comparación con los techos planos y un parámetro que no afecta al incremento/aumento de la temperatura al interior de la habitación es la dirección del viento.

Dabaieh *et al.* (2015) estudiaron las diferentes configuraciones de techo para poder reducir las cargas de enfriamiento y poder satisfacer las necesidades de confort térmico en un clima cálido variando la forma y las propiedades de los materiales del techo para alcanzar el máximo confort térmico y ahorro de energía. De acuerdo a los resultados, se concluye que usar un techo de bóveda con recubrimiento de albedo tiene una reducción del 53% en las horas de irradiación solar y ahorra 826 kWh durante la temporada de verano en comparación con el caso base de cubierta plana no aislada, convencional en un edificio residencial del Cairo y recomiendan combinar el techo con ventilación natural para aumentar el confort interior para compensar el aumento de las horas de calentamiento.

Altaç (2017) realizaron un estudio numérico para determinar el comportamiento de la transferencia de calor en una cavidad calentada diferencialmente con un techo de tipo domo. El estudio consistió en una cavidad calentada diferencialmente, en donde las superficies verticales se consideraron isotérmicas; mientras que las superficies restantes se mantuvieron adiabáticas. Los autores variaron dos relaciones de aspecto $H/L=1$ y 2 , la cual relaciona la altura de la pared calentada y la longitud de base de la

cavidad. Por otro lado, la relación de aspecto del domo fue definida por $h/H=0.5$. De igual manera, se consideró un intervalo del número de Rayleigh de $10^8 \leq Ra \leq 10^{10}$ y flujo turbulento utilizando el modelo RNG $k - \varepsilon$, lo cual fue resuelto utilizando el software comercial FLUENT. De acuerdo a los resultados obtenidos, los autores concluyeron que la circulación del fluido es débil en la zona superior del techo; por otro lado el comportamiento de los campos de temperatura y del fluido a lo alto de la cavidad cuadrada es similar, esta similitud se pierde cuando se ingresa a la zona del domo. El número de Nusselt promedio no cambia significativamente al variar la relación de aspecto H/L , pero se observa un aumento gradual y significativo al incrementar el número de Rayleigh.

Yang *et al.* (2017) realizaron un estudio para cuantificar la carga térmica en cuatro tipos de edificaciones, las cuales fueron: tipo pirámide, rectangular, cilíndrica, y edificio en forma de cúpula. El trabajo se realizó por medio de un análisis de sensibilidad de tres variables de diseño (espesor de aislamiento externo de la pared/techo, relación de área de la superficie de la ventana con respecto a la envolvente y, tipo y espesor de vidrioado) que influyen en la carga térmica de la edificación. El análisis se realizó tomando datos de 5 regiones climáticas de China (Harbin, Beijing, Wuhan, Guangzhou, Kunming). Los autores utilizaron el software comercial Design Builder para la simulación de las cargas térmicas en las edificaciones. De acuerdo a los resultados del análisis de las tres variables de diseño, este mostró que la carga térmica anual del edificio tipo pirámide tuvo la mayor carga en todos los aspectos analizados; mientras que el edificio en forma de cúpula tuvo el mejor desempeño térmico mientras la relación de área de la superficie de la ventana con respecto a la envolvente fuera inferior al 30%, y cuando este porcentaje se incrementó, el edificio en forma de cilindro presentó la carga térmica más baja. Por otro lado, a excepción del edificio tipo pirámide, los otros tres edificios mostraron la misma tendencia referente a la carga térmica en la diferentes regiones climáticas.

1.2. Conclusión de la revisión bibliográfica

De acuerdo a la revisión realizada acerca del tema, se aprecia que en la literatura se han considerado diferentes aspectos sobre la componente del techo como lo son: utilización de recubrimientos, aislantes térmicos, distintas geometrías, dimensiones, diferentes propiedades, etc. Otro aspecto importante a resaltar son los estudios considerando diferentes geometrías de techo, de los cuales, sólo pocos se han acoplado con un recinto y/o cavidad (habitación). Pero cabe mencionar que estos estudios no consideran la transferencia de calor por conducción en la componente del techo, solo es fija la información necesaria para poder obtener el comportamiento del fluido al interior de la cavidad. Otro aspecto a considerar sobre la literatura es que no se ha considerado un acoplamiento del sistema similar al propuesto en este trabajo de investigación, utilizando la técnica de coordenadas generalizadas. También es importante remarcar que en México no se ha realizado un estudio con el sistema propuesto en este trabajo de investigación utilizando materiales de construcción de México y datos climáticos de las regiones cálidas de la República Mexicana.

1.3. Objetivo

Analizar la transferencia de calor en una habitación con un techo de geometría irregular con cubierta reflectiva bajo condiciones climáticas de la República Mexicana.

1.3.1. Objetivos específicos

- Desarrollar un código numérico en coordenadas curvilíneas para determinar la transferencia de calor por conducción en dos diferentes tipos de techos (a dos aguas y tipo bóveda/cúpula).
- Desarrollar un código numérico utilizando un modelo en balance de energía global para determinar la temperatura de las componentes de una habitación.
- Determinar la influencia del tipo de cubierta reflectiva en la distribución de temperatura de la habitación.
- Realizar el estudio en estado transitorio para dos el día más cálido y frío del año para una ciudad de la República Mexicana.

1.4. Alcance

Implementar un código numérico en coordenadas curvilíneas para resolver el fenómeno de transferencia de calor por conducción en dos dimensiones y estado transitorio para un sistema de techo con geometría irregular y cubierta reflectiva. Este modelo resuelto por Dinámica de Fluidos Computacional (en inglés, CFD) será acoplado como condición de frontera a un modelo de Balances de Energía Global (en inglés, GEB) para determinar la temperatura de las componentes de una habitación de geometría irregular debido a la configuración del techo. Para el estudio, será considerada una ciudad de la República Mexicana con clima cálido, de la cual, se tomará el día más cálido y frío del año.

1.5. Estructura de la tesis

En el Capítulo 2 se presentan los modelos físicos y matemáticos del sistema techo-habitación, así como las consideraciones y suposiciones para este trabajo. El Capítulo 3 trata sobre la teoría fundamental de coordenadas curvilíneas para el modelado de transferencia de energía. El Capítulo 4 trata sobre los conceptos fundamentales de los balances de energía global. En el Capítulo 5 se presenta la metodología de solución al modelo propuesto en este trabajo y la verificación del código generado. En el Capítulo 6 se muestran los resultados obtenidos en este trabajo. En el Capítulo 7 se presentan las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros.

Capítulo 2

Modelo Físico y Matemático

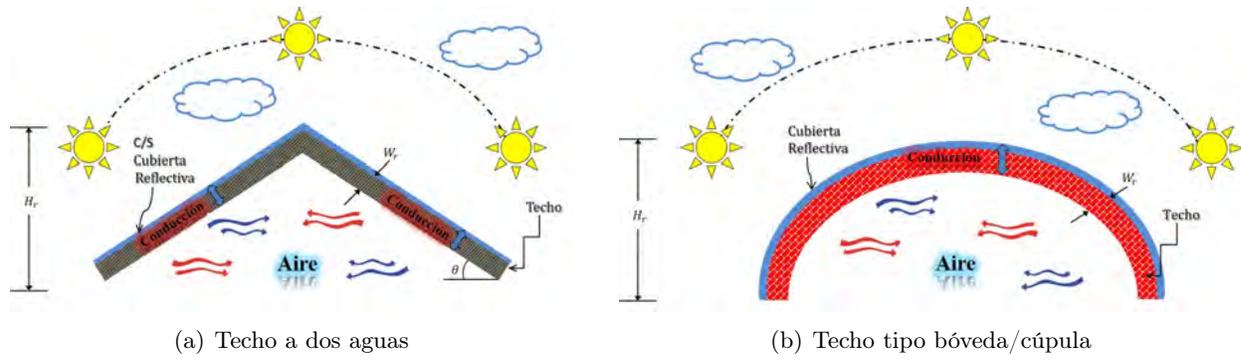
Para llevar a cabo el análisis de una componente y/o sistema, es necesario representarlo geométricamente mediante un modelo físico y en éste, mediante un modelo matemático representar el fenómeno bajo estudio. El modelo físico es la construcción geométrica de la componente y/o sistema bajo estudio; éste, bajo ciertas consideraciones tomará las principales características físicas de la componente y/o sistema. Por otro lado, es necesario representar los fenómenos físicos en dicho modelo mediante la matemática apropiada lo cual se hace por medio de una ecuación matemática o conjunto de ellas. Con base a ambas representaciones se puede conocer el comportamiento de la componente y/o sistema.

El sistema estudiado está compuesto por distintas componentes (techo, ventada, suelo, etc.), por lo cual, será analizado utilizando dos técnicas: *Dinámica de Fluidos Computacional* (en inglés, CFD) y *Balance de Energía Global* (en inglés, GEB). El techo de geometría compleja (a dos aguas y tipo bóveda/cúpula) será modelado con la técnica de CFD utilizando coordenadas curvilíneas llamadas igual *Coordenadas de Cuerpo Ajustado* (en inglés, BFC) en el cual, se resolverá el mecanismo de transferencia de calor por conducción. Por otro lado, en la cavidad que será modelada con la técnica de GEB, se agrupa una pared sólida, una pared semitransparente, el suelo, la tierra y por último el techo, del cual se tendrá la información correspondiente a través de CFD. En este dominio se presenta transferencia de calor por conducción en la pared sólida, en la pared semitransparente, el suelo y la tierra; transferencia de calor por convección en el aire circundante en la cavidad y pérdidas por convección y radiación hacia el medio ambiente exterior.

2.1. Modelo Físico

En la Figura 2.1 se muestra el modelo físico de un **techo a dos aguas** (loza de concreto) y un **techo tipo bóveda/cúpula** (ladrillo). El techo a dos aguas (Figura 2.1a) está compuesto por dos superficies planas con una inclinación de $\theta = 35^\circ$ con respecto a la horizontal, mientras que el techo de la Figura 2.1b está compuesto por una superficie tipo bóveda/cúpula. Para ambos techos, el espesor es de W_r y altura H_r , con una longitud de $H \times R$ igual a la de la cavidad; en la superficie exterior del techo se tiene una cubierta (gris, negra y blanca) de espesor despreciable interactuando con el medio ambiente exterior con pérdidas/ganancias por convección y radiación. En la superficie interior del techo, éste se encuentra en contacto con la cavidad interactuando con pérdidas/ganancias por convección.

La Figura 2.2 muestra el modelo físico de una cavidad, la cual representa una **habitación**, que está conformada por una pared semitransparente (**ventana**) ubicada en el lado derecho de espesor $H \times G$; una pared sólida (**muro**) en el lado izquierdo con espesor $H \times W$, ambos con altura de $H_y R$. Por otro lado, la superficie inferior está compuesta por el **suelo** de la habitación con una altura de $H_y F$ y debajo de éste se considera el tipo de **tierra** de la región (zona geográfica) que será estudiada con una altura $H_y G$; en ambos (suelo y tierra), la transferencia de energía es por medio de conducción; al interior de la habitación se considera aire seco sin fuentes internas de generación de calor y pérdidas/ganancias por convección.



(a) Techo a dos aguas

(b) Techo tipo bóveda/cúpula

Figura 2.1: Modelo físico del techo (CFD).

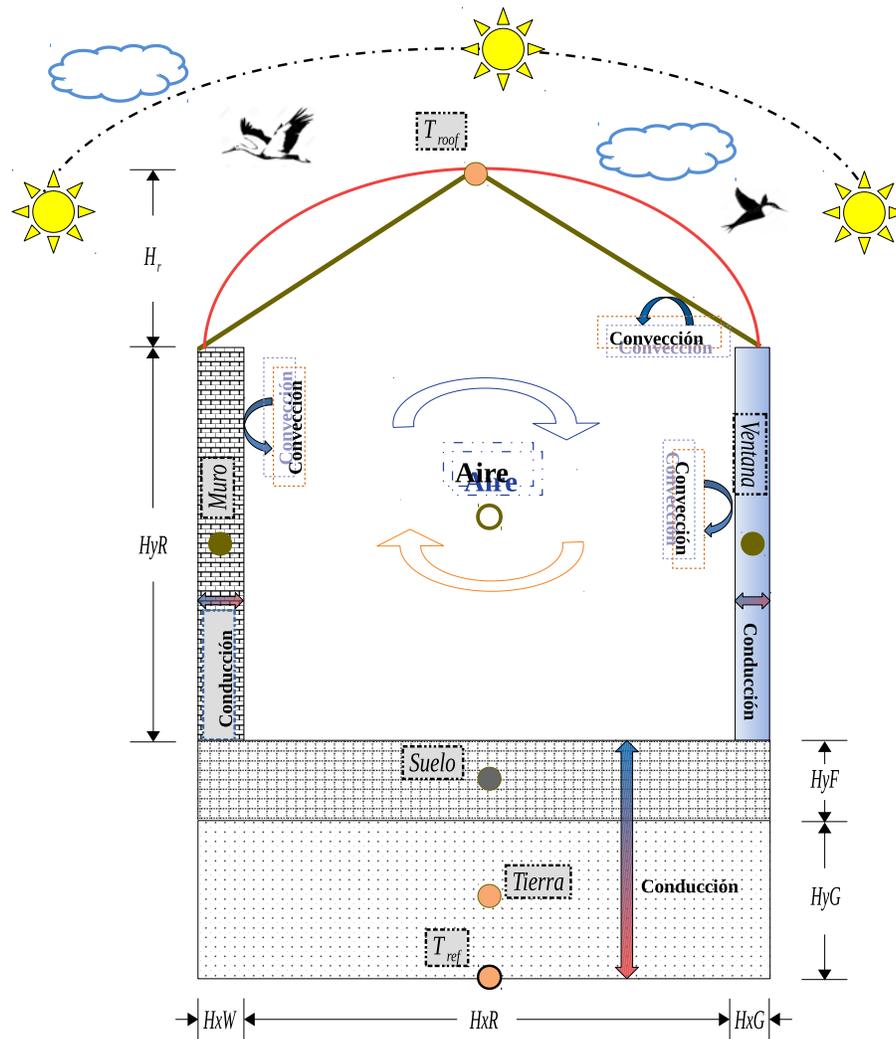


Figura 2.2: Modelo físico de la habitación (GEB).

2.2. Modelo Matemático

2.2.1. Modelo de Conducción (CFD)

La componente **techo** es un sólido sujeto a condiciones climáticas interactuando con la superficie exterior con pérdidas/ganancias por convección y radiación, y a condición de una T_{room} correspondiente a la cavidad en la superficie interior del techo con pérdidas/ganancias por convección. En dicha componente se resolverá la transferencia de calor por conducción utilizando BFC.

De manera general, la ecuación de transferencia de calor por conducción (difusión) puede ser escrita como

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} = \nabla \cdot (\Gamma \nabla T) + S \quad (2.1)$$

donde T es la variable dependiente, t es el tiempo, ρ y $\Gamma = k/C_p$ son los parámetros del proceso de difusión y S es el término fuente. En coordenadas cartesianas, la Ecuación 2.1 se escribe como

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S \quad (2.2)$$

donde x , y , y z son las coordenadas cartesianas de posición. Sin embargo, en general, las coordenadas cartesianas no son apropiadas para resolver problemas de difusión en sólidos con geometría irregular o compleja. Por lo tanto, es necesario crear un sistema de coordenadas cuyos ejes coincidan con los bordes del sólido a estudiar. Estos ejes denotados por ξ , η y ζ definen el sistema de coordenadas curvilíneas no ortogonales. Las coordenadas curvilíneas se pueden expresar como funciones de x , y y z a través de transformaciones uno a uno del tipo $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ y $\zeta = \zeta(x, y, z)$.

Por lo tanto, la ecuación de transferencia de calor por conducción (difusión) en dos dimensiones en el nuevo sistema de coordenadas se expresa como

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho T}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_4 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{S^T}{J} \quad (2.3)$$

donde los coeficientes C_1 , C_2 , C_4 y C_5 de la Ecuación 2.3 son dados por

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{k}{C_p} J \alpha \\ C_2 = C_4 &= -\frac{k}{C_p} J \beta \\ C_5 &= \frac{k}{C_p} J \gamma \end{aligned}$$

y α , β y γ son las componentes del tensor métrico asociado a la transformación, el cual es definido como

$$\mathbf{g}_{ij} = \frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x}{\partial x^j} + \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\partial y}{\partial x^j} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^j}$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ representan las coordenadas del sistema coordenada curvilíneo (dominio computacional) ξ , η y ζ . La Ecuación 2.3 es conocida en la literatura como ecuación de difusión en el dominio transformado o dominio computacional, mientras que la Ecuación 2.2 se denomina ecuación de difusión en el dominio físico.

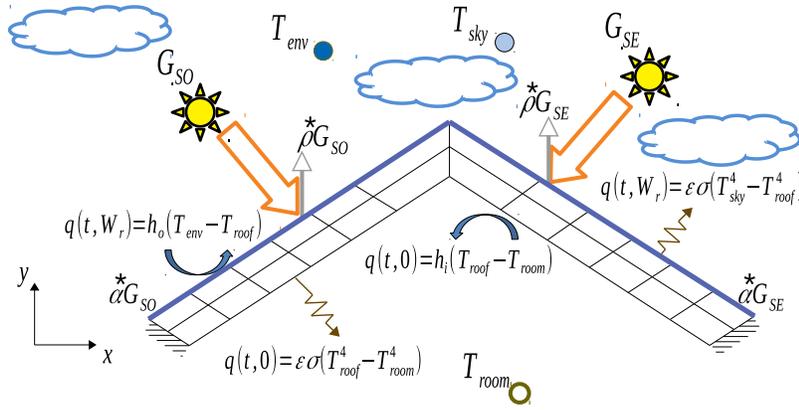
Los mecanismos de transferencia de calor a través de la componente techo, (a dos aguas y tipo bóveda/cúpula) serán los mismo, por lo que, en la Figura 2.3a-b se muestran los mecanismos de transferencia de calor en las fronteras de los techos a estudiar. La superficie exterior está expuesta a condiciones climáticas con pérdidas por convección y radiación con la siguiente condición de frontera,

$$k \frac{\partial T_{roof}}{\partial \vec{n}} = h_o (T_{env} - T_{roof}) + \epsilon \sigma (T_{sky}^4 - T_{roof}^4) + \alpha^* G_S \quad (2.4)$$

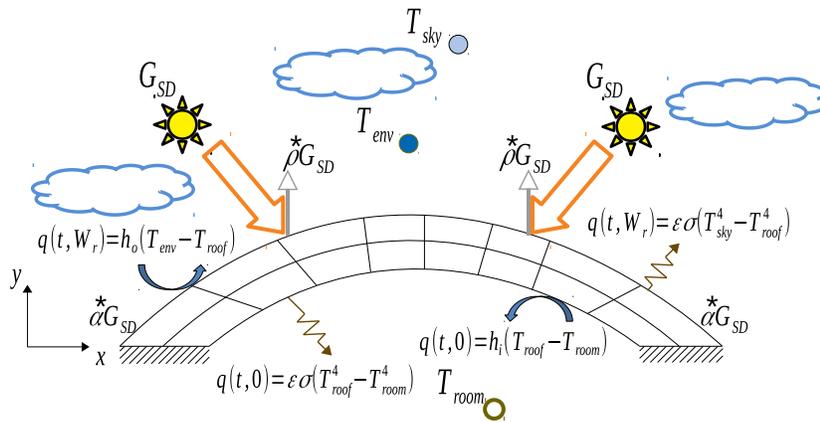
Por otro lado, la superficie interior interactúa con el ambiente interior de la cavidad considerando la siguiente condición de frontera,

$$k \frac{\partial T_{roof}}{\partial \vec{n}} = h_i (T_{roof} - T_{room}) + \epsilon \sigma (T_{roof}^4 - T_{room}^4) \quad (2.5)$$

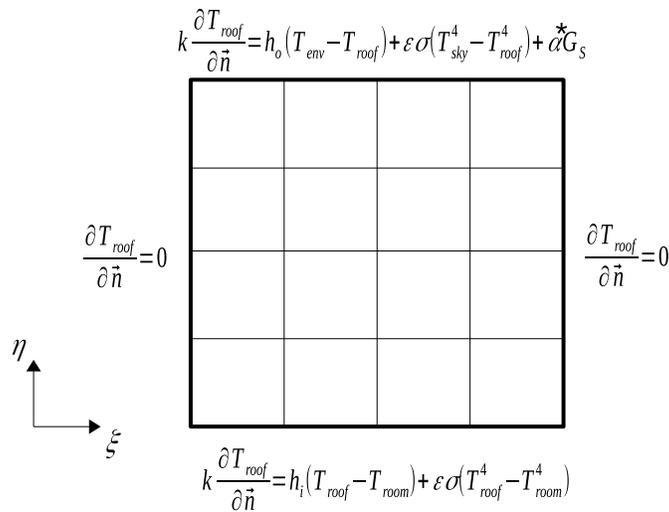
La Figura 2.3c representa el dominio computacional en donde será resuelta la Ecuación 2.3 con las condiciones de frontera transformadas al dominio computacional. En las fronteras verticales se impone una condición de frontera adiabática.



(a) Dominio Físico del techo a dos aguas



(b) Dominio Físico del techo tipo bóveda/cúpula



(c) Dominio Computacional

Figura 2.3: Modelo CFD.

2.2.2. Modelo de Balance de Energía Global (GEB)

En la Figura 2.4 se muestra una habitación compuesta por cuatro muros, dos de ellos a estudiar en este trabajo los cuales son una pared sólida (**muro**) y una pared semitransparente (**ventana**). Por otro lado, se considera una losa de concreto la cual es representativa del **suelo** de la habitación; y por último, se considera el tipo de **tierra** representativo de la región que será analizada.

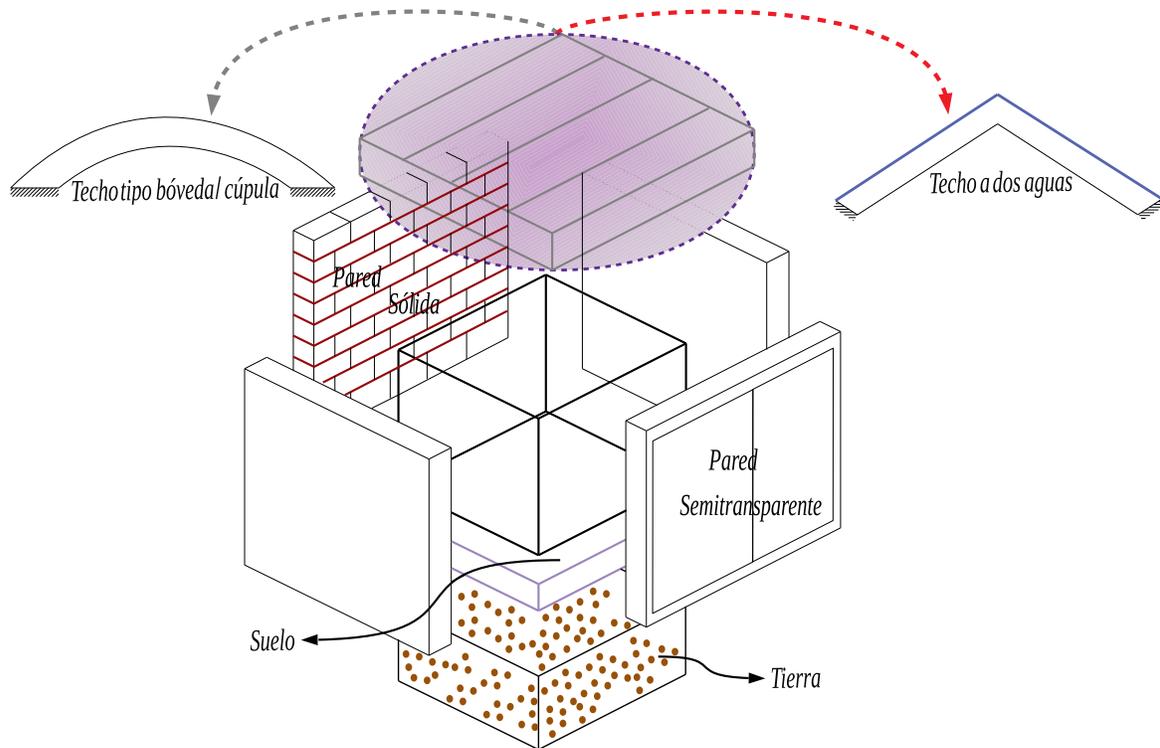


Figura 2.4: Diagrama del GEB.

El modelo matemático se basa en el método de balances de energía global, el cual consiste en realizar un balance de energía en cada componente del sistema a analizar. En la Figura 2.5 se observan los puntos representativos de cada elemento en donde se determinará la temperatura por medio de la primera ley de la termodinámica conocida también como el principio de la conservación de la energía representado por la Ecuación 2.6

$$\underbrace{E_{in} - E_{out}}_{\text{Transferencia neta de energía mediante calor, trabajo y masa}} = \underbrace{\Delta E_{system}}_{\text{Cambio de energía interna, cinética, potencial, etc.}} \quad (2.6)$$

En la Figura 2.5 se muestran los mecanismos de transferencia de calor en las fronteras del sistema al igual que al interior de la habitación.

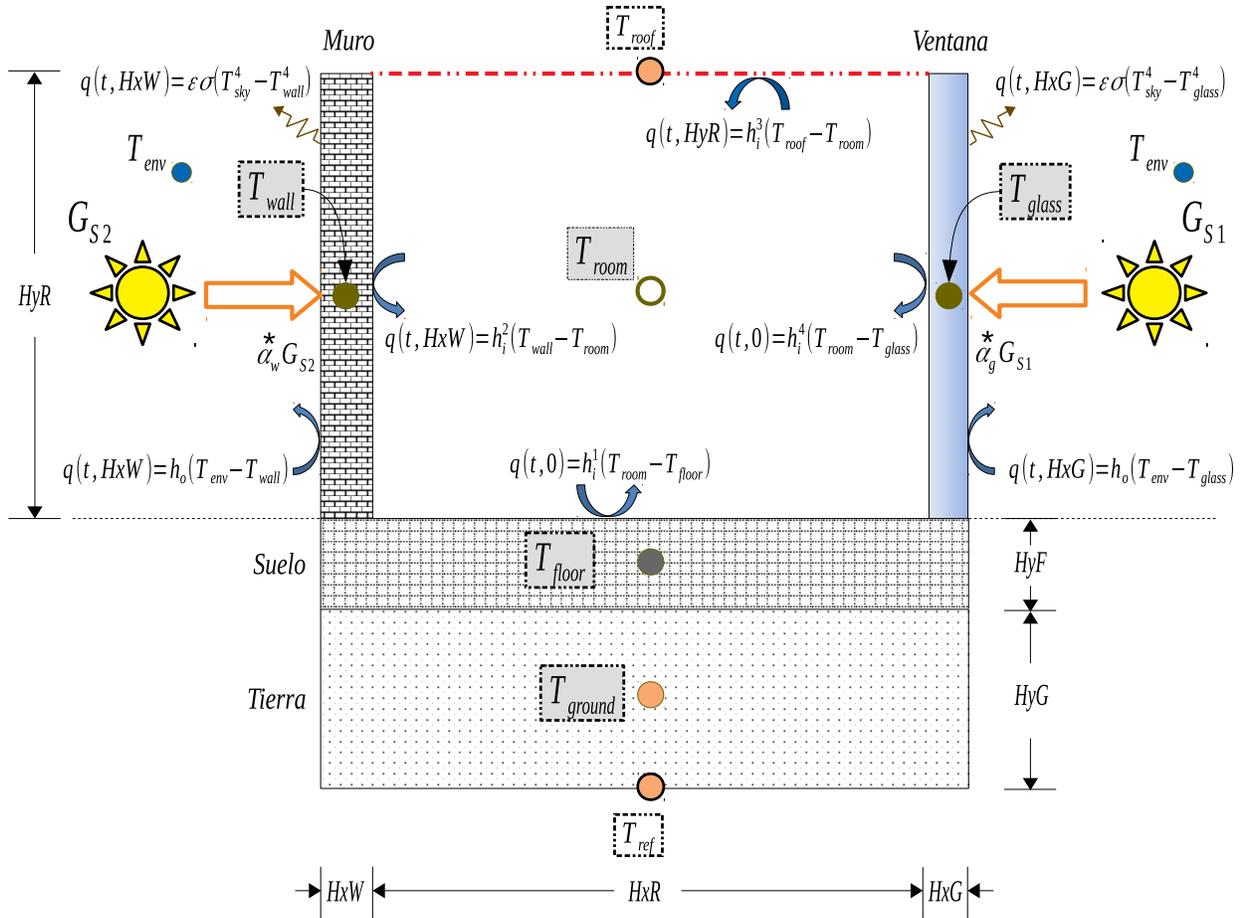


Figura 2.5: Modelo GEB.

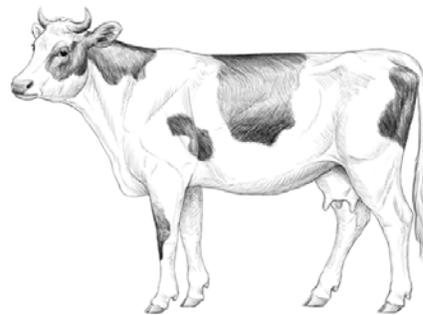
Capítulo 3

Coordenadas Curvilíneas

Generalmente cuando se resuelven problemas de transferencia de calor académicamente se utilizan, por simplicidad, los tres principales sistemas coordenados ortogonales (cartesiano, cilíndrico y esférico), sin embargo, sabemos que estos sistemas coordenados ortogonales son muy limitados cuando nuestro interés es resolver problemas reales de ingeniería en donde la mayoría de las veces la geometría es *irregular* o *compleja*. En la literatura, los autores nombran geometría *irregular* o *compleja*, sin embargo no proporcionan una definición del tipo de geometría, sino que usan los términos indistintamente. Por tal razón, en este trabajo se considera una geometría **irregular** aquella que es fácilmente de definir mediante expresiones matemáticas sencillas en los tres sistemas coordenados ortogonales básicos; mientras que una geometría **compleja** será considerada la cual no se puede definir con expresiones matemáticas sencillas en dichos sistemas coordenados. En Figura 3.1 se muestran los dos tipos de geometrías antes mencionados.



(a) Irregular



(b) Compleja

Figura 3.1: Tipos de geometrías.

Por ejemplo, la generación de la malla para una geometría irregular haciendo uso del sistema coordenado ortogonal cartesiano no es adecuado como se puede observar en Figura 3.2a, de esta manera, es más atractivo usar el sistema coordenado curvilíneo Figura 3.2b, de igual manera el arreglo no-estructurado Figura 3.2c es atractivo para el ejemplo en esta geometría. Los últimos dos tipos de mallas tienen la particularidad que no tienen volúmenes de control incompletos en todo el dominio, por lo cual se dice que son coincidentes con las fronteras del dominio. El uso de sistemas coordenados coincidentes con las fronteras del dominio, también conocidos como *coordenadas de cuerpo ajustado* (en inglés, BFC), es una de las alternativas más atractivas para la discretización de geometrías irregulares y complejas, donde se tiene un sistema de coordenadas curvilíneas global.

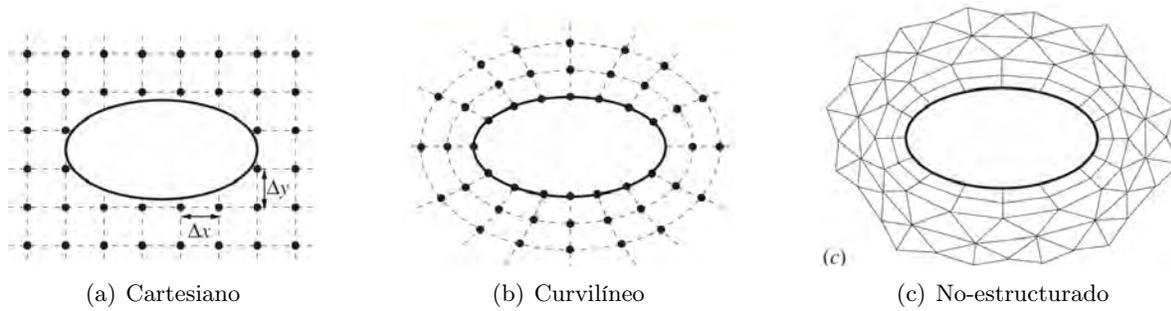


Figura 3.2: Tipos de arreglos para la generación de mallas.

Como se puede observar, la generación de la malla, o sea, la discretización del dominio computacional, es la piedra angular dentro del proceso de la *dinámica de fluidos computacional* (en inglés, CFD). Normalmente centramos nuestro tiempo y esfuerzo con los algoritmos de solución de la *ecuación diferencial parcial* (en inglés, PDE) y olvidamos la generación de la malla (una actividad aparentemente trivial pero de gran consumo de tiempo y extremadamente laboriosa), cuando se debe generar una malla adecuada sobre el dominio físico para poder aproximar las PDEs por las ecuaciones algebraicas. En el proceso de simulación de un nuevo problema, alrededor del 70% del trabajo se dedica a la generación de la malla (Maliska, 2004).

Existen diversos métodos disponibles en la literatura para la generación de mallas, los cuales, fundamentalmente se pueden clasificar en *algebraicos* y *diferenciales*. En la Figura 3.3 se puede observar esta clasificación y a su vez una sub-clasificación de cada uno de ellos.

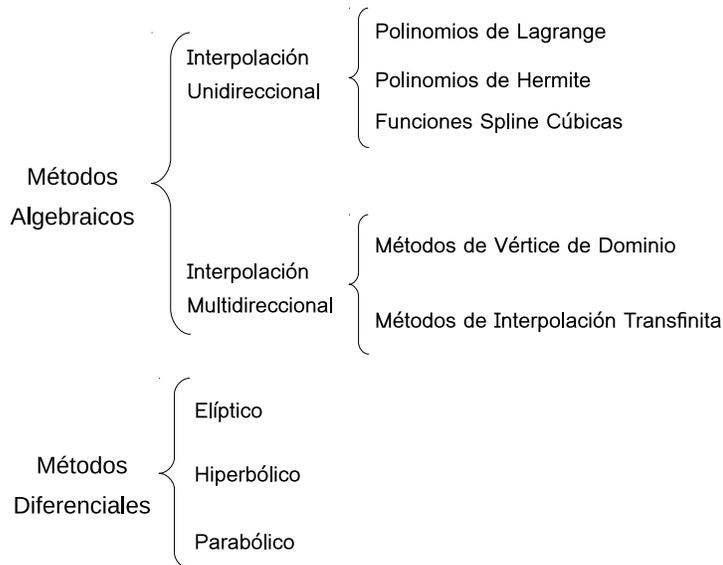


Figura 3.3: Clasificación de los métodos para generar mallas.

La técnica de generación de malla más simple se da por medio de los métodos algebraicos, los cuales emplean ecuaciones algebraicas para relacionar los nodos de la malla del dominio físico con el dominio computacional mediante el uso de esquemas de interpolación entre los nodos de las fronteras del dominio físico especificados para así generar los nodos interiores de la malla; esta característica hace que su principal ventaja de este tipo de métodos sea la velocidad con que se pueda generar una malla. Por otro lado, los métodos diferenciales emplean PDEs para generar la malla. Son más generales y atractivos para emplearlos en geometrías complejas. En estos métodos, un sistema de PDEs se resuelve con variables dependientes e independientes que son las coordenadas del dominio físico y las coordenadas del dominio computacional transformadas, respectivamente, en donde las relaciones de transformación se determinan automáticamente por la solución de diferencias finitas de dicho conjunto de PDEs. Estos métodos pueden clasificarse como elípticos, parabólicos o hiperbólicos. En general, los métodos diferenciales son más complicados y costosos (tiempo de cómputo) que los métodos algebraicos. El método diferencial elíptico es el más desarrollado.

Thompson *et al.* (1974) propusieron la técnica de generación de malla y mapeo por medio del método diferencial elíptico, el cual está basado en la solución de un sistema de PDEs elípticas para distribuir los nodos en el interior del dominio físico. Este tipo de generación de mallas genera una distribución uniforme en todo el dominio. Los sistemas de generación de malla elípticos cuasi-lineales de segundo orden son llamados sistemas de Poisson con funciones de control a ser especificadas. Estas funciones de control sirven para el aglomeramiento de líneas de malla, tanto en las fronteras como en otras partes dentro del dominio donde se requiera. En un mapeo bidimensional, se resuelven dos PDEs elípticas, en donde por ejemplo, el sistema coordenado ortogonal cartesiano, se usa generalmente con las variables independientes (x, y) en el plano físico (Figura 3.4a) y las variables dependientes (ξ, η) en el plano computacional (Figura 3.4b). Sin embargo, el mapeo no se limita solo al sistema coordenado ortogonal cartesiano.

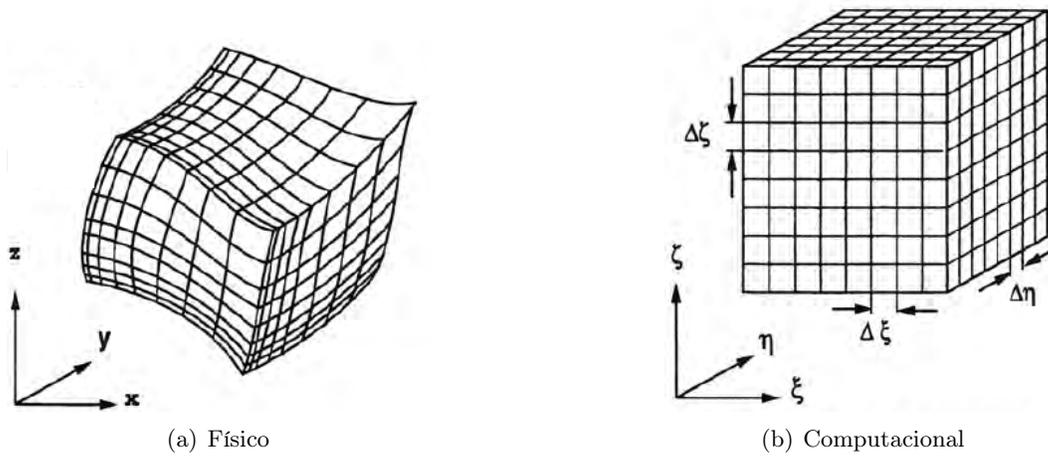


Figura 3.4: Dominios para mapear una geometría.

3.1. Relaciones de Transformación

La relación entre los dos sistemas de coordenadas se puede ver como un mapeo (*transformación*) entre el dominio físico y el dominio computacional (Figura 3.4). La transformación debe satisfacer ciertas propiedades matemáticas para garantizar que la correspondencia entre los puntos de los dominios físico y computacional sea uno a uno, como por ejemplo que las líneas del sistema coordenado curvilíneo de la misma familia (las líneas $\eta = \text{const}$ en la Figura 3.5) no se deben cruzar y cualquiera de las dos líneas de diferente familia no se deben cruzar más de una vez.

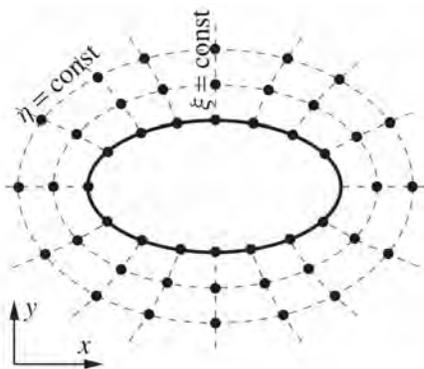


Figura 3.5: Mapeo de una geometría.

La posibilidad de encontrar la transformación entre el sistema de coordenadas original y el sistema de coordenadas curvilíneo, permite el mapeo del dominio físico (x, y, z) en una geometría regular en el dominio computacional (ξ, η, ζ) y viceversa. El dominio físico puede cambiar de forma (geometría) sin cambiar su representación en el plano computacional. De esta manera, escribiendo las ecuaciones de conservación de igual manera en el dominio computacional, el código numérico será escrito para una geometría fija en este dominio. La alteración de la geometría en el dominio físico (geometría real del problema) no requiere, por tanto, modificaciones en el código numérico. La información sobre el dominio físico será proporcionada al código numérico a través de las métricas y el jacobiano de transformación (Maliska, 2004).

Las coordenadas curvilíneas de un punto se relacionan con el sistema coordenado ortogonal cartesiano por las ecuaciones de transformación del tipo:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y, z) \\ \eta &= \eta(x, y, z) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z)\end{aligned}\tag{3.1}$$

El diferencial de cada eje coordenado curvilíneo está dado por:

$$\begin{aligned}d\xi &= \xi_x dx + \xi_y dy + \xi_z dz \\ d\eta &= \eta_x dx + \eta_y dy + \eta_z dz \\ d\zeta &= \zeta_x dx + \zeta_y dy + \zeta_z dz\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde,

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \xi_z = \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \eta_z = \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \zeta_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \zeta_y = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \zeta_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

de forma matricial se tiene,

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}\tag{3.3}$$

o expresado de forma compacta como,

$$[\mathbf{d}^{\mathbf{T}}] = [\mathbf{A}] [\mathbf{d}^{\mathbf{F}}]\tag{3.4}$$

El teorema de la función inversa admite la existencia de la transformación inversa dada por,

$$\begin{aligned}x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\z &= z(\xi, \eta, \zeta)\end{aligned}\tag{3.5}$$

de la Ecuación 3.5, el diferencial de cada eje coordenado cartesiano está dado por:

$$\begin{aligned}dx &= x_\xi d\xi + x_\eta d\eta + x_\zeta d\zeta \\dy &= y_\xi d\xi + y_\eta d\eta + y_\zeta d\zeta \\dz &= z_\xi d\xi + z_\eta d\eta + z_\zeta d\zeta\end{aligned}\tag{3.6}$$

donde,

$$x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}, x_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta}, x_\zeta = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \quad y_\xi = \frac{\partial y}{\partial \xi}, y_\eta = \frac{\partial y}{\partial \eta}, y_\zeta = \frac{\partial y}{\partial \zeta} \quad z_\xi = \frac{\partial z}{\partial \xi}, z_\eta = \frac{\partial z}{\partial \eta}, z_\zeta = \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix}\tag{3.7}$$

o en forma compacta

$$[\mathbf{d}^F] = [\mathbf{B}] [\mathbf{d}^T]\tag{3.8}$$

Usando la Ecuación 3.4 y Ecuación 3.8, se tiene:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} = \frac{[\text{adj}(\mathbf{B})]^T}{\det |\mathbf{B}|}\tag{3.9}$$

De manera similar se puede obtener,

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \frac{[\text{adj}(\mathbf{A})]^T}{\det |\mathbf{A}|}\tag{3.10}$$

Comparando $[\mathbf{A}]$ con $[\mathbf{B}^{-1}]$ elemento por elemento de las matrices se obtienen las *métricas de transformación* o relaciones de transformación del dominio computacional al dominio físico por

$$\begin{aligned}
\xi_x &= J (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) \\
\xi_y &= -J (x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta) \\
\xi_z &= J (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) \\
\eta_x &= -J (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) \\
\eta_y &= J (x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi) \\
\eta_z &= -J (x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi) \\
\zeta_x &= J (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \\
\zeta_y &= -J (x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) \\
\zeta_z &= J (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Similarmente, comparando $[\mathbf{B}]$ con $[\mathbf{A}^{-1}]$ se obtienen las *derivadas computacionales* o relaciones de transformación del dominio físico al dominio computacional dadas por

$$\begin{aligned}
x_\xi &= \frac{(\eta_y \zeta_z - \eta_z \zeta_y)}{J} \\
x_\eta &= -\frac{(\xi_y \zeta_z - \xi_z \zeta_y)}{J} \\
x_\zeta &= \frac{(\xi_y \eta_z - \xi_z \eta_y)}{J} \\
y_\xi &= -\frac{(\eta_x \zeta_z - \eta_z \zeta_x)}{J} \\
y_\eta &= \frac{(\xi_x \zeta_z - \xi_z \zeta_x)}{J} \\
y_\zeta &= -\frac{(\xi_x \eta_z - \xi_z \eta_x)}{J} \\
z_\xi &= \frac{(\eta_x \zeta_y - \eta_y \zeta_x)}{J} \\
z_\eta &= -\frac{(\xi_x \zeta_y - \xi_y \zeta_x)}{J} \\
z_\zeta &= \frac{(\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)}{J}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

donde \mathbf{J} en la Ecuación 3.11 y Ecuación 3.12 es el *Jacobiano de transformación* determinado por

$$J = \det |\mathbf{A}| = \frac{1}{\det |\mathbf{B}|} = \frac{1}{x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)} \quad (3.13)$$

Si la transformación de la Ecuación 3.1 y Ecuación 3.5 se da analíticamente, entonces es posible obtener las métricas de manera analítica, sin embargo, en muchas aplicaciones de CFD, la transformación de éstas se da numéricamente, y por lo tanto, las métricas se calculan por medio del método de diferencias finitas (en inglés, FDM).

3.2. Vectores de Base

Cuando el sistema coordenado ortogonal cartesiano es usado, un vector variable con el espacio se describe en términos de las componentes cartesianas referenciadas a una base local de vectores, $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$. La magnitud y la dirección de cada vector de base son las mismas para cualquier punto del espacio. Sabemos que $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ son vectores unitarios y que la magnitud de una componente de un determinado vector representa una proporcionalidad con el vector de base en aquel eje. Cuando se emplea un sistema de coordenadas curvilíneas y se desea describir el mismo vector en éstas coordenadas, es recomendable emplear vectores de base local que sean alineados (tangenciales) o normales a las líneas coordenadas. Como las coordenadas son no ortogonales, y para evitar imprecisiones, existen dos sistemas de vectores base que pueden ser utilizados: **covariante** y **contravariante**.

Sea $\vec{\mathbf{r}} = x \vec{\mathbf{i}} + y \vec{\mathbf{j}} + z \vec{\mathbf{k}}$ el vector de posición del punto P en el espacio (Figura 3.6)

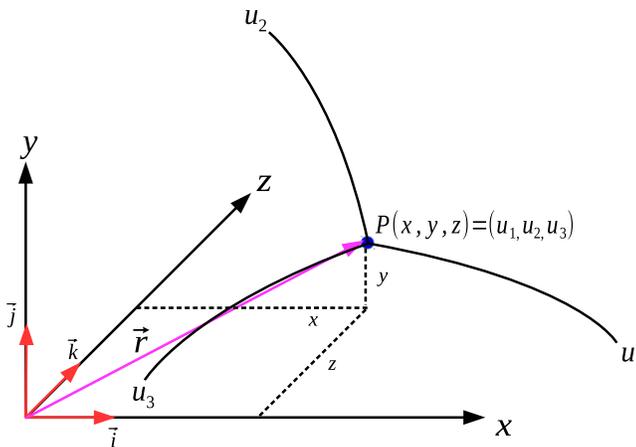


Figura 3.6: Vector de posición en el espacio.

este puede escribirse como $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$. Un vector *tangente* a la curva u_1 en P (para la cual u_2 y u_3 son constantes) es $\partial\vec{r}/\partial u_1$. Entonces, un vector unitario tangente en dicha dirección es $\hat{\mathbf{e}}_1 = (\partial\vec{r}/\partial u_1)/|\partial\vec{r}/\partial u_1|$ de modo que $\mathbf{e}_1 = h_1 \hat{\mathbf{e}}_1$, donde $h_1 = |\mathbf{e}_1|$. En forma similar, si $\hat{\mathbf{e}}_2$ y $\hat{\mathbf{e}}_3$ son vectores unitarios tangentes a las curvas u_2 y u_3 en P , respectivamente; por lo tanto, $\mathbf{e}_2 = h_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ y $\mathbf{e}_3 = h_3 \hat{\mathbf{e}}_3$, donde $h_2 = |\mathbf{e}_2|$ y $h_3 = |\mathbf{e}_3|$, donde h_1, h_2, h_3 representan los *factores de escala* del sistema de coordenadas curvilíneas. Los vectores de base unitarios $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ tienen las direcciones en las que crecen u_1, u_2, u_3 , respectivamente; por otro lado $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ son los vectores de base **covariante** del sistema de coordenadas curvilíneas. Como ∇u_1 es un vector *normal* a la superficie $u_1 = dS_1$ (Figura 3.7a), un vector unitario en dicha dirección está dado por $\hat{\mathbf{e}}^1 = \nabla u_1/|\nabla u_1|$, de modo que $\mathbf{e}^1 = h^1 \hat{\mathbf{e}}^1$, donde $h^1 = |\mathbf{e}^1|$. De manera similar, los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}^2 = \nabla u_2/|\nabla u_2|$, $\hat{\mathbf{e}}^3 = \nabla u_3/|\nabla u_3|$, son *normales* a las superficies $u_2 = dS_2$, $u_3 = dS_3$, respectivamente, entonces $\mathbf{e}^2 = h^2 \hat{\mathbf{e}}^2$ y $\mathbf{e}^3 = h^3 \hat{\mathbf{e}}^3$, donde $h^2 = |\mathbf{e}^2|$ y $h^3 = |\mathbf{e}^3|$. Las cantidades h^1, h^2, h^3 representan los *factores de escala* y $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ son los vectores de base **contravariante** del sistema de coordenadas curvilíneas.

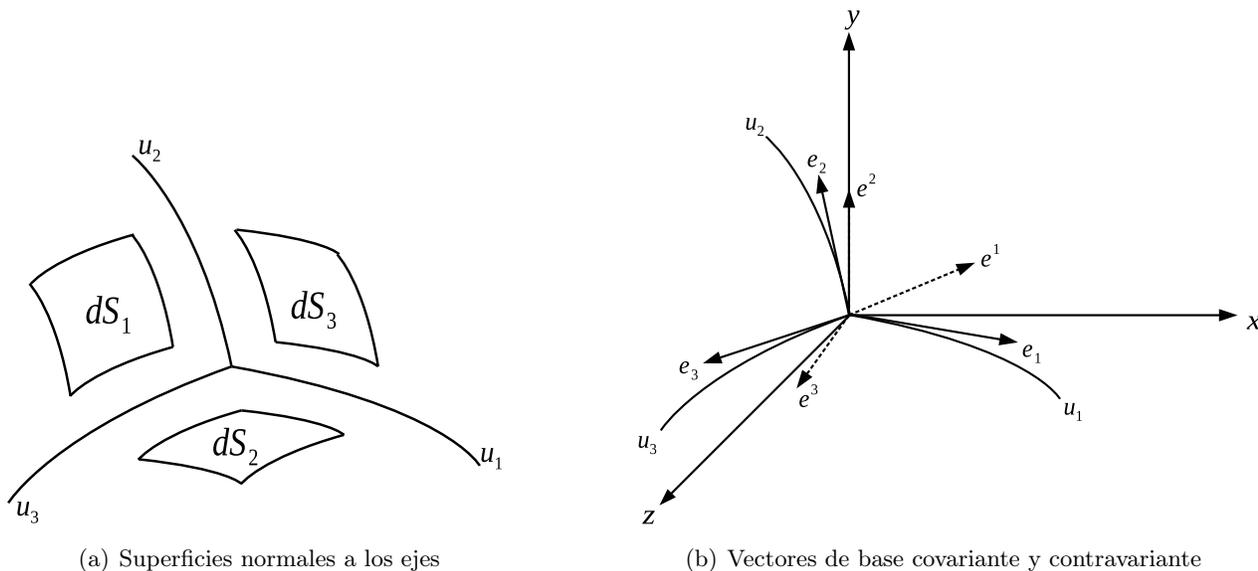


Figura 3.7: Superficies y vectores en el sistema coordenado curvilíneo.

Con los vectores base del sistema coordenado curvilíneo definidos anteriormente (Figura 3.7b), un vector \vec{V} puede expresarse con sus *componentes contravariantes* a lo largo del vector de base covariante o con sus *componentes covariantes* a lo largo del vector de base contravariante.

$$\vec{V} = V^i \mathbf{e}_i = V_i \mathbf{e}^i \quad i=1,2,3$$

Utilizando la propiedad recíproca de los vectores de base $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$ las componentes de un vector están determinadas por

$$V^i = \vec{V} \cdot \mathbf{e}^i$$

$$V_i = \vec{V} \cdot \mathbf{e}_i$$

como las componentes V_i , V^i se definen con respecto a los vectores base no-normalizados $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i)$, éstas no tienen dimensiones físicas. Para hacer que las dimensiones de las componentes del vector sean consistentes con la física el vector puede ser expresado utilizando sus *componentes físicas*, de la siguiente manera

$$\vec{V} = u^i \hat{\mathbf{e}}_i = u_i \hat{\mathbf{e}}^i \quad i=1,2,3$$

Las componentes físicas son dadas por

$$u^i = V^i h_i$$

$$u_i = V_i h^i$$

Por lo tanto, en cada punto P de un sistema coordenado curvilíneo, en general existen dos conjuntos de vectores de base, \mathbf{e}_i que son tangentes a las curvas coordenadas, y \mathbf{e}^i que son normales a las superficies coordenadas.

Tabla 3.1: Conjunto de vectores en el sistema coordenado curvilíneo

	Covariante	Contravariante
Vector base	$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial X^i}$	$\mathbf{e}^i = \frac{\partial X^i}{\partial x_m} = \nabla X^i$
Vector unitario	$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{h_i}$	$\hat{\mathbf{e}}^i = \frac{\mathbf{e}^i}{h^i}$
Factor de escala	$h_i = \mathbf{e}_i $	$h^i = \mathbf{e}^i $
Componente de un vector	$V_i = \vec{V} \cdot \mathbf{e}_i$	$V^i = \vec{V} \cdot \mathbf{e}^i$
Componente física	$u^i = V^i h_i$	$u_i = V_i h^i$

3.3. Transformación de las Ecuaciones de Generación

Para mapear una geometría de forma irregular/compleja del dominio físico al computacional, las coordenadas ξ, η, ζ son conocidas en toda la frontera de la geometría a partir del dominio físico, por lo cual, se conoce la correspondencia entre las coordenadas de las fronteras del dominio físico al computacional. Entonces, el problema se convierte en determinar la correspondencia entre las coordenadas del dominio físico (x, y, z) y las coordenadas del dominio computacional (ξ, η, ζ) en todos los puntos internos de ambos dominios. Thompson *et al.* (1974) propusieron la técnica de generación de mallas basada en resolver un sistema de ecuaciones de Poisson.

$$\begin{aligned}\nabla^2 \xi &= P(\xi, \eta, \zeta) \\ \nabla^2 \eta &= Q(\xi, \eta, \zeta) \\ \nabla^2 \zeta &= R(\xi, \eta, \zeta)\end{aligned}\tag{3.14}$$

donde ξ, η, ζ son las coordenadas correspondientes al dominio computacional y x, y, z corresponden al dominio físico. $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ son funciones de control de la malla, con la selección adecuada de estos términos, las líneas de las coordenadas ξ, η, ζ pueden concentrarse hacia una línea coordenada; sobre un punto específico de la malla o sobre ambas. Las condiciones de frontera necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en la Ecuación 3.14 dependerá del problema bajo estudio. Mientras el sistema de ecuaciones en la Ecuación 3.14 describe la transformación de coordenadas entre los sistemas coordenados ξ, η, ζ y x, y, z ; todos los cálculos numéricos para el problema físico se realizan en el dominio computacional que tiene una geometría regular (Figura 3.4b). Por lo tanto, es necesario determinar los correspondientes valores del dominio físico a las ubicaciones del dominio computacional, por ello, el sistema de ecuaciones de la Ecuación 3.14 se transforma al dominio computacional con las variables independientes ξ, η, ζ y las incógnitas x, y, z como variables dependientes. A continuación se realiza la transformación de las ecuaciones generadoras del plano físico al plano computacional. La Ecuación 3.14 se puede re-escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{zz} &= P(\xi, \eta, \zeta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz} &= Q(\xi, \eta, \zeta) \\ \zeta_{xx} + \zeta_{yy} + \zeta_{zz} &= R(\xi, \eta, \zeta)\end{aligned}\tag{3.15}$$

Dada la transformación de la Ecuación 3.1, es posible obtener las expresiones para las derivadas de primer y segundo orden de una función f a través de la regla de la cadena, esas expresiones son, Primera derivada

$$\begin{aligned} f_x &= f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x + f_\zeta \zeta_x \\ f_y &= f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y + f_\zeta \zeta_y \\ f_z &= f_\xi \xi_z + f_\eta \eta_z + f_\zeta \zeta_z \end{aligned} \quad (3.16)$$

Segunda derivada

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)}_{f_{xx}} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \\ \underbrace{\frac{d}{dy} \left(\frac{df}{dy} \right)}_{f_{yy}} &= \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \\ \underbrace{\frac{d}{dz} \left(\frac{df}{dz} \right)}_{f_{zz}} &= \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

A partir de la segunda derivada para x, se tiene

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \\ &\quad \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \\ &\quad \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \\ f_{xx} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \\ &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \\ &\quad \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \\ &\quad \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

Ordenando términos, re-escribiendo la ecuación anterior, y realizando el procedimiento anterior para f_{yy} y f_{zz} , se tiene

$$f_{xx} = f_{\xi} \xi_{xx} + f_{\eta} \eta_{xx} + f_{\zeta} \zeta_{xx} + f_{\xi\xi} \xi_x^2 + f_{\eta\eta} \eta_x^2 + f_{\zeta\zeta} \zeta_x^2 + 2 f_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + 2 f_{\xi\zeta} \xi_x \zeta_x + 2 f_{\eta\zeta} \eta_x \zeta_x \quad (3.18)$$

$$f_{yy} = f_{\xi} \xi_{yy} + f_{\eta} \eta_{yy} + f_{\zeta} \zeta_{yy} + f_{\xi\xi} \xi_y^2 + f_{\eta\eta} \eta_y^2 + f_{\zeta\zeta} \zeta_y^2 + 2 f_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + 2 f_{\xi\zeta} \xi_y \zeta_y + 2 f_{\eta\zeta} \eta_y \zeta_y \quad (3.19)$$

$$f_{zz} = f_{\xi} \xi_{zz} + f_{\eta} \eta_{zz} + f_{\zeta} \zeta_{zz} + f_{\xi\xi} \xi_z^2 + f_{\eta\eta} \eta_z^2 + f_{\zeta\zeta} \zeta_z^2 + 2 f_{\xi\eta} \xi_z \eta_z + 2 f_{\xi\zeta} \xi_z \zeta_z + 2 f_{\eta\zeta} \eta_z \zeta_z \quad (3.20)$$

Lo que se desea es obtener x, y y z como función de ξ, η y ζ , para lo cual, haciendo $f = x, y, z$ en la Ecuación 3.18, se tiene

$$x_{\xi} \xi_{xx} + x_{\eta} \eta_{xx} + x_{\zeta} \zeta_{xx} = -E_1 \quad (3.21)$$

$$y_{\xi} \xi_{xx} + y_{\eta} \eta_{xx} + y_{\zeta} \zeta_{xx} = -F_1 \quad (3.22)$$

$$z_{\xi} \xi_{xx} + z_{\eta} \eta_{xx} + z_{\zeta} \zeta_{xx} = -G_1 \quad (3.23)$$

donde E_1, F_1 y G_1 son dados por

$$E_1 = x_{\xi\xi} \xi_x^2 + x_{\eta\eta} \eta_x^2 + x_{\zeta\zeta} \zeta_x^2 + 2 x_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + 2 x_{\xi\zeta} \xi_x \zeta_x + 2 x_{\eta\zeta} \eta_x \zeta_x$$

$$F_1 = y_{\xi\xi} \xi_x^2 + y_{\eta\eta} \eta_x^2 + y_{\zeta\zeta} \zeta_x^2 + 2 y_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + 2 y_{\xi\zeta} \xi_x \zeta_x + 2 y_{\eta\zeta} \eta_x \zeta_x$$

$$G_1 = z_{\xi\xi} \xi_x^2 + z_{\eta\eta} \eta_x^2 + z_{\zeta\zeta} \zeta_x^2 + 2 z_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + 2 z_{\xi\zeta} \xi_x \zeta_x + 2 z_{\eta\zeta} \eta_x \zeta_x$$

De manera similar, haciendo $f = x, y, z$ en la Ecuación 3.19, se tiene

$$x_\xi \xi_{yy} + x_\eta \eta_{yy} + x_\zeta \zeta_{yy} = -E_2 \quad (3.24)$$

$$y_\xi \xi_{yy} + y_\eta \eta_{yy} + y_\zeta \zeta_{yy} = -F_2 \quad (3.25)$$

$$z_\xi \xi_{yy} + z_\eta \eta_{yy} + z_\zeta \zeta_{yy} = -G_2 \quad (3.26)$$

donde E_2, F_2 y G_2 son dados por

$$E_2 = x_{\xi\xi} \xi_y^2 + x_{\eta\eta} \eta_y^2 + x_{\zeta\zeta} \zeta_y^2 + 2 x_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + 2 x_{\xi\zeta} \xi_y \zeta_y + 2 x_{\eta\zeta} \eta_y \zeta_y$$

$$F_2 = y_{\xi\xi} \xi_y^2 + y_{\eta\eta} \eta_y^2 + y_{\zeta\zeta} \zeta_y^2 + 2 y_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + 2 y_{\xi\zeta} \xi_y \zeta_y + 2 y_{\eta\zeta} \eta_y \zeta_y$$

$$G_2 = z_{\xi\xi} \xi_y^2 + z_{\eta\eta} \eta_y^2 + z_{\zeta\zeta} \zeta_y^2 + 2 z_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + 2 z_{\xi\zeta} \xi_y \zeta_y + 2 z_{\eta\zeta} \eta_y \zeta_y$$

De forma análoga, haciendo $f = x, y, z$ en la Ecuación 3.20, se tiene

$$x_\xi \xi_{zz} + x_\eta \eta_{zz} + x_\zeta \zeta_{zz} = -E_3 \quad (3.27)$$

$$y_\xi \xi_{zz} + y_\eta \eta_{zz} + y_\zeta \zeta_{zz} = -F_3 \quad (3.28)$$

$$z_\xi \xi_{zz} + z_\eta \eta_{zz} + z_\zeta \zeta_{zz} = -G_3 \quad (3.29)$$

donde E_3, F_3 y G_3 son dados por

$$E_3 = x_{\xi\xi} \xi_z^2 + x_{\eta\eta} \eta_z^2 + x_{\zeta\zeta} \zeta_z^2 + 2 x_{\xi\eta} \xi_z \eta_z + 2 x_{\xi\zeta} \xi_z \zeta_z + 2 x_{\eta\zeta} \eta_z \zeta_z$$

$$F_3 = y_{\xi\xi} \xi_z^2 + y_{\eta\eta} \eta_z^2 + y_{\zeta\zeta} \zeta_z^2 + 2 y_{\xi\eta} \xi_z \eta_z + 2 y_{\xi\zeta} \xi_z \zeta_z + 2 y_{\eta\zeta} \eta_z \zeta_z$$

$$G_3 = z_{\xi\xi} \xi_z^2 + z_{\eta\eta} \eta_z^2 + z_{\zeta\zeta} \zeta_z^2 + 2 z_{\xi\eta} \xi_z \eta_z + 2 z_{\xi\zeta} \xi_z \zeta_z + 2 z_{\eta\zeta} \eta_z \zeta_z$$

El sistema dado por la Ecuación 3.21 a la Ecuación 3.23 puede ser escrito de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{xx} \\ \eta_{xx} \\ \zeta_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ -F_1 \\ -G_1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

De forma semejante, el sistema de la Ecuación 3.24 a la Ecuación 3.26 puede ser escrito de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{yy} \\ \eta_{yy} \\ \zeta_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_2 \\ -F_2 \\ -G_2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

De forma análoga, el sistema de la Ecuación 3.27 a la Ecuación 3.29 puede ser escrito de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{zz} \\ \eta_{zz} \\ \zeta_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_3 \\ -F_3 \\ -G_3 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Resolviendo los sistemas dados por la Ecuación 3.30, la Ecuación 3.31 y la Ecuación 3.32, y sustituyendo las derivadas computacionales (Ecuación 3.12) correspondientes se tiene

$$\begin{aligned} \xi_{xx} &= -[E_1 \xi_x + F_1 \xi_y + G_1 \xi_z] \\ \eta_{xx} &= -[E_1 \eta_x + F_1 \eta_y + G_1 \eta_z] \\ \zeta_{xx} &= -[E_1 \zeta_x + F_1 \zeta_y + G_1 \zeta_z] \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \xi_{yy} &= -[E_2 \xi_x + F_2 \xi_y + G_2 \xi_z] \\ \eta_{yy} &= -[E_2 \eta_x + F_2 \eta_y + G_2 \eta_z] \\ \zeta_{yy} &= -[E_2 \zeta_x + F_2 \zeta_y + G_2 \zeta_z] \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \xi_{zz} &= -[E_3 \xi_x + F_3 \xi_y + G_3 \xi_z] \\ \eta_{zz} &= -[E_3 \eta_x + F_3 \eta_y + G_3 \eta_z] \\ \zeta_{zz} &= -[E_3 \zeta_x + F_3 \zeta_y + G_3 \zeta_z] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Sustituyendo la Ecuación 3.33 a la Ecuación 3.35 en la Ecuación 3.15, se tiene

$$\begin{aligned} \underbrace{(E_1 + E_2 + E_3)}_E \xi_x + \underbrace{(F_1 + F_2 + F_3)}_F \xi_y + \underbrace{(G_1 + G_2 + G_3)}_G \xi_z &= - P(\xi, \eta, \zeta) \\ \underbrace{(E_1 + E_2 + E_3)}_E \eta_x + \underbrace{(F_1 + F_2 + F_3)}_F \eta_y + \underbrace{(G_1 + G_2 + G_3)}_G \eta_z &= - Q(\xi, \eta, \zeta) \\ \underbrace{(E_1 + E_2 + E_3)}_E \zeta_x + \underbrace{(F_1 + F_2 + F_3)}_F \zeta_y + \underbrace{(G_1 + G_2 + G_3)}_G \zeta_z &= - R(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \xi_x + F \xi_y + G \xi_z &= - P(\xi, \eta, \zeta) \\ E \eta_x + F \eta_y + G \eta_z &= - Q(\xi, \eta, \zeta) \\ E \zeta_x + F \zeta_y + G \zeta_z &= - R(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \tag{3.36}$$

Re-escribiendo la Ecuación 3.36 de forma matricial, se tiene

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ -Q \\ -R \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Resolviendo el sistema de la Ecuación 3.37, se obtiene

$$E = - \frac{[P(\eta_y \zeta_z - \eta_z \zeta_y) + Q(\xi_z \zeta_y - \xi_y \zeta_z) + R(\xi_y \eta_z - \xi_z \eta_y)]}{J} \tag{3.38}$$

$$F = - \frac{[P(\eta_z \zeta_x - \eta_x \zeta_z) + Q(\xi_x \zeta_z - \xi_z \zeta_x) + R(\xi_z \eta_x - \xi_x \eta_z)]}{J} \tag{3.39}$$

$$G = - \frac{[P(\eta_x \zeta_y - \eta_y \zeta_x) + Q(\xi_y \zeta_x - \xi_x \zeta_y) + R(\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)]}{J} \tag{3.40}$$

Sumando E_1 , E_2 y E_3

$$\begin{array}{r}
 x_{\xi\xi} \xi_x^2 + x_{\eta\eta} \eta_x^2 + x_{\zeta\zeta} \zeta_x^2 + 2x_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + 2x_{\xi\zeta} \xi_x \zeta_x + 2x_{\eta\zeta} \eta_x \zeta_x \\
 x_{\xi\xi} \xi_y^2 + x_{\eta\eta} \eta_y^2 + x_{\zeta\zeta} \zeta_y^2 + 2x_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + 2x_{\xi\zeta} \xi_y \zeta_y + 2x_{\eta\zeta} \eta_y \zeta_y \\
 x_{\xi\xi} \xi_z^2 + x_{\eta\eta} \eta_z^2 + x_{\zeta\zeta} \zeta_z^2 + 2x_{\xi\eta} \xi_z \eta_z + 2x_{\xi\zeta} \xi_z \zeta_z + 2x_{\eta\zeta} \eta_z \zeta_z \\
 \hline
 \underbrace{(x_x^2 + x_y^2 + x_z^2)}_a x_{\xi\xi} + \underbrace{(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)}_b x_{\eta\eta} + \underbrace{(\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2)}_c x_{\zeta\zeta} + \underbrace{(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z)}_d 2x_{\xi\eta} + \\
 \underbrace{(\xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z)}_e 2x_{\xi\zeta} + \\
 \underbrace{(\eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y + \eta_z \zeta_z)}_f 2x_{\eta\zeta} = E
 \end{array}$$

Sumando F_1 , F_2 y F_3

$$\begin{array}{r}
 y_{\xi\xi} \xi_x^2 + y_{\eta\eta} \eta_x^2 + y_{\zeta\zeta} \zeta_x^2 + 2y_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + 2y_{\xi\zeta} \xi_x \zeta_x + 2y_{\eta\zeta} \eta_x \zeta_x \\
 y_{\xi\xi} \xi_y^2 + y_{\eta\eta} \eta_y^2 + y_{\zeta\zeta} \zeta_y^2 + 2y_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + 2y_{\xi\zeta} \xi_y \zeta_y + 2y_{\eta\zeta} \eta_y \zeta_y \\
 y_{\xi\xi} \xi_z^2 + y_{\eta\eta} \eta_z^2 + y_{\zeta\zeta} \zeta_z^2 + 2y_{\xi\eta} \xi_z \eta_z + 2y_{\xi\zeta} \xi_z \zeta_z + 2y_{\eta\zeta} \eta_z \zeta_z \\
 \hline
 \underbrace{(y_x^2 + y_y^2 + y_z^2)}_a y_{\xi\xi} + \underbrace{(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)}_b y_{\eta\eta} + \underbrace{(\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2)}_c y_{\zeta\zeta} + \underbrace{(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z)}_d 2y_{\xi\eta} + \\
 \underbrace{(\xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z)}_e 2y_{\xi\zeta} + \\
 \underbrace{(\eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y + \eta_z \zeta_z)}_f 2y_{\eta\zeta} = F
 \end{array}$$

Sumando G_1 , G_2 y G_3

$$\begin{array}{r}
 z_{\xi\xi} \xi_x^2 + z_{\eta\eta} \eta_x^2 + z_{\zeta\zeta} \zeta_x^2 + 2z_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + 2z_{\xi\zeta} \xi_x \zeta_x + 2z_{\eta\zeta} \eta_x \zeta_x \\
 z_{\xi\xi} \xi_y^2 + z_{\eta\eta} \eta_y^2 + z_{\zeta\zeta} \zeta_y^2 + 2z_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + 2z_{\xi\zeta} \xi_y \zeta_y + 2z_{\eta\zeta} \eta_y \zeta_y \\
 z_{\xi\xi} \xi_z^2 + z_{\eta\eta} \eta_z^2 + z_{\zeta\zeta} \zeta_z^2 + 2z_{\xi\eta} \xi_z \eta_z + 2z_{\xi\zeta} \xi_z \zeta_z + 2z_{\eta\zeta} \eta_z \zeta_z \\
 \hline
 \underbrace{(z_x^2 + z_y^2 + z_z^2)}_a z_{\xi\xi} + \underbrace{(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)}_b z_{\eta\eta} + \underbrace{(\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2)}_c z_{\zeta\zeta} + \underbrace{(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z)}_d 2z_{\xi\eta} + \\
 \underbrace{(\xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z)}_e 2z_{\xi\zeta} + \\
 \underbrace{(\eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y + \eta_z \zeta_z)}_f 2z_{\eta\zeta} = G
 \end{array}$$

Re-escribiendo las 3 ecuaciones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned}
 a x_{\xi\xi} + b x_{\eta\eta} + c x_{\zeta\zeta} + 2 d x_{\xi\eta} + 2 e x_{\xi\zeta} + 2 f x_{\eta\zeta} &= E \\
 a y_{\xi\xi} + b y_{\eta\eta} + c y_{\zeta\zeta} + 2 d y_{\xi\eta} + 2 e y_{\xi\zeta} + 2 f y_{\eta\zeta} &= F \\
 a z_{\xi\xi} + b z_{\eta\eta} + c z_{\zeta\zeta} + 2 d z_{\xi\eta} + 2 e z_{\xi\zeta} + 2 f z_{\eta\zeta} &= G
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

donde los coeficientes a, b, c, d, e, f están determinados por

$$\begin{aligned}
 a &= \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 \\
 b &= \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 \\
 c &= \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 \\
 d &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z \\
 e &= \xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z \\
 f &= \eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y + \eta_z \zeta_z
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

y E, F y G , son dados por la Ecuación 3.38, la Ecuación 3.39 y Ecuación 3.40, respectivamente.

Usando las relaciones de transformación (Ecuación 3.11) para sustituir las métricas de los términos E, F, G , se tiene

$$\begin{aligned}
 a x_{\xi\xi} + b x_{\eta\eta} + c x_{\zeta\zeta} + 2 d x_{\xi\eta} + 2 e x_{\xi\zeta} + 2 f x_{\eta\zeta} + (P x_\xi + Q x_\eta + R x_\zeta) &= 0 \\
 a y_{\xi\xi} + b y_{\eta\eta} + c y_{\zeta\zeta} + 2 d y_{\xi\eta} + 2 e y_{\xi\zeta} + 2 f y_{\eta\zeta} + (P y_\xi + Q y_\eta + R y_\zeta) &= 0 \\
 a z_{\xi\xi} + b z_{\eta\eta} + c z_{\zeta\zeta} + 2 d z_{\xi\eta} + 2 e z_{\xi\zeta} + 2 f z_{\eta\zeta} + (P z_\xi + Q z_\eta + R z_\zeta) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Las ecuaciones de generación tridimensionales simplificadas a dos dimensiones, tienen la forma

$$\begin{aligned}
 \alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} - 2\beta x_{\xi\eta} &= -\frac{(P x_\xi + Q x_\eta)}{J^2} \\
 \alpha y_{\xi\xi} + \gamma y_{\eta\eta} - 2\beta y_{\xi\eta} &= -\frac{(P y_\xi + Q y_\eta)}{J^2}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \alpha &= g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2 \\
 \gamma &= g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2 \\
 \beta &= g_{12} = g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

son las componentes simétricas covariantes del tensor métrico asociado a la transformación definido por,

$$\mathbf{g}_{ik} = \frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x}{\partial x^k} + \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\partial y}{\partial x^k} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^k}$$

donde $i, k = 1, 2, 3$ representan las coordenadas del dominio computacional ξ, η, ζ .

Las funciones de control (P, Q) presentes en la Ecuación 3.44 tienen diversas expresiones, una de las cuales ha tenido mayor empleo y uso fue propuesta por Thompson *et al.* ? determinada por medio de las siguientes funciones,

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{l=1}^N a_l \frac{(\xi - \xi_l)}{|\xi - \xi_l|} \exp[-c_l |\xi - \xi_l|] - \sum_{m=1}^M b_m \frac{(\xi - \xi_m)}{|\xi - \xi_m|} \exp \left[-d_m \sqrt{(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2} \right]$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{l=1}^N a_l \frac{(\eta - \eta_l)}{|\eta - \eta_l|} \exp[-c_l |\eta - \eta_l|] - \sum_{m=1}^M b_m \frac{(\eta - \eta_m)}{|\eta - \eta_m|} \exp \left[-d_m \sqrt{(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2} \right]$$
(3.46)

Los índices N y M de las sumatorias representan el número de línea y el número de puntos que se concentraran, respectivamente. El término, por ejemplo $\frac{(\xi - \xi_l)}{|\xi - \xi_l|}$, garantiza que la atracción de las líneas ocurra sobre ambos lados de la línea $\xi = \xi_l$ (Figura 3.8a) o al punto (ξ_m, η_m) (Figura 3.8b), ya que este término permite el cambio de signo según la línea o punto que se considere para atraer líneas de malla. Los coeficientes a_l y b_m son factores de amplitud y c_l y d_m son los factores de decaimiento que modulan a los primeros. La selección de estos coeficientes depende del problema bajo estudio, ya que los términos influyen de manera directa en la aglomeración de los puntos en las zonas especificadas.

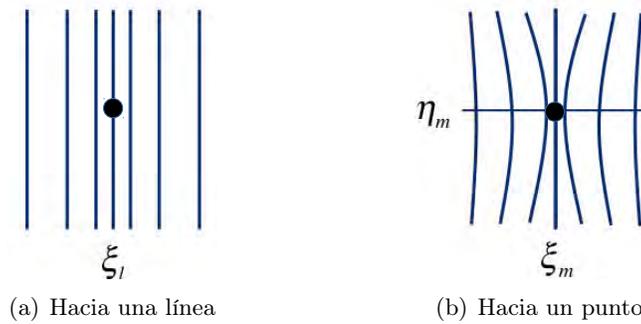


Figura 3.8: Concentración de líneas.

3.4. Solución de las Ecuaciones de Generación

Los problemas en CFD por lo regular no tienen solución analítica de las ecuaciones que los gobiernan, por lo cual se recurre a una técnica numérica para resolver dichas ecuaciones. La Ecuación 3.44, un conjunto de PDEs, no es posible de resolverlo analíticamente es por ello que para darles solución se hace uso de la técnica numérica de FDM, ya que la generación de mallas no se basa en las leyes de conservación, sino en principios puramente matemáticos.

Re-escribiendo la Ecuación 3.44 para una variable genérica ϕ la cual representa x o y , entonces se tiene

$$\alpha \phi_{\xi\xi} + \gamma \phi_{\eta\eta} - 2\beta \phi_{\xi\eta} = -\frac{(P \phi_{\xi} + Q \phi_{\eta})}{J^2} \quad (3.47)$$

Los términos de la ecuación anterior se aproximan numéricamente por medio de la técnica numérica de FDM; empleando diferencias centradas y de acuerdo a la Figura 3.9, se tiene

$$\begin{aligned} \phi_{\xi} &= \frac{\phi_E - \phi_W}{2 \Delta\xi} \\ \phi_{\eta} &= \frac{\phi_N - \phi_S}{2 \Delta\eta} \\ \phi_{\xi\xi} &= \frac{\phi_E + \phi_W - 2\phi_P}{\Delta\xi^2} \\ \phi_{\eta\eta} &= \frac{\phi_N + \phi_S - 2\phi_P}{\Delta\eta^2} \\ \phi_{\xi\eta} &= \frac{\phi_{NE} + \phi_{SW} - \phi_{SE} - \phi_{NW}}{4 \Delta\xi \Delta\eta} \end{aligned} \quad (3.48)$$

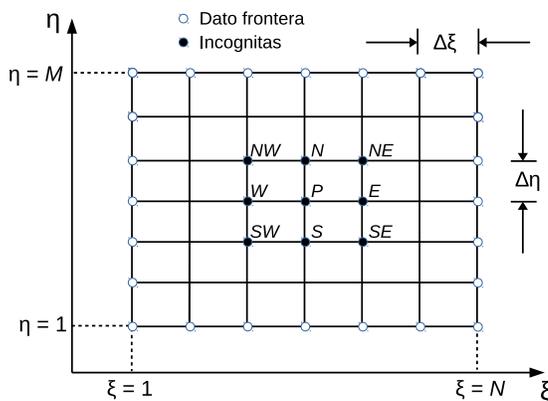


Figura 3.9: Aproximación con FDM.

Sustituyendo las expresiones de la Ecuación 3.48 en la Ecuación 3.47 y agrupando términos se obtiene la ecuación de coeficientes agrupados,

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (3.49)$$

considerando por simplicidad $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$, es decir, el dominio físico irregular es mapeado al dominio computacional regular con espaciamiento entre líneas de malla igual a uno, se obtienen los siguientes coeficientes

$$a_P = 2(\alpha + \gamma)$$

$$a_E = \alpha + \frac{P}{2J^2}$$

$$a_W = \alpha - \frac{P}{2J^2}$$

$$a_N = \gamma + \frac{Q}{2J^2}$$

$$a_S = \gamma - \frac{Q}{2J^2}$$

$$b = \frac{\beta}{2} (\phi_{SE} + \phi_{NW} - \phi_{NE} - \phi_{SW})$$

El sistema lineal $[\mathbf{A}][\Phi] = [\mathbf{B}]$ resultante de la discretización de la Ecuación 3.44 puede ser resuelto por medio de un método iterativo de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales tal como *Successive Over Relaxation* (SOR), iterativo punto a punto, o el *Tri-Diagonal Matrix Algorithm* (TDMA), iterativo línea por línea. El algoritmo general de solución es:

1. Estimar un campo para las incógnitas x, y para todos los puntos internos. Esto se puede hacer simplemente tomando los puntos de las fronteras, uniéndolos por rectas y subdividiendo este segmento en un número de segmentos igual al número de elementos especificados para aquella dirección. Deben tomarse precauciones para no generar un campo inicial exageradamente irreal, ya que la solución consumirá un mayor tiempo de cómputo, o puede divergir. Es recomendable el uso de algún método algebraico de generación de mallas para generar una primera aproximación.
2. Calcular las componentes covariantes del tensor métrico, α, β, γ . En el caso tridimensional, las componentes faltantes también deberán calcularse.

3. Resolver la Ecuación 3.47 para cada componente x, y .
4. Volver al punto 2 e iterar hasta encontrar una distribución adecuada de x, y . En este punto, es muy importante resaltar que las ecuaciones generadoras no necesitan resolverse con precisión rigurosa.

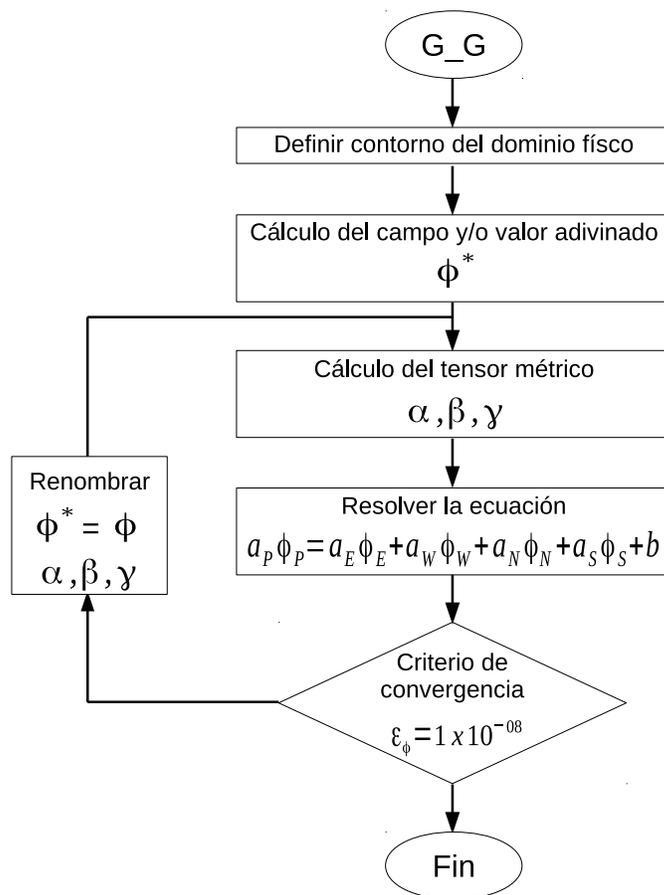


Figura 3.10: Diagrama para determinar x y y .

3.5. Transformación de las Ecuaciones de Conservación

Para mejorar la eficiencia y precisión de un esquema numérico y para simplificar la implementación de condiciones de frontera, se realiza una transformación del dominio físico al dominio computacional. El dominio computacional como se ha visto anteriormente, es una forma rectangular que se divide en una malla con espaciado uniforme. Para resolver las ecuaciones de flujo de fluidos en el espacio computacional, se requiere una transformación de las ecuaciones del dominio físico al computacional. Cualquier suposición sobre la simplificación de las ecuaciones de flujo de fluidos se respeta en las ecuaciones transformadas.

Conforme a lo comentado, las ecuaciones gobernantes serán transformadas con objetivo de obtenerlas en el dominio computacional manteniendo su forma conservativa o divergente.

Sea la siguiente ecuación de conservación escrita de forma vectorial

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = S \quad (3.50)$$

donde,

$$\mathbf{F} = E\mathbf{i} + F\mathbf{j} + G\mathbf{k}$$

o en su forma

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = S \quad (3.51)$$

donde

$$Q = \rho \phi$$

$$E = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$F = \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$G = \rho w \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

donde ϕ es un escalar genérico que representa las propiedades conservativas como masa, momentum, energía, etc. y Γ representa el coeficiente de transporte.

Las ecuaciones gobernantes son transformadas del dominio físico (x, y, z, t) al dominio computacional (ξ, η, ζ, τ) por medio de las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}\tau &= t \\ \xi &= \xi(x, y, z, t) \\ \eta &= \eta(x, y, z, t) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{3.52}$$

Las métricas de transformación geométrica corresponden a la Ecuación 3.11, y las métricas de la coordenada tiempo son

$$\begin{aligned}\xi_t &= -(\xi_x x_\tau + \xi_y y_\tau + \xi_z z_\tau) \\ \eta_t &= -(\eta_x x_\tau + \eta_y y_\tau + \eta_z z_\tau) \\ \zeta_t &= -(\zeta_x x_\tau + \zeta_y y_\tau + \zeta_z z_\tau)\end{aligned}\tag{3.53}$$

Usando la regla de la cadena para expandir los términos de la Ecuación 3.51 se obtienen las siguientes expresiones, donde el último término de las tres últimas ecuaciones es cero cuando τ no sea una función de x, y, z .

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial \xi} \xi_t + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \eta_t + \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \zeta_t + \frac{\partial Q}{\partial \tau} \tau_t \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{\partial E}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial E}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial E}{\partial \zeta} \zeta_x + \frac{\partial E}{\partial \tau} \tau_x \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial F}{\partial \eta} \eta_y + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \zeta_y + \frac{\partial F}{\partial \tau} \tau_y \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= \frac{\partial G}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial G}{\partial \eta} \eta_z + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \zeta_z + \frac{\partial G}{\partial \tau} \tau_z\end{aligned}$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la Ecuación 3.51 y considerando que τ no es función de x, y, z , se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial \tau} &+ \frac{\partial Q}{\partial \xi} \xi_t + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \eta_t + \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \zeta_t \\ &+ \frac{\partial E}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial E}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial E}{\partial \zeta} \zeta_x \\ &+ \frac{\partial F}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial F}{\partial \eta} \eta_y + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \zeta_y \\ &+ \frac{\partial G}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial G}{\partial \eta} \eta_z + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \zeta_z = S\end{aligned}\tag{3.54}$$

Se observa que la ecuación anterior no está en su forma conservativa. Para reformular la ecuación en una forma conservativa, se debe realizar alguna manipulación agregando una combinación de términos que sumen cero. Para mostrar los pasos requeridos, se considerarán únicamente los primeros cuatro términos de la Ecuación 3.54, por lo que se tiene

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \left[Q \frac{\partial}{\partial \tau} - Q \frac{\partial}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial Q}{\partial \xi} \xi_t + \left[Q \frac{\partial}{\partial \xi} \xi_t - Q \frac{\partial}{\partial \xi} \xi_t \right] + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \eta_t + \left[Q \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_t - Q \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_t \right] + \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \zeta_t + \left[Q \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta_t - Q \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta_t \right]$$

la cual puede ser reorganizada como

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial \tau} + Q \frac{\partial}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial Q}{\partial \xi} \xi_t + Q \frac{\partial}{\partial \xi} \xi_t \right] + \left[\frac{\partial Q}{\partial \eta} \eta_t + Q \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_t \right] + \left[\frac{\partial Q}{\partial \zeta} \zeta_t + Q \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta_t \right] - Q \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi_t + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_t + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta_t + \frac{\partial}{\partial \tau} \right]$$

Los términos en los primeros cuatro corchetes se pueden combinar, y al sustituir las expresiones de la Ecuación 3.53 en el último corchete, se puede mostrar que es igual a cero. Por lo tanto, la ecuación anterior dividida entre J queda como

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} \left(\frac{1}{J} \right) + \frac{\partial Q}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_t}{J} \right) + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_t}{J} \right) + \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta_t}{J} \right)$$

Extendiendo el procedimiento anterior para los términos faltantes de la Ecuación 3.54, la ecuación resultante en su forma conservativa es

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \hat{S} \quad (3.55)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{Q}{J} \\ \hat{E} &= \frac{\xi_t Q + \xi_x E + \xi_y F + \xi_z G}{J} \\ \hat{F} &= \frac{\eta_t Q + \eta_x E + \eta_y F + \eta_z G}{J} \\ \hat{G} &= \frac{\zeta_t Q + \zeta_x E + \zeta_y F + \zeta_z G}{J} \\ \hat{S} &= \frac{S}{J} \end{aligned}$$

Sustituyendo las equivalencias de Q , E , F , G en las anteriores expresiones y al mismo tiempo sustituyendo en la Ecuación 3.55, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho \phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \tilde{U} \phi \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \tilde{V} \phi \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\rho \tilde{W} \phi \right) = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(\xi_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \xi_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(\eta_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \eta_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(\zeta_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \zeta_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \zeta_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] + \frac{S}{J} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{\xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w}{J} \\ \tilde{V} &= \frac{\eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w}{J} \\ \tilde{W} &= \frac{\zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w}{J} \end{aligned}$$

son las componentes contravariantes con normalización métrica del vector de velocidad considerando el movimiento de la malla con el tiempo.

Usando la regla de la cadena para expandir las derivadas de ϕ en función de x , y , z , se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho \phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \tilde{U} \phi \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \tilde{V} \phi \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\rho \tilde{W} \phi \right) = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(a \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + d \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + e \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(d \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + b \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + f \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right] + \quad (3.56) \\ & \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(e \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + f \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + c \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right] + \frac{S}{J} \end{aligned}$$

los coeficientes a , b , c , d , e , f son dados por la Ecuación 3.42.

La transformación del término de presión en cada una de las direcciones en la ecuación de cantidad de movimiento se obtiene aplicando la regla de la cadena para expandir las derivadas de P en función de x , y , y z

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial P}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \zeta_x \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial P}{\partial \eta} \eta_y + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \zeta_y \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial P}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial P}{\partial \eta} \eta_z + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \zeta_z\end{aligned}$$

Las ecuaciones de conservación representadas por la variable genérica ϕ escritas en el sistema de coordenadas curvilíneas en dos dimensiones tienen la siguiente forma,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho \phi}{J} \right) + \frac{\partial(\rho U \phi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho V \phi)}{\partial \eta} + \frac{P}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{S}{J} \quad (3.57)$$

donde U y V representan las componentes contravariantes sin normalización métrica del vector velocidad sin considerar el movimiento de la malla con el tiempo, dadas por

$$\begin{aligned}U &= y_\eta u - x_\eta v \\ V &= x_\xi v - y_\xi u\end{aligned}$$

y los coeficientes C_1 , C_2 , C_4 y C_5 son dados por

$$\begin{aligned}C_1 &= \Gamma J \alpha \\ C_2 &= C_4 = -\Gamma J \beta \\ C_5 &= \Gamma J \gamma\end{aligned}$$

donde α , β y γ son los coeficientes definidos por la Ecuación 3.45

Tabla 3.2: Parámetros a reemplazar en la Ecuación 3.57

Ecuación de Conservación	ϕ	Γ	S	P
Masa	1	0	0	0
Momentum en x	u	μ	0	$\frac{\partial P}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\xi$
Momentum en y	v	μ	0	$-\frac{\partial P}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\xi$
Energía	T	k/C_p	0	0

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales definido en el dominio computacional que constituye el modelo para problemas de convección natural en régimen de flujo laminar es dado por:

Ecuación de Conservación de Masa

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho}{J} \right) + \frac{\partial(\rho U)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial \eta} = 0 \quad (3.58)$$

Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento para la Velocidad U (ξ)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho u}{J} \right) + \frac{\partial(\rho U u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho V u)}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_4 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial P}{\partial \xi} y_\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\xi + \frac{S^u}{J} \quad (3.59)$$

Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento para la Velocidad V (η)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho v}{J} \right) + \frac{\partial(\rho U v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho V v)}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_4 \frac{\partial v}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial P}{\partial \xi} x_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\xi + \frac{S^v}{J} \quad (3.60)$$

Ecuación de Conservación de Energía

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho T}{J} \right) + \frac{\partial(\rho U T)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho V T)}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_4 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{S^T}{J} \quad (3.61)$$

En este sistema de PDEs, toda la información sobre la geometría es proporcionada por las componentes contravariantes del vector velocidad y por los coeficientes de transformación.

Capítulo 4

Balances de Energía

4.1. Primera Ley de la Termodinámica

El principio de conservación de energía expresado por la primera ley de la termodinámica indica que durante un proceso, *la energía no se crea ni se destruye, sólo cambia de una forma a otra.*

Dicha energía puede existir en diversas formas: térmica, mecánica, cinética, potencial, eléctrica, magnética, química y nuclear, cuya suma de todas ellas conforma la **energía total** (E) de un sistema. Estas formas de energía pueden agruparse en dos grupos: **macroscópicas** que poseen un sistema como un todo en relación con cierto marco de referencia exterior, por lo que, se relaciona con el movimiento y la influencia de algunos factores externos como la gravedad, el magnetismo, la electricidad y la tensión superficial; aquí están incluidas la **energía cinética** (EC) y la **energía potencial** (EP). El otro grupo son las formas **microscópicas** que se relacionan con la estructura y el grado de la actividad molecular de un sistema y son independientes de los marcos de referencia externos. La suma de las distintas formas microscópicas de energía se denomina **energía interna** (U) de un sistema.

Por lo general, los efectos magnético, eléctrico y de tensión superficial se ignoran y sólo en casos especiales son significativos y considerados. En ausencia de estos efectos agrupados en la forma macroscópica, la energía total de un sistema consta sólo de la energía interna, cinética y potencial.

$$E = U + EC + EP = U + m\frac{V_2}{2} + mgz$$

La energía se puede transferir hacia o desde un sistema en tres formas: **Calor**, **Trabajo** y **Flujo Másico**, y su transferencia neta es igual a la diferencia entre las cantidades transferidas hacia dentro y hacia fuera, por lo cual, el balance de energía para un sistema que experimenta cualquier clase de proceso se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} &= (\dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out}) + \\ &\quad (\dot{W}_{in} - \dot{W}_{out}) + \\ &\quad (E_{mass,in} - E_{mass,out}) \\ \underbrace{\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out}}_{\text{Transferencia neta de energía mediante calor, trabajo y masa}} &= \underbrace{\Delta \dot{E}_{system}}_{\text{Tasa de cambio de la energía del sistema}} \end{aligned}$$

La transferencia de calor (\dot{Q}) es cero para sistemas adiabáticos, la transferencia de trabajo (\dot{W}) es cero para sistemas en los que no intervienen interacciones de ningún tipo de trabajo, y la transferencia de masa (E_{mass}) es cero para sistemas sin flujo másico a través de sus fronteras, es decir, para sistemas cerrados.

Los sistemas cerrados cuya velocidad y elevación del centro de gravedad permanecen constantes durante un proceso comúnmente se denominan sistemas estacionarios, por lo tanto, no experimentan cambios en su energía cinética y potencial ($\Delta EC = \Delta EP = 0$); con lo cual, el cambio en la energía total de un sistema fijo es idéntico al cambio en su energía interna.

$$\Delta E = \Delta U$$

La energía interna a su vez es particionada en cuatro formas: **energía sensible** que relaciona la energía cinética de las moléculas, la **energía latente** relacionada con la fase de un sistema, la **energía química** relacionada con los enlaces atómicos en una molécula, y por último la **energía nuclear** que relaciona los enlaces dentro del núcleo del átomo.

El balance de energía considerando los tres mecanismos de transferencia de energía se da por medio de

$$\dot{Q} - \dot{W} + \sum E_{mass,in} - \sum E_{mass,out} = \Delta \dot{E}_{system,vc}$$

Las dos formas de interacción de la energía relacionadas con un sistema cerrado o una masa fija y con un sistema estacionario son la transferencia de calor y trabajo y el cambio en la energía interna del sistema, expresado como

$$\dot{Q} - \dot{W} = \Delta U$$

Considerando la variación de energía interna sin que se modifique el estado de la materia que compone el sistema (variación de la **energía sensible** o **calor sensible**), y con ayuda de la definición de entalpía, se tiene

$$\dot{Q} - \dot{W} = m C_p \Delta T$$

Si en el balance de energía no se considera trabajo ($W = 0$) y se considera una variación en el tiempo, se tiene

$$Q = m C_p \left(\frac{dT}{dt} \right)$$

donde Q representa los mecanismos de transferencia de calor que son: **conducción** (Q_{cond}), **convección** (Q_{conv}) y **radiación** (Q_{rad}).

4.2. Balances de Energía Global

El modelo de *Balance de Energía Global* (en inglés, GEB) es aplicado únicamente a las componentes del modelo físico de la habitación (Figura 2.5), el cual se basa en el primera ley de la termodinámica o principio de conservación de la energía descrito en la sección anterior.

Los balances de energía son aplicados para determinar la cantidad de energía que es intercambiada y acumulada en un sistema desde un punto de vista macroscópico, es decir, su propósito es determinar los efectos globales en el sistema o volumen de control sin estar interesados en analizar o comprender detalles de la fenomenología. Para esto, es necesario conocer las condiciones que existen entre el sistema y el entorno que lo rodea.

Para desarrollar un modelo de balances de energía se deben tener en cuenta ciertas consideraciones, una de ellas y la principal, es aplicar el concepto de **placa delgada**, el cual consiste en representar cada elemento del sistema bajo estudio por medio de un punto/nodo que deberá ubicarse en el centro de cada elemento, tomando en cuenta que el espesor donde se ubique cada punto/nodo debe ser lo suficientemente pequeño para determinar que la variable (temperatura) no tenga cambios significativos y sea posible analizar de manera correcta dicho elemento. En la Figura 4.1 se muestra la representación de tres elementos por medio de puntos/nodos en los cuales se determinara la variable (temperatura).

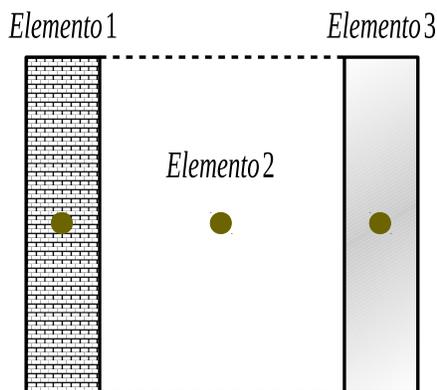


Figura 4.1: Elementos analizados con balances de energía.

Por otro lado en la Figura 4.2 se representa el concepto de placa delgada. En la Figura 4.2a se puede observar que el elemento tiene una dimensión de 0.02m en el cual se puede aplicar el concepto de placa delgada, mientras que en la Figura 4.2b el concepto no aplica, debido que la longitud del elemento es demasiado grande y un solo punto no es suficiente para determinar la variable correctamente en dicho sistema, sin embargo, en la Figura 4.2c el mismo elemento es dividido en subcapas las cuales cumplen con el concepto de placa delgada, así que, el elemento en la Figura 4.2c puede ser analizado por medio del concepto de balances de energía.

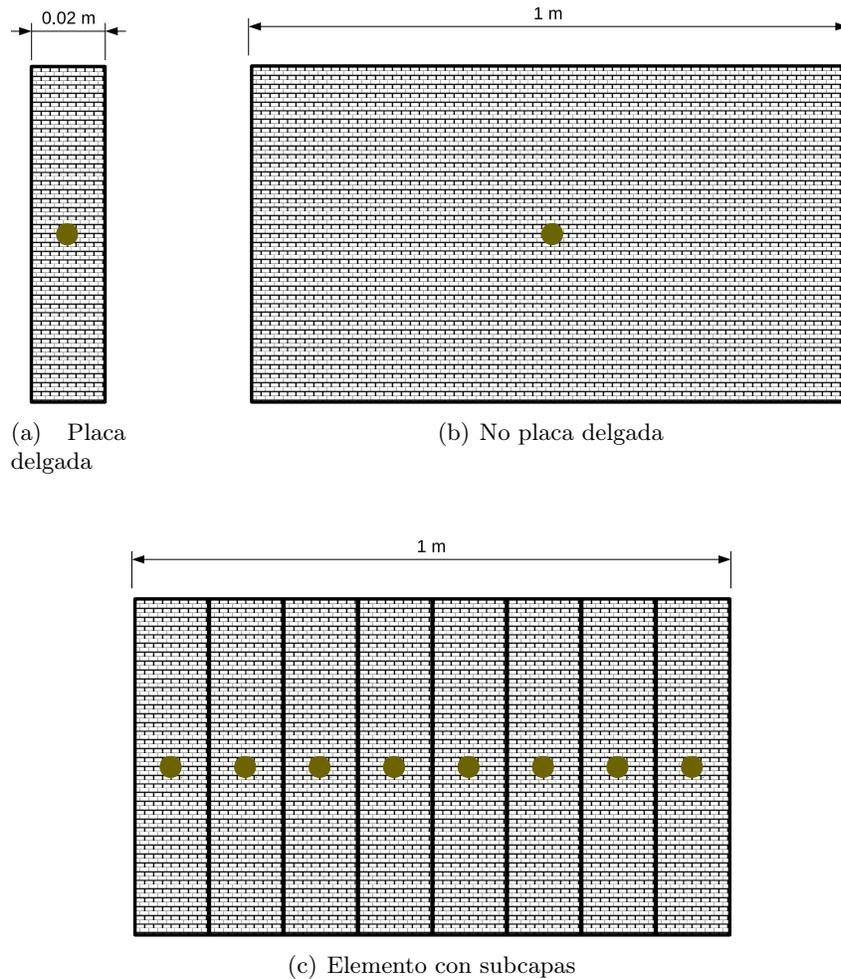


Figura 4.2: Concepto de placa delgada.

El concepto de **resistencia térmica** dentro del modelo de balances de energía es importante, en la cual se considera una analogía con los circuitos eléctricos donde se encuentra la resistencia eléctrica (R_E) que es la oposición al flujo de corriente eléctrica (I) a través de un material conductor. La ley de Ohm, establecida para circuitos eléctricos, enuncia que la diferencia de potencial (ΔV) que se aplica entre los extremos de un material conductor es proporcional a la intensidad de corriente eléctrica que circula en el material conductor.

La Ecuación 4.1 representa la intensidad de corriente eléctrica que es igual a la diferencia de potencial aplicado entre los extremos de un material conductor dividido por la resistencia eléctrica. En la Figura 4.3a se muestra la resistencia eléctrica conformada por un diferencial de potencial eléctrico y la dirección de la intensidad de corriente eléctrica en un circuito eléctrico básico; mientras que en la Figura 4.3b se muestra un circuito térmico con una resistencia térmica, un diferencial de temperatura y la dirección de flujo de calor.

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_E} = \frac{\Delta V}{R_E} \quad (4.1)$$

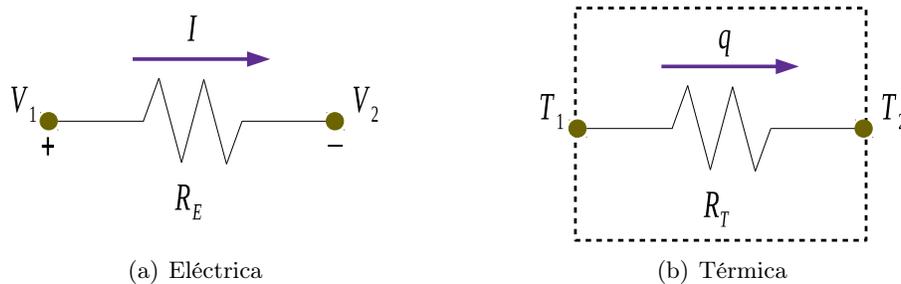


Figura 4.3: Analogía entre los tipos de resistencias.

Establecido el concepto de resistencia eléctrica, es posible determinar la resistencia térmica (R_T) equivalente a cada uno de los tres mecanismos de transferencia de calor para así determinar el flujo de calor (q) en un sistema térmico. En la Figura 4.4 se muestra la componente de una edificación en la cual interactúan la resistencia térmica conductiva (R_T^{cond}), convectiva (R_T^{conv}) y radiativa (R_T^{rad}) para determinar la temperatura ($T_{element}$) de dicha componente.

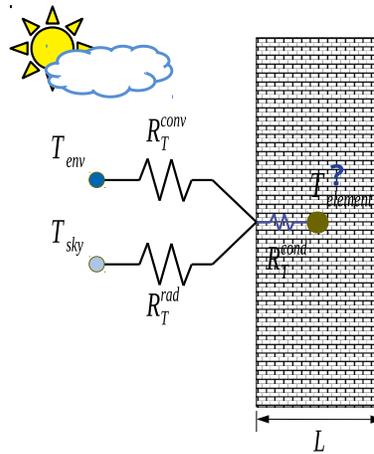


Figura 4.4: Resistencias térmicas.

A partir de la Ley de Fourier es posible obtener la resistencia conductiva (R_T^{cond}) como

$$q_{cond} = \lambda \left(\frac{T_{env} - T_{element}}{L} \right) = \lambda \left(\frac{\Delta T}{L} \right) \quad (4.2)$$

$$q_{cond} = \frac{\Delta T}{L/\lambda}$$

$$\boxed{L/\lambda} \rightarrow R_T^{cond} \quad (4.3)$$

por lo tanto, el flujo de calor por conducción es determinado por

$$q_{cond} = \frac{\Delta T}{R_T^{cond}} \quad (4.4)$$

La Ley de enfriamiento de Newton permite obtener la resistencia convectiva (R_T^{conv}) a partir de

$$q_{conv} = h_{conv} (T_{env} - T_{element}) = h_{conv} \Delta T \quad (4.5)$$

$$q_{conv} = \frac{\Delta T}{1/h_{conv}}$$

$$\boxed{1/h_{conv}} \rightarrow R_T^{conv} \quad (4.6)$$

por lo tanto, el flujo de calor convectivo es determinado por

$$q_{conv} = \frac{\Delta T}{R_T^{conv}} \quad (4.7)$$

Por último, tomando la Ley de Stefan-Boltzmann se obtiene la resistencia radiativa (R_T^{rad}) como

$$\begin{aligned} q_{rad} &= \sigma \varepsilon (T_{sky}^4 - T_{element}^4) \\ &= \sigma \varepsilon (T_{sky}^2 + T_{element}^2) (T_{sky}^2 - T_{element}^2) \\ &= \sigma \varepsilon \underbrace{(T_{sky}^2 + T_{element}^2)}_{h_{rad}} \underbrace{(T_{sky} + T_{element})}_{\Delta T} \underbrace{(T_{sky} - T_{element})}_{\Delta T} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$q_{rad} = h_{rad} \Delta T$$

$$q_{rad} = \frac{\Delta T}{1/h_{rad}}$$

$$\boxed{1/h_{rad}} \rightarrow R_T^{rad} \quad (4.9)$$

por lo tanto, el flujo de calor radiativo es determinado por

$$q_{rad} = \frac{\Delta T}{R_T^{rad}} \quad (4.10)$$

Capítulo 5

Metodología de Solución Numérica

5.1. Dinámica de Fluidos Computacional

5.1.1. Métodos Numéricos

En las ciencias exactas, nos enfrentamos a una serie de problemas físicos y matemáticos para los cuales deseamos encontrar una solución, para lo cual, lo ideal siempre sería buscar una solución exacta. Sin embargo, debido a las dificultades matemáticas, a menudo no hay soluciones exactas para las ecuaciones matemáticas que modelan muchos problemas. Por lo tanto, como alternativa a los métodos analíticos, han surgido métodos numéricos para resolver ecuaciones que gobiernan un fenómeno físico dado, haciéndolos matemáticamente más simples. Este proceso se lleva a cabo transformando el dominio continuo del problema en un dominio discreto, donde una ecuación diferencial que es difícil de resolver se transforma en un sistema lineal cuyas ecuaciones se pueden fácilmente resolver. Por lo tanto, tendremos como solución al problema un conjunto finito de valores que se basan en puntos específicos de una región a la que se le conoce como malla. En vista de esto, es mejor encontrar la solución de un problema en un conjunto de puntos de interés que buscar una solución que cubra los puntos infinitos del dominio, pero que nunca se pueda obtener. Además, es posible elegir una malla que contenga todos los puntos en los que esté interesado en conocer el valor de la variable estudiada (temperatura, presión, velocidad, concentración).

Los métodos numéricos se han convertido en una alternativa interesante para la solución de este tipo de problemas. Los métodos tradicionales para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales son los métodos de **Diferencias Finitas** (en inglés, FDM), **Elemento Finito** (en inglés, FEM) y **Volumen Finito** (en inglés, FVM). La principal diferencia entre las tres técnicas está asociada a la forma en que se realiza la discretización numérica y especialmente en fluidos, la manera en la cual las variables de flujo son aproximadas. El procedimiento numérico de los métodos de solución se basa de forma general en los siguientes pasos:

Modelo Matemático

El punto de partida de cualquier método numérico es el modelo matemático, es decir, el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales o integro-diferenciales y condiciones de frontera. Uno elige un modelo apropiado para la variable que quiera conocer de algún sistema. Este modelo puede incluir simplificaciones de las leyes de conservación. Un método de solución generalmente está diseñado para un conjunto particular de ecuaciones. Intentar producir un método de solución de propósito general, es decir, uno que sea aplicable a todas las variables, no es práctico, si no imposible, y, como con la mayoría de las herramientas de propósito general, generalmente no son óptimas para ninguna aplicación.

Método de Discretización

El método de discretización es una aproximación de las ecuaciones diferenciales el cual se realiza mediante un sistema de ecuaciones algebraicas para las variables en algún conjunto de ubicaciones discretas en el espacio y el tiempo. Como se mencionó anteriormente, los métodos más importantes son: FDM, FEM y FVM. Cada tipo de método produce la misma solución si la malla es la adecuada; sin embargo, algunos métodos son más adecuados para algunas clases de problemas que otros.

Sistemas de Coordenadas y Vectores de Base

Las ecuaciones de conservación se pueden escribir de formas diferentes. Por ejemplo, se pueden seleccionar sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas, esféricas, curvilíneas ortogonales o no-ortogonales. La elección depende de la geometría y puede influir en el método de discretización y el tipo de malla que se utilizará. También hay que seleccionar la base en la que se definirán los vectores y los tensores. Dependiendo de esta elección, el vector de velocidad y el tensor de esfuerzos pueden expresarse en términos de componentes cartesianas, covariantes o contravariantes, físicas o no físicas orientados a coordenadas.

Malla Numérica

Las ubicaciones discretas en las que se van a calcular la variable están definidas por la malla numérica que es esencialmente una representación discreta del dominio físico en el que se debe resolver el problema (dominio computacional). El dominio físico se divide en un número finito de subdominios (elementos, volúmenes de control, etc.).

Método de Solución

La discretización del modelo matemático produce un conjunto de ecuaciones algebraicas discretas que deben resolverse para obtener los valores discretos de la variable bajo estudio. El método de solución depende del problema a estudiar, el tipo de malla empleado y del número de subdominios involucrados en cada ecuación algebraica. Los coeficientes de estas ecuaciones pueden ser independientes de la variable (es decir, lineales) o dependientes (es decir, no lineales). Los métodos de solución pueden clasificarse ampliamente como directos o iterativos. Como la mayoría de los fenómenos son complejos, los sistemas de ecuaciones algebraicas resultantes son no lineales, por lo cual, se utiliza un método de solución iterativo para darles solución.

Criterio de Convergencia

Finalmente, se necesita establecer los criterios de convergencia para el método iterativo. Por lo general, hay dos niveles de iteraciones: iteraciones internas, dentro de las cuales se resuelve la ecuación lineal, e iteraciones externas, que se ocupan de la no linealidad y el acoplamiento de las ecuaciones. Es importante decidir cuándo detener el proceso iterativo en cada nivel, tanto desde el punto de vista de la precisión como el de la eficiencia.

Para el estudio numérico de la transferencia de calor por difusión se eligió el método de volúmenes finitos, ya que este método es completamente conservativo por construcción, sencillo de implementar, tiene menos costo computacional que el método de elementos finitos y sobre todo, todos los términos que necesitan ser aproximados tienen significado físico, característica que no presentan el método de diferencias finitas ni el método de elementos finitos.

5.1.2. Discretización del Dominio Físico

La generación de malla es uno de los pasos más importantes en un estudio de CFD; es aquí donde se realiza la división del dominio físico en elementos más pequeños, proceso conocido como discretización de la geometría lo que da como resultado un dominio computacional. Estos elementos pequeños son llamados volúmenes de control en los cuales se resolverán las ecuaciones de conservación dependiendo el fenómeno físico que se desee conocer del sistema bajo estudio. La mayor parte del tiempo dedicado en un estudio de CFD generalmente se dedica a generar con éxito una malla adecuada para la geometría. El procedimiento para obtener las ecuaciones que generan la malla del plano físico al plano computacional se dio en la Sección 3.3 obteniendo la Ecuación 3.47; para la generación de la malla se utilizan condiciones de frontera Dirichlet. Usando las ecuaciones transformadas, todo el estudio de la física del sistema bajo estudio se hará en el dominio computacional sobre una malla cuadrada fija, independientemente de la forma de la geometría y del espaciamiento elegido entre las líneas coordinadas. La gran ventaja de este procedimiento es que el código computacional es independiente de la geometría considerada, ya que la ecuación de generación de malla se aproxima en diferencias finitas en el plano computacional como se indicó en la Figura 3.9

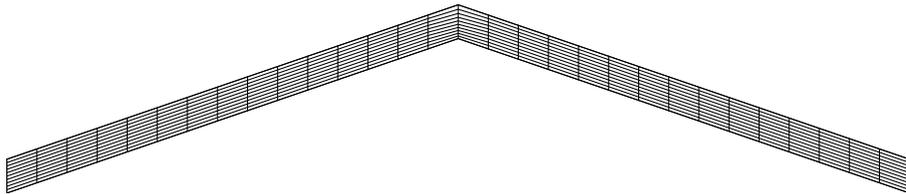


Figura 5.1: Malla para el techo a dos aguas.

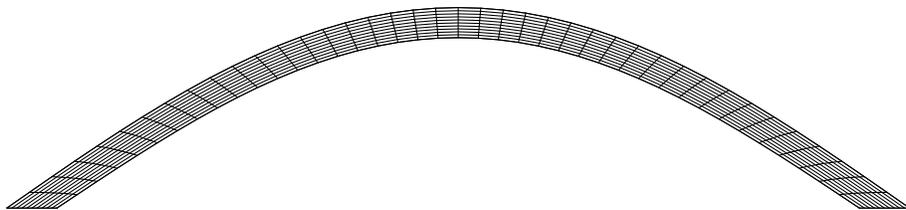


Figura 5.2: Malla para el techo tipo bóveda/cúpula.

5.1.3. Discretización del Modelo Matemático

Una vez transformadas las ecuaciones gobernantes al dominio computacional, se discretizan e integran sobre un elemento genérico, lo que da como resultado una ecuación algebraica para dicho elemento. Para que esta aproximación pueda ser realizada, primero se debe definir la ubicación de los nodos (puntos discretos) y la ubicación donde se resolverá la variable. En la literatura se mencionan dos tipos de arreglos, *nodo centrado en el vértice* (Figura 3.7a) y *nodo centrado en el elemento* (Figura 3.7b), siendo el arreglo de nodo centrado en el elemento generalmente el más utilizado con la formulación del *FVM*, de ahí que a cada elemento se le denomine volumen de control. Por otro lado, es importante indicar la ubicación de almacenamiento de las variables dependientes en el elemento. El problema en el presente estudio involucra solo una incógnita que es la *temperatura*, y ésta, al ser un escalar, será almacenada en los centros de los elementos, mismo sitio donde se ubican los nodos.

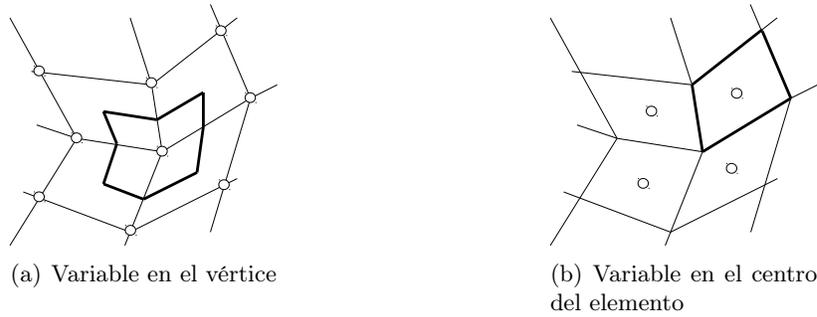


Figura 5.3: Arreglo de la ubicación de los nodos y construcción de los elementos.

Re-escribiendo la Ecuación 2.3, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho T}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_4 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{S^T}{J} \quad (5.1)$$

Integrándose temporal y espacialmente la Ecuación 5.1 sobre los límites geométricos del *volumen de control interno P* mostrado en la Figura 5.4, y empleando un esquema implícito para la aproximación temporal, se tiene

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho T}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[C_4 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{S^T}{J} \right) d\xi d\eta d\tau$$

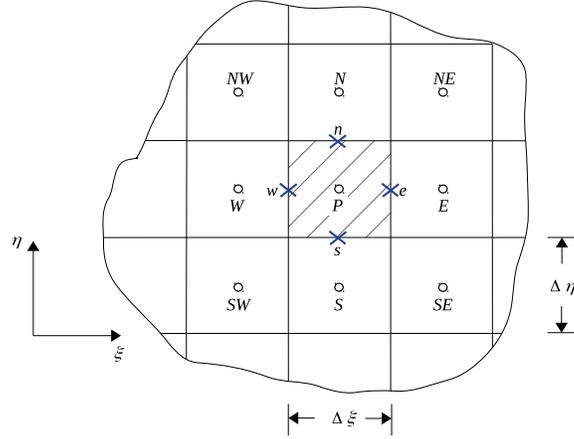


Figura 5.4: Arreglo de malla para variables escalares.

$$\left(\frac{M_P T_P - M_P^0 T_P^0}{\Delta t} \right) \Delta \xi \Delta \eta = \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_e \Delta \eta - \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w \Delta \eta + \left[C_4 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_n \Delta \xi - \left[C_4 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_s \Delta \xi + \left(\frac{S^T}{J} \right) \Delta \xi \Delta \eta \quad (5.2)$$

Para un *volumen de control interno*, las derivadas de ϕ en las interfaces del volumen de control se aproximan mediante una diferencia centrada, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_e &= \frac{T_E - T_P}{\Delta \xi} & \left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_w &= \frac{T_P - T_W}{\Delta \xi} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_n &= \frac{T_N - T_P}{\Delta \eta} & \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_s &= \frac{T_P - T_S}{\Delta \eta} \end{aligned} \quad (5.3)$$

y la aproximación de las derivadas cruzadas para un *volumen de control interno* son

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_e &= \frac{T_N + T_{NE} - T_S - T_{SE}}{4\Delta \eta} & \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_w &= \frac{T_N + T_{NW} - T_S - T_{SW}}{4\Delta \eta} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_n &= \frac{T_E + T_{NE} - T_W - T_{NW}}{4\Delta \xi} & \left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_s &= \frac{T_E + T_{SE} - T_W - T_{SW}}{4\Delta \xi} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Sustituyendo la Ecuación 5.3 y Ecuación 5.4 en la Ecuación 5.2, agrupando las derivadas cruzadas no ortogonales en el término fuente para evitarse un esquema numérico de 9 puntos, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{M_P T_P - M_P^0 T_P^0}{\Delta t} \right) \Delta \xi \Delta \eta = C_1^e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta \xi} \right) \Delta \eta - C_1^w \left(\frac{T_P - T_W}{\Delta \xi} \right) \Delta \eta + \\ C_5^n \left(\frac{T_N - T_P}{\Delta \eta} \right) \Delta \xi - C_5^s \left(\frac{T_P - T_S}{\Delta \eta} \right) \Delta \xi + \widehat{S}^\phi \end{aligned} \quad (5.5)$$

Agrupando términos semejantes de la Ecuación 5.5 manteniendo las derivadas cruzadas en el nuevo término fuente, se tiene

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N + b \quad (5.6)$$

donde

$$\begin{aligned} a_E = C_1^e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} = \frac{k}{C_p} J \alpha \Big|_e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} & \quad C_2^e = -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_e \\ a_W = C_1^w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} = \frac{k}{C_p} J \alpha \Big|_w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} & \quad C_2^w = -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_w \\ a_N = C_5^n \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} = \frac{k}{C_p} J \gamma \Big|_n \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} & \quad C_4^n = -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_n \\ a_S = C_5^s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} = \frac{k}{C_p} J \gamma \Big|_s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} & \quad C_4^s = -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_s \\ M_P = M_P^0 = \frac{\rho}{J} \Big|_P & \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \left(\frac{M_P}{\Delta t} \right) \Delta \xi \Delta \eta & \\ b = \widehat{S}^\phi = \left(\frac{S^T}{J} \right) \Delta \xi \Delta \eta + \left(\frac{M_P^0 T_P^0}{\Delta t} \right) \Delta \xi \Delta \eta + & \\ C_2^e \left(\frac{T_N + T_{NE} - T_S - T_{SE}}{4 \Delta \eta} \right) \Delta \eta - C_2^w \left(\frac{T_N + T_{NW} - T_S - T_{SW}}{4 \Delta \eta} \right) \Delta \eta + & \\ C_4^n \left(\frac{T_E + T_{NE} - T_W - T_{NW}}{4 \Delta \xi} \right) \Delta \xi - C_4^s \left(\frac{T_E + T_{SE} - T_W - T_{SW}}{4 \Delta \xi} \right) \Delta \xi & \end{aligned}$$

Para completar la discretización de la Ecuación 5.5, como se puede observar, el Jacobiano de transformación (J), contenido en el término M_P y M_P^0 , debe ser calculado en el volumen de control \mathbf{P} , mientras que las derivadas computacionales, contenidas en los términos C' 's, y el Jacobiano de transformación (J) deben ser calculadas en las interfaces del volumen de control ($\mathbf{e}, \mathbf{w}, \mathbf{n}, \mathbf{s}$).

Para determinar los términos de las componentes del tensor métrico (α, β, γ) y el Jacobiano de transformación (J) en el sistema de coordenadas generalizadas en 2 dimensiones, se deben conocer las derivadas computacionales, es decir, las derivadas parciales $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$. Entonces, las expresiones para estas derivadas deben establecerse tanto para el volumen de control \mathbf{P} como para las interfaces $(\mathbf{e}, \mathbf{w}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ de todos los volúmenes de control. Por lo tanto, para el volumen de control interno \mathbf{P} de la Figura 5.5, la derivada de la coordenada x con respecto a ξ , es expresada como

$$x_\xi^P = \frac{x_e - x_w}{\Delta \xi} \quad (5.7)$$

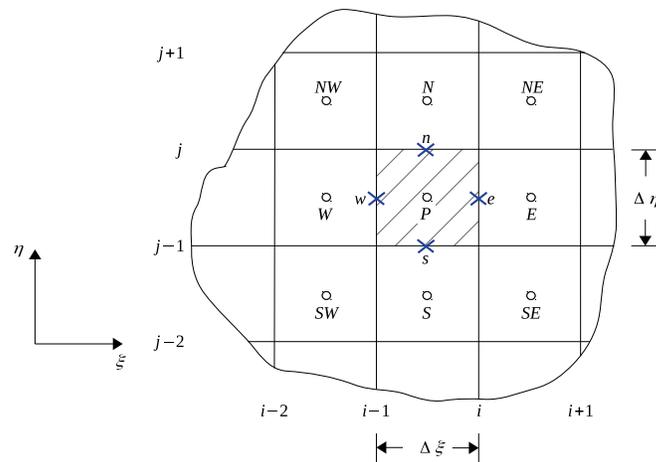


Figura 5.5: Volumen de control interno \mathbf{P} y sus vecinos.

donde x_e y x_w son las coordenadas de las interfaces e y w , respectivamente, y se calculan como la media aritmética de las coordenadas de los cuatro vértices que forman el volumen de control en el dominio computacional. Por lo tanto, para la interfaz e , se tiene

$$\varphi_e = \frac{\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{2} \quad (5.8)$$

donde φ puede ser x o y y los índices i y j indican, respectivamente, la posición de los planos ξ y η que definen el volumen de control.

De manera similar, se calculan las coordenadas de las otras interfaces del volumen de control. Las derivadas parciales x_η, y_ξ, y_η para el volumen de control interno \mathbf{P} son obtenidas de manera similar al procedimiento que se empleó para x_ξ^P .

Por otro lado, se deben calcular las derivadas parciales de x y y con respecto a ξ y η para las interfaces del volumen de control. Por lo tanto, para la interfaz e , se tiene

$$x_\xi^e = \frac{x_E - x_P}{\Delta\xi}$$

$$x_\eta^e = \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\Delta\eta}$$

donde x_P y x_E son, respectivamente, la coordenada x del volumen de control \mathbf{P} y su vecino \mathbf{E} , las cuales pueden ser calculadas como la media aritmética de los cuatro vértices que forman el volumen de control en el dominio computacional, por ejemplo, para x_P se tiene

$$x_P = \frac{x_{i,j} + x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1} + x_{i-1,j}}{4} \quad (5.9)$$

5.1.4. Condiciones de frontera

La Ecuación 5.6 que es una ecuación de coeficientes agrupados aproximada (en dos dimensiones) para un **volumen de control interno** genérico, fue deducida para el volumen de control interno mostrados en la Figura 5.6. Todos los otros volúmenes internos poseen ecuaciones aproximadas idénticas. Para obtener el sistema de ecuaciones algebraicas completo, también es necesario obtener las ecuaciones para los volúmenes que están en la frontera e implementarlas de forma discretizada en el dominio computacional, ya que todos los cálculos numéricos son realizados en este dominio, por lo cual, es lógico que las condiciones de frontera también sean incorporadas en el dominio computacional. El proceso de la aplicación de las condiciones de frontera está ligado a la localización de las variables en la malla del dominio computacional y al tipo de configuración de volúmenes de control utilizados en la frontera. En la literatura se reportan tres tipos de configuración de los volúmenes de control para el análisis en las fronteras, los cuales son: **volumen de control sobre la frontera**, **volumen de control ficticio/fantasma** y **balance en el volumen de control frontera**. Como la variable de interés en este problema es un escalar (*temperatura*), se almacena en los centro de los volúmenes de control.

En la Figura 5.6 se muestra el dominio computacional dividido en 9 tipos de volúmenes de control; se observa al centro del dominio los volúmenes internos los cuales poseen la misma ecuación de coeficientes agrupados (Ecuación 5.6); sin embargo, cada tipo de volumen de control restante genera una distinta ecuación algebraica.

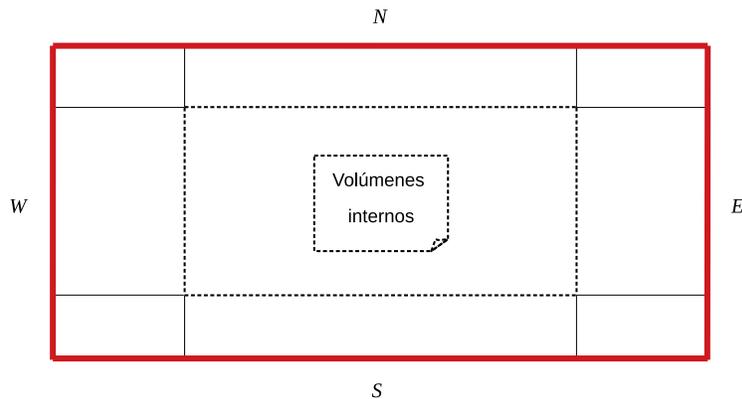


Figura 5.6: Volúmenes de control internos y de frontera del dominio computacional.

En la Figura 5.7 se muestra cada uno de los tres tipos de configuración de los volúmenes de control para la frontera oeste. Para la configuración de volúmenes de control sobre la frontera, se genera una malla en la cual el nodo del volumen de control deberá quedar fijo sobre la frontera, este nodo puede o no tener espesor correspondiente al volumen de control. En la Figura 5.7a se ilustra este tipo de configuración en la cual, el nodo sobre la frontera no tiene espesor del volumen de control; por otro lado, el uso de volúmenes ficticios/fantasmas como el propio nombre lo indica, ese volumen de control no existe y no tiene posición geométrica en la malla, solo se usa como un artificio matemático. El volumen de control ficticio/fantasma se genera de igual dimensión al que se encuentra adyacente interno a la frontera y solo tiene interacción con el volumen de control con el cual comparte en alguna de sus caras con la frontera, por ejemplo en la Figura 5.7b se muestra este tipo de configuración en donde el volumen de control ficticio/fantasma **P** solo interactúa con **E**, con lo que se deduce que el análisis es unidimensional. Con este tipo de configuración, todos los volúmenes de control del sistema, inclusive los de las fronteras, son interpretados como volúmenes internos. Por último, la configuración de balance en el volumen de control frontera no genera más nodos (con o sin espesor de volumen de control) que los generados para el sistema como se muestra en la Figura 5.7c. Para este problema, se considera el arreglo de nodos sobre la frontera de **Balance en volumen de control**.

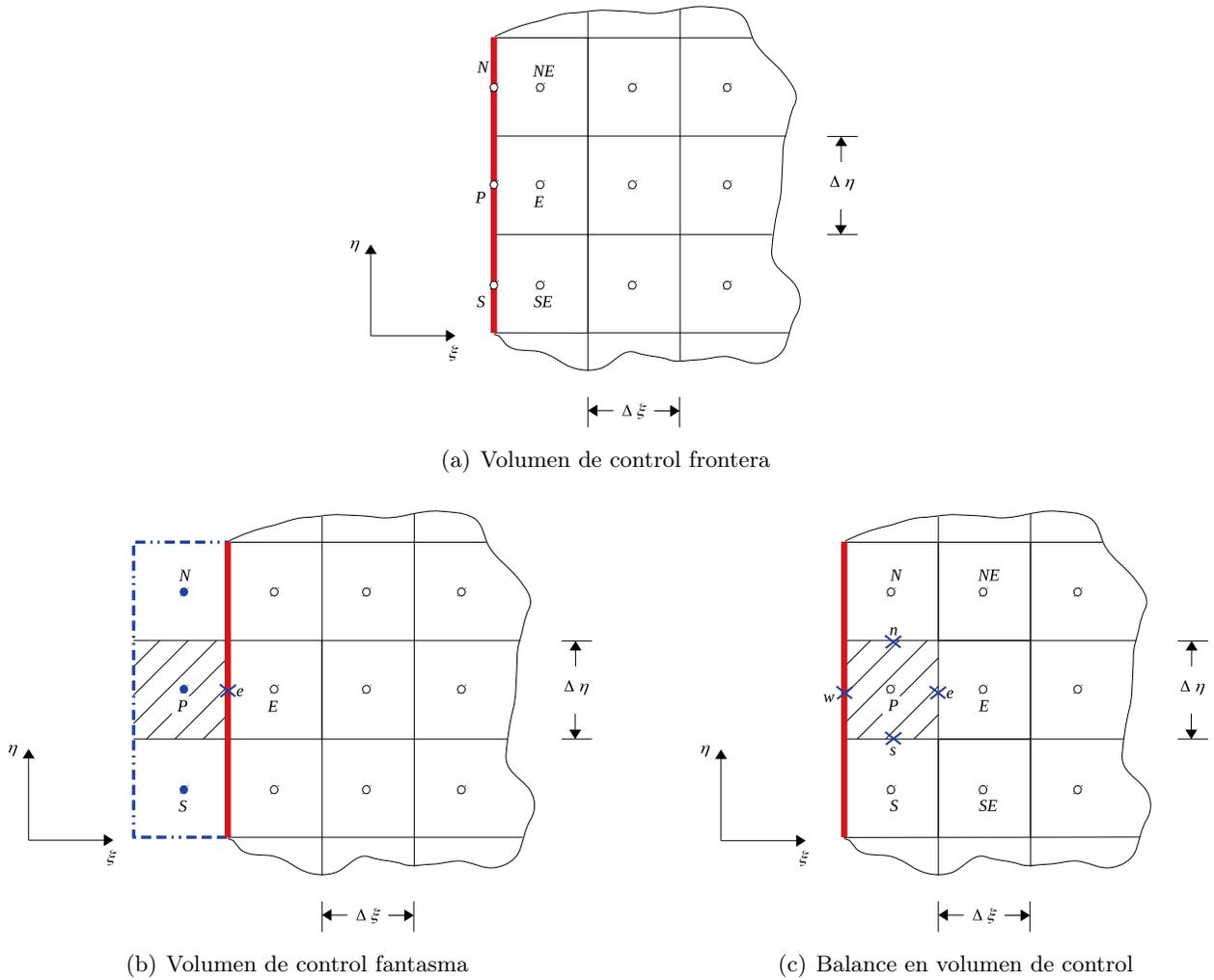


Figura 5.7: Arreglos de nodos sobre las fronteras.

Por otro lado, las condiciones de frontera más comunes en problemas de dinámica de fluidos, transferencia de calor y masa son tres: condición de Dirichlet, condición de Von Neumann y condición de Robín (también llamada de condición mixta), éstas encontradas también en la literatura como de primera, segunda y tercera clase. A continuación se describe el tratamiento para cada una de estas condiciones de frontera para el arreglo de balance en volumen de control.

Partiendo del modelo matemático de la Ecuación 5.1, para la variable genérica ϕ , al integrar dicho modelo sobre el volumen de control \mathbf{P} representado en la Figura 5.4 se obtiene

$$\left(\frac{M_P \phi_P - M_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} \right) \Delta \xi \Delta \eta = \left[C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e \Delta \eta - \left[C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_w \Delta \eta + \left[C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_n \Delta \xi - \left[C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_s \Delta \xi + \left(\frac{S^\phi}{J} \right) \Delta \xi \Delta \eta \quad (5.10)$$

Condición de primera clase en frontera este

Cuando la variable (ϕ) es impuesta sobre la frontera, ésta deberá ser incluida en el modelo matemático de la Ecuación 5.10 tomando en cuenta la dirección del flujo de calor y la frontera sobre la que se esté analizando. En la Figura 5.8 se muestra la imposición de la condición de frontera de primera clase sobre la frontera este. El volumen de control adyacente a esta frontera tendrá la información y se generará una ecuación de coeficientes agrupados particular para esta frontera.

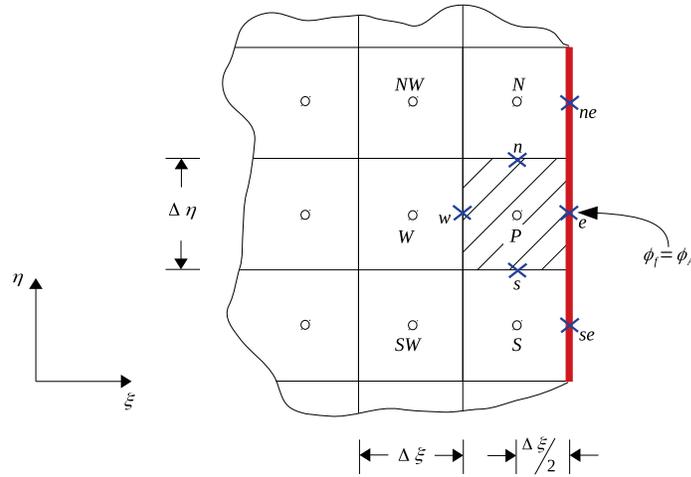


Figura 5.8: Balance en el volumen de control adyacente a la frontera este.

Partiendo de la Ecuación 5.10, aproximando los términos difusivos mediante una diferencia centrada y agrupando términos semejantes manteniendo las derivadas cruzadas y los términos correspondientes a la interfaz de la frontera en el término fuente, se tiene la siguiente ecuación algebraica

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (5.11)$$

donde

$$\begin{aligned} a_W &= C_1^w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} = \frac{k}{C_p} J \alpha \Big|_w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} & C_2^w &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_w \\ a_N &= C_5^n \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} = \frac{k}{C_p} J \gamma \Big|_n \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} & C_4^n &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_n \\ a_S &= C_5^s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} = \frac{k}{C_p} J \gamma \Big|_s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} & C_4^s &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_s \\ M_P &= M_P^0 = \frac{\rho}{J} \Big|_P \\ a_P &= a_W + a_N + a_S + \left(\frac{M_P}{\Delta t} \right) \Delta \xi \Delta \eta \\ b &= \left(\frac{S^\phi}{J} \right) \Delta \xi \Delta \eta + \left(\frac{M_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} \right) \Delta \xi \Delta \eta + \\ &\quad \left[C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e \Delta \eta - \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_w \Delta \eta + \\ &\quad \left[C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_n \Delta \xi - \left[C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_s \Delta \xi \end{aligned}$$

y las derivadas son aproximadas de acuerdo a la Ecuación 5.3 y Ecuación 5.4, mientras que las derivadas incluidas en el término b son dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e &= \frac{\phi_A - \phi_P}{\frac{\Delta \xi}{2}} & \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_e &= \frac{\phi_{ne} - \phi_{se}}{2\Delta \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_w &= \frac{\phi_N + \phi_{NW} - \phi_S - \phi_{SW}}{4\Delta \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_n &= \frac{\frac{\phi_{ne} + \phi_e}{2} - \frac{\phi_P + \phi_N + \phi_W + \phi_{NW}}{4}}{\Delta \xi} & \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_s &= \frac{\frac{\phi_e + \phi_{se}}{2} - \frac{\phi_S + \phi_P + \phi_{SW} + \phi_W}{4}}{\Delta \xi} \end{aligned}$$

Condición de segunda clase en frontera norte

Cuando el flujo de la variable (ϕ) es impuesto sobre la frontera, el valor de éste será sustituido en la Ecuación 5.10. La Figura 5.9 muestra la frontera norte, en la cual, el flujo de la variable ϕ es

$$\phi'_n = \phi''_n \sqrt{\gamma_n} \Delta\xi \quad (5.12)$$

donde

$$\phi''_n = k_n \left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_n = k_n \frac{\phi_n - \phi_P}{\Delta n_n} \quad (5.13)$$

de la cual, ϕ_P es el valor de ϕ en el nodo \mathbf{P} y ϕ_n es el valor de ϕ en la frontera norte. El parámetro Δn_n es la distancia del nodo \mathbf{P} hasta la frontera n .

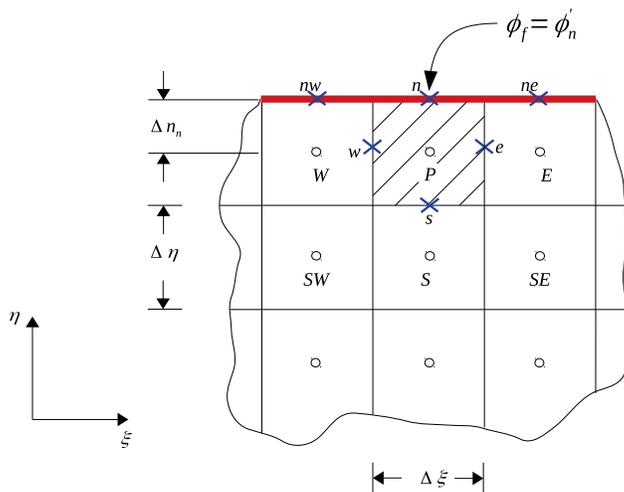


Figura 5.9: Balance en el volumen de control adyacente a la frontera norte.

Sustituyendo la Ecuación 5.12 en la Ecuación 5.10, se tiene

$$\left(\frac{M_P \phi_P - M_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} \right) \Delta\xi \Delta\eta = \left[C_1 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + C_2 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right]_e \Delta\eta - \left[C_1 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + C_2 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right]_w \Delta\eta + \phi''_n \sqrt{\gamma_n} \Delta\xi - \left[C_4 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + C_5 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right]_s \Delta\xi + \left(\frac{S^\phi}{J} \right) \Delta\xi \Delta\eta \quad (5.14)$$

De la Ecuación 5.14, algunas derivadas difieren de las obtenidas para el volumen de control interno. Estas derivadas son $\left. \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right|_e$ y $\left. \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right|_w$, las cuales a continuación se discretizan.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\frac{\phi_n + \phi_{ne}}{2} - \frac{\phi_P + \phi_E + \phi_S + \phi_{SE}}{4}}{\Delta \eta} \quad (5.15)$$

donde ϕ_n se obtiene a partir de la Ecuación 5.13 y de manera similar para ϕ_{ne} , teniendo así

$$\phi_n = \phi_P + \frac{\Delta n_n}{k_n} \phi_n'' \quad \phi_{ne} = \phi_E + \frac{\Delta n_{ne}}{k_{ne}} \phi_{ne}''$$

y sustituyendolas en la Ecuación 5.15, tomando el mismo procedimiento para obtener $\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_w$, se tiene

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\phi_P + \phi_E - \phi_S - \phi_{SE} + \frac{2\Delta n_n}{\Gamma_n} \phi_n'' + \frac{2\Delta n_{ne}}{\Gamma_{ne}} \phi_{ne}''}{4\Delta \eta} \quad (5.16)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\phi_P + \phi_W - \phi_S - \phi_{SW} + \frac{2\Delta n_n}{\Gamma_n} \phi_n'' + \frac{2\Delta n_{nw}}{\Gamma_{nw}} \phi_{nw}''}{4\Delta \eta} \quad (5.17)$$

Obteniendo así la siguiente ecuación algebraica de coeficientes agrupados

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_S \phi_S + b \quad (5.18)$$

donde

$$\begin{aligned} a_E &= C_1^e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} = \frac{k}{C_p} J \alpha \Big|_e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} & C_2^e &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_e \\ a_W &= C_1^w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} = \frac{k}{C_p} J \alpha \Big|_w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} & C_2^w &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_w \\ a_S &= C_5^s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} = \frac{k}{C_p} J \gamma \Big|_s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} & C_4^s &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_s \\ M_P &= M_P^0 = \frac{\rho}{J} \Big|_P \\ a_P &= a_W + a_N + a_S + \left(\frac{M_P}{\Delta t} \right) \Delta \xi \Delta \eta \\ b &= \left(\frac{S^\phi}{J} \right) \Delta \xi \Delta \eta + \left(\frac{M_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} \right) \Delta \xi \Delta \eta + \\ &\quad \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e \Delta \eta - \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_w \Delta \eta + \\ &\quad \phi_n'' \sqrt{\gamma_n} \Delta \xi - \left[C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_s \Delta \xi \end{aligned}$$

El caso particular en transferencia de calor, es cuando el flujo es igual a cero, la condición de frontera es conocida como una condición adiabática, también en flujo de fluidos en múltiples problemas es usada como condición de simetría. Considerando el flujo igual a cero en la frontera norte ($\phi'_n = 0$), la ecuación de coeficientes agrupados es idéntica a la Ecuación 5.18, donde los coeficientes son dados por

$$\begin{aligned}
 a_E &= C_1^e \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} = \frac{k}{C_p} J \alpha \Big|_e \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} & C_2^e &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_e \\
 a_W &= C_1^w \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} = \frac{k}{C_p} J \alpha \Big|_w \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} & C_2^w &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_w \\
 a_S &= C_5^s \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} = \frac{k}{C_p} J \gamma \Big|_s \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} & C_4^s &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_s \\
 M_P &= M_P^0 = \frac{\rho}{J} \Big|_P \\
 a_P &= a_W + a_N + a_S + \left(\frac{M_P}{\Delta t} \right) \Delta\xi \Delta\eta \\
 b &= \left(\frac{S^\phi}{J} \right) \Delta\xi \Delta\eta + \left(\frac{M_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} \right) \Delta\xi \Delta\eta + \\
 &\quad \left[C_2 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right]_e \Delta\eta - \left[C_2 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right]_w \Delta\eta - \\
 &\quad \left[C_4 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right]_s \Delta\xi
 \end{aligned}$$

La evaluación de los gradientes en la frontera en dirección η son determinados mediante una aproximación de segundo orden. La Figura 5.11 muestra los puntos de la Figura 5.10 en un gráfico $\phi - \eta$. Los tres puntos usados para ajustar el perfil de segundo orden son los puntos f (frontera), 3 y 2.

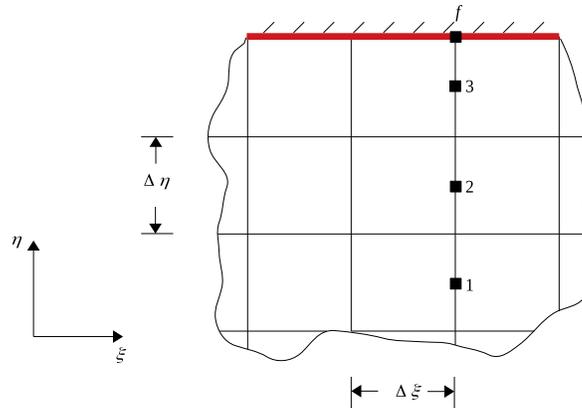


Figura 5.10: Volumen de control en la frontera. Evaluación de $\partial\phi/\partial\eta$.

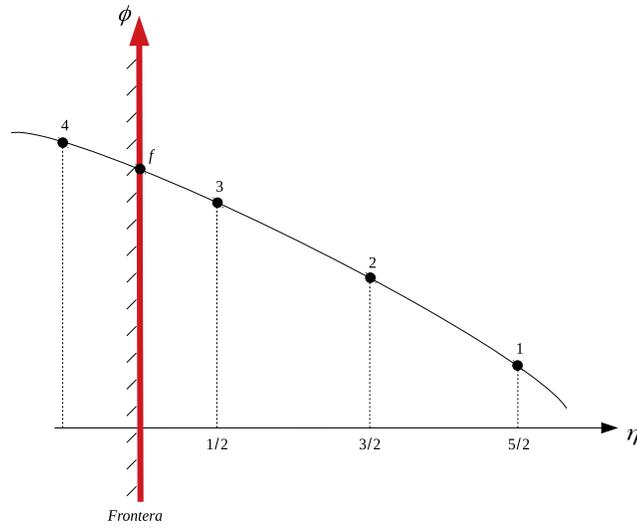


Figura 5.11: Aproximación del perfil de ϕ en la frontera.

El perfil es dado por

$$\phi(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2$$

eliminandose las constantes por el uso de ϕ en los puntos 2 y 3, el gradiente de ϕ en la pared es

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_3 = \frac{\phi_3 - \phi_2}{2} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_f$$

Tomando una aproximación de primer orden para $\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_3$, el último término de la anterior ecuación desaparece, como se desea una aproximación de segundo orden el último término es evaluado, obteniendo

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_f = 2\phi_3 - 3\phi_2 + \phi_1$$

por lo tanto, la evaluación del gradiente es

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_3 = \frac{3}{2}\phi_3 - 2\phi_2 + \frac{1}{2}\phi_1$$

Condición de tercera clase en frontera oeste

La condición de tercera clase es característica de la ley de transferencia convectiva entre la superficie sólida y el medio circundante (∞), por lo que se debe igualar el flujo de calor por convección que llega a la frontera del volumen de control con el flujo de calor por conducción al interior del volumen de control. Para la frontera oeste, por ejemplo, esta condición se expresa mediante el flujo (difusivo y convectivo) por unidad de área en la Figura 5.12.

$$h_{\infty} (\phi_{\infty} - \phi_w) = k \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_w \quad (5.19)$$

o, por aproximación de la derivada parcial

$$h_{\infty} (\phi_{\infty} - \phi_w) = k \frac{\phi_w - \phi_P}{\Delta n_w} \quad (5.20)$$

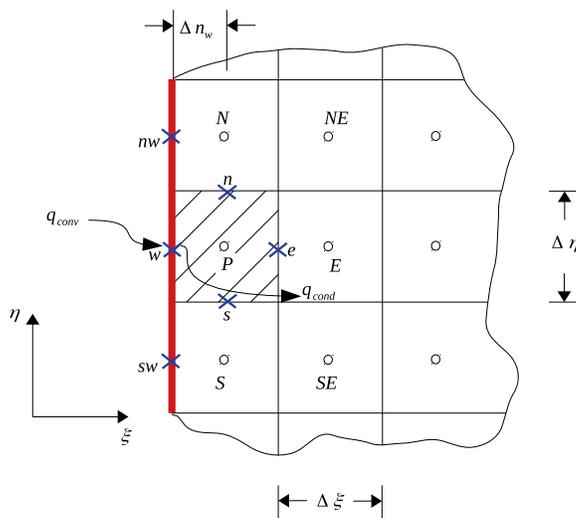


Figura 5.12: Balance en el volumen de control adyacente a la frontera oeste.

donde h_{∞} es el coeficiente de transferencia de calor convectivo, ϕ_P es el valor de ϕ en el nodo **P**, ϕ_w y ϕ_{∞} , son, respectivamente, los valores de ϕ en la frontera oeste y del medio circundante a la frontera oeste. El parámetro Δn_w es la distancia del nodo **P** hasta la frontera **w**.

De la Ecuación 5.20, se pueden obtener las expresiones para ϕ en la frontera oeste (ϕ_w) para el volumen de control **P** y sus vecinos **N** (ϕ_{nw}) y **S** (ϕ_{sw}).

$$\begin{aligned}\phi_w &= \frac{\phi_P + f_w \phi_\infty}{1 + f_w} \\ \phi_{nw} &= \frac{\phi_N + f_{nw} \phi_\infty}{1 + f_{nw}} \quad \phi_{sw} = \frac{\phi_S + f_{sw} \phi_\infty}{1 + f_{sw}}\end{aligned}\quad (5.21)$$

el factor f , es dado de manera general de la siguiente manera

$$f = \frac{h_\infty \Delta n}{k} \quad (5.22)$$

En el lado derecho de la Ecuación 5.2, el segundo término encerrado entre corchetes representa el flujo (ϕ'_w) en la interfaz oeste (w) del volumen de control. Por lo tanto, el flujo en la interfaz de la frontera oeste se puede expresar de la siguiente manera

$$\phi'_w = \phi''_w \sqrt{\alpha} \Delta \eta \quad (5.23)$$

donde ϕ''_w es el flujo de calor por unidad de área, y $\sqrt{\alpha} \Delta \eta$ es el área de la interfaz oeste del volumen de control. El flujo de calor por unidad de área se obtiene sustituyendo ϕ_w en la Ecuación 5.19, teniendo en cuenta la Ecuación 5.22, obteniendo así

$$\phi''_w = \frac{\phi_\infty - \phi_P}{\frac{1}{h_\infty} + \frac{\Delta n_w}{k_w}} \quad (5.24)$$

por lo tanto

$$\phi''_w \sqrt{\alpha} \Delta \eta = - \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w \Delta \eta \quad (5.25)$$

Sustituyendo la Ecuación 5.25 en la Ecuación 5.2, se tiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{M_P \phi_P - M_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} \right) \Delta \xi \Delta \eta &= \left[C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e \Delta \eta + \left[\frac{\phi_\infty - \phi_P}{\frac{1}{h_\infty} + \frac{\Delta n_w}{k_w}} \sqrt{\alpha} \right] \Delta \eta + \\ &\quad \left[C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_n \Delta \xi - \left[C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_s \Delta \xi + \left(\frac{S^\phi}{J} \right) \Delta \xi \Delta \eta\end{aligned}\quad (5.26)$$

De la Ecuación 5.26 algunas derivadas difieren de las obtenidas para el volumen de control interno. Estas derivadas son $\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_n$ y $\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_s$, las cuales discretizadas quedan de la siguiente forma

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_n = \frac{1}{4\Delta\xi} \left(-\frac{(1-f_w)}{1+f_w} \phi_P - \frac{(1-f_{nw})}{1+f_{nw}} \phi_N + \phi_E + \phi_{NE} - 2\phi_\infty \left[\frac{f_w}{(1+f_w)} + \frac{f_{nw}}{(1+f_{nw})} \right] \right) \quad (5.27)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_s = \frac{1}{4\Delta\xi} \left(-\frac{(1-f_w)}{1+f_w} \phi_P - \frac{(1-f_{sw})}{1+f_{sw}} \phi_S + \phi_E + \phi_{SE} - 2\phi_\infty \left[\frac{f_w}{(1+f_w)} + \frac{f_{sw}}{(1+f_{sw})} \right] \right) \quad (5.28)$$

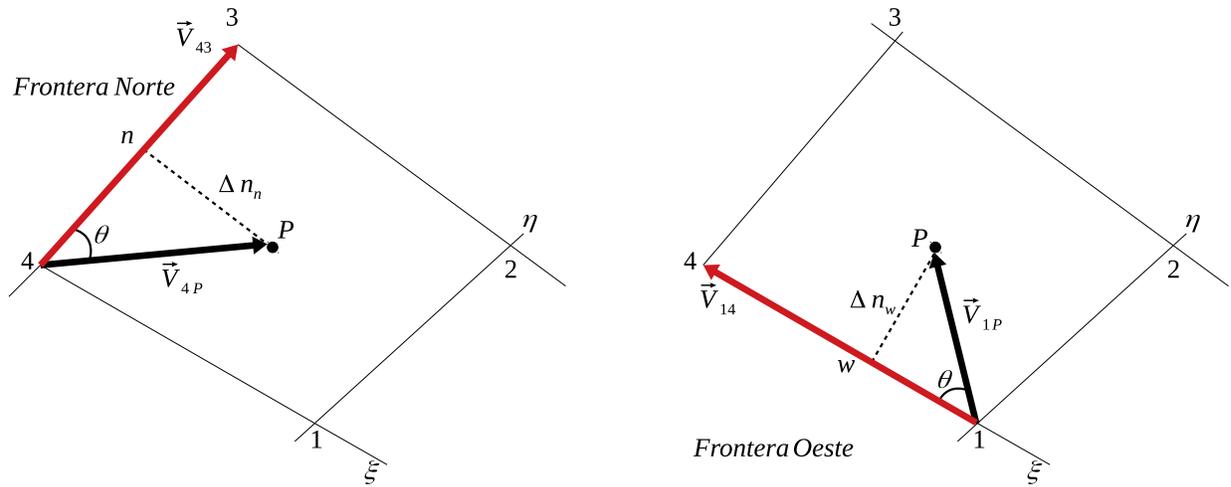
Reemplazando todas las derivadas por sus aproximaciones en la Ecuación 5.26, se obtiene la siguiente ecuación algebraica para un volumen de control en la frontera oeste

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (5.29)$$

donde

$$\begin{aligned} a_E &= C_1^e \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} = \frac{k}{C_p} J \alpha \Big|_e \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} & C_2^e &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_e \\ a_N &= C_5^n \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} = \frac{k}{C_p} J \gamma \Big|_n \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} & C_4^n &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_n \\ a_S &= C_5^s \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} = \frac{k}{C_p} J \gamma \Big|_s \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} & C_4^s &= -\frac{k}{C_p} J \beta \Big|_s \\ M_P &= M_P^0 = \frac{\rho}{J} \Big|_P \\ a_P &= a_E + a_N + a_S + \left(\frac{M_P}{\Delta t} \right) \Delta\xi \Delta\eta + \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\frac{1}{h_\infty} + \frac{\Delta n_w}{k_w}} \right) \Delta\eta \\ b &= \left(\frac{S^\phi}{J} \right) \Delta\xi \Delta\eta + \left(\frac{M_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} \right) \Delta\xi \Delta\eta + \\ &\quad \left[C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e \Delta\eta + \left(\frac{\phi_\infty \sqrt{\alpha}}{\frac{1}{h_\infty} + \frac{\Delta n_w}{k_w}} \right) \Delta\eta + \\ &\quad \left[C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_n \Delta\xi - \left[C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_s \Delta\xi \end{aligned}$$

Los parámetros Δn_n y Δn_w que se encuentran en la Ecuación 5.13 y la Ecuación 5.20, son respectivamente, la distancia del nodo \mathbf{P} hacia la frontera \mathbf{n} y la distancia del nodo \mathbf{P} hacia la frontera \mathbf{w} , como se muestra en la Figura 5.13. Las coordenadas de los puntos 1, 2, 3 y 4 son definidos durante la generación de la malla, mientras que la coordenada del nodo P es calculada mediante la media aritmética de los cuatro vértices que forman el volumen de control.



(a) Volumen de control adyacente a la frontera norte

(b) Volumen de control adyacente a la frontera oeste

Figura 5.13: Distancia del nodo \mathbf{P} a la frontera \mathbf{n} y \mathbf{w} .

El parámetro Δn_n es determinado por los vectores \vec{V}_{4P} y \vec{V}_{43} , los cuales están claramente definidos, por lo tanto Δn_n es definido como

$$\Delta n_n = \frac{|\vec{V}_{4P} \times \vec{V}_{43}|}{|\vec{V}_{43}|} \quad (5.30)$$

Por otro lado, el parámetro Δn_w es determinado por los vectores \vec{V}_{1P} y \vec{V}_{14} que son generados a través de las coordenadas de los puntos 1, 4 y del nodo P , por lo tanto Δn_w es definido como

$$\Delta n_w = \frac{|\vec{V}_{1P} \times \vec{V}_{14}|}{|\vec{V}_{14}|} \quad (5.31)$$

5.2. Simulación Energética en Edificaciones

5.2.1. Balance de energía en el muro

La Figura 5.14 ilustra el diagrama que compone el **muro** del cual se determinará la variable " T_{wall} ". El muro interactúa con el **ambiente exterior** (T_{env}) por convección y radiación. Sobre el muro incide energía proveniente del sol (G_{S2}), dicha energía al interactuar con el muro, parte de ella es absorbida (α_w^*) y otra parte es reflejada (ρ_w^*) (esta última no considerada en el modelo). Por otro lado, debido a la energía proveniente del sol (G_{S1}) que incide sobre la pared semitransparente (**ventana**, ubicada en posición opuesta al muro), parte de esta energía incide hacia el interior de la habitación hasta llegar al muro, esto debido a la transmitancia (τ_g^*) que es una propiedad óptica de la ventana. En el muro, el transporte de energía se da por conducción y hacia el interior de la **habitación** (T_{room}) se considera transferencia de energía por convección.

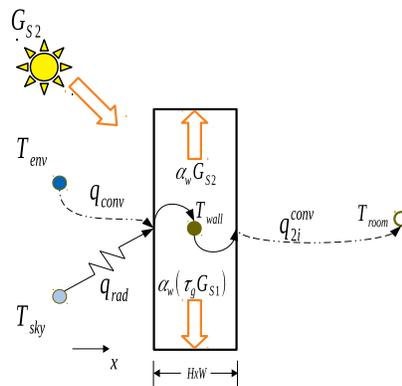


Figura 5.14: Diagrama esquemático del muro

La Figura 5.15 muestra el circuito térmico del **muro**, en el cual, se pueden observar las resistencias térmicas involucradas para el análisis que determinará la variable " T_{wall} ".

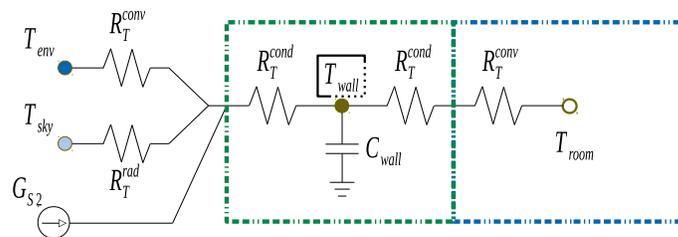


Figura 5.15: Circuito térmico del intercambio energético en el muro.

El balance de energía que se da en el muro (y cualquier otro elemento) se resume a la ley de conservación de energía ($\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = \Delta \dot{E}_{system}$)

El flujo de calor que entra al muro es determinado por

$$q_{in} = \frac{\Delta T}{R_{T_{total}}} = \frac{T_{env} - T_{wall}}{\frac{R_T^{conv} R_T^{rad}}{R_T^{conv} + R_T^{rad}} + R_T^{cond}} + \alpha_w^* (G_{S2} + \tau_g^* G_{S1}) = \frac{T_{env} - T_{wall}}{a_1} + \alpha_w^* (G_{S2} + \tau_g^* G_{S1})$$

$$\left[\frac{\frac{1}{h_{conv}} \frac{1}{h_{rad}}}{\frac{1}{h_{conv}} + \frac{1}{h_{rad}}} + \frac{HxW}{2k_{wall}} \right] \rightarrow a_1$$

$$q_{in} = \frac{T_{env} - T_{wall}}{a_1} + \alpha_w^* (G_{S2} + \tau_g^* G_{S1}) \quad (5.32)$$

El flujo de calor que sale del muro es determinado por

$$q_{out} = \frac{\Delta T}{R_{T_{total}}} = \frac{T_{wall} - T_{room}}{R_T^{cond} + R_T^{conv}} = \frac{T_{wall} - T_{room}}{a_2}$$

$$\left[\frac{HxW}{2\lambda_{wall}} + \frac{1}{h_{conv2i}} \right] \rightarrow a_2$$

$$q_{out} = \frac{T_{wall} - T_{room}}{a_2} \quad (5.33)$$

Para extender el modelo con efectos en el término de almacenamiento de energía, se tiene

$$\frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial t} V \quad (5.34)$$

donde V es el volumen de control para el balance de energía del nodo y se puede escribir como $V = A \times H = (W \times L) \times H$. A es el área de la sección transversal del elemento de la superficie que atraviesa el flujo de calor y, H es el espesor del volumen de control, como se puede observar en la Figura 5.16.

Por lo tanto, el modelo de balance de energía considerando el término de almacenamiento de energía queda como

$$(q_{in} - q_{out}) A = C$$

$$\left[\frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial t} A H \right] \rightarrow C$$

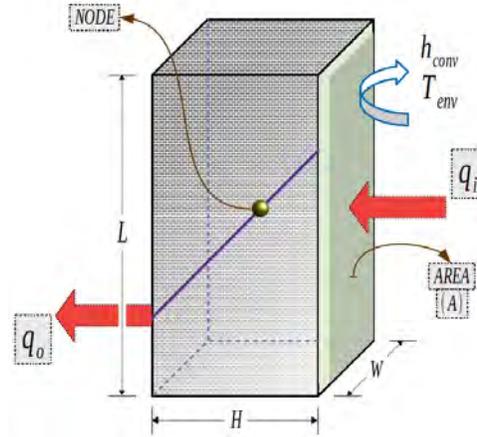


Figura 5.16: Diagrama esquemático de un volumen de control

Considerando que ρ y C_p no tienen variación en el tiempo y discretizando la variable T aplicando una formulación completamente implícita, se tiene

$$q_{in} - q_{out} = a_p^0 (T - T^0)$$

$$\left[\frac{\rho C_p H}{\Delta t} \right] \rightarrow a_p^0$$

donde T representa la temperatura del nodo sobre el elemento del cual se realiza el balance de energía.

El balance de energía sobre el muro se da por medio de la Ecuación 5.32, la Ecuación 5.33 y el término de almacenamiento de energía correspondiente al muro, obteniendo así

$$(q_{in} - q_{out}) A = C_{wall}$$

$$\left[\frac{T_{env} - T_{wall}}{a_1} + \alpha_w^* (G_{S2} + \tau_g^* G_{S1}) \right] - \left[\frac{T_{wall} - T_{room}}{a_2} \right] = a_p^0 (T_{wall} - T_{wall}^0)$$

La Ecuación 5.35 es el resultado del balance de energía en el **muro** para resolver la variable T_{wall} .

$$(a_1 + a_2 + a_1 a_2 a_p^0) \mathbf{T}_{wall} - (a_1) T_{room} = (a_2) T_{env} + (a_1 a_2 a_p^0) T_{wall}^0 + (a_1 a_2) \alpha_w^* (G_{S2} + \tau_g^* G_{S1}) \quad (5.35)$$

donde

$$a_p^0 = \frac{\rho^{wall} C_p^{wall}}{\Delta t} H x W$$

5.2.2. Balance de energía en la habitación

En la Figura 5.17 se ilustra el diagrama esquemático que compone la **habitación** de la cual se determinará la variable " T_{room} ". La habitación interactúa con sus cuatro fronteras (en 2D) **suelo** (T_{floor}), **muro** (T_{wall}), **techo** (T_{roof}) y **ventana** (T_{glass}) a diferentes niveles de intercambio energético debido a su posición e interacción con el ambiente exterior para el muro, techo y ventana y con la tierra para el suelo. El intercambio energético se da por pérdidas/ganancias por convección por la diferencia de temperatura que presentan las fronteras con respecto a " T_{room} ".

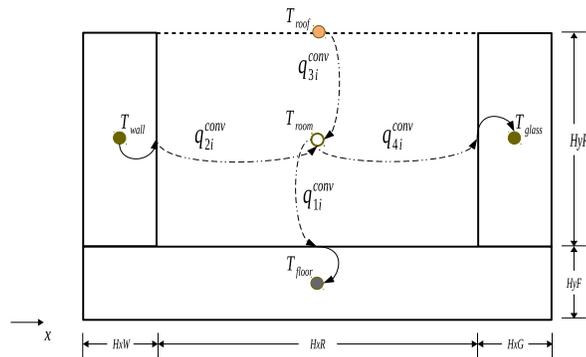


Figura 5.17: Diagrama esquemático de la habitación

En la Figura 5.18 se muestra el diagrama que compone el circuito térmico de la **habitación**, en el cual, se pueden observar las resistencias térmicas involucradas para el análisis que determinará la variable " T_{room} ".

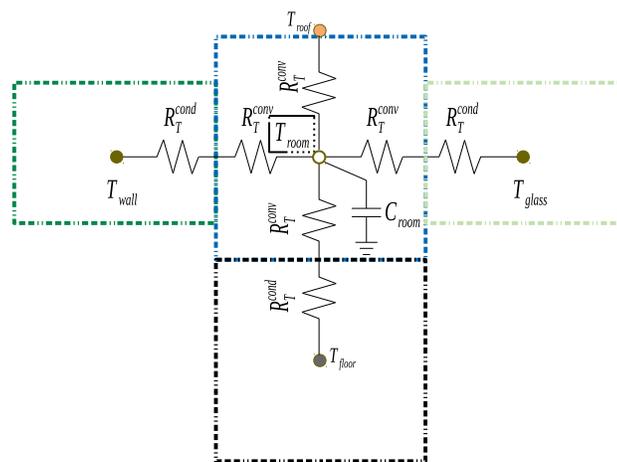


Figura 5.18: Circuito térmico del intercambio energético en la habitación

El balance de energía para la habitación aplica la consideración que la energía proveniente del muro y del techo son mayores que la energía de la ventana y el suelo, por lo que se consideran dos flujos de calor de entrada y dos flujos de calor de salida.

El flujo de calor que entra hacia la habitación es determinado por

$$q_{in} = \frac{\Delta T}{R_{T_{total}}} = \frac{T_{wall} - T_{room}}{R_T^{cond} + R_T^{conv}} + \frac{T_{roof} - T_{room}}{R_T^{conv}} = \frac{T_{wall} - T_{room}}{b_1} + \frac{T_{roof} - T_{room}}{b_2}$$

$$\left[\frac{HxW}{2k_{wall}} + \frac{1}{h_{conv2i}} \right] \rightarrow b_1 \quad \left[\frac{1}{h_{conv3i}} \right] \rightarrow b_2$$

$$q_{in} = \frac{T_{wall} - T_{room}}{b_1} + \frac{T_{roof} - T_{room}}{b_2} \quad (5.36)$$

El flujo de calor que sale de la habitación es determinado por

$$q_{out} = \frac{\Delta T}{R_{T_{total}}} = \frac{T_{room} - T_{glass}}{R_T^{conv} + R_T^{cond}} + \frac{T_{room} - T_{floor}}{R_T^{conv} + R_T^{cond}} = \frac{T_{room} - T_{glass}}{b_3} + \frac{T_{room} - T_{floor}}{b_4}$$

$$\left[\frac{1}{h_{conv4i}} + \frac{HxG}{2k_{glass}} \right] \rightarrow b_3 \quad \left[\frac{1}{h_{conv1i}} + \frac{HyF}{2k_{floor}} \right] \rightarrow b_4$$

$$q_{out} = \frac{T_{room} - T_{glass}}{b_3} + \frac{T_{room} - T_{floor}}{b_4} \quad (5.37)$$

El balance de energía en la habitación se da por medio de la Ecuación 5.36, la Ecuación 5.37 y el término de almacenamiento de energía correspondiente a la habitación, obteniendo así

$$(q_{in} - q_{out}) A = C_{room}$$

$$\left[\frac{T_{wall} - T_{room}}{b_1} + \frac{T_{roof} - T_{room}}{b_2} \right] - \left[\frac{T_{room} - T_{glass}}{b_3} + \frac{T_{room} - T_{floor}}{b_4} \right] = a_p^0 (T_{room} - T_{room}^0)$$

La Ecuación 5.38 es el resultado del balance de energía en la **habitación** para resolver la variable T_{room} .

$$\begin{aligned}
 & - (b_2 b_3 b_4) T_{wall} + (b_2 b_3 b_4 + b_1 b_3 b_4 + b_1 b_2 b_4 + b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_3 b_4 a_p^0) \mathbf{T}_{room} \\
 & - (b_1 b_2 b_4) T_{glass} - (b_1 b_2 b_3) T_{floor} \\
 & = (b_1 b_3 b_4) T_{roof} + (b_1 b_2 b_3 b_4 a_p^0) T_{room}^0
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

donde

$$a_p^0 = \frac{\rho^{air} C_p^{air}}{\Delta t} HxR$$

5.2.3. Balance de energía en la ventana

En la Figura 5.19 se ilustra el diagrama esquemático que compone la **ventana** de la cual se determinará la variable " T_{glass} ". La ventana interactúa con el **ambiente exterior** (T_{env}) con pérdidas/ganancias por convección y radiación. Sobre la ventana incide energía proveniente del sol (G_{S1}), dicha energía al interactuar con la ventana, parte de ella es reflejada (ρ_g^*) (no considerada en el modelo), otra parte es absorbida (α_g^*) y por último, una parte de dicha energía atraviesa la ventana debido a la transmitancia (τ_g^*) de la misma. En la ventana el transporte de energía se da por conducción. Desde el interior de la **habitación** (T_{room}) se considera transferencia de calor por convección.

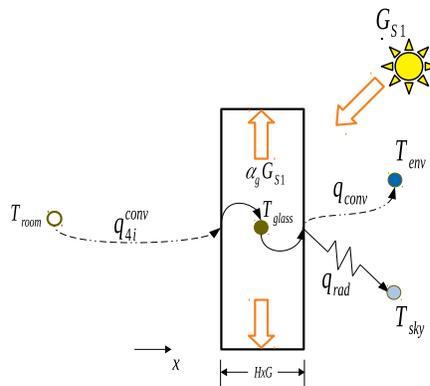


Figura 5.19: Diagrama esquemático de la ventana

En la Figura 5.20 se muestra el diagrama que compone el circuito térmico de la **ventana**, en el cual, se pueden observar las resistencias térmicas involucradas para el análisis que determinará la variable " T_{glass} ".

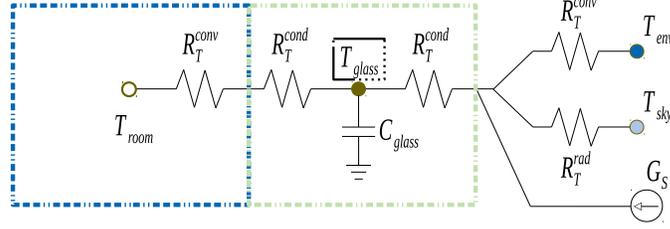


Figura 5.20: Circuito térmico del intercambio energético en la ventana

El flujo de calor que entra hacia la ventana es determinado por

$$q_{in} = \frac{\Delta T}{R_{T_{total}}} = \frac{T_{room} - T_{glass}}{R_T^{conv} + R_T^{cond}} + \alpha_g^* G_1 = \frac{T_{room} - T_{glass}}{c_1} + \alpha_g^* G_1$$

$$\left[\frac{1}{h_{conv4i}} + \frac{HxG}{2k_{glass}} \right] \rightarrow c_1$$

$$q_{in} = \frac{T_{room} - T_{glass}}{c_1} + \alpha_g^* G_1 \quad (5.39)$$

El flujo de calor que sale de la ventana es determinado por

$$q_{out} = \frac{\Delta T}{R_{T_{total}}} = \frac{T_{glass} - T_{env}}{R_T^{cond} + \frac{R_T^{conv} R_T^{rad}}{R_T^{conv} + R_T^{rad}}} = \frac{T_{glass} - T_{env}}{c_2}$$

$$\left[\frac{HxG}{2k_{glass}} + \frac{\frac{1}{h_{conv}} \frac{1}{h_{rad}}}{\frac{1}{h_{conv}} + \frac{1}{h_{rad}}} \right] \rightarrow c_2$$

$$q_{out} = \frac{T_{glass} - T_{env}}{c_2} \quad (5.40)$$

El balance de energía sobre la ventana se da por medio de la Ecuación 5.39, la Ecuación 5.40 y el término de almacenamiento de energía correspondiente a la ventana, obteniendo así

$$(q_{in} - q_{out}) A = C_{glass}$$

$$\left[\frac{T_{room} - T_{glass}}{c_1} + \alpha_g^* G_1 \right] - \left[\frac{T_{glass} - T_{env}}{c_2} \right] = a_p^0 (T_{glass} - T_{glass}^0)$$

La Ecuación 5.41 es el resultado del balance de energía en la **ventana** para resolver la variable T_{glass} .

$$-(c_2) T_{room} + (c_1 + c_2 + c_1 c_2 a_p^0) \mathbf{T}_{glass} = (c_1) T_{env} + (c_1 c_2 a_p^0) T_{glass}^0 + (c_1 c_2) \alpha_g^* G_1 \quad (5.41)$$

donde

$$a_p^0 = \frac{\rho^{glass} C_p^{glass}}{\Delta t} H x G$$

5.2.4. Balance de energía en el suelo

En la Figura 5.21 se ilustra el diagrama esquemático que compone el **suelo** del cual se determinará la variable " T_{floor} ". El suelo interactúa energéticamente hacia el interior de la **habitación** (T_{room}) por convección y hacia la **tierra** (T_{gr1}) por debajo del suelo donde se transfiere energía por medio del mecanismo de transferencia de calor por conducción a través de ellos.

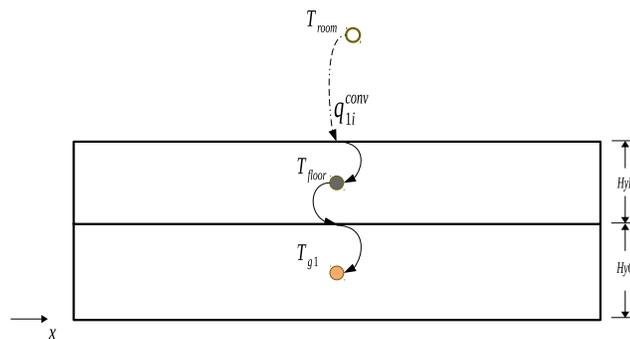


Figura 5.21: Diagrama esquemático del suelo

En la Figura 5.22 se muestra el diagrama que compone el circuito térmico del **suelo**, en el cual, se pueden observar las resistencias térmicas involucradas para el análisis que determinará la variable " T_{floor} " .

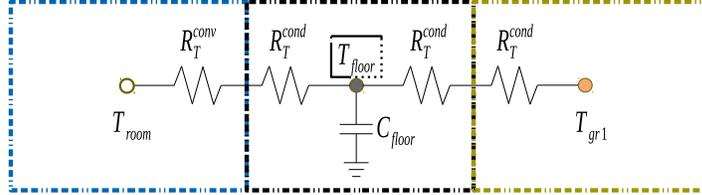


Figura 5.22: Circuito térmico del intercambio energético en el suelo

El flujo de calor que entra hacia el suelo es determinado por

$$q_{in} = \frac{\Delta T}{R_{T_{total}}} = \frac{T_{room} - T_{floor}}{R_T^{conv} + R_T^{cond}} = \frac{T_{room} - T_{floor}}{d_1}$$

$$\left[\frac{1}{h_{convli}} + \frac{HyF}{2k_{floor}} \right] \rightarrow d_1$$

$$q_{in} = \frac{T_{room} - T_{floor}}{d_1} \quad (5.42)$$

El flujo de calor que sale del suelo es determinado por

$$q_{out} = \frac{\Delta T}{R_{T_{total}}} = \frac{T_{floor} - T_{g1}}{R_T^{cond} + R_T^{cond}} = \frac{T_{floor} - T_{g1}}{d_2}$$

$$\left[\frac{HyF}{2k_{floor}} + \frac{HyG}{2k_{g1}} \right] \rightarrow d_2$$

$$q_{out} = \frac{T_{floor} - T_{g1}}{d_2} \quad (5.43)$$

El balance de energía sobre el suelo se da por medio de la Ecuación 5.42, la Ecuación 5.43 y el término de almacenamiento de energía correspondiente al suelo, obteniendo así

$$(q_{in} - q_{out}) A = C_{floor}$$

$$\left[\frac{T_{room} - T_{floor}}{d_1} \right] - \left[\frac{T_{floor} - T_{g1}}{d_2} \right] = a_p^0 (T_{floor} - T_{floor}^0)$$

La Ecuación 5.44 es el resultado del balance de energía en el **suelo** para resolver la variable T_{floor} .

$$-(d_2) T_{room} + (d_1 + d_2 + d_1 d_2 a_p^0) \mathbf{T}_{floor} - (d_1) T_{g1} = (d_1 d_2 a_p^0) T_{floor}^0 \tag{5.44}$$

donde

$$a_p^0 = \frac{\rho^{floor} C_p^{floor}}{\Delta t} HyF$$

5.2.5. Balance de energía en la tierra

La inercia térmica es la propiedad de los materiales que indica la cantidad de energía que pueden almacenar y la velocidad con la que puede ceder o absorber dicha energía. Debido a sus propiedades, la tierra presenta una peculiaridad, a cierta profundidad se encuentra una temperatura (T_{ground}) constante igual a la temperatura promedio anual del ambiente exterior (\bar{T}_{amb}). A dicha profundidad, la T_{ground} es menor a la temperatura del ambiente exterior T_{env} en verano y mayor en invierno.

En la Figura 5.23 se ilustra el diagrama esquemático que compone la **tierra** de la cual se determinará la variable " T_{g1} ". La tierra interactúa energéticamente mediante la transferencia de calor por conducción con el **suelo** (T_{floor}) y con la temperatura T_{ground} . Por otro lado, En la Figura 5.24 se muestra el diagrama que compone el circuito térmico de la **tierra**, en el cual, se pueden observar las resistencias térmicas involucradas para el análisis que determinará la variable " T_{g1} ".

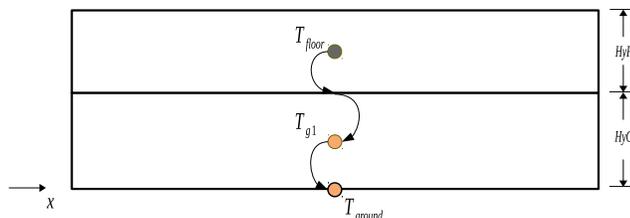


Figura 5.23: Diagrama esquemático de la tierra

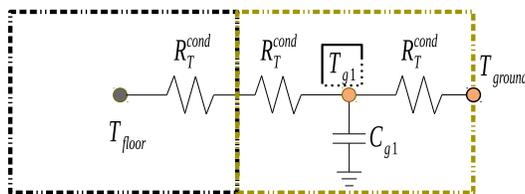


Figura 5.24: Circuito térmico del intercambio energético en la tierra

El flujo de calor que entra hacia la tierra es determinado por

$$q_{in} = \frac{\Delta T}{R_{T_{total}}} = \frac{T_{floor} - T_{g1}}{R_T^{cond} + R_T^{cond}} = \frac{T_{floor} - T_{g1}}{e_1}$$

$$\left[\frac{HyF}{2k_{floor}} + \frac{HyG}{2k_{g1}} \right] \rightarrow e_1$$

$$q_{in} = \frac{T_{floor} - T_{g1}}{e_1} \quad (5.45)$$

El flujo de calor que sale de la tierra es determinado por

$$q_{out} = \frac{\Delta T}{R_{T_{total}}} = \frac{T_{g1} - T_{ground}}{R_T^{cond}} = \frac{T_{g1} - T_{ground}}{e_2}$$

$$\left[\frac{HyG}{2k_{g1}} \right] \rightarrow e_2$$

$$q_{out} = \frac{T_{g1} - T_{ground}}{e_2} \quad (5.46)$$

El balance de energía sobre la tierra se da por medio de la Ecuación 5.45, la Ecuación 5.46 y el término de almacenamiento de energía correspondiente a la tierra, obteniendo así,

$$(q_{in} - q_{out}) A = C_{g1}$$

$$\left[\frac{T_{floor} - T_{g1}}{e_1} \right] - \left[\frac{T_{g1} - T_{ground}}{e_2} \right] = a_p^0 (T_{g1} - T_{g1}^0)$$

La Ecuación 5.47 es el resultado del balance de energía en la **tierra** para resolver la variable T_{g1} .

$$- (e_2) T_{floor} + (e_1 + e_2 + e_1 e_2 a_p^0) \mathbf{T}_{g1} = (e_1) T_{ground} + (e_1 e_2 a_p^0) T_{g1}^0 \quad (5.47)$$

donde

$$a_p^0 = \frac{\rho^{g1} C_p^{g1}}{\Delta t} HyG$$

En general, la Ecuación 5.35, Ecuación 5.38, Ecuación 5.41, Ecuación 5.44 y Ecuación 5.47, para el modelo de balance de energía de una habitación acoplada a una pared sólida, un techo, una pared semitransparente, el suelo y la tierra puede ser escrita en forma de matriz como

$$\begin{bmatrix} A_{11} & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2b_3b_4 & A_{22} & b_1b_2b_4 & b_1b_2b_3 & 0 \\ 0 & c_2 & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & A_{44} & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{wall} \\ T_{room} \\ T_{glass} \\ T_{floor} \\ T_{g1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix}$$

donde,

$$A_{11} = a_1 + a_2 + a_1a_2a_p^0$$

$$A_{22} = b_2b_3b_4 + b_1b_3b_4 + b_1b_2b_4 + b_1b_2b_3 + b_1b_2b_3b_4a_p^0$$

$$A_{33} = c_1 + c_2 + c_1c_2a_p^0$$

$$A_{44} = d_1 + d_2 + d_1d_2a_p^0$$

$$A_{55} = e_1 + e_2 + e_1e_2a_p^0$$

$$B_1 = (a_2) T_{env} + (a_1a_2) \alpha_w^* (G_2 + \tau_g^* G_1) + (a_1a_2a_p^0) T_{wall}^0$$

$$B_2 = (b_1b_3b_4) T_{roof} + (b_1b_2b_3b_4a_p^0) T_{room}^0$$

$$B_3 = (c_1) T_{env} + (c_1c_2) \alpha_g^* G_1 + (c_1c_2a_p^0) T_{glass}^0$$

$$B_4 = (d_1d_2a_p^0) T_{floor}^0$$

$$B_5 = (e_1) T_{ground} + (e_1e_2a_p^0) T_{g1}^0$$

5.2.6. CHTC

Los *Coefficientes de Transferencia de Calor Convectivos* (en inglés, CHTC), h_c , son esenciales para calcular las ganancias y pérdidas de calor por convección desde las fachadas y los techos de los edificios hacia el medio ambiente exterior e interior. El intercambio de calor por convección entre las superficies del edificio y el ambiente exterior e interior, puede ser de 3 a 4 veces mayor que el intercambio de calor por radiación de onda larga. Los CHTC's están influenciados por varios factores, como la geometría del edificio y los alrededores del edificio, la posición y rugosidad de la superficie del edificio, la velocidad y dirección del viento y las diferencias de temperatura entre la superficie y el aire. Existen diferentes métodos para obtener valores de h_c los cuales se pueden clasificar en métodos analíticos, numéricos y experimentales.

En este trabajo los CHTC's para las superficies verticales exteriores debido al viento (V) son dados por Jayamaha *et al.* (1996)

$$h_o = h_{conv} = 4.955 + 1.444V$$

Por otro lado, los CHTC's para las superficies (verticales y horizontales) al interior de la habitación son dados por Obyn y van Moeseke (2015)

$$h_i^1 = h_{conv1i} = 3.10 \cdot (\Delta T)^{0.17}$$

$$h_i^2 = h_{conv2i} = 2.35 \cdot (\Delta T)^{0.21}$$

$$h_i^3 = h_{conv3i} = 2.72 \cdot (\Delta T)^{0.13}$$

$$h_i^4 = h_{conv4i} = 2.35 \cdot (\Delta T)^{0.21}$$

5.3. Verificación del Código Numérico

Un aspecto importante en la generación de un código numérico es la verificación del mismo mediante soluciones de referencia (benchmark) o con soluciones analíticas, para discernir que el código numérico desarrollado proporcione resultados verdaderos de la solución a verificar; es por ello que para el desarrollo del modelo de CFD se presenta la solución del modelo de generación de malla seguido de la verificación del modelo matemático con la implementación de los tres tipos de condiciones de frontera. Por otro lado para el desarrollo del modelo GEB se implementaron soluciones analíticas.

5.3.1. Coordenadas Generalizadas

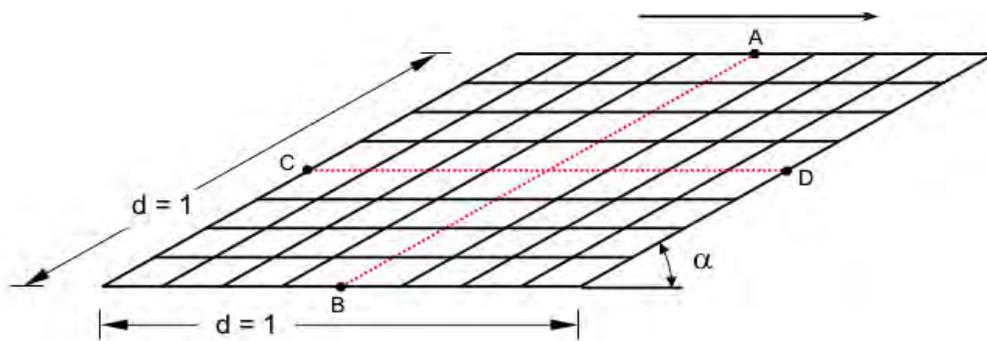
En la Figura 5.25 se presenta la metodología llevada a cabo para poder llegar a la construcción del código que resolverá el modelo de CFD. La metodología se dividió en dos fases; la primera fase fue la generación de mallas de diferentes geometrías irregulares. La segunda fase consistió en la familiarización e implementación de las condiciones de frontera en coordenadas generalizadas en diferentes geometrías.

Generación de malla

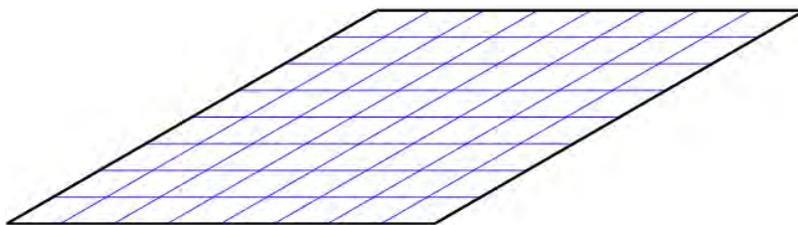
La generación de la malla para cualquier geometría es la piedra angular dentro del proceso de la dinámica de fluidos computacional. Para la verificación del código que genera la malla, Erturk y Dursun (2007) presentaron las relaciones exactas de las derivadas computacionales para un cuadrado en el cual, las fronteras verticales tienen diferentes ángulos de inclinación. En la Tabla 5.1 se muestran los datos obtenidos de las relaciones exactas y las aproximaciones de las derivadas computacionales realizadas para la generación de mallas. Por otro lado, en la Figura 5.26 se muestra la comparación cualitativa de la malla generada con el código y la presentada por Erturk y Dursun; como se puede apreciar tanto en la comparación cuantitativa (Tabla 5.1) y cualitativa (Figura 5.26), no se encuentran diferencias entre ambos.

Tabla 5.1: Comparación de las derivadas computacionales

Punto (i,j)	Erturk y Dursun (2007)				Presente Trabajo			
	Derivadas Computacionales							
	x_ξ	x_η	y_ξ	y_η	x_ξ	x_η	y_ξ	y_η
30°								
(3,2)	0.125	0.108253	0	0.0625	0.125	0.108253	0	0.0625
(5,5)	0.125	0.108253	0	0.0625	0.125	0.108253	0	0.0625
(6,7)	0.125	0.108253	0	0.0625	0.125	0.108253	0	0.0625
120°								
(3,2)	0.125	-0.0625	0	0.108253	0.125	-0.0625	0	0.108253
(5,5)	0.125	-0.0625	0	0.108253	0.125	-0.0625	0	0.108253
(6,7)	0.125	-0.0625	0	0.108253	0.125	-0.0625	0	0.108253



(a) Erturk y Dursun (2007)



(b) Presente trabajo

Figura 5.26: Verificación del código de generación de malla.

Familiarización e Implementación de las Condiciones de Frontera

En esta fase de la verificación del código numérico, se usó la configuración balance en el volumen de control frontera (5.1.4) para aplicar los tres tipos de condiciones de frontera utilizados en problemas de transferencia de calor.

En la Figura 5.27 se muestra una superficie trapezoidal de material homogéneo ($\lambda=1.8$ W/m K, $C_p=1080$ J/Kg K). Se consideró que en el medio sólo existe conducción de calor y que a través de él no existe generación de calor. La superficie se encuentra sometida a condiciones de frontera de primera clase (25 y 0°C).

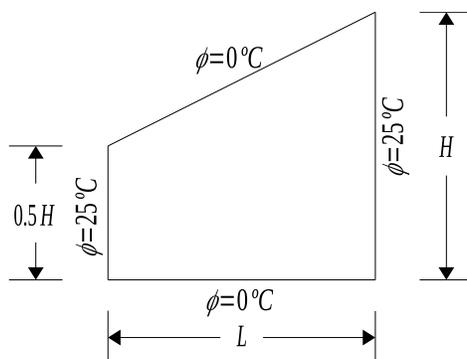


Figura 5.27: Geometría de una superficie trapezoidal

Para la solución numérica del problema, primero se genera la malla de la geometría a partir de la Ecuación 3.49. En la Figura 5.28 se muestra la malla generada para la geometría trapezoidal del problema, en donde se puede notar una distribución uniforme de las líneas de la malla.

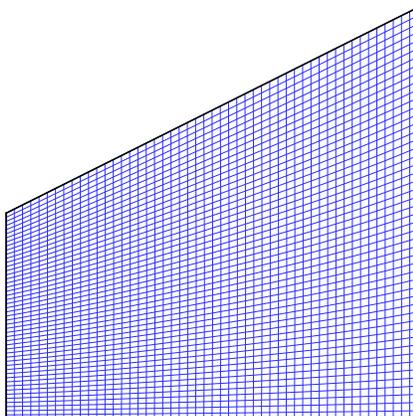


Figura 5.28: Malla de una geometría trapezoidal.

La formulación matemática del problema se hace a partir de la Ecuación 5.5 omitiendo el término transitorio, la cual resulta en la ecuación de difusión de calor bidimensional en estado permanente transformada al plano computacional. La solución del problema se muestra en la Figura 5.29, en donde se puede observar como la temperatura decrece hacia el centro de la geometría a partir de las superficies verticales y por otro lado, la temperatura incrementa hacia el centro de la geometría en la superficie superior e inferior, presentando el comportamiento de la distribución de temperatura deseado.

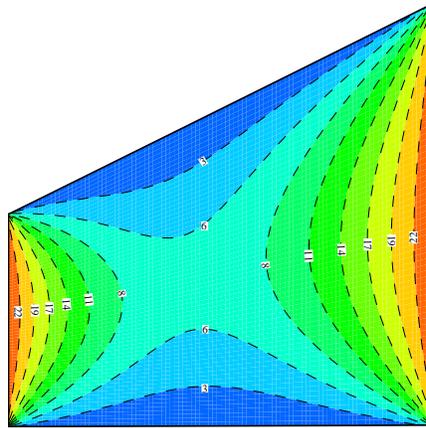


Figura 5.29: Problema de difusión de calor con condiciones de frontera de primera clase.

En la Figura 5.30 se muestra la geometría de una placa cuadrada con un orificio circular al centro. La temperatura al interior del círculo y en las superficies exteriores del cuadrado son $T_1=100^\circ\text{C}$ y $T_2=0^\circ\text{C}$, respectivamente. El diámetro del círculo es de $D=2\text{cm}$ y el ancho del cuadrado es de $w=4\text{cm}$; la conductividad térmica de la placa es de $\lambda=100\text{ W/m K}$; debido a la simetría de la geometría, solo una cuarta parte de la placa es considerada, por lo cual, dos superficies se consideran aisladas (flujo de calor cero).

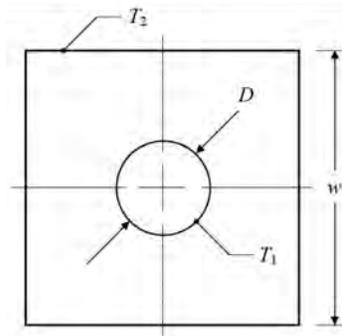


Figura 5.30: Geometría de una superficie cuadrada con orificio al centro.

Putivisutisak y Prasertlarp (2013) presentaron la solución a este problema; en la Figura 5.31 se muestra la malla presentada por Putivisutisak y la generada en este trabajo. Se puede observar que la malla generada en el presente trabajo es más densa al compararla con la presentada por Putivisutisak, pero con una buena distribución en la geometría.

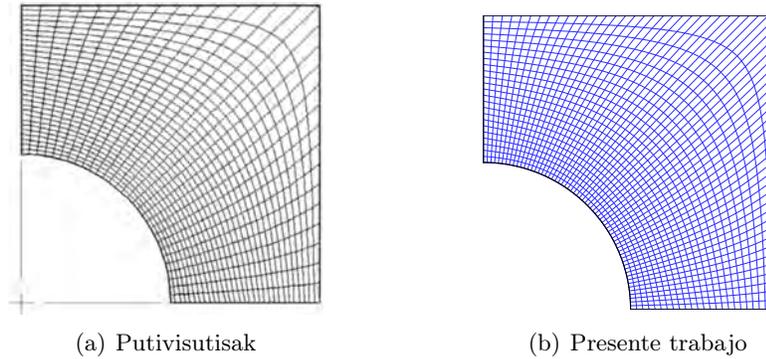


Figura 5.31: Generación de malla.

En la Figura 5.32a se muestra el perfil de temperatura presentado por Putivisutisak y Prasertlarp (2013), mientras que en la Figura 5.32b se presenta el perfil de temperatura obtenido en el presente trabajo. En ambos se observa una distribución lineal decreciente de la temperatura desde la cuarta parte del círculo hacia las orillas de la placa donde la temperatura es de 0°C . Por otro lado, Putivisutisak y Prasertlarp reportaron la tasa de flujo de calor la cual determinaron numéricamente con un valor de 816.2 W ; el valor que se obtuvo en este trabajo fue de 813.82 W , con una diferencia porcentual menor al 0.5% con la reportada en la literatura.

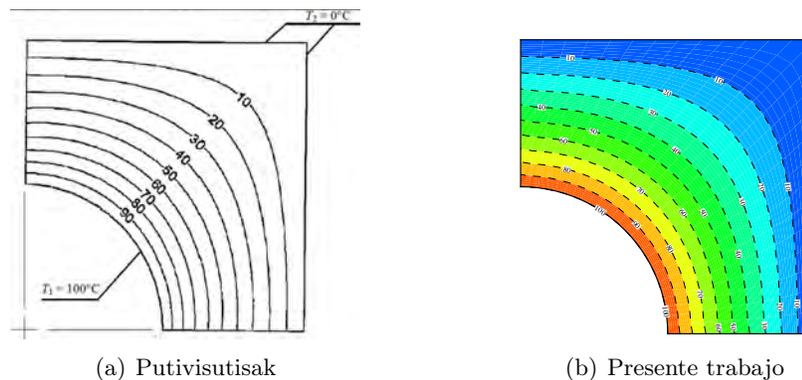


Figura 5.32: Distribución de temperatura del problema de difusión de calor con condiciones de frontera de segunda clase.

La sección transversal de una columna larga se muestra en la Figura 5.33. La frontera sur y este están aisladas y, por lo tanto, no hay intercambio de energía con el entorno exterior. En la frontera norte hay un flux constante de 350 W/m^2 , y en la frontera oeste hay intercambio por convección con el aire a una temperatura de 25°C . La columna está hecha de concreto y tiene una conductividad térmica de $\lambda=1.4 \text{ W/m K}$, $C_p=880 \text{ J/Kg K}$. El coeficiente de transferencia de calor convectivo es de $h_o=50 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ y la longitud y ancho son de 1 m .

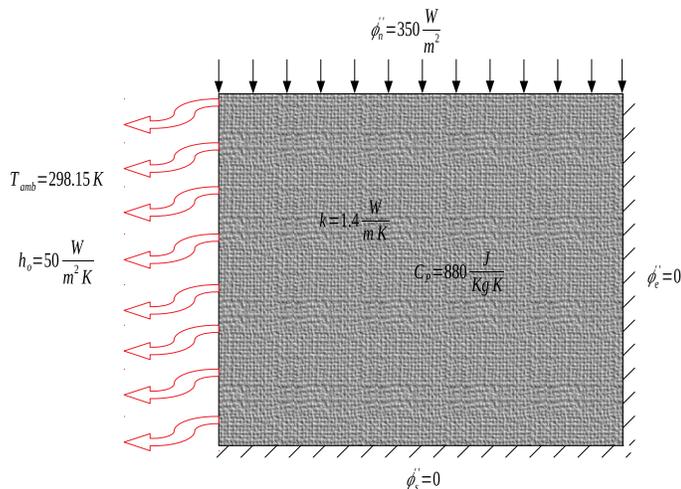


Figura 5.33: Geometría de una columna cuadrada.

de Freitas Carvalho Filho (2019) presentó la solución al problema antes descrito; de manera cuantitativa el autor reportó los valores de temperatura obtenidos para una matriz de 3×3 , los cuales son comparados con los obtenidos en este trabajo.

Tabla 5.2: de Freitas Carvalho Filho (2019)

$T_7 = 96.9822$	$T_8 = 166.5992$	$T_9 = 198.9125$
$T_4 = 67.2892$	$T_5 = 120.5697$	$T_6 = 147.8924$
$T_1 = 56.7286$	$T_2 = 100.4978$	$T_3 = 124.1951$

Tabla 5.3: Presente trabajo

$T_7 = 96.9822$	$T_8 = 166.5992$	$T_9 = 198.9124$
$T_4 = 67.2891$	$T_5 = 120.5696$	$T_6 = 147.8924$
$T_1 = 56.7285$	$T_2 = 100.4977$	$T_3 = 124.1950$

De manera cualitativa, de Freitas Carvalho Filho (2019) presentó el contorno de temperatura de la solución al problema antes descrito con un intervalo de temperatura de 31.2 a 233.8°C. Con la finalidad de verificar que el código generado es correcto en el tratamiento de las condiciones de frontera se realizó un ejercicio de simetría del problema en cuestión. En la Figura 5.34a se muestra el contorno de temperatura obtenido para el problema original, mientras que en la Figura 5.34b se muestra en ejercicio de simetría. Como se puede observar, tanto de manera cuantitativa como cualitativa los resultados obtenidos son satisfactorios.

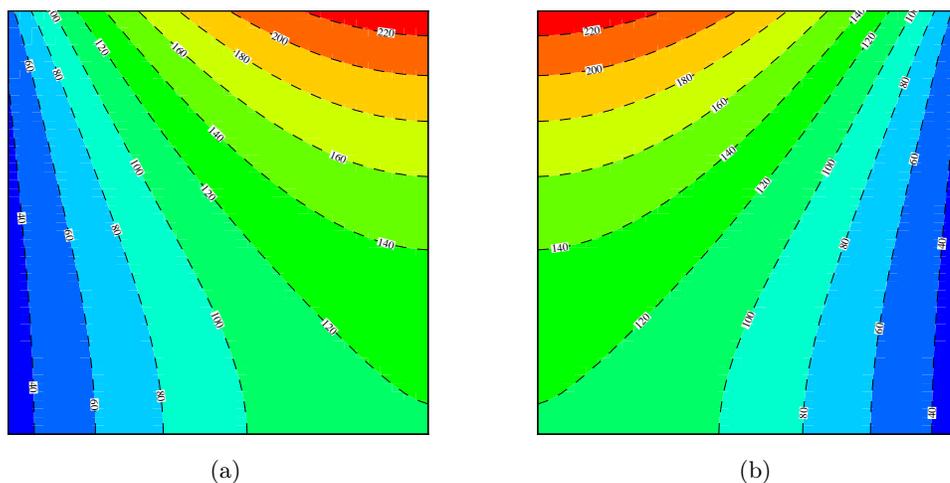


Figura 5.34: Distribución de temperatura del problema de difusión de calor con multiples tipos de condiciones de frontera.

Una modificación al problema anterior es variar la inclinación de las superficies verticales de la geometría manteniendo las dimensiones de la misma. En la Figura 5.35a se muestran los resultados obtenidos con inclinación a 45° , mientras que en la Figura 5.35b se muestra el ejercicio de simetría (inclinación de 135°) para verificar la correcta implementación de las condiciones de frontera.

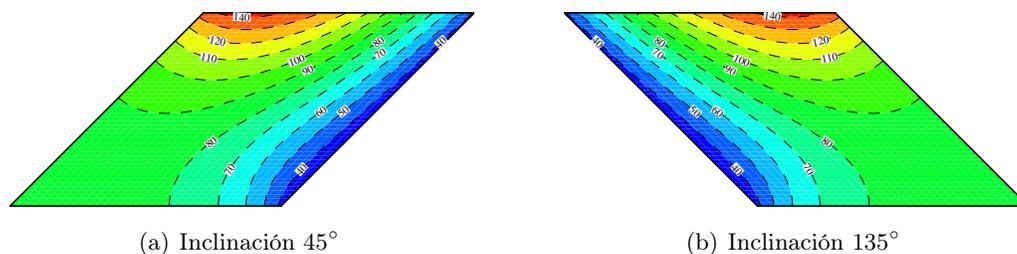


Figura 5.35: Problema de difusión de calor con multiples tipos de condiciones de frontera.

5.3.2. Balance de Energía Global

En la Figura 5.36 se muestra una barra compuesta de dos materiales, corcho ($\lambda_1=0.039$ W/m K) y plomo ($\lambda_2=35$ W/m K); cada uno de los materiales es homogéneo. Las dimensiones del corcho y el plomo son $W_1=0.4$ m y $W=1$ m, respectivamente. La barra está dividida en $n = 5$ elementos (incógnitas) con el mismo espesor cada uno de ellos, los cuales, cumplen con el concepto de placa delgada para así poder hacer un balance de energía en ellos. La barra está sujeta a pérdidas por convección en donde $T_a=100^\circ\text{C}$, $T_b=0^\circ\text{C}$ y el coeficiente de transferencia de calor convectivo es de $h_i=h_o=1.4$ W/m²K.

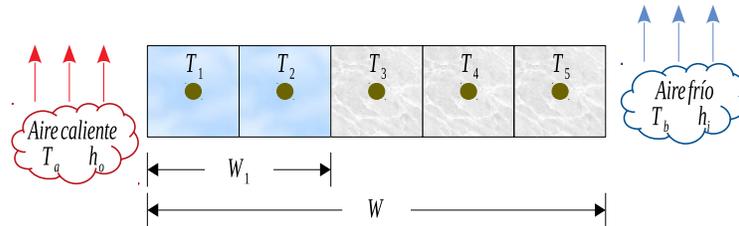


Figura 5.36: Conducción de calor en 1-D con pérdida convectiva

La solución analítica del problema se obtiene con la Ecuación 5.48.

$$\begin{aligned}
 T(x) &= \frac{T_{interface} - T_a}{W_1} (x) + T_a && \text{para } 0 \leq x \leq W_1 \\
 T(x) &= \frac{T_b - T_{interface}}{W - W_1} (x - W_1) + T_{interface} && \text{para } W_1 \leq x \leq W
 \end{aligned}
 \tag{5.48}$$

donde

$$T_{interface} = \frac{T_a + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{W_1}{W - W_1} T_b}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{W_1}{W - W_1}}$$

En la Tabla 5.4 se muestran los valores de temperatura obtenidos mediante el código generado en GEB y mediante la solución analítica. Se observa una diferencia menor al 0.5% entre ambos resultados.

Tabla 5.4: Resultados de temperatura en una barra de dos materiales

Nodo	Temperatura		
	Análítica	GEB	Diferencia (%)
	(°C)		
1	69.59	69.60	0.13
2	30.54	30.56	0.06
3	10.98	11.02	0.36
4	10.94	10.98	0.36
5	10.90	10.94	0.37

En la Figura 5.37 se muestra una losa de material homogéneo ($\lambda=1.74$ W/m K) de dimensión $W=0.1$ m. La losa está dividida en $n = 5$ elementos (incógnitas) con el mismo espesor cada uno de ellos, los cuales, cumplen con el concepto de placa delgada para así poder hacer un balance de energía en ellos. En $x=0$ m, la losa está sujeta a pérdidas por convección ($q_{conv}=h(T_a-T_1)$) en donde $T_a=30^\circ\text{C}$ con un coeficiente de transferencia de calor convectivo de $h=6$ W/m²K, pérdida radiativa ($q_{rad}=\epsilon\sigma(T_{sky}^4-T_1^4)$) en donde $\epsilon=0.90$, $\sigma=5.67\times 10^{-8}$ W/m²K y $T_{sky}=T_a$ y con un flux de $q=750$ W. En $x=W$ m la losa está sujeta a una temperatura constante $T_b=24^\circ\text{C}$.

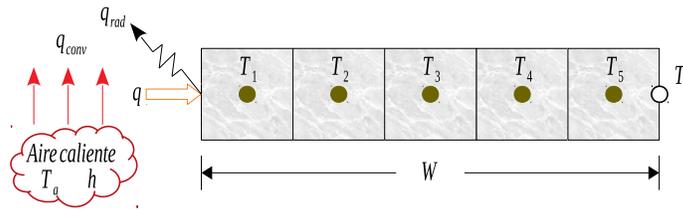


Figura 5.37: Conducción de calor en 1-D con pérdida convectiva, radiativa y flux

La solución analítica del problema se obtiene con la Ecuación 5.49.

$$T(x) = C_1x + C_2 \quad (5.49)$$

donde

$$C_1 = \frac{T_b - C_2}{W}$$

Para determinar C_2 es necesario resolver la siguiente ecuación:

$$(\epsilon\sigma W) C_2^4 + (\lambda + hW) C_2 + [- (\epsilon\sigma W T_{sky}^4 + hW T_a + q C_1 W)] = 0$$

Por lo tanto, la solución analítica es:

$$T(x) = -280.92 x + 325.092$$

En la Tabla 5.5 se muestran los valores de temperatura obtenidos mediante el código generado en GEB con pérdidas convectivas, radiativas y la imposición de un flux en una frontera y los valores obtenidos mediante la solución analítica. Se observa una diferencia menor al 1 % entre ambos resultados.

Tabla 5.5: Resultados de temperatura en una losa

Nodo	Temperatura		
	Analítica	GEB	Diferencia (%)
	(°C)		
1	49.13	49.55	0.85
2	43.51	43.77	0.59
3	37.90	37.99	0.25
4	32.28	32.31	0.10
5	26.66	26.78	0.45

Capítulo 6

Resultados

6.1. Parámetros de estudio

En esta sección se presentan los parámetros utilizados en la simulación numérica. Para ello, cabe recordar que el sistema estudiado está compuesto por distintas componentes (techo, ventana, muro, habitación, suelo y tierra), por lo cual, fue analizado utilizando dos técnicas: *Dinámica de Fluidos Computacional* (en inglés, CFD) y *Balance de Energía Global* (en inglés, GEB). El techo de geometría irregular (a dos aguas y tipo bóveda/cúpula) fue modelado con la técnica de CFD utilizando coordenadas curvilíneas llamadas igual *Coordenadas de Cuerpo Ajustado* (en inglés, BFC). Por otro lado, con la técnica de GEB se determinó la temperatura del muro, habitación, ventana, suelo y tierra.

Las propiedades termofísicas de los elementos de construcción de cada componente así como los materiales considerados para el techo se muestran en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1: Propiedades termofísicas

Material	ρ	λ	C_p
	(kg/m ³)	(W/mK)	(J/KgK)
Concreto ¹	2400	1.8	1080
Ladrillo ¹	1600	0.7	1073
Tabicón ²	2500	1.74	920
Arcilla ³	1200	1.5	1670
Vidrio Claro ⁴	2500	1.4	750

¹ASHRAE, ²Yang *et al.*, ³Arcos Feria, ⁴Olazo Gómez

En la Tabla 6.2 se muestran las propiedades ópticas del vidrio claro, mientras que en la Tabla 6.3 se muestran las propiedades de los recubrimientos utilizados en este trabajo.

Tabla 6.2: Propiedades ópticas del vidrio claro (Olazo Gómez, 2020)

Absortancia α^*	Reflectancia ρ^*	Transmitancia τ^*
0.14	0.08	0.78

Tabla 6.3: Propiedades de los recubrimientos (Hernández Pérez, 2016)

Recubrimiento	Reflectancia	Emisividad
	ρ	ϵ
Gris	0.33	0.87
Blanco	0.84	0.89
Negro	0.05	0.88
Vidrio Claro	0.08	0.85

La dimensión HxR, que corresponde a la longitud de la habitación y del techo es de $HxR = 4$ m. El techo a dos aguas tuvo una inclinación de $\theta = 35^\circ$, el espesor de cada loza de concreto fue de $W_r = 15$ cm. Para el techo tipo bóveda/cúpula el espesor fue de $W_r = 7$ cm. El espesor de cada componente es el siguiente: muro de tabicón $HxW = 15$ cm, ventana de vidrio claro $HxG = 6$ mm, suelo de concreto $HyF = 20$ cm y por último la tierra de tipo arcilla con espesor de $HyG = 1.5$ m.

El sistema fue evaluado para condiciones climáticas de la ciudad de Mérida, Yucatán con clima generalmente cálido durante todo el año. En la Figura 6.1 se muestra una habitación con un techo a dos aguas, en el cual, las superficies del techo están orientadas en dirección este-oeste, lo cual simula la trayectoria del sol durante el día.

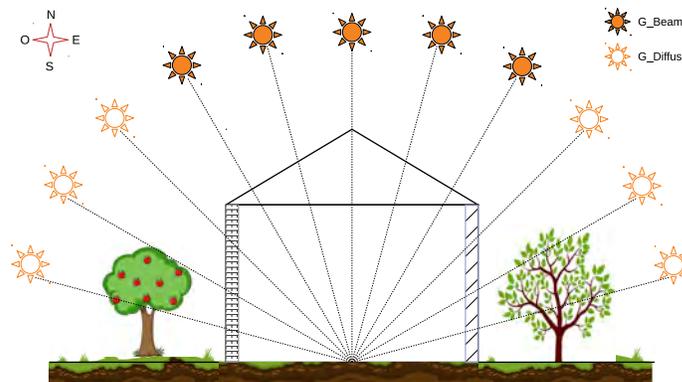


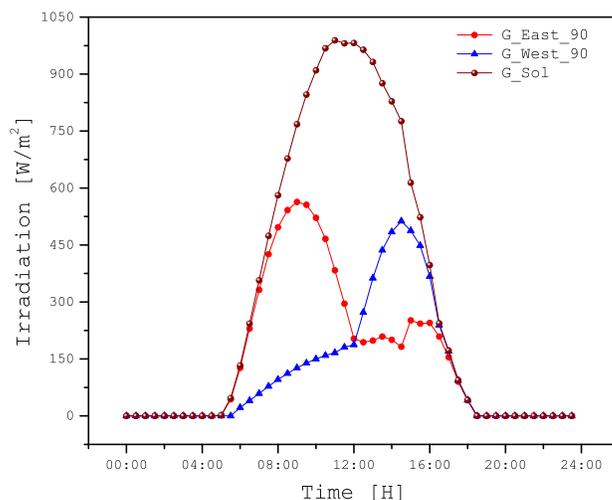
Figura 6.1: Orientación del techo.

Los datos de irradiación solar sobre una superficie horizontal, una superficie vertical orientada al este, una superficie vertical orientada al oeste, las superficies inclinadas cada una con orientación este-oeste al igual que la superficie de la bóveda/cúpula, temperatura ambiente y velocidad del viento que corresponden a la ciudad de estudio, se muestran en la Tabla 6.4 y la Tabla 6.5

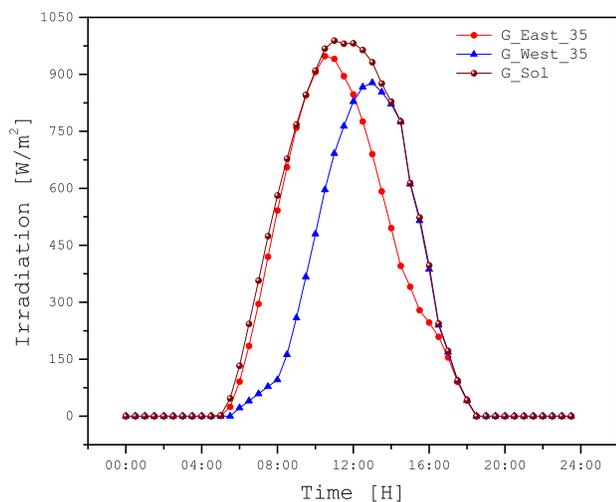
Tabla 6.4: Día más cálido (25/Jul/2018) de la ciudad de Mérida, Yucatán

Tiempo	Irradiación							T _{env}	V _{wind}
	G _{sol}	Este			Oeste				
		G _{S1}	G _{SE}	G _{SD}	G _{S2}	G _{SO}	G _{SD}		
(H)	W/m ²							(°C)	(m/s)
0:00	0	0	0	0	0	0	0	28.6	2.5
1:00	0	0	0	0	0	0	0	27.9	1.9
2:00	0	0	0	0	0	0	0	27.8	2.4
3:00	0	0	0	0	0	0	0	27.4	2.1
4:00	0	0	0	0	0	0	0	26.5	2.3
5:00	2	2	1	0	0	0	0	26.3	1.8
6:00	133	127	91	79	22	22	22	26.2	2.2
7:00	357	332	296	302	59	59	59	29	1.6
8:00	581	497	542	569	96	96	96	31.5	2.1
9:00	768	563	760	744	127	259	127	33.8	2.4
10:00	910	522	906	736	150	480	150	36.5	0.9
11:00	989	383	941	525	166	692	166	37.9	1.6
12:00	982	204	847	204	187	828	187	38.3	1.5
13:00	932	198	690	198	363	878	228	39.9	2.5
14:00	828	200	496	200	485	822	263	40.6	2.2
15:00	614	252	341	252	488	611	308	39	4.5
16:00	397	245	247	245	367	387	276	36.6	4.3
17:00	172	155	155	155	170	169	159	34.3	4.3
18:00	42	41	41	41	42	42	41	32.9	4.2
19:00	0	0	0	0	0	0	0	31.6	3.1
20:00	0	0	0	0	0	0	0	30.4	3.5
21:00	0	0	0	0	0	0	0	29.8	3.2
22:00	0	0	0	0	0	0	0	29.4	2.8
23:00	0	0	0	0	0	0	0	29	3.2

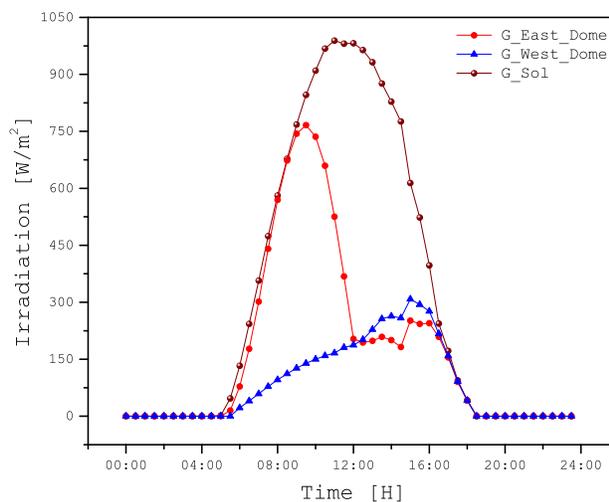
En la Figura 6.2 y Figura 6.3 se muestra la irradiación solar para el día más cálido y más frío, respectivamente, comparando la irradiación solar horizontal (G_{sol}) con la irradiación vertical (90°), la irradiación sobre la superficie inclinada (35°) y la irradiación sobre la superficie de la bóveda/cúpula, tomando la orientación este-oeste.



(a) Horizontal-Vertical



(b) Horizontal-Gable

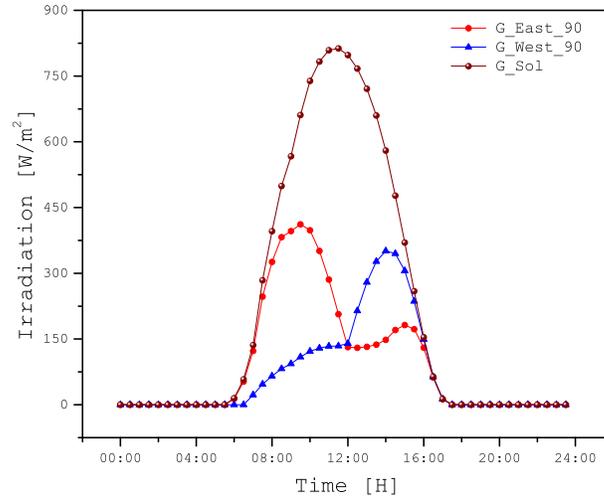


(c) Horizontal-Dome

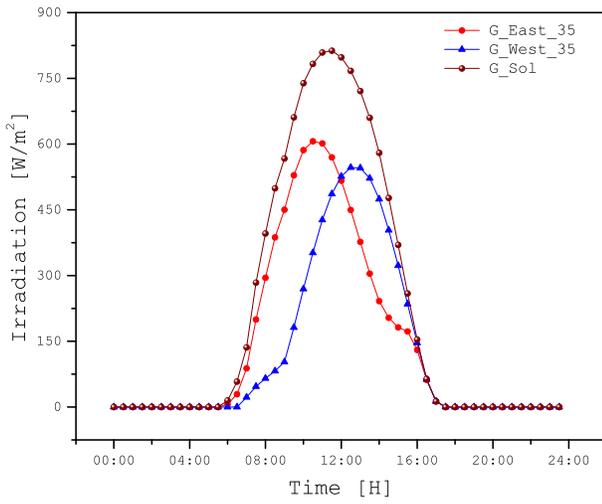
Figura 6.2: Irradiación día más cálido

Tabla 6.5: Día más frío (22/Dic/2018) de la ciudad de Mérida, Yucatán

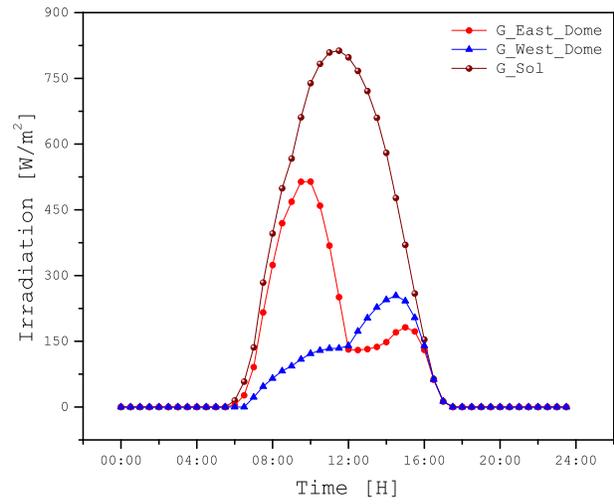
Tiempo	Irradiación							T _{env}	V _{wind}
	G _{sol}	Este			Oeste				
		G _{S1}	G _{SE}	G _{SD}	G _{S2}	G _{SO}	G _{SD}		
(H)	W/m ²							(°C)	(m/s)
0:00	0	0	0	0	0	0	0	10.6	0.8
1:00	0	0	0	0	0	0	0	11.1	1.2
2:00	0	0	0	0	0	0	0	11.5	0.9
3:00	0	0	0	0	0	0	0	11.5	0.7
4:00	0	0	0	0	0	0	0	12	0.8
5:00	0	0	0	0	0	0	0	12.6	0.6
6:00	15	14	6	4	0	0	0	13.2	0.8
7:00	136	123	88	91	22	22	22	14	0.8
8:00	396	326	295	324	65	65	65	20.2	1.1
9:00	567	396	450	469	94	103	94	23.7	2.3
10:00	739	398	586	514	122	270	122	24.3	3.1
11:00	809	285	601	368	133	427	133	25.9	2.3
12:00	798	131	516	131	140	526	140	26.9	1.7
13:00	721	132	377	132	279	546	203	27.9	2.4
14:00	580	148	242	148	351	474	245	28.3	2
15:00	370	182	182	182	306	323	242	28	2.6
16:00	154	130	130	130	149	147	140	27.1	2.5
17:00	13	13	13	13	13	13	13	24.2	1.6
18:00	0	0	0	0	0	0	0	22	3
19:00	0	0	0	0	0	0	0	20.5	3.1
20:00	0	0	0	0	0	0	0	19.8	2.9
21:00	0	0	0	0	0	0	0	19	2.9
22:00	0	0	0	0	0	0	0	18.2	3.4
23:00	0	0	0	0	0	0	0	18.1	3.2



(a) Horizontal-Vertical



(b) Horizontal-Gable



(c) Horizontal-Dome

Figura 6.3: Irradiación día más frío

6.2. Evaluación del sistema

En esta sección se presenta la evaluación térmica de las diferentes configuraciones a través de los flujos de calor promedio transmitidos a lo largo de la superficie interior de cada uno de los techos que se encuentra en contacto con el nodo que representa la habitación, las temperaturas promedio sobre las superficies exterior e interior de cada configuración de techo así como el correspondiente recubrimiento.

Para la descripción de la evaluación del sistema se seleccionaron 4 componentes que conforman el sistema: techo, habitación, muro y ventana.

6.2.1. Temperatura - Día más Cálido

El día más cálido del año 2018 en la ciudad de Mérida, Yucatán registro una temperatura de 41.3°C a las 13:50 horas. El intervalo de horas de irradiación solar fue de las 05:00 a las 18:00 horas teniendo registro de la mayor irradiación solar (horizontal) a las 11:50 horas de 1004 W/m². Por otro lado, la mayor irradiación solar en la orientación *este* sobre la superficie vertical (90°) fue de 563 W/m² registrada a las 09:00 horas; sobre la superficie inclinada a 35° de 948 W/m² a las 10:30 horas y sobre la bóveda/cúpula fue de 766 W/m² a las 09:30 horas. En la orientación *oeste* el mayor valor de irradiación solar sobre la superficie vertical (90°) fue de 512 W/m² registrada a las 14:30 horas; sobre la superficie inclinada a 35° de 880 W/m² a las 12:50 horas y sobre la bóveda/cúpula fue de 308 W/m² a las 15:00 horas.

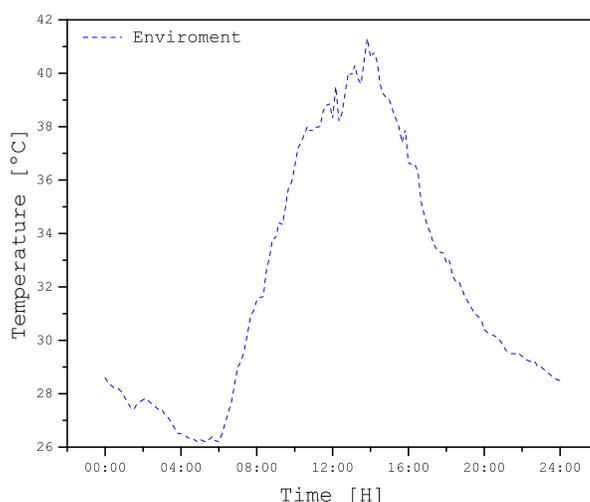


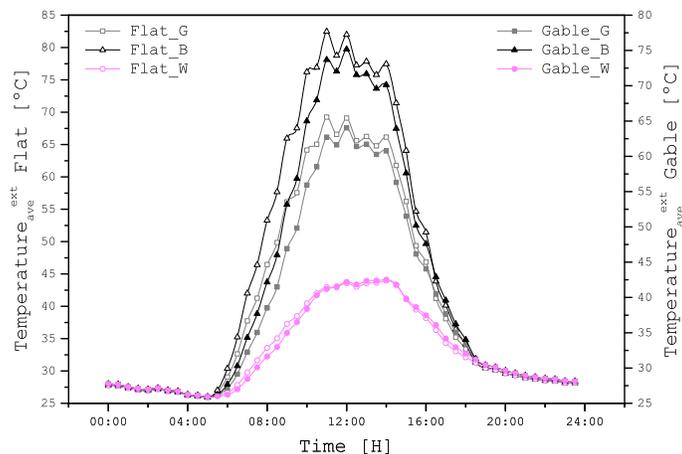
Figura 6.4: Temperatura a través del día más cálido

Techo

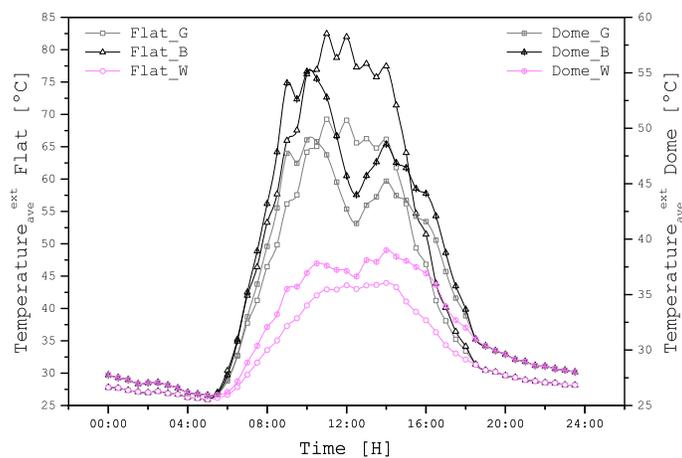
La distribución de temperatura promedio sobre la superficie exterior a lo largo de todo el día se muestra en la Figura 6.5. En las tres gráficas se observa que a partir de las 06:00 horas se incrementa la temperatura en la superficie esto debido a la presencia de la irradiación solar. En la Figura 6.5a se observa la comparación de la temperatura promedio de la superficie exterior entre el techo plano y el techo a dos aguas. Los resultados muestran al techo plano (con los tres recubrimientos) con las mayores temperaturas durante las horas irradiación solar, teniendo la mayor temperatura a las 11:00 horas con 82.5°C utilizando recubrimiento negro. En esta comparación se observa al techo plano y al techo a dos aguas con recubrimiento blanco (Flat_W y Gable_W) que presentan temperaturas similares durante todo el día con una diferencia entre 2 y 3°C , mientras que los recubrimientos negro (Flat_B y Gable_B) y gris (Flat_G y Gable_G) presentan una diferencia promedio superior a los 5°C .

En la Figura 6.5b se observa la comparación de la temperatura promedio de la superficie exterior entre el techo plano y el techo tipo bóveda/cúpula. Los resultados muestran una diferencia significativa en todas las configuraciones, mientras el techo plano con recubrimiento negro (Flat_B) a las 11:00 horas obtuvo la mayor temperatura (82.5°C) durante todo el día, a la misma hora el techo tipo bóveda/cúpula con el mismo recubrimiento, presentó la temperatura de 52.8°C .

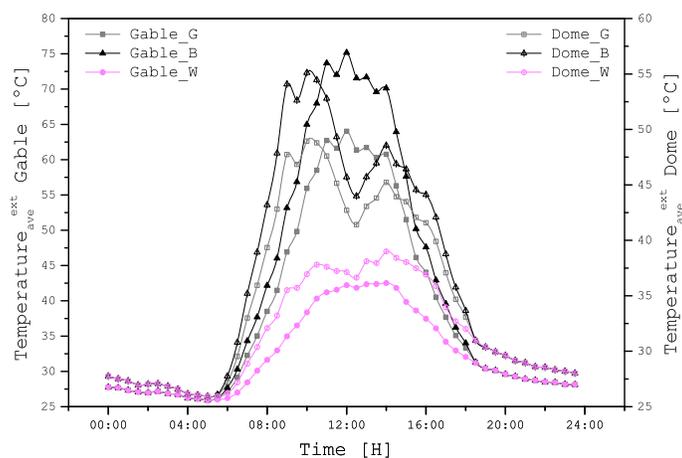
En la Figura 6.5c se observa la comparación de la temperatura promedio de la superficie exterior entre el techo a dos aguas y el techo tipo bóveda/cúpula. Los resultados indican que el techo a dos aguas obtuvo la máxima temperatura promedio en la superficie exterior a las 12:00 horas con 75.2°C utilizando recubrimiento negro (Gable_B) en dicha superficie; mientras que con el techo tipo bóveda/cúpula utilizando el mismo recubrimiento la temperatura más alta se obtuvo a las 10:00 horas con 55.1°C . En esta comparación se puede observar que el techo tipo bóveda/cúpula utilizando recubrimiento blanco (Dome_W) obtuvo las temperaturas promedio más bajas durante todo el día.



(a) Plano - Dos aguas



(b) Plano - Bóveda/cúpula



(c) Dos aguas - Bóveda/cúpula

Figura 6.5: Temperatura superficie exterior

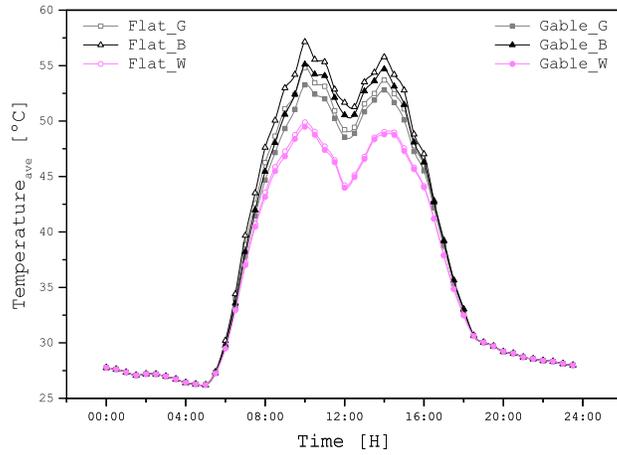
Habitación

La distribución de la temperatura promedio en el nodo representativo de la habitación a través de todo el día se muestra en la Figura 6.6. En las tres gráficas se observa que a partir de las 06:00 horas se incrementa la temperatura esto debido a la presencia de la irradiación solar sobre la superficie exterior del techo, lo cual provoca un incremento en dicha superficie y a través del mecanismo de transferencia de calor por conducción la superficie interior del techo (en contacto con la habitación) incrementa de temperatura y a su vez ésta proporciona energía al nodo que representa la habitación.

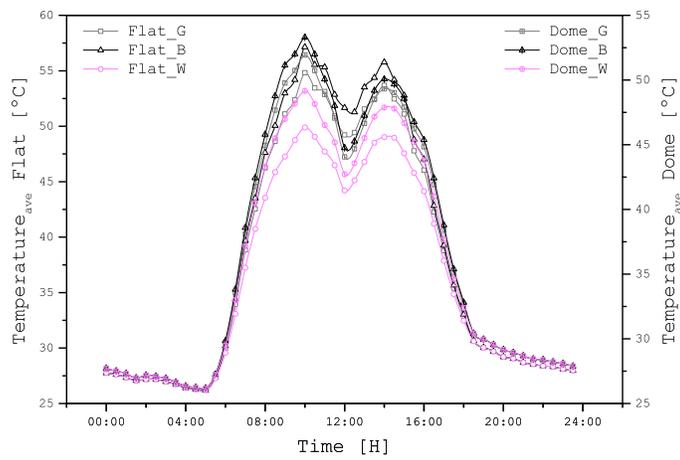
En la Figura 6.6a se observa la comparación de la temperatura del nodo representativo de la habitación usando el techo plano y el techo a dos aguas. Los resultados muestran un comportamiento similar en la temperatura del nodo de la habitación entre ambos techos usando el recubrimiento blanco (Flat_W y Gable_W). La temperatura más alta en la habitación se obtuvo con el techo plano usando el recubrimiento negro (Flat_B) que fue de 57.2°C a las 10:00 horas. En esa misma hora con el mismo recubrimiento, el techo a dos aguas (Gable_B) obtuvo la temperatura de 55.1°C, misma que se obtuvo a esa hora en el techo plano usando recubrimiento gris (Flat_G).

En la Figura 6.6b se observa la comparación de la temperatura del nodo representativo de la habitación usando el techo plano y el techo tipo bóveda/cúpula. Los resultados muestran la temperatura más alta de 57.2°C usando el techo plano con recubrimiento negro (Flat_B); mientras que con el techo tipo bóveda/cúpula con recubrimiento negro (Dome_B) se presenta una reducción de 4°C con respecto al Flat_B a la misma hora (53.2°C).

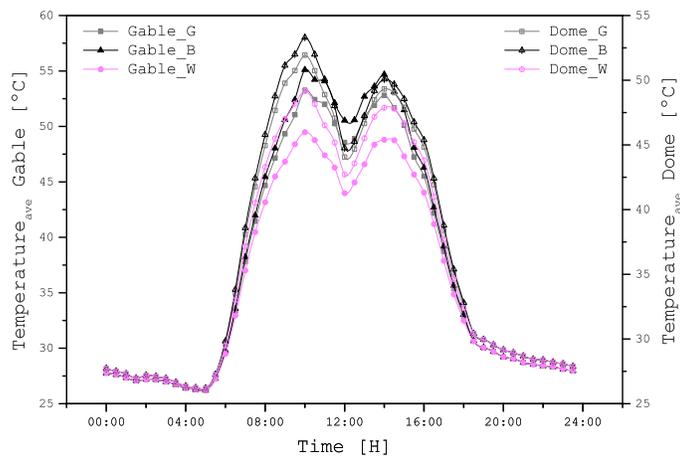
En la Figura 6.6c se observa la comparación de la temperatura del nodo representativo de la habitación usando el techo a dos aguas y el techo tipo bóveda/cúpula. Los resultados muestran que al usar recubrimiento blanco en ambos techos (Gable_W y Dome_W), las temperaturas obtenidas durante todo el día son similares con una diferencia de solo 1°C en algunas horas. Por otro lado, los techos con el recubrimiento negro a las 12:00 horas presentan una diferencia de temperatura de 6°C entre ellos, en donde el techo a dos aguas (Gable_B) obtuvo la temperatura de 50.1°C y el techo tipo bóveda/cúpula (Dome_B) con temperatura de 44.1°C.



(a) Plano - Dos aguas



(b) Plano - Bóveda/cúpula



(c) Dos aguas - Bóveda/cúpula

Figura 6.6: Temperatura de habitación

Ventana

La distribución de temperatura en el nodo que representa la ventana de vidrio claro a través de todo el día se muestra en la Figura 6.7. La temperatura obtenida en el nodo es similar en los tres tipos de techos usando los tres recubrimientos. En la Figura 6.7 se observa la comparación de la temperatura de la ventana usando el techo a dos aguas y el techo tipo bóveda/cúpula. Los resultados indican que no hay una variación significativa al usar un techo a dos aguas o un techo tipo bóveda/cúpula con cualquiera de los tres recubrimientos (gris, negro y blanco). La temperatura más alta se obtuvo a las 10:00 horas con el techo a dos aguas y con el recubrimiento negro (Gable_B) con 45.6°C , mientras que a esa misma hora solo 0.5°C abajo el techo tipo bóveda/cúpula con recubrimiento negro (Dome_B) obtuvo una temperatura de 45.1°C

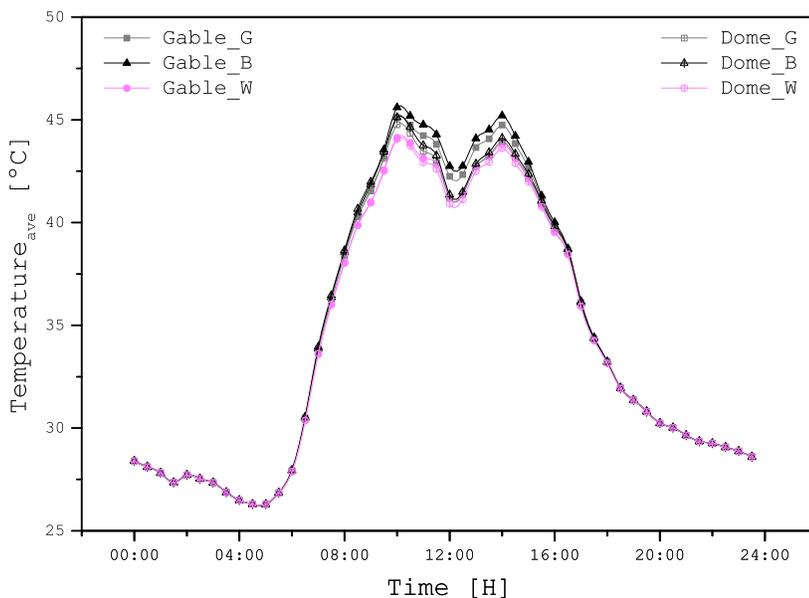


Figura 6.7: Temperatura de ventana

6.2.2. Temperatura - Día más Frío

El día más frío del año 2018 en la ciudad de Mérida, Yucatán registro una temperatura de 10.6°C a las 00:00 horas, la temperatura más alta ese mismo día fue de 28.7°C a las 14:20 horas. El intervalo de horas de irradiación solar fue de las 06:00 a las 17:00 horas teniendo registro de la mayor irradiación solar (horizontal) a las 11:20 de 815 W/m^2 . Por otro lado, la mayor irradiación solar en la orientación *este* sobre la superficie vertical (90°) fue de 412 W/m^2 registrada a las 09:40 horas; sobre la superficie inclinada a 35° de 607 W/m^2 a las 10:40 horas y sobre la bóveda/cúpula fue de 523 W/m^2 a las 09:50 horas. En la orientación *oeste* el mayor valor de irradiación solar sobre la superficie vertical (90°) fue de 353 W/m^2 registrada a las 14:10 horas; sobre la superficie inclinada a 35° de 546 W/m^2 a las 12:30 horas y sobre la bóveda/cúpula fue de 254 W/m^2 a las 14:30 horas.

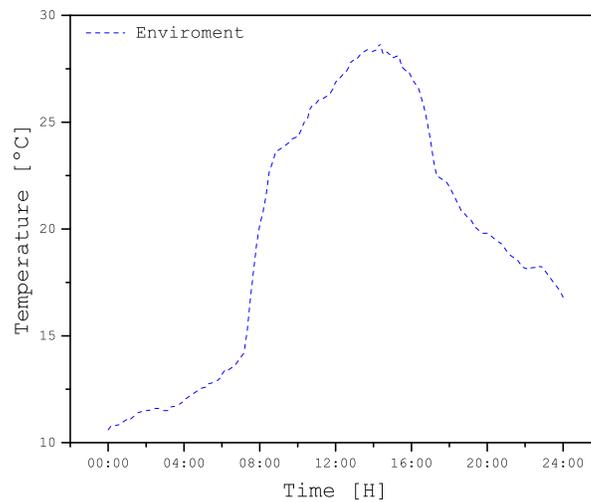


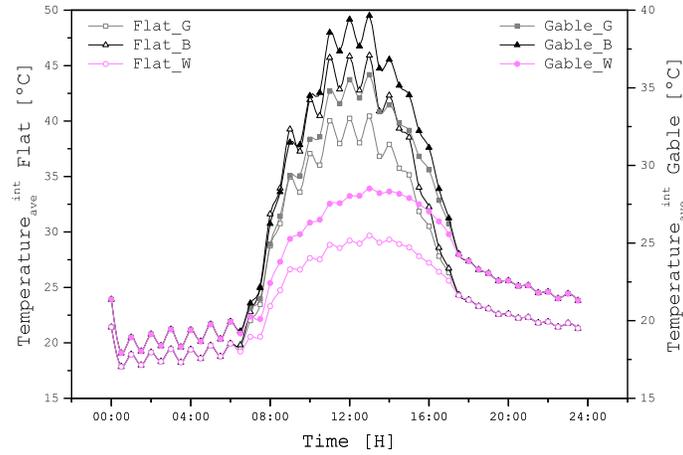
Figura 6.8: Temperatura a través del día más frío

Techo

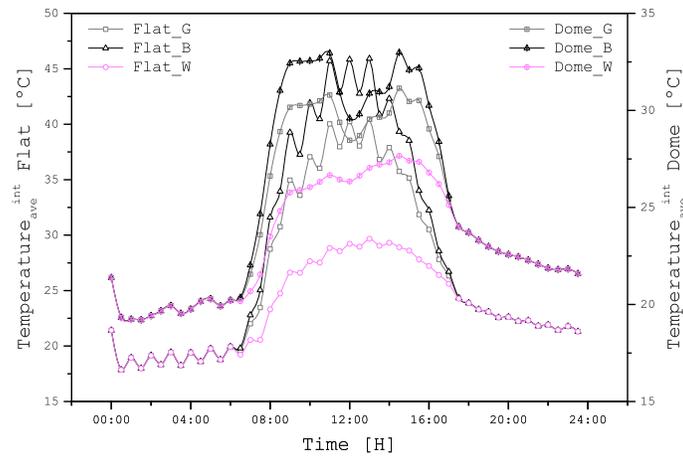
La distribución de temperatura promedio sobre la superficie interior a lo largo de todo el día se muestra en la Figura 6.9. En las tres gráficas se observa que a partir de las 07:00 horas se incrementa la temperatura en la superficie esto debido a la presencia de la irradiación solar. En la Figura 6.9a se observa la comparación de la temperatura promedio de la superficie interior entre el techo plano y el techo a dos aguas. Los resultados muestran al techo plano (con los tres recubrimientos) con las mayores temperaturas durante las horas irradiación solar, teniendo la mayor temperatura a las 13:00 con 45.9°C utilizando recubrimiento negro. En esta comparación se observa al techo a dos aguas con recubrimiento blanco (Gable_W) que presenta las temperaturas más bajas en las horas de irradiación solar en comparación con el techo plano (con los tres recubrimientos) y el mismo techo a dos aguas. El recubrimiento gris en ambos techos presentan las mayores diferencias de temperaturas entre ellos; a las 13:00 el techo plano con el recubrimiento gris (Flat_G) obtuvo una temperatura de 40.5°C , mientras que para el techo a dos aguas con el mismo recubrimiento (Gable_G) obtuvo la temperatura de 35.8°C , una diferencia de 4.7°C entre ellos.

En la Figura 6.9b se observa la comparación de la temperatura promedio de la superficie interior entre el techo plano y el techo tipo bóveda/cúpula. Los resultados muestran una diferencia significativa en todas las configuraciones, mientras el techo plano con recubrimiento negro (Flat_B) a las 13:00 obtuvo la mayor temperatura (45.9°C) durante todo el día, a la misma hora el techo tipo bóveda/cúpula con el mismo recubrimiento, presentó la temperatura de 30.8°C .

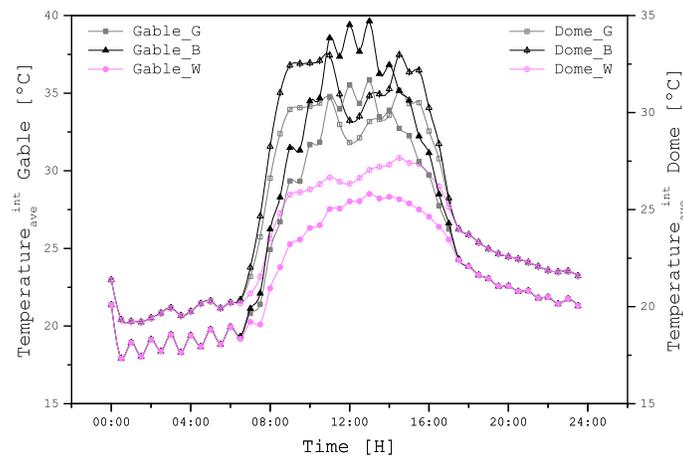
En la Figura 6.9c se observa la comparación de la temperatura promedio de la superficie interior entre el techo a dos aguas y el techo tipo bóveda/cúpula. Los resultados indican que el techo a dos aguas obtuvo la máxima temperatura promedio en la superficie interior a las 13:00 horas con 39.6°C utilizando recubrimiento negro (Gable_B) en dicha superficie; mientras que con el techo tipo bóveda/cúpula utilizando el mismo recubrimiento la temperatura más alta se obtuvo a las 11:00 horas con 32.9°C . En esta comparación se puede observar que en ambos techos al utilizar recubrimiento blanco (Gable_W y Dome_W) no hay una diferencia significativa en la temperatura promedio de la superficie interior del techo.



(a) Plano - Dos aguas



(b) Plano - Bóveda/cúpula



(c) Dos aguas - Bóveda/cúpula

Figura 6.9: Temperatura superficie interior

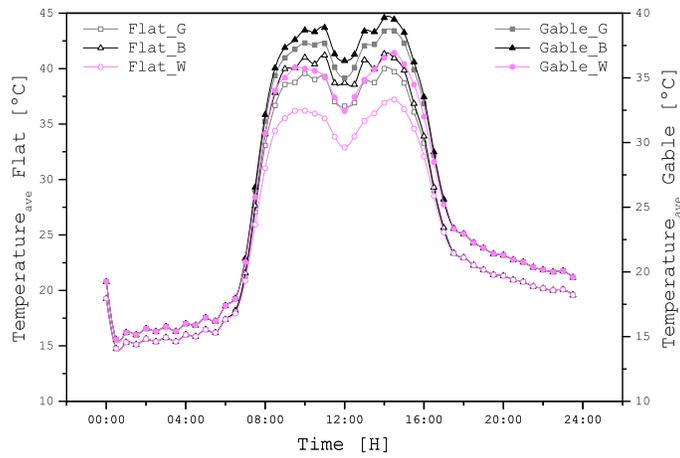
Habitación

La distribución de la temperatura promedio en el nodo representativo de la habitación a través de todo el día se muestra en la Figura 6.10. En las tres gráficas se observa que a partir de las 07:00 horas se incrementa la temperatura esto debido a la presencia de la irradiación solar sobre la superficie exterior del techo, lo cual provoca un incremento en dicha superficie y a través del mecanismo de transferencia de calor por conducción la superficie interior del techo (en contacto con la habitación) incrementa de temperatura y a su vez ésta proporciona energía al nodo que representa la habitación.

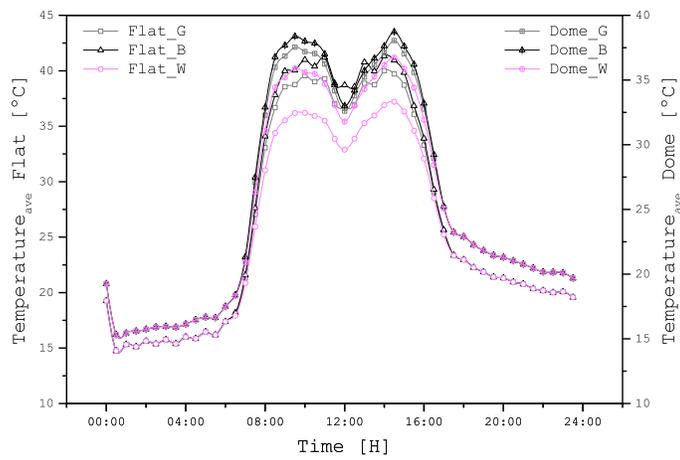
En la Figura 6.10a se observa la comparación de la temperatura del nodo representativo de la habitación usando el techo plano y el techo a dos aguas. Los resultados muestran un comportamiento similar en la temperatura del nodo de la habitación entre el techo plano con recubrimiento negro (Flat_B) y con recubrimiento gris (Flat_G), la diferencia de temperatura entre ellos en horas de irradiación solar es de solo 2°C. La temperatura más alta en la habitación se obtuvo con el techo plano usando el recubrimiento negro (Flat_B) que fue de 41.3°C a las 14:00 horas. En esa misma hora con el mismo recubrimiento, el techo a dos aguas (Gable_B) obtuvo la temperatura de 39.6°C

En la Figura 6.10b se observa la comparación de la temperatura del nodo representativo de la habitación usando el techo plano y el techo tipo bóveda/cúpula. Los resultados muestran la temperatura más alta de 41.3°C usando el techo plano con recubrimiento negro (Flat_B); mientras que con el techo tipo bóveda/cúpula con recubrimiento negro (Dome_B) se presenta una reducción de 3.7°C con respecto al Flat_B a la misma hora (37.6°C).

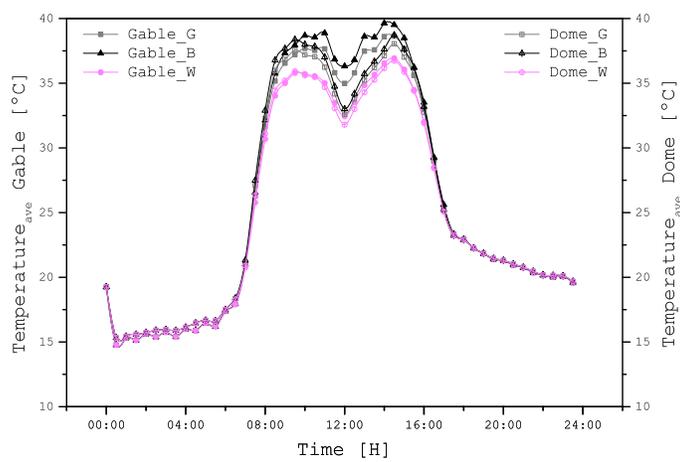
En la Figura 6.10c se observa la comparación de la temperatura del nodo representativo de la habitación usando el techo a dos aguas y el techo tipo bóveda/cúpula. Los resultados muestran que al usar recubrimiento blanco en ambos techos (Gable_W y Dome_W), las temperaturas obtenidas durante todo el día son similares y las menores en comparación con los recubrimientos restantes. Por otro lado, se puede observar que la diferencia entre usar los distintos tipos de recubrimientos en los dos tipos de techos mostrados en la Figura 6.10c, no es tan significativa.



(a) Plano - Dos aguas



(b) Plano - Bóveda/cúpula



(c) Dos aguas - Bóveda/cúpula

Figura 6.10: Temperatura de habitación

Muro

La distribución de temperatura en el nodo que representa el muro a través de todo el día se muestra en la Figura 6.11. La temperatura obtenida en el nodo es similar en los tres tipos de techos usando los tres recubrimientos. En la Figura 6.11 se observa la comparación de la temperatura del muro usando el techo a dos aguas y el techo tipo bóveda/cúpula. Los resultados indican que no hay una variación significativa al usar un techo a dos aguas o un techo tipo bóveda/cúpula con cualquiera de los tres recubrimientos (gris, negro y blanco). La temperatura más alta se obtuvo a las 14:30 horas en ambos techos y con los tres recubrimientos con solo una diferencia de 0.5°C.

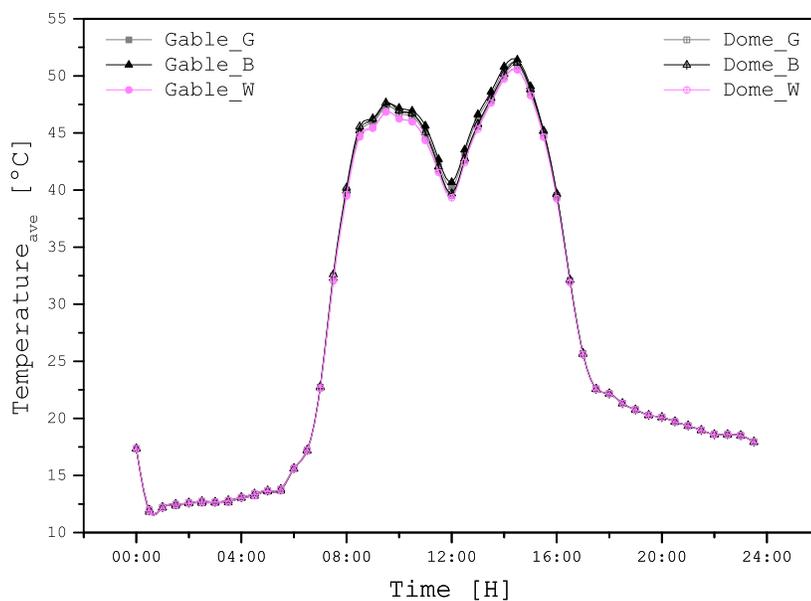


Figura 6.11: Temperatura del muro

6.2.3. Flujo de Calor

Techo - Superficie Interior

Es importante analizar el comportamiento térmico de las diferentes configuraciones del techo, ya que al igual que los distintos recubrimientos, éste es la componente principal de estudio en este trabajo; es por ello que se analiza el transporte de energía térmica a través de cada techo con su respectivo recubrimiento. Mediante una integración numérica por la regla del trapecio de los flujos de calor obtenidos (q_{in}), se obtiene el flujo de calor promedio total ($\bar{q}[t]$) sobre la superficie interior del techo para el día más cálido y el día más frío, el cual se lista en la Tabla 6.6.

Para el día más cálido, la carga de calentamiento es nula, esto debido al clima que se tiene en Mérida, Yucatán. Por otro lado, la carga de enfriamiento (que representan la carga de energía total) más alta se obtiene con el recubrimiento negro, 2.32, 2.09 y 1.42 kWh/m² para el techo plano, el techo a dos aguas y el techo tipo bóveda/cúpula, respectivamente; mientras que la carga de enfriamiento más baja es para el techo tipo bóveda/cúpula con 0.78 kWh/m².

En el día más frío debido a las bajas temperaturas se requiere energía para calentar la habitación y tenerla a una temperatura de confort (setpoint = 25°C). Las mayores cargas de calentamiento se presentan en los techos con recubrimiento blanco (superficie exterior), debido a su alto valor de reflectancia, produce un efecto de flujo de calor negativo en ciertas horas del día, por lo que la habitación está perdiendo energía hacia el medio ambiente debido a las bajas temperaturas y a la nula irradiación solar, lo que indica que la habitación funge como una fuente de energía hacia el exterior. En horas de irradiación solar y temperatura ambiente mayor a la temperatura de la habitación (setpoint), se presentan cargas de enfriamiento, de las cuales la menor carga es para el techo tipo bóveda/cúpula con recubrimiento blanco con una carga de enfriamiento de 0.10 kWh/m², mientras que el techo plano con recubrimiento negro tiene una carga de enfriamiento de 1.10 kWh/m², siendo esta la mayor carga de enfriamiento. El techo a dos aguas con recubrimiento gris presenta 0.26 kWh/m² menos en la carga de enfriamiento con respecto al techo plano con el mismo recubrimiento; mientras que en comparación con el techo tipo bóveda/cúpula, se tiene un incremento de 0.17 kWh/m².

El flujo de calor por unidad de área (W/m^2) del día más cálido y frío se lista en la Tabla 6.7 y la Tabla 6.8, respectivamente, cada 30 min completando las 24:00 horas (00:00).

Tabla 6.6: Carga de energía térmica (q_{in})

Recubrimiento	$\bar{q}[t] = \int_{00:00}^{23:30} q_{\text{in}}(t) dt$ (kWh/m ²)					
	Día más cálido			Día más frío		
	Carga térmica		Carga total	Carga térmica		Carga total
	Cal ¹	Enf ²		Cal ¹	Enf ²	
Flat						
Black	0	2.32	2.32	-0.46	1.10	1.56
Gray	0	1.84	1.84	-0.46	0.78	1.25
White	0	0.96	0.96	-0.50	0.20	0.69
Gable						
Black	0	2.09	2.09	-0.50	0.74	1.24
Gray	0	1.69	1.69	-0.51	0.53	1.04
White	0	0.96	0.96	-0.54	0.14	0.67
Dome						
Black	0	1.42	1.42	-0.43	0.50	0.92
Gray	0	1.20	1.20	-0.43	0.36	0.79
White	0	0.78	0.78	-0.45	0.10	0.56

¹Calentamiento, ²Enfriamiento

Tabla 6.7: Flujos de calor promedio (q_{in}) (Día más Cálido)

Tiempo	Black			Gray			White		
	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome
(H)	(W/m ²)								
00:00	14.21	15.16	13.64	14.20	15.15	13.63	14.21	15.17	13.66
00:30	14.64	15.43	12.41	14.64	15.43	12.39	14.65	15.44	12.42
01:00	12.04	12.81	11.54	12.03	12.80	11.53	12.04	12.82	11.55
01:30	11.62	12.23	9.73	11.62	12.23	9.72	11.62	12.24	9.73
02:00	9.76	10.42	9.88	9.75	10.41	9.87	9.76	10.43	9.89
02:30	11.73	12.39	10.27	11.72	12.39	10.26	11.73	12.40	10.28
03:00	9.54	10.15	9.07	9.53	10.14	9.06	9.55	10.15	9.08
03:30	9.56	10.06	7.92	9.56	10.05	7.92	9.56	10.06	7.93
04:00	6.80	7.17	5.77	6.80	7.16	5.77	6.81	7.17	5.78
04:30	6.07	6.40	5.18	6.07	6.40	5.17	6.07	6.40	5.19
05:00	4.81	5.10	4.45	4.80	5.09	4.45	4.81	5.10	4.46
05:30	7.91	6.23	5.18	7.12	6.01	4.95	5.67	5.62	4.54
06:00	20.87	11.90	13.57	16.13	9.88	10.90	7.43	6.19	6.00
06:30	39.96	23.23	28.96	29.99	18.31	22.45	11.72	9.29	10.45
07:00	73.51	43.53	51.79	54.72	33.78	40.22	20.17	15.89	18.82
07:30	92.09	60.87	71.43	70.27	48.57	55.70	30.31	26.04	26.54
08:00	134.24	87.90	95.63	101.07	68.71	74.61	39.77	33.38	35.49
08:30	144.24	102.56	120.54	110.00	81.05	92.87	47.25	41.64	41.13
09:00	196.24	144.21	157.20	147.70	111.34	121.17	57.44	50.50	53.30
09:30	194.45	159.44	148.94	148.63	124.54	116.17	64.45	60.48	54.38
10:00	252.92	211.26	162.22	190.82	161.73	127.17	74.12	69.19	60.62
10:30	245.11	221.54	160.51	188.04	172.13	127.53	82.60	81.03	65.12
11:00	294.22	267.39	150.88	223.24	204.64	120.87	88.61	86.44	64.12

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

Tiempo	Black			Gray			White		
	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome
(H)	(W/m ²)								
11:30	252.46	241.83	128.39	194.59	187.89	105.11	87.80	88.56	61.65
12:00	293.52	278.41	108.65	223.97	213.89	92.07	92.10	92.29	61.33
12:30	255.52	248.85	97.18	197.62	193.78	83.47	90.57	92.13	58.21
13:00	275.12	262.40	106.13	211.61	203.46	91.75	91.63	92.64	65.29
13:30	240.97	232.84	112.27	189.00	184.28	95.68	93.31	94.95	65.06
14:00	271.19	252.68	122.23	209.79	197.57	103.90	93.76	93.86	70.00
14:30	221.76	205.57	112.39	176.27	165.93	96.75	92.58	93.05	67.92
15:00	218.64	193.58	110.89	171.81	154.91	94.79	83.61	82.42	65.12
15:30	148.12	137.86	100.97	122.21	116.06	87.58	74.80	76.18	63.00
16:00	136.26	124.90	98.93	111.81	104.87	85.46	66.76	68.05	60.76
16:30	96.14	98.18	88.98	82.87	85.26	76.97	58.57	61.63	54.95
17:00	79.90	82.66	71.52	68.97	71.75	62.32	48.86	51.72	45.45
17:30	60.19	63.59	55.75	54.06	57.15	49.80	42.83	45.38	38.91
18:00	48.29	51.18	44.67	44.03	46.77	41.34	36.23	38.71	35.29
18:30	34.97	36.96	30.02	34.57	36.55	29.98	33.85	35.84	29.99
19:00	28.10	29.93	26.78	28.02	29.86	26.75	27.95	29.81	26.80
19:30	27.64	29.25	24.65	27.63	29.24	24.63	27.65	29.26	24.66
20:00	23.50	25.12	23.14	23.48	25.11	23.13	23.51	25.14	23.16
20:30	22.88	24.25	20.70	22.88	24.24	20.68	22.89	24.26	20.71
21:00	19.74	21.11	19.66	19.73	21.10	19.65	19.76	21.13	19.68
21:30	19.99	21.15	17.87	19.98	21.14	17.86	19.99	21.16	17.88
22:00	17.59	18.84	17.61	17.58	18.83	17.59	17.61	18.85	17.62
22:30	18.41	19.47	16.38	18.41	19.47	16.37	18.42	19.48	16.40
23:00	16.04	17.14	15.74	16.03	17.13	15.72	16.05	17.15	15.75

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

Tiempo	Black			Gray			White		
	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome
(H)	(W/m ²)								
23:30	16.77	17.75	14.95	16.77	17.75	14.94	16.78	17.76	14.97
$\int_{00:00}^{23:30} q_{in}(t) dt$	2.32	2.09	1.42	1.84	1.69	1.20	0.96	0.96	0.78
	(kWh/m ²)								

(Fin)

Tabla 6.8: Flujos de calor promedio (q_{in}) (Día más Frío)

Tiempo	Black			Gray			White		
	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome
(H)	(W/m ²)								
00:00	-29.11	-31.28	-30.15	-29.09	-31.26	-30.12	-29.13	-31.30	-30.17
00:30	-57.80	-60.72	-46.84	-57.78	-60.69	-46.76	-57.82	-60.74	-46.93
01:00	-48.94	-51.98	-47.63	-48.88	-51.91	-47.55	-48.99	-52.04	-47.70
01:30	-56.67	-59.68	-47.92	-56.65	-59.66	-47.85	-56.69	-59.71	-47.98
02:00	-47.37	-50.31	-46.16	-47.32	-50.25	-46.08	-47.42	-50.37	-46.23
02:30	-54.14	-56.85	-44.12	-54.11	-56.82	-44.04	-54.16	-56.88	-44.20
03:00	-45.11	-47.75	-41.88	-45.05	-47.68	-41.78	-45.17	-47.82	-41.98
03:30	-54.67	-57.49	-45.21	-54.64	-57.47	-45.14	-54.69	-57.52	-45.28
04:00	-45.37	-48.11	-43.39	-45.31	-48.04	-43.30	-45.42	-48.17	-43.47
04:30	-51.93	-54.46	-40.13	-51.91	-54.43	-40.04	-51.95	-54.49	-40.22
05:00	-42.56	-45.00	-39.02	-42.51	-44.93	-38.93	-42.62	-45.06	-39.11
05:30	-50.47	-53.13	-42.07	-50.46	-53.10	-42.00	-50.49	-53.15	-42.13
06:00	-41.06	-43.49	-39.64	-41.00	-43.43	-39.56	-41.11	-43.56	-39.71
06:30	-42.31	-48.95	-38.48	-43.92	-49.34	-38.96	-46.93	-50.14	-40.07
07:00	-18.49	-33.62	-24.41	-24.68	-36.07	-28.33	-36.22	-40.78	-35.81
07:30	-0.65	-25.57	-1.74	-13.27	-31.48	-11.06	-36.45	-42.40	-28.56
08:00	54.85	10.67	29.54	30.63	-0.97	14.98	-14.12	-22.50	-12.30
08:30	74.59	28.75	54.41	47.42	14.83	35.08	-2.43	-10.73	-1.18
09:00	122.52	58.25	67.15	84.33	38.62	46.17	13.33	2.27	6.88
09:30	103.98	56.13	67.84	71.84	38.02	46.91	13.07	4.86	7.95
10:00	147.00	85.90	68.07	103.23	59.78	47.52	22.01	11.51	9.24
10:30	132.93	86.81	68.90	93.27	60.74	48.82	20.69	13.01	11.49
11:00	181.93	123.50	71.04	129.52	87.97	51.30	31.93	22.18	14.43

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

Tiempo	Black			Gray			White		
	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome
(H)	(W/m ²)								
11:30	155.15	111.89	52.53	110.85	80.36	38.48	29.51	22.51	12.40
12:00	183.58	131.80	40.08	131.86	94.99	30.05	35.21	26.65	11.47
12:30	154.09	114.71	41.79	111.34	83.67	32.00	32.86	26.73	13.93
13:00	184.14	133.93	51.11	133.57	97.90	39.28	38.94	30.93	17.40
13:30	136.91	101.29	51.77	100.42	75.52	40.20	33.57	28.30	18.84
14:00	150.97	107.54	54.20	110.82	80.15	42.13	35.99	29.34	19.84
14:30	122.85	91.14	69.94	91.00	68.83	53.41	32.46	27.84	22.71
15:00	116.63	86.12	61.99	86.46	64.93	47.48	30.10	25.56	20.62
15:30	76.02	64.30	62.90	57.48	49.40	47.91	23.41	22.05	20.09
16:00	61.29	54.90	45.69	46.32	41.93	35.03	18.53	17.93	15.32
16:30	29.83	30.87	29.35	23.45	24.30	22.64	11.74	12.24	10.25
17:00	14.52	14.42	5.15	11.25	11.17	3.78	5.17	5.11	1.22
17:30	-5.37	-5.95	-8.33	-5.54	-6.12	-8.34	-5.89	-6.48	-8.40
18:00	-9.13	-10.00	-10.86	-9.15	-10.02	-10.85	-9.23	-10.10	-10.87
18:30	-13.94	-14.90	-14.18	-13.93	-14.89	-14.17	-13.94	-14.91	-14.18
19:00	-15.59	-16.87	-16.94	-15.58	-16.86	-16.93	-15.60	-16.88	-16.95
19:30	-19.84	-21.11	-19.03	-19.83	-21.10	-19.02	-19.84	-21.12	-19.04
20:00	-19.48	-20.95	-20.30	-19.46	-20.94	-20.29	-19.49	-20.97	-20.31
20:30	-22.60	-24.01	-21.30	-22.59	-24.01	-21.29	-22.60	-24.02	-21.31
21:00	-21.97	-23.64	-22.74	-21.96	-23.62	-22.72	-21.99	-23.65	-22.75
21:30	-26.07	-27.69	-24.47	-26.07	-27.68	-24.46	-26.08	-27.70	-24.49
22:00	-25.17	-27.07	-26.18	-25.16	-27.05	-26.16	-25.19	-27.09	-26.20
22:30	-29.11	-30.88	-26.79	-29.10	-30.87	-26.77	-29.12	-30.89	-26.80
23:00	-26.23	-28.11	-26.51	-26.21	-28.09	-26.50	-26.24	-28.13	-26.53

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

Tiempo	Black			Gray			White		
	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome	Flat	Gable	Dome
(H)	(W/m ²)								
23:30	-30.08	-31.97	-28.49	-30.07	-31.96	-28.47	-30.09	-31.99	-28.51
$\int_{00:00}^{23:30} q_{in}(t)dt$	1.56	1.24	0.92	1.25	1.04	0.79	0.69	0.67	0.56
	(kWh/m ²)								

(Fin)

Capítulo 7

Conclusiones y Recomendaciones

En este trabajo se analizó el acoplamiento techo-habitación por medio de la técnica de CFD y GEB para la ciudad de Mérida en el estado de Yucatán. De acuerdo a los resultados obtenidos, se puede afirmar que tanto el objetivo así como el alcance fueron logrados de manera satisfactoria. Con base en los resultados presentados en el Capítulo 6, se concluye lo siguiente:

7.1. Conclusiones

La utilización de recubrimientos en el techo puede beneficiar y/o afectar el comportamiento térmico de ésta componente, el cual se ve reflejado en el aumento o reducción del flujo de calor sobre la superficie interior del mismo para el clima cálido como para el clima frío.

Como es bien sabido, utilizar un techo para condiciones climáticas cálidas y otro para condiciones frías no es posible, por tal razón se determinan las cargas de energía total con base a la información de ambas condiciones. Los techos planos en edificaciones son comúnmente utilizados en la industria de la construcción en México los cuales incrementan considerablemente la carga de energía total en la superficie interior del techo y por ende el consumo de energía eléctrica al hacer uso de los equipos de acondicionamiento para mantener una temperatura de confort al interior de la edificación. Los techos de geometría abovedada reducen considerablemente la carga de energía total en comparación con los techos planos desde un 40.77 % para un recubrimiento negro, hasta un 18.52 % en un recubrimiento blanco.

La temperatura promedio más alta de la superficie exterior del techo para el día más cálido fue para el techo plano con recubrimiento negro (82.5°C) a las 11:00 hrs, teniendo una temperatura de la habitación a esa misma hora de 55.3°C , mientras que con un techo abovedado con recubrimiento blanco y con un techo a dos aguas con recubrimiento gris la temperatura de la habitación a la misma hora es de 46.5°C y 52.1°C , respectivamente. Por otro lado, el valor máximo de la temperatura de la habitación para el día más frío fue de 41.3°C utilizando el techo plano con recubrimiento negro con una temperatura de la superficie exterior del techo de 53.9°C . El valor máximo de la temperatura de la habitación utilizando el techo a dos aguas con recubrimiento blanco fue de 36.9°C , mientras que utilizando un techo abovedado con recubrimiento gris la temperatura máxima fue de 38.0°C .

De acuerdo a las cargas de energía total, para el día más cálido el techo abovedado con recubrimiento blanco reduce un 18.52 % las cargas de energía total mientras que con un techo a dos aguas solo se reducen un 0.25 %, ambos en comparación con el techo plano. Por otro lado, para el día más frío, el techo a dos aguas con recubrimiento negro reduce el 50 % de las cargas de energía total que reduce el techo abovedado con el mismo recubrimiento. Sin embargo el techo abovedado con recubrimiento blanco presenta una reducción del 19.52 % de las cargas de energía total mientras que el techo a dos aguas con el mismo recubrimiento obtuvo una reducción del 2.97 %.

Como conclusión general, de acuerdo a los datos obtenidos, el techo abovedado tiene mayor potencial de desempeño térmico para ser usado en ciudades de clima cálido utilizando principalmente el recubrimiento blanco; sin embargo, al comparar con el techo a dos aguas los recubrimientos gris y negro, el techo abovedado sigue presentando mayor potencial.

7.2. Recomendaciones para trabajos futuros

Con la intención de dar seguimiento al estudio realizado en este trabajo, se recomiendan los siguientes puntos para estudios posteriores:

- Realizar un estudio considerando otras geometrías de techos no simétricos.
- Considerar la variación de la posición del caballete en el techo a dos aguas.
- Realizar el estudio de techos ventilados de geometría irregular acoplados a la habitación.
- Considerar el uso de materiales de cambio de fase (en inglés, PCM) y materiales aislantes como cubiertas adicionales al techo.
- Realizar el estudio del sistema techo-habitación bajo la formulación de coordenadas de cuerpo ajustado (en inglés, BFC). De este modo, será posible modelar el sistema en una sola formulación y determinar el comportamiento convectivo y radiativo del fluido al interior de la habitación.

Referencias Bibliográficas

- Abohela I., Hamza N. y Dudek S. (2013). Effect of roof shape, wind direction, building height and urban configuration on the energy yield and positioning of roof mounted wind turbines. *Renewable Energy*, 50:1106 – 1118.
- Al-Obaidi K.M., Ismail M. y Abdul Rahman A.M. (2014). Passive cooling techniques through reflective and radiative roofs in tropical houses in southeast asia: A literature review. *Frontiers of Architectural Research*, 3:283 – 297.
- Alqalaf H.J. y Alawadhi E.M. (2016). Thermal analysis of a concrete roof with an outdoor reflective surface. *Journal of Energy Engineering*, 142:1 – 7.
- Altaç Z. (2017). Two and three dimensional transient analysis of flow and heat transfer in structures with domical and curved roofs. *Journal of Thermal Engineering*, 3:1489–1497.
- Amrani A., Dihmani N., Amraqui S. y Mezrhab A. (2017). Analysis of combined natural convection and thermal radiation heat transfer in a triangular shaped roof for hot climates.
- Anderson D.A., Tannehill J.C. y Pletcher R.H. (1984). *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Hemisphere Publishing Co., New York.
- Arcos Feria V.M. (2016). *Estudio experimental del desempeño térmico de un intercambiador de calor tierra-aire en la ciudad de Chetumal, Quintana Roo*. Tesis doctoral, Universidad de Quintana Roo - División de Ciencias e Ingeniería.
- Asan H. y Namli L. (2000). Laminar natural convection in a pitched roof of triangular cross-section: summer day boundary conditions. *Energy and Buildings*, 33:69 – 73.

- ASHRAE (2009). American society of heating, refrigerating and air-conditioning engineers. Fundamentals handbook, ASHRAE, E.U.A.
- Bahadori M. (1978). Passive cooling systems in iranian architecture. *Scientific American*, 2:144 – 154.
- Bahadori M. y Haghghat F. (1985). Passive cooling in hot, arid regions in developing countries by employing domed roofs and reducing the temperature of internal surfaces. *Building and Environment*, 20:103 – 113.
- Bahadori M.N. y Haghghat F. (1986). Thermal performance of adobe structures with domed roofs and moist internal surfaces. *Solar Energy*, 36:365 – 375.
- Banionis K., Monstvilas E., Stankevičius V., Bliūdžius R. y Miškinis K. (2012). Impact of heat reflective coatings on heat flows through the ventilated roof with steel coatings. *Journal of Civil Engineering and Management*, 18:505–511.
- Brito Filho J. y Santos T.O. (2014). Thermal analysis of roofs with thermal insulation layer and reflective coatings in subtropical and equatorial climate regions in brazil. *Energy and Buildings*, 84:466 – 474.
- Butcher J. (2000). Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125:1 – 29. Numerical Analysis 2000. Vol. VI: Ordinary Differential Equations and Integral Equations.
- Cervantes de Gortari J. (1999). *Fundamentos de transferencia de calor*. Fondo de cultura económica, México D.F.
- da Silva W.P., e Silva C.M., e Silva D.D., de Araújo Neves G. y de Lima A.G.B. (2010). Mass and heat transfer study in solids of revolution via numerical simulations using finite volume method and generalized coordinates for the cauchy boundary condition. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53:1183 – 1194.
- da Silva W.P., Precker J.W., e Silva D.D., e Silva C.D. y de Lima A.G.B. (2009). Numerical simulation of diffusive processes in solids of revolution via the finite volume method and generalized coordinates. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52:4976 – 4985.

- Dabaieh M., Wanas O., Hegazy M.A. y Johansson E. (2015). Reducing cooling demands in a hot dry climate: A simulation study for non-insulated passive cool roof thermal performance in residential buildings. *Energy and Buildings*, 89:142 – 152.
- Date A.W. (2005). *Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, London, England.
- de Freitas Carvalho Filho A. (2019). *Método de Volumes Finitos Aplicado à Condução de Calor*. Edição do Autor, São Luis.
- del Campo E.M., Sen M. y Ramos E. (1987). Natural convection in a semielliptic cavity. *Numerical Heat Transfer*, 12:101–119.
- Duffie J.A. y Beckman W.A. (2013). *Solar Engineering of Thermal Processes*. WILEY, United States of America.
- Eduardo Milioli F. (1985). *Solução Numérica de Problemas Bidimensionais de Convecção Natural em Cavidades Arbitrárias*. Tesis doctoral, Universidad Federal de Santa Catarina.
- Erturk E. y Dursun B. (2007). Numerical solutions of 2-d steady incompressible flow in a driven skewed cavity. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 87:377–392.
- Fabbri K. y Brunetti B. (2015). The attic and its effect on the energy performance of historic buildings. *Energy Procedia*, 78:1281 – 1286. 6th International Building Physics Conference, IBPC 2015.
- Faghih A.K. y Bahadori M.N. (2009). Solar radiation on domed roofs. *Energy and Buildings*, 41(11):1238 – 1245.
- Faghih A.K. y Bahadori M.N. (2010). Three dimensional numerical investigation of air flow over domed roofs. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 98:161 – 168.
- Faghih A.K. y Bahadori M.N. (2011). Thermal performance evaluation of domed roofs. *Energy and Buildings*, 43:1254 – 1263.

- Farias V., da Silva W., e Silva C., Júnior d.S.A.F., de Farias Aires J.E. y Rocha V.P. (2016). Assessment of diffusion models to describe drying of roof tiles using generalized coordinates. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52:1403 – 1416.
- Farias V., da Silva W., e Silva C., Rocha V.P. y de Lima A.G.B. (2013). Drying of solids with irregular geometry: numerical study and application using a three-dimensional model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49:695 – 709.
- Farrashkhalvat M. y P. M.J. (2003). *Basic structured grid generation*. BH, London, England.
- Ferziger J. y Perić M. (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics 3rd ed.* Springer, Berlin.
- Fontanini A.D., Pr'Out K.M., Kosny J. y Ganapathysubramanian B. (2016). Exploring future climate trends on the thermal performance of attics: Part 1 – standard roofs. *Energy and Buildings*, 129:32 – 45.
- Guichard S., Miranville F., Bigot D. y Boyer H. (2014). A thermal model for phase change materials in a building roof for a tropical and humid climate: Model description and elements of validation. *Energy and Buildings*, 70:71 – 80.
- Guichard S., Miranville F., Bigot D., Malet-Damour B., Beddiar K. y Boyer H. (2017). A complex roof incorporating phase change material for improving thermal comfort in a dedicated test cell. *Renewable Energy*, 101:450 – 461.
- Guichard S., Miranville F., Bigot D., Malet-Damour B., Libelle T. y Boyer H. (2016). Empirical validation of a thermal model of a complex roof including phase change materials. *Energies*, 9.
- Gómez-Muñoz V.M., Ángel Porta-Gándara M. y Heard C. (2003). Solar performance of hemispherical vault roofs. *Building and Environment*, 38(12):1431 – 1438.
- Hadavand M. y Yaghoubi M. (2008). Thermal behavior of curved roof buildings exposed to solar radiation and wind flow for various orientations. *Applied Energy*, 85:663 – 679.
- Hadavand M., Yaghoubi M. y Emdad H. (2008). Thermal analysis of vaulted roofs. *Energy and Buildings*, 40:265 – 275.

- Hernández Pérez I.A. (2016). *Estudio de la transferencia de calor de cubiertas reflectivas (cool roofs) en techos de edificaciones bajo condiciones climáticas de la República Mexicana*. Tesis doctoral, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET).
- Hosseini S.H., Ghobadi P., Ahmadi T. y Calautit J.K. (2017). Numerical investigation of roof heating impacts on thermal comfort and air quality in urban canyons. *Applied Thermal Engineering*, 123:310 – 326.
- IEA (2011). *Energy-efficient buildings: Heating and cooling equipment. Technology roadmap*, International Energy Agency, Paris.
- INEGI (2018). *Primera encuesta nacional sobre consumo de energéticos en viviendas particulares (encevi)*. Technical report, Instituto Nacional de Estadística y Geografía, México.
- Jayamaha S., Wijesundera N. y Chou S. (1996). Measurement of the heat transfer coefficient for walls. *Building and Environment*, 31:399–407. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- Joudi A., Cehlin M., Svedung H., Rönnelid M. y Moshfegh B. (2017). Numerical and experimental investigation of the influence of infrared reflective interior surfaces on building temperature distributions. *Indoor and Built Environment*, 26:355–367.
- Joudi A., Svedung H., Cehlin M. y Rönnelid M. (2013). Reflective coatings for interior and exterior of buildings and improving thermal performance. *Applied Energy*, 103:562 – 570.
- Joudi A., Svedung H. y Rönnelid M. (2011). Energy efficient surfaces on building sandwich panels—a dynamic simulation model. *Energy and Buildings*, 43:2462 – 2467.
- Klaus A. Hoffmann S.T.C. (2000a). *Computational Fluid Dynamics Volume I*. Engineering Education System, E.U.A.
- Klaus A. Hoffmann S.T.C. (2000b). *Computational Fluid Dynamics Volume II*. Engineering Education System, E.U.A.
- Koca A., Oztop H.F. y Varol Y. (2008). Numerical analysis of natural convection in shed roofs with eave of buildings for cold climates. *Computers and Mathematics with Applications*, 56:3165 – 3174.

- Kong X., Lu S., Li Y., Huang J. y Liu S. (2014). Numerical study on the thermal performance of building wall and roof incorporating phase change material panel for passive cooling application. *Energy and Buildings*, 81:404 – 415.
- Kruger S. y Pretorius L. (2017). Heat transfer in three-dimensional single-span greenhouses containing a roof ventilator.
- Laouadi A. y Atif M.R. (2001). Natural convection heat transfer within multi-layer domes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44:1973 – 1981.
- Lee S.W., Lim C.H. y Salleh E.I.B. (2016). Reflective thermal insulation systems in building: A review on radiant barrier and reflective insulation. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 65:643 – 661.
- Li D., Zheng Y., Liu C., Qi H. y Liu X. (2016). Numerical analysis on thermal performance of naturally ventilated roofs with different influencing parameters. *Sustainable Cities and Society*, 22:86 – 93.
- Li D., Zheng Y., Liu C. y Wu G. (2015). Numerical analysis on thermal performance of roof contained pcm of a single residential building. *Energy Conversion and Management*, 100:147 – 156.
- Lin Y. y Yang W. (2017). Solar energy model and thermal performance of an electrochromic dome-covered house. *Energy for Sustainable Development*, 39:82 – 90.
- Lu S., Chen Y., Liu S. y Kong X. (2016). Experimental research on a novel energy efficiency roof coupled with pcm and cool materials. *Energy and Buildings*, 127:159 – 169.
- Lucero-Álvarez J., Rodríguez-Muñoz N.A. y Martín-Domínguez I.R. (2016). The effects of roof and wall insulation on the energy costs of low income housing in mexico. *Sustainability*, 8.
- Luiz Seixlack A. (1986). *Solução Numérica de Problemas de Condução Anisotrópica em Geometrias Arbitrárias*. Tesis doctoral, Universidad Federal de Santa Catarina.
- Maliska C.R. (2004). *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC - Grupo Gen, Brasil.
- Morsi Y.S. y Das S. (2003). Numerical investigation of natural convection inside complex enclosures. *Heat Transfer Engineering*, 24:30–41.

- Moustafa W.S., Hegazy I.R. y Eldabousy M.M. (2018). Roof geometry as a factor of thermal behavior: simulation based study of using vaults and domes in the middle east zone. *International Journal of Low-Carbon Technologies*, 13:204–211.
- Najafi S. y Yaghoubi M. (2015). Thermal study of a cistern's dome (the case of motamed cistern in lar, iran). *Energy and Buildings*, 102:453 – 466.
- Obyn S. y van Moeseke G. (2015). Variability and impact of internal surfaces convective heat transfer coefficients in the thermal evaluation of office buildings. *Applied Thermal Engineering*, 87:258–272.
- Olazo Gómez Y. (2020). *Análisis Térmico de una Habitación con una Ventana de Vidrio Doble y Techo Reflectivo*. Tesis doctoral, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET).
- Omar A.I., Virgone J., Vergnault E., David D. e Idriss A.I. (2017). Energy saving potential with a double-skin roof ventilated by natural convection in djibouti. *Energy Procedia*, 140:361 – 373. Beyond NZEB Buildings (AiCARR 50th International Congress, Matera (I), 10-11 May 2017).
- Oyarzo Perez J. (1987). *Solução Numérica de Descargas Térmicas em Corpos D'Água Rasos de Geometria e Profundidade Variáveis*. Tesis doctoral, Universidad Federal de Santa Catarina.
- Pearlmutter D. (1993). Roof geometry as a determinant of thermal behaviour: A comparative study of vaulted and flat surfaces in a hot-arid zone. *Architectural Science Review*, 36:75–86.
- Pereira da Silva W. (2007). *Transporte Difusivo em Sólidos con Forma Arbitrária usando Coordenadas Generalizadas*. Tesis doctoral, Universidad Federal de Campina Grande - Centro de Ciências e Tecnologia.
- Pisello A.L. (2017). State of the art on the development of cool coatings for buildings and cities. *Solar Energy*, 144:660 – 680.
- Putivisitak S. y Prasertlar S. (2013). Calculation of heat transfer and fluid flow in complex geometries using a finite volume method in body-fitted coordinates. *King Mongku's University of Technology North Bangkok International Journal of Applied Science and Technology*, 6:1–9.
- Ramos-Gutiérrez L.d.J. y Montenegro-Fragoso M. (2012). La generación de energía eléctrica en México. *Tecnología y ciencias del agua*, 3:197 – 211.

- S. Ray A.W.D. (2000). A calculation procedure for solution of incompressible navier-stokes equations on curvilinear non staggered grids. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 38:93–131.
- Sedighi E., Yaghoubi M., Mousavi S. y Siahpour S. (2017). Thermal study of domed roofs in a traditional bazaar (the case of old ganj-alikhan bazaar in kerman, iran). *Energy for Sustainable Development*, 39:67 – 81.
- SENER (2019). Balance nacional de energía. Technical report, Secretaria de Energía, México.
- SIE (2019). Generación bruta de energía eléctrica.
- Sirimanna M. y Attalage R. (2016). A model for analyzing the thermal performance of roof configurations with flat inclined surfaces. *Energy and Buildings*, 116:122 – 132.
- Sojoudi A., Saha S.C. y Gu Y. (2015). Natural convection due to differential heating of inclined walls and heat source placed on bottom wall of an attic shaped space. *Energy and Buildings*, 89:153 – 162.
- Suehrcke H., Peterson E.L. y Selby N. (2008). Effect of roof solar reflectance on the building heat gain in a hot climate. *Energy and Buildings*, 40:2224 – 2235.
- Tang R., Meir I. y Etzion Y. (2003a). An analysis of absorbed radiation by domed and vaulted roofs as compared with flat roofs. *Energy and Buildings*, 35:539 – 548.
- Tang R., Meir I. y Etzion Y. (2003b). Thermal behavior of buildings with curved roofs as compared with flat roofs. *Solar Energy*, 74:273 – 286.
- Tang R., Meir I. y Wu T. (2006). Thermal performance of non air-conditioned buildings with vaulted roofs in comparison with flat roofs. *Building and Environment*, 41:268 – 276.
- Thompson J.F., K. S.B. y P. W.N. (1999). *Handbook of grid generation*. CRC Press, E.U.A.
- Thompson J.F., Thames F.C. y Mastin C.W. (1974). Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics*, 15:299–319. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- Tong S. y Li H. (2014). An efficient model development and experimental study for the heat transfer in naturally ventilated inclined roofs. *Building and Environment*, 81:296 – 308.

- Tong S., Li H., Zingre K.T., Wan M.P., Chang V.W.C., Wong S.K., Toh W.B.T. y Lee I.Y.L. (2014). Thermal performance of concrete-based roofs in tropical climate. *Energy and Buildings*, 76:392 – 401.
- Tribess A. (1986). *Solução Numérica de Problemas de Transferência de Calor em Escoamentos Confluentes em Geometrias Arbitrárias*. Tesis doctoral, Universidad Federal de Santa Catarina.
- Uemoto K.L., Sato N.M. y John V.M. (2010). Estimating thermal performance of cool colored paints. *Energy and Buildings*, 42:17 – 22. International Conference on Building Energy and Environment (COBEE 2008).
- Varol Y., Koca A. y Oztop H.F. (2007). Natural convection heat transfer in gambrel roofs. *Building and Environment*, 42:1291 – 1297.
- Yang J., Yu J. y Xiong C. (2015). Heat transfer analysis of hollow block ventilated wall based on cfd modeling. *Procedia Engineering*, 121:1312 – 1317. The 9th International Symposium on Heating, Ventilation and Air Conditioning (ISHVAC) joint with the 3rd International Conference on Building Energy and Environment (COBEE), 12-15 July 2015, Tianjin, China.
- Yang W., Zhou S., Lin Y. y Li C. (2017). A study on the effect of building shape on thermal load. International Conference on Building Energy and Environment (COBEE 2018).
- Yew M., Ramli Sulong N., Chong W., Poh S., Ang B. y Tan K. (2013). Integration of thermal insulation coating and moving-air-cavity in a cool roof system for attic temperature reduction. *Energy Conversion and Management*, 75:241 – 248.
- Zingre K.T., Wan M.P., Tong S., Li H., Chang V.W.C., Wong S.K., Thian Toh W.B. y Leng Lee I.Y. (2015a). Modeling of cool roof heat transfer in tropical climate. *Renewable Energy*, 75:210 – 223.
- Zingre K.T., Wan M.P., Wong S.K., Toh W.B.T. y Lee I.Y.L. (2015b). Modelling of cool roof performance for double-skin roofs in tropical climate. *Energy*, 82:813 – 826.
- Zingre K.T., Yang E.H. y Wan M.P. (2017). Dynamic thermal performance of inclined double-skin roof: Modeling and experimental investigation. *Energy*, 133:900 – 912.