



SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



**TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO**

Tecnológico Nacional de México

**Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico**

Tesis de Maestría

**Desarrollo e Implementación de una Estrategia de Control
Predictivo Óptimo de un Drone Octorotor Basado en Modelo
Takagi-Sugeno**

presentada por

Ing. Rogelio Ignacio Flores Martínez

como requisito para la obtención del grado de
Maestra en Ciencias en Ingeniería Electrónica

Director de tesis

Dr. Carlos Daniel García Beltrán

Codirector de tesis

Dr. Guillermo Valencia Palomo

Cuernavaca, Morelos, México. Diciembre de 2018.

Cuernavaca, Mor., 25 de junio de 2018.

OFICIO No. DIE/075/2018
Asunto: Aceptación de documento de tesis

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE


Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Rogelio Ignacio Flores Martínez**, con número de control **M16CE040** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **“DESARROLLO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA ESTRATEGIA DE CONTROL PREDICTIVO ÓPTIMO DE UN DRONE OCTORROTOR”** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS




Dr. Carlos Daniel García Beltrán
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 8699605

CODIRECTOR DE TESIS



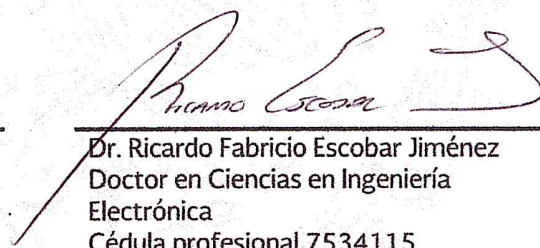
Dr. Guillermo Valencia Palomo
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 7324096

REVISOR 1



Dr. Juan Reyes Reyes
Doctor en Ciencias en la Especialidad de
Control Automático
Cédula profesional 4214833

REVISOR 2



Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 7534115

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres- Jefa del Departamento de Servicios Escolares

Estudiante
Expediente
RFEJ/Irr.



SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Cuernavaca, Morelos, **14/Diciembre/2018**

OFICIO No. SAC/584/2018

Asunto: Autorización de impresión de tesis

ING. ROGELIO IGNACIO FLORES MARTÍNEZ
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Desarrollo e Implementación de una Estrategia de Control Predictivo Óptimo de un Drone Octorrotor", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr

cenidet[®]
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 4106, e-mail: dir_cenidet@tecnm.mx

www.tecnm.mx | www.cenidet.edu.mx



Dedicado a mis padres:

Rogelio y Elisa

A mi polita:

Lis

Agradecimientos

Primeramente, agradezco a Dios por todo lo que me ha dado a lo largo de mi vida.

Agradezco a mis padres Rogelio y Elisa, y a mis hermanos: Fer y Eru, por todo el apoyo y amor que me han brindado a lo largo de toda mi vida.

Al Dr. Carlos Daniel y al Dr. Guillermo, agradezco su amistad, su confianza y por haberme guiado a lo largo del desarrollo de este trabajo. <Gracias!.

Al comité revisor: Dr. Juan Reyes Reyes, Dr. Ricardo Fabricio por sus valiosas observaciones que realizaron para poder mejorar este trabajo.

A mis profesores que se vieron involucrados en mi formación a lo largo de mi estancia en cenidet: Dr. Carlos Daniel, Dr. Juan Reyes, Dr. Enrique Quintero, Dr. Francisco, Dr. Manuel Astorga, Dr. Manuel Adam, Dr. Gerardo Guerrero, Dr. Gerardo Vela, Dr. Ricardo Fabricio, gracias por todas sus valiosas enseñanzas, que hasta el día de hoy han sido de mucha ayuda.

A esa Persona Especial L.G.: Por ser una de las personas más importantes en mi vida, por cada momento que he pasado a tu lado, por ser una de mis principales fuentes de inspiración, por estar ahí siempre que necesite tu apoyo.

A mis cuñadas Norma y Luz, por el apoyo a lo largo de todo este camino, su hospitalidad y sus atenciones y a mis sobrinas Brenda, Bry y Marisol junto con toda su familia, por el apoyo impulsándome a seguir adelante.

A mis amigos Goyo y May, les agradezco su amistad y apoyo desde el inicio de la maestría.

A Lorena Ruiz, por su atención, su apoyo y trato amable con los trámites de titulación, <muchas gracias!.

Al Cenidet, por haberme dado la oportunidad de continuar con mi formación académica.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico para el desarrollo de este trabajo.

Resumen

En este trabajo de tesis se trata la eficiencia computacional de los algoritmos de control predictivo (MPC). La motivación principal surge del interés de integrar controladores de alto rendimiento en sistemas LPV con capacidades en el manejo de restricciones para vehículos aéreos no tripulados (UAV, por sus siglas en inglés), por ejemplo, Quadrrotor, Octorotor, Hexarrotor, multirrotores en general. El autor cree que el MPC debe estar integrado en el hardware estándar para ser, finalmente, una opción real a los controladores convencionales.

Existen algunos criterios e inconvenientes para programar adecuadamente un algoritmo diferente a un PID convencional, como primera cuestión la tesis presenta en detalle cómo hacer uso de un lenguaje de programación cuadrática (QP) para dar solución al problema de optimización e incorporar un algoritmo OMPC en un UAV multirrotor. Este desarrollo presenta dos leyes de control para el manejo de restricciones y tiene la característica de ser un controlador con el cual se asegura estabilidad de manera óptima.

Para integrar estrategias más avanzadas en un UAV multirrotor, que utilice el manejo de restricciones, es necesario reducir la carga computacional inherente de los controladores predictivos que en muchas ocasiones suele ser extremadamente compleja. Uno de los caminos explorados para reducir la carga computacional, es mejorar la compensación predeterminada del MPC cuando la información futura del punto de operación esté disponible. Se muestra que al utilizar este compensador, el manejo de restricciones se puede tratar adecuadamente, dejando sólo al optimizador en línea para tratar con perturbaciones e incertidumbres.

El enfoque T-S basado en el modelado difuso se ha elegido debido a su eficiencia con sistemas complejos no lineales, una gran clase de sistemas no lineales puede representarse o aproximarse de manera exacta con los modelos difusos T-S, lo que significa que en teoría pueden aproximar un sistema no lineal general a un grado arbitrario de precisión, para ello se utiliza la técnica por aproximación del sector no lineal con la cual se logran modelos de predicción menos complejos y que los requisitos de computación y almacenamiento sean bajos. Esta técnica se aplicó en el subsistema de rotación y traslación del vehículo y se basa fundamentalmente en la aplicación de un modelado a partir de las funciones de ponderación y pertenencia, de la cual se obtienen un menor número de submodelos y reglas en modelado difuso, cuya ventaja principal es la obtención de dichos submodelos sin perder información sobre la dinámica del sistema.

De esta propuesta se deduce que el algoritmo OMPC predice la complejidad del controlador, haciendo uso de conjuntos invariantes, los grados de libertad del sistema (d.o.f), la inclusión de la cola (tail) y la teoría de Lyapunov para sistemas difusos, con lo cual se garantiza estabilidad y viabilidad recursiva. Los resultados presentados en la tesis son prometedores y abren diferentes ideas de investigación futura para desarrollar algoritmos simples pero eficientes que podrían integrarse igualmente en hardware estándar.

Abstract

In this thesis the computational science of predictive control algorithms (MPC) is discussed. The main motivation arises from the interest of integrating high performance controllers in LPV systems with capabilities in the handling of restrictions for unmanned aerial vehicles (UAVs), for example, Quadrotor, Octorotor, Hexarotor, multirotor in general. The author believes that the MPC should be integrated into the standard hardware to be, automatically, a real option to the controllers.

There are some criteria and disadvantages to properly program an algorithm different from a conventional PID, as the first question the thesis presents in detail how to make use of a quadratic programming language (QP) to solve the optimization problem and incorporate an OMPC algorithm in a multirotor UAV. This development presents two laws of control for the management of restrictions and has the characteristic of being a controller with which stability is optimally assured.

To integrate more advanced strategies into a multirotor UAV, which uses constraint management, it is necessary to reduce the inherent computational load of predictive controllers, which in many cases is often extremely complex. One of the paths explored to reduce the computational load is to improve the MPC's default compensation when future information from the point of operation is available. It is shown that by using this compensator, constraint management can be adequately addressed, leaving only the optimizer in line to deal with disturbances and uncertainties.

The T-S approach based on fuzzy modeling has been chosen because of its efficiency with complex non-linear systems, a large class of non-linear systems can be accurately represented or approximated with fuzzy T-S models, which means that in theory they can approximate a general nonlinear system to an arbitrary degree of precision, for this the approximation technique of the nonlinear sector is used, with which less complex prediction models are achieved and the computation and storage requirements are low. This technique was applied in the vehicle rotation and translation sub-system and is fundamentally based on the application of a modeling based on the weighting and belonging functions, from which a smaller number of submodels and rules are obtained in fuzzy modeling, whose The main advantage is obtaining these submodels without losing information about the dynamics of the system.

From this proposal it is deduced that the OMPC algorithm predicts the complexity of the controller, making use of invariant sets, the degrees of freedom of the system (d.o.f), the inclusion of the tail (tail) and the theory of Lyapunov for fuzzy systems, with which guarantees stability and recursive viability. The results presented in the thesis are promising and open different ideas of future research to develop simple but efficient algorithms that could be integrated equally in standard hardware.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Conceptualización y Conceptos Básicos	2
1.1.1. Vehículos Aéreos no Tripulados (UAVs)	3
1.2. Estado del Arte	4
1.3. Problemática	11
1.4. Objetivos y Metas	11
1.5. Justificación	12
1.6. Estructura del documento	12
2. Marco Teórico	13
2.1. Sistemas de Control Automático	14
2.1.1. Control en drones multirrotor	15
2.2. Sistemas LPV	16
2.2.1. Clases de Sistemas LPV	17
2.2.1.1. Sistemas LPV afines y multi-afines	17
2.2.1.2. Sistemas cuasi-LPV (q-LPV)	18
2.2.1.3. Sistemas LPV polinomiales	18
2.2.1.4. Sistemas LPV racionales	19
2.2.1.5. Sistemas LPV singulares	20
2.2.1.6. Sistemas LPV Takagi-Sugeno	20
2.3. Modelado difuso	20
2.3.1. Estructuras Multimodelo	21
2.3.1.1. Estructura acoplada	22
2.3.1.2. Estructura desacoplada	23
2.3.1.3. Estructura jerárquica	23
2.3.2. Técnica de aproximación del sector no lineal	24
2.4. Control Óptimo	26
2.4.1. Control y Optimización	26
2.4.1.1. Realimentación de estados óptima (LQR) continua	28

2.4.1.2.	Realimentación de estados óptima (LQR) discreta	30
2.4.1.3.	Controlabilidad	31
2.5.	Estabilidad	32
2.5.1.	LMI's	32
3.	Control Predictivo Modo Dual	34
3.1.	Control Predictivo	34
3.1.1.	Ventajas y desventajas del MPC	36
3.2.	Introducción al OMPC	38
3.2.1.	Desajuste de predicciones en MPC	39
3.2.2.	Estabilidad Garantizada y Comportamiento Óptimo	40
3.2.3.	Horizontes Infinitos y Estabilidad	40
3.2.4.	Definición de la cola (tail)	40
3.3.	Control de Modo Dual	42
3.4.	Paradigma de Lazo Cerrado OMPC	44
3.4.1.	Restricciones	47
3.5.	Conjuntos Invariantes	49
3.5.1.	Conjunto Máximo Admisible (MAS)	50
3.5.2.	Conjunto Máximo Admisible Controlado (MCAS)	51
4.	Resultados de Investigación	52
4.1.	Obtención del modelo Takagi-Sugeno del Octorrotor X8 ⁺ 3DR	52
4.1.1.	Modelo no lineal, basado en la metodología Euler-Lagrange	52
4.1.1.1.	Modelo no lineal del subsistema rotacional	55
4.1.1.2.	Modelo no lineal del subsistema traslacional	55
4.1.2.	Modelo T-S del subsistema rotacional X8 ⁺ 3DR	57
4.1.3.	Modelo T-S del subsistema traslacional	61
4.2.	Takagi-Sugeno en tiempo discreto	64
4.2.1.	Resultados de simulación	66
4.2.1.1.	Actitud	66
4.3.	Diseño del Control Predictivo Modo Dual	70
4.3.1.	Diseño del controlador LQR	70
4.3.2.	Análisis de estabilidad	72
4.4.	LQR para sistema Takagi-Sugeno	74
4.4.0.1.	Traslación	84
4.5.	Puesta en Marcha Pixhawk y Pruebas.	89
5.	Conclusiones	94
	Trabajos Futuros	96
	Bibliografía	98

Índice de figuras

2.1.	Sistema básico de control automático.	15
2.2.	Esquema de control de actitud adaptado de [72]	16
2.3.	Sistema de interfaz difuso	21
2.4.	Arquitectura de multimodelos con modelos locales acoplados	22
2.5.	Arquitectura de multimodelos con modelos locales desacoplados	23
2.6.	Arquitectura de un multimodelo jerárquico	24
2.7.	Sector global no lineal.	25
2.8.	No linealidad del sector local.	25
2.9.	Esquema de control	31
3.1.	Ilustración gráfica de la estrategia MPC	35
3.2.	Idea fundamental del control predictivo	39
3.3.	Idea fundamental del modo dual	44
3.4.	Esquema OMPC	50
4.1.	Sistema de coordenadas del X8 ⁺ 3DR	53
4.2.	Vista superior del X8 ⁺ 3DR	53
4.3.	Subsistemas Rotación y Traslación X8 ⁺ 3DR	57
4.4.	SNL X8 ⁺ , LA	66
4.5.	ST-S X8 ⁺ , LA	67
4.6.	Sistema no lineal X8 ⁺	69
4.7.	Sistema Takagi-Sugeno X8 ⁺	69
4.8.	Estados Takagi-Sugeno X8 ⁺	72
4.9.	Estados T-S X8 ⁺	74
4.10.	Salida ϕ , costo y c_k	75
4.11.	Parámetros SOMPC	75
4.12.	Salida ϕ , costo y c_k	76
4.13.	Parámetros ϕ SOMPC	77
4.14.	Salida θ , costo y c_k	77
4.15.	Parámetros θ SOMPC	78

4.16. Salida Yaw, costo y c_k	79
4.17. Parámetros ψ SOMPC	79
4.18. Tracking	80
4.19. Restricciones Modo Dual	81
4.20. Restricciones Modo Dual	82
4.21. Conjuntos Admisibles	83
4.22. Posición x, y, z OMPC	84
4.23. Salidas	85
4.24. Errores	86
4.25. Pesos en las entradas de control	87
4.26. Estados y salidas	88
4.27. Función costo y c	88
4.28. Proceso de creación y descarga de aplicaciones para piloto automático Pixhawk	89
4.29. Ángulos ϕ, θ, ψ	90
4.30. Error en los ángulos ϕ, θ, ψ	91
4.31. Salidas x, y, z	92
4.32. Posición x, y, z	92
4.33. Mavlink Actitud	93
4.34. Mavlink x, y, z	93

Índice de tablas

3.1. Restricciones OMPC	48
3.2. Restricciones OMPC	48
3.3. Estructura del MAS y MCAS	51
4.1. Parámetros utilizados en el octorotor $X8^+$	56
4.2. Cotas de las velocidades angulares	58
4.3. Funciones de ponderación y estados no lineales.	59
4.4. Reglas difusas del subsistema rotacional	59
4.5. Reglas difusas del subsistema traslacional	62
4.6. Parámetros del controlador PD	68

Nomenclatura

A_c, B_c, C_c	Matrices del modelo en tiempo discreto
A, B, C	Matrices del modelo en tiempo continuo
ϕ, θ, ψ	Ángulos de Euler (roll, pitch, yaw)
f^m, g^m, h^m	Funciones suaves de matrices no lineales
S, Q, R	Matrices de ponderación de estado y de entrada de funciones costo
J	Función costo
K	Matriz de ganancia de retroalimentación de estados
N	Horizonte de optimización
λ	Respuesta de convergencia al control
c_k	Compensación de la ley de retroalimentación de estado (OMPC)
λ	Respuesta de convergencia al control
K	Instante de muestreo
n_y	Horizonte de predicción
n_c	Horizonte de control
U_k, X_k, Y_k	Vectores de entrada, estado y salida
T_s	Tiempo de muestreo
u_{ss}, x_{ss}	Variables de desviación de entrada y estado, respectivamente

Acrónimos y abreviaturas

MPC	Control predictivo basado en modelo
GPC	Control predictivo generalizado
OMPC	Control predictivo óptimo
MAS	Conjunto máximo admisible
MCAS	Conjunto máximo admisible controlado
DMC	Matriz de control dinámica
SOMPC	Control predictivo subóptimo
K_{SOMPC}	Ganancia de SOMPC
K_{OMPC}	Ganancia de OMPC
LQR	Regulador cuadrático lineal
LPV	Lineal de parámetros variantes
LMI	Desigualdad de matrices lineales
LC	Lazo cerrado
LA	Lazo abierto
T-S	Takagi-Sugeno
UAV	Vehículo aéreo no tripulado

VTOL	Vuelo vertical
E-L	Euler-Lagrange
X8+	Octorrotor tipo X8 de 3DRobotics
SNL	Sistema no lineal
PX4Flow	Sensor de flujo óptico

Letras griegas

Φ Matriz de transición de estados en lazo cerrado.

Superíndices

* Denota optimalidad

Introducción

Aunque en el pasado se podría considerar que el único objetivo de los sistemas de control era mantener una operación estable de un proceso, esto no es del todo real en la actualidad. En los últimos años, la industria ha estado enfrentando cambios importantes en el mercado que han afectado a toda la industria. Una de las principales razones es la globalización. Los desarrollos en los campos de la electrónica, la informática y la tecnología de la información han tenido un fuerte impacto en las telecomunicaciones, la logística y la automatización. Como consecuencia, la industria se ve obligada a operar junto con los desarrollos del mercado para seguir siendo competitivos y rentables [74].

Las compañías que buscan aumentar la rentabilidad se están cambiando de un mercado impulsado por el proveedor a entornos de fabricación centrados en el cliente, impulsados por la demanda, donde la calidad del producto y el servicio al cliente son esenciales para el éxito [75], [28]. Los productos deben entregarse rápidamente, con la calidad adecuada y en el volumen solicitado. Pasar a una operación más impulsada por la demanda es más desafiante para las operaciones de fabricación. Los fabricantes deben estar preparados para eliminar las ineficiencias tanto durante las operaciones de estado estable como durante las transiciones.

Con el aumento de la competencia mundial, la legislación ambiental se ha restringido severamente en el consumo de recursos naturales y las emisiones de contaminantes. Las restricciones ambientales impuestas por la legislación han resultado en un aumento significativo de la complejidad del proceso y los costos de los equipos de producción. En este contexto, hoy en día, un sistema de control diseñado con éxito no solo tiene que ser capaz de controlar una planta sujeta a requisitos asociados con los costos directos, como los costos de energía, sino también con las demandas ambientales y de seguridad ante la presencia de cambios en las características del proceso y demandas variables [75], [28].

En muchos casos los requisitos son contradictorios. Un impulso constante hacia una mayor calidad de los productos con menores costos de fabricación es un ejemplo de requisitos contradictorios. A menudo los requisitos se expresan como restricciones. La razón es que la operación más rentable de la planta industrial se obtiene a menudo cuando el

proceso se ejecuta en un límite de restricción. La estrategia que resulta en las condiciones más rentables debe seleccionarse de una variedad de posibles escenarios operativos para producir el tipo de producto deseado. Esta decisión se basa en una comprensión profunda tanto del comportamiento del proceso como de la operación del proceso. La libertad, disponible en la operación de proceso, debe usarse para producir de manera predecible lo que se requiere en términos de calidad, volumen y tiempo con el mejor resultado de negocio posible.

La aparición de técnicas de control avanzadas brinda una gran oportunidad para mejorar la eficiencia y la optimización de los procesos. El control avanzado incluye una gran cantidad de métodos, uno de los más exitosos es el control predictivo.

En este trabajo se expondrán algunos referentes conceptuales sobre los cuales se sustentará esta investigación, se presentarán algunas definiciones básicas que permitirán establecer nociones teóricas de los conceptos de ingeniería aplicados en esta investigación y de igual manera la conceptualización de la parte técnica. A lo largo del documento se presentarán las ecuaciones que rigen la dinámica del Octorrotor $X8^+$ de 3DRobotics, de 6 grados de libertad (6DOF), modeladas a partir de la metodología Euler-Lagrange, con el fin de obtener el modelo Takagi-Sugeno del sistema $X8^+$ a partir de la técnica de aproximación del sector no lineal, lo cual se utilizará para diseñar un estrategia de control predictivo óptimo modo dual (OMPC) desde el punto de vista LPV con restricciones para el drone octorrotor ya mencionando. El enfoque T-S basado en modelos difusos se ha elegido debido a su eficacia con sistemas complejos no lineales en una amplia gama de áreas de aplicación [1] y [67].

1.1. Conceptualización y Conceptos Básicos

Los multirrotores UAV son ampliamente utilizados hoy en día en muchas aplicaciones tales como tareas de seguridad y vigilancia, producción de videos para diferentes propósitos, por el público en general como un hobby y por los investigadores para implementar nuevas tecnologías e ideas sobre estos dispositivos. Desde un punto de vista del sistema de control, un drone multirrotor es intrínsecamente un sistema dinámico no lineal e inestable que necesita algunos controladores de retroalimentación para llevar a cabo diferentes tareas como permanecer inmóvil y seguir referencias, entre otros. Por lo tanto, muchos controladores lineales y no lineales se han propuesto en la literatura con el objetivo de mejorar la estabilidad y el rendimiento de los drones multirrotor en diferentes situaciones [62], [25], [26]. Entre las técnicas no lineales utilizadas para sintetizar las leyes de control, se ha demostrado que la llamada técnica de compensación distribuida paralela (PDC) [97] basada en el uso de modelos difusos T-S es atractiva tanto desde el punto de vista práctico como puntos de vista teóricos. La configuración de PDC ofrece un procedimiento simple y natural para manejar los sistemas de control no lineales con la posibilidad de utilizar los conocimientos básicos de sistemas lineales y utilizar herramientas del control robusto y LPV [57]. Por

ejemplo, las soluciones efectivas en el tiempo continuo para rastrear referencias se presentan en [99] y [62]. Un inconveniente en las referencias citadas anteriormente es que usan un alto número de reglas en el modelo difuso TS. Sin embargo, para implementar estas leyes de control en los procesadores digitales, es necesario discretizarlos. Por lo tanto, si la técnica de discretización y/o el tiempo de muestreo no se eligen correctamente, el rendimiento de lazo cerrado puede deteriorarse, hasta hacer que el sistema sea inestable o conducir a un procesamiento de datos excesivo. Por ejemplo en especial, las tasas de muestreo de los sensores ultrasónicos (utilizado para medir la altitud del dron) y el IMU (utilizado para medir la actitud del dron), en distintos trabajos se consideran como puntos críticos debido a la velocidad de captura con que son presentados. Los actuadores disponibles, como los motores de CC, también están delimitados por una velocidad máxima. Podrá ser necesario que el usuario quiera o necesite restringir los estados de salida, como la inclinación o la velocidad del sistema. Este tipo de restricciones y limitaciones prácticas deben considerarse en el proceso de diseño para implementar efectivamente una ley de control. El modelo difuso T-S en tiempo continuo puede manejarse fácilmente usando una función Lyapunov común [93] o un enfoque extendido considerando que la región D asigna arbitrariamente los polos [46] en un círculo en el plano S. De lo contrario, en tiempo discreto utilizando un coeficiente de contracción asignando los polos arbitrariamente en el plano Z [56], así como un control óptimo como en T-S difuso MPC [33] optimizando el peor caso de una función costo de horizonte infinito. En aplicaciones de cuadrótores, los generadores de trayectoria remotos (RTG) se utilizan para emitir las referencias a la planta. En [38] se emplea una computadora personal para seguir referencias posicionales en los ejes X, Y y Z. Por otro lado, muchas personas, como camarógrafos, atletas y aficionados a la grabación de videos en el paisaje, usan un joystick como interfaz, y en este caso, los estados a los que se debe llegar son los ángulos roll, pitch, yaw y la altitud. Por lo tanto, la eficacia del controlador LPV se ha probado en [26] para el seguimiento de trayectoria de alta velocidad. En [94], se presenta un controlador de actitud en tiempo continuo teniendo en cuenta el sensor ultrasónico y el I.M.U a través de ocho submodelos locales. Un pequeño número de submodelos y reglas en modelado difuso causa un procesamiento más ligero que uno grande [57]. Por lo tanto, para obtener menos submodelos sin perder información sobre la dinámica del sistema aplicamos un modelado más simple que el expuesto en [94], utilizando el enfoque del sector no lineal [79], basado en las funciones de ponderación y pertenencia. Además, a diferencia de [99] y [62], se puede asumir el empleo de un joystick sin control posicional.

1.1.1. Vehículos Aéreos no Tripulados (UAVs)

Los objetos voladores siempre han ejercido una gran fascinación en el hombre fomentando todo tipo de investigación y desarrollo. Un dron es un vehículo aéreo no tripulado (UAV: Unmanned Aerial Vehicle) por sus siglas en inglés; que presentan pares de conjuntos de hélices idénticas que funcionan con motores brushless de corriente directa (CD), para proporcionar la fuerza de empuje requerida y realizar maniobras cuando la aeronave está en vuelo. Debido a su configuración liviana e inestabilidad inherente, el dron multirrotor

tiene una mejor maniobrabilidad de vuelo que el UAV de ala fija. Lo que es más importante, los multirrotores tienen la capacidad de realizar VTOL (vuelo vertical) y flotar en medio del vuelo; junto con la simplicidad sin precedentes del diseño mecánico que elimina la complejidad del control del rotor principal del helicóptero típico, los vehículos aéreos no tripulados multirrotor se vuelven únicos en la clase de sistemas no tripulados; uno puede pensar en ellos como vehículos aéreos no tripulados de estado sólido. Las características de vuelo únicas del dron, junto con un precio de hardware barato han aumentado una serie de aplicaciones en los sectores militar y comercial, de hecho, el gigante minorista en línea Amazon [1] vio el potencial de agilizar el pedido de entrega y complementar la escasez de mano de obra mediante el uso de drones para volar autónomamente y hacer entregas a sus clientes. Los drones multirrotor también pueden equiparse convenientemente con cámaras de alta resolución para proporcionar un medio relativamente barato para fotógrafos y cineastas ávidos de capturar imágenes a gran altura sin la necesidad de fletar un vuelo durante las producciones. En aplicaciones militares, el dron es una plataforma popular en la realización de misiones ISR, especialmente en AO urbano, donde los drones se pueden programar para volar a edificios y realizar mapas visuales e identificar posibles amenazas.

1.2. Estado del Arte

En las últimas décadas han ocurrido cambios rápidos y mejoras en los campos de la electrónica, las computadoras y los sistemas de control, como resultado de esto, los sistemas controlados por computadora han estado aumentando en casi todos los campos; la cantidad de sistemas mecánicamente operativos es muy poca, por lo tanto el diseño, la producción y el mantenimiento de productos avanzados ya no son un solo tema. Esto hizo que Mechatronics surgiera como una nueva disciplina en los años 70; el multirrotor, es un buen ejemplo de un sistema mecatrónico debido a la combinación de elementos mecánicos (donde se considera la aerodinámica, resistencia de materiales, diseño de mecanismos, etc.) y elementos electrónicos, analógicos o digitales, como los sensores, actuadores y el procesador donde está el algoritmo de control. Desde la perspectiva del control, este sistema subactuado tiene un comportamiento altamente no lineal y las no linealidades también surgen en la hélice, esto implica un desafío para los investigadores, permitiéndoles desarrollar e implementar estrategias de control avanzadas, [15], [23] y [47], algunas de las cuales se han propuesto en la literatura con el objetivo de mejorar la estabilidad y el rendimiento de estos sistemas en diferentes situaciones, [62], [25] y [26].

Existen muchas soluciones de control modernas desarrolladas y utilizadas para obtener mejores resultados en el control de sistemas mecatrónicos no lineales, como el control predictivo basado en modelo [21], el control difuso [81] y el control adaptativo [88], entre otros. Se muestra en [20] que estos métodos deben incluir el modelo de la planta no lineal y la posibilidad de estimar los parámetros y las variables de estado.

En [45] se presenta un diseño de un controlador óptimo basado en modelos difusos T-S, y las variables de estado se expresan como funciones ortogonales.

En [57] se muestra un modelo difuso no lineal generalizado (o N-difuso) que define el modelo difuso T-S clásico como un caso especial del modelo N-difuso. El controlador difuso T-S (T-S-FC) es flexible a los cambios de punto de operación. Los submodelos lineales utilizados para el diseño T-S-FC se pueden tratar como sistemas LPV que permiten la aplicación de herramientas bien establecidas Lyapunov y LMI para sistemas de control LPV. Una cuestión clave cuando se aplica una representación difusa T-S para fines de control es la precisión del modelo, ya que los modelos T-S pueden representar, exactamente o aproximadamente, al sistema no lineal original que se controlará. Aunque la representación difusa T-S exacta tiene una dinámica idéntica al sistema no lineal original, pero la convexidad del modelo sólo puede garantizarse en un dominio específico del espacio de estado [57].

En los últimos años, se han desarrollado análisis de estabilidad y controladores en tiempo discreto en [54], [55] y [57] se muestran herramientas poderosas para ser consideradas en el momento del trato con sistemas híbridos continuos discretos no lineales.

En [56] se demostró que un pequeño número de reglas difusas que generaba un procesamiento suave mejor que cuando se tiene un gran número. En consecuencia, un objetivo de esta investigación es desarrollar un modelo difuso con un número menor de reglas que en otros documentos relacionados en la literatura, tales como [62] y [99].

En el trabajo desarrollado por Lendek [64], se presenta una comparación entre tres estimadores de estados para este sistema; un observador lineal, un observador difuso de Takagi-Sugeno y un observador por filtro derivativo, con los resultados obtenidos se ve que la respuesta que presentan los tres observadores es muy similar, por lo tanto; la estimación de estados en este trabajo se hace usando un filtro derivativo de segundo orden.

En [67] presentan un controlador LQR difuso para un cuadricóptero de seis grados de libertad, pero a diferencia de algunos controladores ya propuestos, el autor usó la técnica de diseño de Mandani, únicamente para el estado correspondiente a la altura; además que sólo se presentan las simulaciones, dado que no se hicieron las pruebas experimentales para analizar su desempeño en el sistema físico.

Por otro lado, existen plataformas ya desarrolladas por diversos fabricantes, tal es el caso del dispositivo diseñado y construido por la empresa canadiense Quanser Inc[®]; que lleva por nombre Quanser 3DOF Hover, y en la cual se han aplicado distintas técnicas de control, las cuales incluyen; PID's [82], control H_∞ [80] y [68] modos deslizantes [82], [22] y [100] control adaptable [36], control LQR [53] y control difuso sin la optimización de las ganancias de realimentación para minimizar la inyección de energía al sistema [101].

Algunas ventajas de controladores que se han propuesto, es el excelente desempeño aún cuando los rangos de variación de los estados del sistema son grandes; todas las respuestas presentadas en los artículos antes mencionados únicamente se limitan a hacer pruebas

donde la máxima variación de la señal es $\pm 2.5[^\circ]$, en el mejor de los casos. En la mayoría de pruebas de seguimiento realizadas por estos autores, estos sólo las hacen para uno de los estados del sistema, acción que hasta cierto punto es ventajosa y que como se demostrará después, tiene efectos importantes en la respuesta final del sistema.

En lo referente a la aplicación de la teoría de control sobre redes, a los cuadricópteros destacan los trabajos hechos por [10], [89] y [77], quienes presentan diversos controladores distribuidos en red, únicamente en simulaciones.

En [30] hacen una implementación en un sistema real, pero los paquetes no se envían al cuadricóptero a través de una red como Ethernet o WiFi, si no que previamente se hace una conversión de los datos a una señal de radio frecuencia.

Entre las técnicas no lineales utilizadas para sintetizar las leyes de control, se ha demostrado que la llamada técnica de compensación distribuida paralela (PDC) [97] basada en el uso de modelos difusos T-S es atractiva tanto desde el punto de vista práctico como puntos de vista teóricos. La configuración PDC ofrece un procedimiento simple y natural para manejar los sistemas de control no lineales con la posibilidad de utilizar los conocimientos básicos de sistemas lineales y utilizar herramientas del control robusto y LPV [57].

Por ejemplo, las soluciones efectivas en tiempo continuo para rastrear referencias se presentan en [99] y [62]. Un inconveniente en las referencias citadas anteriormente es que usan un alto número de reglas en el modelo difuso T-S. Sin embargo, para implementar estas leyes de control en los procesadores digitales, es necesario discretizarlos. Por lo tanto, si la técnica de discretización y / o el tiempo de muestreo no se eligen correctamente, el rendimiento de lazo cerrado puede deteriorarse, hasta hacer que el sistema sea inestable o conducir a un procesamiento de datos excesivo.

En especial, las velocidades de amplificación del sensor ultrasónico (utilizado para medir la altitud del quadrotor) y el IMU (utilizado para medir la actitud del quadrotor), se consideran en el presente trabajo como puntos críticos debido a la velocidad de captura con la que aparecen. Los actuadores disponibles, como los motores de CD, también están delimitados por una velocidad máxima. Podría ser necesario que el usuario quiera o necesite restringir los estados de salida, como la inclinación o la velocidad del sistema.

Este tipo de restricciones y limitaciones prácticas deben considerarse en el proceso de diseño para implementar de manera efectiva una ley de control. El modelo difuso T-S en tiempo continuo puede manejarse fácilmente usando una función Lyapunov común [93] o un enfoque extendido considerando que la región D asigna arbitrariamente los polos [46] en un círculo en el plano S. De lo contrario, en tiempo discreto, se debe utilizar un coeficiente de contracción asignando los polos arbitrariamente en el plano Z [56], así como un control óptimo como en T-S difuso MPC [33] optimizando el peor caso de una función costo de horizonte infinito.

En aplicaciones de cuadrrotores, los generadores de trayectoria remotos (RTG) se utilizan para emitir las referencias a la planta.

En [38] se emplea una computadora personal para rastrear las referencias posicionales en los ejes (x , y , z). Por otro lado, personas como camarógrafos, atletas y aficionados a la grabación de videos panorámicos utilizan un joystick como interfaz, y en este caso, los estados a los que se debe llegar son ángulos, es decir, $roll(\phi)$, $pitch(\theta)$, y $yaw(\psi)$.

Por lo tanto, la eficacia del controlador de parámetros variantes lineales (LPV) se ha probado en [26] para el seguimiento de trayectoria de alta velocidad.

En [94], se presenta un controlador de actitud en tiempo continuo teniendo en cuenta el sensor ultrasónico y el I.M.U a través de ocho submodelos locales. Un pequeño número de submodelos y reglas en modelado difuso causa un procesamiento más ligero que uno grande [57].

Por lo tanto, para obtener menos submodelos sin perder información sobre la dinámica del sistema aplicamos un modelado más simple que el expuesto en [94], por medio del enfoque del sector no lineal [79] basado en las funciones de ponderación y pertenencia.

En el artículo [3] se diseña una estrategia de control predictivo basada en modelo para el control de la orientación y la posición de un quadrotor. El sistema desarrollado es capaz de rendir de manera precisa en vuelos de interiores mediante la utilización de un sistema de fusión de sensores IMU/Sonar/IMU. La novedad en este artículo residía en la propuesta del control MPC, siendo el resultado experimental satisfactorio.

En [43] desarrolla la reconfiguración de las leyes de control de sistemas no lineales, mediante el uso de un control predictivo basado en un modelo difuso (FMPC). Cabe señalar que los sistemas estudiados están escritos en forma paramétrica casi cuasi lineal (cuasi LPV). Esta estrategia FMPC está desarrollada para preservar la estabilidad de lazo cerrado en el caso defectuoso nominal y actuador. Se presenta el alojamiento de fallas por rechazo de perturbaciones. Este paso se realiza por control basado en interpolación para cubrir toda el área de operación. Para permitir que el proceso mantenga las actuaciones actuales cerradas a las actuaciones deseadas, se utiliza un optimizador dinámico. La contribución de este trabajo proviene de la combinación de varios aspectos tales como modelo difuso, programación cuadrática y principio de desacoplamiento de fallas. La linealización alrededor de una familia de puntos de equilibrio también se estudia. Los puntos de operación están configurados adecuadamente por un conjunto de variables llamadas premisas.

En el artículo [11] se considera el control de alta velocidad de sistemas LPV con restricciones que usan el control predictivo basado en modelo. Los esquemas de control predictivo basado en modelo existentes para el control de sistemas lineales con sistemas LPV con restricciones requieren típicamente la solución de un programa semidefinido en cada instante de muestreo. Recientemente, se propusieron variantes del control predictivo basado en modelo explícito para sistemas LPV con representación politópica, disminuyendo el esfuerzo

computacional en línea por órdenes de magnitud. Dependiendo de la estructura matemática del sistema subyacente, el problema de control óptimo de tiempo finito limitado se puede resolver de manera óptima, o se pueden calcular soluciones cercanas a la óptima. La satisfacción de restricciones, la viabilidad recursiva y la estabilidad asintótica se pueden garantizar a priori mediante una selección adecuada de las limitaciones del estado terminal y el costo terminal. El documento en cuestión recopila desarrollos previos y proporciona material nuevo, como una prueba de la solución de optimalidad, o, en el caso de soluciones cercanas a la óptima, un procedimiento para determinar un límite de la solución en la suboptimalidad.

En [69] está dedicado al problema robusto de detección y seguimiento de fallas para un sistema UAV con perturbaciones externas. Un quadrotor modelado como un sistema LPV se considera como un objetivo para diseñar e ilustrar métodos de control avanzados recientes. En primer lugar, el problema de detección de fallas se aborda considerando el diseño de un observador de detección de fallas robusto con rendimiento H_∞ . El desafío es atenuar las perturbaciones externas y generar señales residuales útiles para detectar y aislar fallas en los sensores. En segundo lugar, se diseña un controlador de realimentación considerando un esquema de control integrador comparador para estabilizar el sistema y alcanzar la señal de seguimiento. En ambos casos, se utilizan la teoría de Lyapunov y la técnica de ganancia de L_2 para obtener condiciones de estabilidad suficientes en la formulación de LMI (desigualdades de matriz lineal). Finalmente, algunas simulaciones se realizan en casos con fallas y sin fallas en el sistema quadrotor.

En [87] se considera el control de un helicóptero de cuatro rottores. El modelo no lineal del quadrotor se transforma en un modelo lineal sujeto a parámetros variables en el tiempo llamados sistemas lineales de parámetros variantes (LPV). Posteriormente, la función cuadrática de Lyapunov y la función de costo cuadrático se utilizan para encontrar la ganancia de realimentación de estado óptima. Para obtener la solución óptima, el problema de control LPV se convierte en el problema de programación semi-definida con un conjunto de restricciones de desigualdades de matrices lineales (LMI). Los resultados de la simulación se proporcionan para demostrar la efectividad del método propuesto.

En lo que se refiere a el control predictivo modo dual este tipo de CPBM tiene una restricción terminal de desigualdad llamada región terminal (Ω). Fuera de esta región actúa el CPBM tradicional, pero al ingresar a la región terminal, se conmuta a un controlador local de la forma $u(x) = -Kx$, de allí el nombre de Control Predictivo Basado en Modelo por modo dual.

Esta estrategia fue propuesta en [71] para sistemas no lineales en tiempo continuo y sujeto a restricciones. En este trabajo, se elige como región terminal un invariante positivo del sistema no lineal controlado por un controlador local. Además, para garantizar la factibilidad se introduce como variable de decisión el horizonte de predicción. El controlador así formulado garantiza que conduce al sistema a la región terminal, donde el sistema pasa a regularse por el controlador local que lo estabiliza al origen. De ahí que este controlador

se denomine controlador CPBM dual. Las bondades de esta formulación son tan notables, que marcó las futuras líneas de investigación en estabilidad. En [61] se extiende el CPBM por modo dual a sistemas discretos no lineales usando un horizonte de predicción fijo, al igual que en [86] donde se estudia la factibilidad como condición suficiente para garantizar estabilidad, en lugar de la optimalidad.

En [49] se presenta una formulación de un CPBM contractivo del tipo Sistema de Inferencia Borrosa entrada-salida con realimentación PI de salida (CPBM SIBES+PI, donde el controlador lineal opera en una vecindad del punto de equilibrio. En este trabajo, la ley de realimentación lineal PI de salida está integrada en el funcional de costo como un término adicional, que permite el manejo unificado de la acción de control, sin realizar una conmutación directa entre los controladores. La novedad frente al funcional de costo original, es un término que penaliza la diferencia entre la acción de control que aplicaría un controlador PI y la que se está evaluando para el CPBM. Esta funcionalidad está en términos de un parámetro, que es un factor de pertenencia borrosa del máximo error absoluto entre la salida de referencia (y_{ref}) y la salida del proceso.

En [6] se implementa un CPBM por modo dual para controlar la concentración de producto en un CSTR, estimada mediante un filtro de filtro de Kalman extendido (EKF). En [37] formula un CPBM dual, allí se usa una región terminal que se determina mediante un proceso de ensayo y error, vale la pena resaltar que este autor usa un PI operando dentro de la región terminal, aspecto diferenciador con respecto a otros autores [66] que usan LQR como controlador local.

En adelante la mayoría de los autores han usado CPBM por modo dual, adicionando al funcional de costo un costo terminal, asociado con el comportamiento que debe tener el controlador al entrar en la región terminal, evitando la pérdida de optimalidad que se presenta al conmutar de un controlador a otro, solucionando así la dificultad de conmutación que se presenta en CPBM por modo dual. Este tipo de CPBM pasa de llamarse CPBM por modo dual, para formar parte del grupo de CPBM con costo y restricción terminal, un ejemplo de ello es el trabajo realizado en [83], et al, (2008) donde se propone un CPBM con costo y restricción terminal, compuesto por un CPBM no lineal y un controlador predictivo lineal de horizonte infinito (IHMP) extendido como controlador lineal. En este trabajo se modifica el funcional de costo del CPBM adicionándole el controlador lineal (IHMP), de manera que éste último garantice la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

En [98] realizan un controlador predictivo modo dual para formaciones de robots autónomos no holonómicos mediante el uso de una técnica de linealización por realimentación de entrada y salida, Se ha observado que los métodos de control predictivo basado en modelo (MPC) pueden tener ventajas sobre las leyes de retroalimentación de estado cuando se aplican a los robots móviles, incluida la consideración de las restricciones en las entradas o vectores de estado. Sin embargo, los algoritmos MF'C requieren optimización en línea, lo que resulta en una carga computacional significativa para sistemas grandes o formaciones de robots. En este trabajo mencionado, se desarrollo un algoritmo MPC modo dual que

utiliza un controlador por realimentación de estados para entrada y salida, dentro de un conjunto de restricciones terminales especificado. El control de formaciones de robots no holonómicos en configuraciones de un seguidor líder se simula fuera de línea, y las características de rendimiento del controlador MPC de modo dual se contrastan con las del controlador de linealización de realimentación de salida-entrada. Algunas limitaciones clave del controlador de linealización de retroalimentación de salida-entrada incluyen regiones de estabilidad limitadas, falta de robustez para la dinámica y la cinemática sin modelar y la incapacidad de incorporar heurísticas de alto nivel para el control de formación.

Todos estos son problemas que pueden ser resueltos, o al menos moderados, mediante el uso de algún tipo de control predictivo basado en modelo, siempre que algunas dificultades computacionales no impidan soluciones factibles. El uso de cadenas de controladores predictivos basado en modelo de modo dual puede ser prometedor para formaciones más grandes de robots móviles, siempre que se puedan cumplir ciertas suposiciones. Una ventaja continua del enfoque de linealización de retroalimentación puede ser fácil de calcular. En una aplicación en tiempo real puede ser difícil lograr tiempos de solución insignificantes para el algoritmo de optimización que debe ejecutarse en cada paso. Sin embargo, a medida que mejoran los métodos de optimización, puede ser práctico aplicar MPC para el control de formaciones individuales o de robots en aplicaciones reales.

Para promover este fin, el Laboratorio MARHES de la Universidad Estatal de Oklahoma está desarrollando un banco de pruebas para múltiples vehículos con el fin de permitir la implementación experimental de estos y otros algoritmos de control.

En [2] propone un nuevo algoritmo de control predictivo basado en modelo distribuido robusto que utiliza el enfoque de modo dual en lazo cerrado para reducir los cálculos exigentes necesarios, para resolver el problema de optimización limitada en línea. El algoritmo propuesto requiere resolver N problemas convexos de optimización en paralelo basados en el intercambio de información entre los controladores. También se desarrolla una técnica de relajación para superar el problema de viabilidad para la iteración inicial. Se utilizan dos ejemplos de simulación para ilustrar el nuevo método y para comparar el algoritmo propuesto con una técnica desarrollada previamente en términos de rendimiento y tiempo máximo computacional por intervalo de control. Los resultados de la simulación mostraron que el nuevo algoritmo proporciona una reducción significativa en los cálculos en línea al tiempo que resulta en un rendimiento comparativo en comparación con un algoritmo informado anteriormente.

En [41] se propone un algoritmo de identificación multicanal (MCIA), en el que los parámetros del coeficiente se identifican por estimación de mínimos cuadrados (LSE) junto con una técnica de descomposición del valor singular (SVD). Con este TS-SCIA como el modelo interno, se desarrolla un algoritmo de control predictivo modo dual no lineal basado en modelo (NMPC). En detalle, en un horizonte finito, un perfil de entrada óptimo que se encuentra al resolver un problema de control óptimo de lazo abierto el cual dirige el estado del sistema no lineal al conjunto invariante terminal; luego, un controlador de

realimentación de salida lineal dirige el estado al origen de forma asintótica. En contraste con los algoritmos tradicionales, el presente método tiene una región máxima estable, un mejor rendimiento en estado estable y una menor complejidad computacional. La región estable de lazo cerrado se maximiza utilizando la teoría de conjuntos invariantes elipsoidales junto con las técnicas de desigualdades de matrices lineales (LMI). Finalmente, se presentan los resultados de la simulación en un intercambiador de calor para mostrar la eficiencia de los algoritmos de identificación y de control.

1.3. Problemática

Los vehículos aéreos no tripulados son considerados sistemas dinámicos no lineales y fuertemente acoplados, por lo que resulta una tarea muy compleja el modelado y control de los mismos. Las no linealidades que presentan y sus fuertes modos de acoplamiento los hacen sistemas muy complejos con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), debido a las dificultades que presentan este tipo de sistemas no lineales, resulta de gran interés estudiar y encontrar una estrategia de control predictivo óptimo para los mismos.

El problema principal consiste en diseñar una estrategia de control predictivo modo dual (por sus siglas en inglés, OMPC) desde el enfoque Takagi-Sugeno para el dron octorrotor $X8^+$ 3DR; es necesario que la optimización de trayectorias garanticen el menor costo computacional posible y la estabilidad del sistema en todo momento.

1.4. Objetivos y Metas

Objetivo general

Diseñar una estrategia de control predictivo basado en modelo Takagi-Sugeno para el Drone octorrotor $X8^+$ de 3D Robotics.

Objetivos específicos

- Desarrollar un modelo tipo Takagi-Sugeno.
- Proponer una estrategia basada en control predictivo óptimo para un dron octorrotor modelado en Takagi-Sugeno.
- Validar las propuestas experimentalmente.

Metas

- Obtención de un Modelo Takagi-Sugeno desde el punto de vista LPV para el UAV modelo $X8^+$, 3D Robotics.

- Asimilación de la estrategia MPC para sistemas Takagi-Sugeno desde el punto de vista LPV con restricciones.
- Desarrollo e implementación del esquema propuesto en simulación.
- Puesta en marcha del X8+, Pixhawk y PX4FLOW.
- Implementación y pruebas en el sistema 3DR Pixhawk.

1.5. Justificación

La ley de control en MPC es muy difícil de implementar, debido a que los problemas de optimización con restricciones pueden ser muy complejos de resolver y agregar restricciones terminales pueden convertirlo en un problema sin resolución, lo que implica que el uso de modelos no lineales cambia el problema de optimización, ocasionando que no haya garantía de que pueda encontrarse un óptimo global.

1.6. Estructura del documento

En este capítulo se ha mostrado un panorama general sobre los vehículos aéreos no tripulados. Se formuló el problema general, así como el objetivo general y objetivos particulares, los alcances y limitaciones del trabajo. En los siguientes capítulos se presenta el desarrollo de la tesis y los resultados obtenidos. A continuación se describe la estructura en que se organiza el presente trabajo:

En el capítulo 2 se realiza una revisión sobre el control en drones multirrotor, así como las diferentes clases de los sistemas LPV, el modelado difuso visto desde una perspectiva general, sus estructuras, la técnica de aproximación del sector no lineal y el control óptimo.

En el capítulo 3 se presenta un amplio espectro sobre control predictivo modo dual, definiendo el concepto de horizontes infinitos, la cola (tail), el paradigma de lazo cerrado del control predictivo óptimo y los conjuntos invariantes.

En el capítulo 4 se muestran los resultados de investigación, es decir, la obtención del modelo Takagi-Sugeno de los subsistemas rotacional y traslacional del octorrotor, el diseño del control predictivo modo dual con restricciones y sin restricciones. Además, se presenta la puesta en marcha y pruebas del autopiloto Pixhawk.

Por último se muestran las conclusiones del trabajo realizado, trabajos futuros, algunos productos derivados de la tesis y las referencias.

Marco Teórico

Actualmente, las aplicaciones de la ingeniería de control a la industria y la investigación crecen a un ritmo acelerado; prueba de ello son los avances logrados en los sectores de la robótica, aeroespacial, automotriz, y de procesos, entre otros. El desarrollo de la teoría de control se ha dado debido a que los sistemas son cada vez más complejos; por lo que resultan dinámicas no lineales y por supuesto un modelo de ecuaciones diferenciales no lineales más complejas. Ante esta necesidad, fue necesario buscar alternativas a las conocidas técnicas de control lineal, las cuales tenían respuestas no adecuadas para este tipo de sistemas. Fue así como se desarrollaron técnicas de control no lineal y aproximaciones no lineales, permitiendo a los profesionales del área obtener un mejor desempeño de los sistemas. Dentro de las técnicas de control para sistemas no lineales se encuentra el control difuso, el cual tiene sus bases en la teoría de conjuntos difusos desarrollada a finales de los años sesenta por L.A. Zadeh[14]. Las dos vertientes más importantes dentro de esta rama son el método de Mamdani y el método de Takagi-Sugeno. Aunque el método de Mamdani es más sencillo e intuitivo de desarrollar, la metodología de Takagi-Sugeno tiene la ventaja de utilizar el modelo matemático no lineal de la planta y por medio de una serie de reglas difusas, representa el comportamiento no lineal de la planta como un conjunto de submodelos locales lineales que están suavemente conectados por medio de funciones de pertenencia. Para el control de cada uno de los submodelos se puede emplear cualquier técnica de control lineal conocida, pero siempre se debe garantizar la estabilidad global del sistema durante las transiciones de una submodelo a otro. El análisis de estabilidad se hace por medio de la teoría de Lyapunov aplicada a sistemas difusos[43].

Las necesidades actuales de los sistemas de control, están haciendo que sea necesario implementar sistemas distribuidos, es decir; ubicar sensores, actuadores y controladores en lugares alejados dentro de un mismo espacio, e incluso en lugares geográficos distintos, en estos casos la comunicación se hace por medio de una red de comunicación.

El control predictivo es una disciplina que tiene como objetivo resolver problemas de control y automatización de procesos industriales que se caractericen por presentar un comportamiento dinámico complicado, multivariable y/o inestable. El control predictivo

es una técnica ampliamente extendida en el control de procesos multivariables, especialmente cuando estos están sometidos a restricciones. El control predictivo ha demostrado su potencial y ha sido ampliamente aceptado en el control de procesos multivariables a nivel industrial, especialmente debido a su capacidad de incorporar en el diseño restricciones tanto en las entradas como en las variables del proceso, así como un índice objetivo del coste de la evolución temporal del modelo. Por ello, es objeto de estudio a nivel científico en el área de control de procesos. Por otro lado, los sistemas físicos presentan en su gran mayoría un comportamiento no lineal. La teoría clásica de control afronta este problema a través de la linealización de dichos sistemas en torno a un punto de funcionamiento, donde se espera que trabaje el sistema. Esta simplificación ha permitido desarrollar toda una serie de teorías y procedimientos de diseño que permiten afrontar una gran cantidad de problemas de control de forma suficiente. Sin embargo, en muchos otros casos, esta aproximación no resulta satisfactoria. El diseño de controladores a partir de modelos lineales en sistemas que presentan fuertes no linealidades, puede dar lugar a problemas de estabilidad y/o de prestaciones.

Así, una posible estrategia de control pasa por realizar un primer diseño de controladores a partir de la teoría clásica de control, y si ésta no resulta satisfactoria, se continúa por plantear las diferentes técnicas modernas de control que contemplan las dinámicas no lineales del sistema.

Entre las distintas técnicas de análisis de modelos no lineales, destacamos las técnicas de diseño de controladores basados en modelos difusos. Estos modelos basan su definición en una interpolación sobre un conjunto de modelos lineales. Así, gran parte de los principios de control lineales tienen una aplicación análoga en los modelos difusos. En concreto, en esta tesis se utilizan con profundidad los modelos difusos Takagi-Sugeno.

La unión de estas dos técnicas, el control predictivo óptimo y el control de modelos difusos da lugar a una estrategia de control denominada control predictivo difuso. Este control contempla los ingredientes básicos del control predictivo, pero siendo aplicado a modelos no lineales de tipo difuso. En general, la problemática asociada a cualquier técnica de control difuso se encuentra en el conservativismo de las soluciones obtenidas. Esto motiva que todavía no existan técnicas de control predictivo-difuso ampliamente aceptadas en la teoría de control.

2.1. Sistemas de Control Automático

En la actualidad el concepto de sistema de control presenta una multiplicidad de definiciones; ello se debe principalmente a que la construcción del mismo se ha dado desde diversos cambios interdisciplinarios de la ingeniería y las matemáticas. sin embargo y según [58] un sistema de control automático es aquel que logra controlar las salidas en alguna forma preescrita mediante las entradas a través de los elementos del sistema de control. Existen 2 tipos de control automatico en la actualidad: los sistemas de control en lazo abierto y los sistemas de control en lazo cerrado, siendo estos ultimos los más utilizados en

procesos industriales y de robótica, básicamente un sistema de control de lazo cerrado se caracteriza por que “el uso de la realimentación vuelve la respuesta del sistema relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones internas en los parámetros del sistema” [78].

La utilización de un tipo de control u otro, depende de la naturaleza del sistema, es decir que si se conoce el comportamiento del sistema y sus salidas son fáciles de predecir, se recomienda utilizar control en lazo abierto, por el contrario, si no se conoce el comportamiento del sistema y sus salidas son difíciles de predecir se utiliza control en lazo cerrado, como es el caso de uno de los objetivos de esta investigación, en donde se pretende controlar un sistema no lineal y dependiente de múltiples variables para predecir su salida en términos generales. En la figura 2.1, se muestra la configuración básica de un controlador en lazo cerrado, nótese que se está realizando una comparación constante entre la entrada y la salida, a través de un lazo de realimentación, el cual por lo general está compuesto de sensores de medición inercial que permiten medir las variables del sistema en todo momento, calculando la diferencia entre estos y realizando un control dependiente del valor de referencia entregado en la entrada, por lo general un ángulo para el caso del $X8^+$.

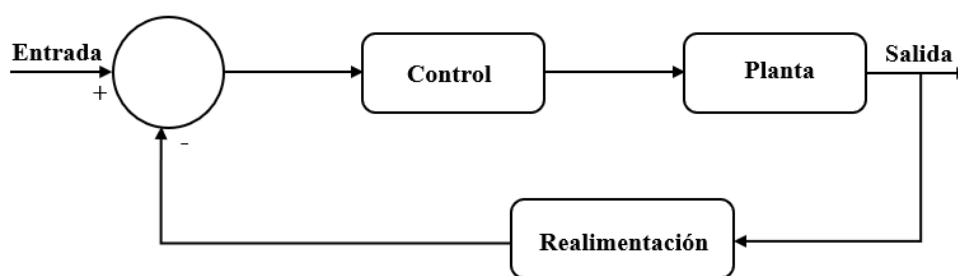


Figura 2.1: Sistema básico de control automático.

2.1.1. Control en drones multirrotor

En la aviación se le conoce al término de actitud como el estado de la aeronave frente a su movimiento de alabeo, cabeceo y guiñada (ángulos roll, pitch y yaw) para el caso de los helicópteros.

Por lo general, en las aeronaves tripuladas el piloto es el encargado de mantener el avión estable observando el indicador de actitud de la aeronave, para el caso de los vehículos aéreos no tripulados es en la tarjeta de control donde se implementa el control de actitud para garantizar el estado estable de la aeronave suspendida en el aire como se muestra en [72], en donde se realiza un control en los ángulos roll, pitch y yaw con el fin de estabilizar el vehículo aéreo no tripulado, ver figura 2.2. Los controladores de velocidad y posición son los responsables de generar las referencias apropiadas para el controlador de actitud para mantener una posición y velocidad deseadas.

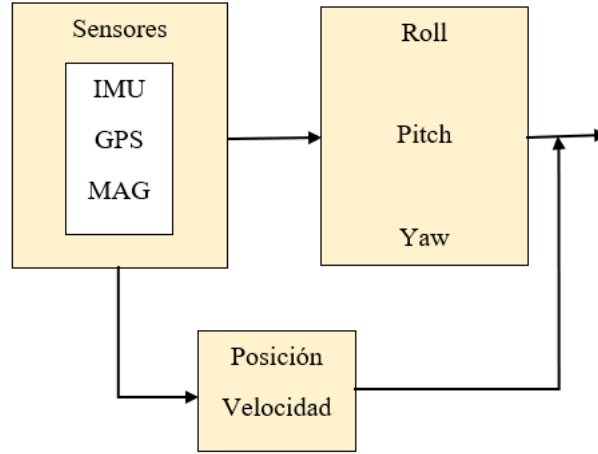


Figura 2.2: Esquema de control de actitud adaptado de [72]

2.2. Sistemas LPV

Los sistemas Lineales de Parámetros Variantes (LPV, por sus siglas en inglés Linear Parameter Varying) son utilizados como una representación matemática alternativa de un sistema no lineal. De manera general los sistemas LPV, se describen en la ecuación (2.1).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) + E(\theta(t))w(t) \\
 z(t) &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) + F(\theta(t))w(t) \\
 y(t) &= Cy(\theta(t))x(t) + Fy(\theta(t))w(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Donde $x \in R^n, u \in R^m, w \in R^p, z \in R^q, y \in R^t$ son los estados del sistema, la entrada de control, la entrada exógena, la salida de control y la salida medible respectivamente. El parámetro o vector parámetros ($\theta \in R^N$) representan el vector de parámetros variantes en el tiempo del sistema, el cual se supone es delimitado. E, A, B, C y D son matrices constantes que se conocen con dimensiones apropiadas.

Un sistema LPV puede interpretarse como la generalización de un sistema Lineal Invariante en el Tiempo (LTI, por sus siglas en inglés Linear Time Invariant), cuando el vector θ de parámetros variables es constante $\theta(t) = \theta_0$. La diferencia entre los sistemas LTI y los sistemas LPV radica en que en los sistemas LTI no existen parámetros variables en el tiempo, mientras que en los sistemas LPV tienen por lo menos un parámetro o vector de parámetros que varían con el tiempo. Los sistemas lineales de parámetros variantes (LPV) pertenecen a una clase general de los sistemas lineales variables en el tiempo (LTV, por las siglas en inglés de Linear Time Varying). La característica fundamental de los sistemas LPV, es su dependencia explícita de por lo menos un parámetro variante en el tiempo y que puede ser medido en cualquier instante de tiempo. El hecho de que el parámetro variable o vector de parámetros sea medible es una de las características indispensables de los sistemas LPV.

2.2.1. Clases de Sistemas LPV

Existen diferentes clases para representar a los sistemas LPV. Las más conocidas son las siguientes:

1. Sistemas afines y multi-afines
2. Sistemas cuasi-LPV
3. Sistemas polinomiales
4. Sistemas racionales
5. Sistemas singulares
6. Takagi-Sugeno

A continuación se hará una descripción breve de las distintas clases de sistemas LPV mencionadas anteriormente. La notación utilizada es la misma que se usó para describir el sistema dado por la ecuación (2.1).

2.2.1.1. Sistemas LPV afines y multi-afines

Los sistemas afines y multi-afines son los sistemas LPV más simples y se pueden encontrar comúnmente en la literatura [18], [19], y [4]. Su expresión general es la siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ z(t) &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde los elementos de las matrices del sistema son funciones afines al vector de parámetros θ , es decir, los elementos de las matrices se representan de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \theta_i$$

donde A_0, B_0, C_0, D_0 así como las matrices A_i, B_i, C_i, D_i , con $i = 1, \dots, N$; son matrices constantes de dimensiones apropiadas y $\theta_i = \theta_i(t)$ es el i -ésimo elemento del vector de parámetros $\theta \in \mathbb{R}^N$. Un ejemplo de un sistema LPV afín se muestra a continuación.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_1 + \theta_2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x$$

y se puede reescribir como:

$$\dot{x} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_2 \right\} x$$

donde

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

2.2.1.2. Sistemas cuasi-LPV (q-LPV)

Se dice que un sistema es q-LPV cuando los parámetros son funciones de los estados o entradas del sistema, la representación q-LPV de un sistema no lineal está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta(x, u))x + B(\theta(x, u))u \\ y &= C(\theta(x, u))x + D(\theta(x, u))u \end{aligned} \quad (2.3)$$

El sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x_1x_2 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= -8x_2 + x_2u \end{aligned}$$

Puede escribirse como un sistema q-LPV de la forma:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\theta(t) & -3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

siendo $\theta(t) = x_2$

2.2.1.3. Sistemas LPV polinomiales

Los sistemas polinomiales se definen como la generalización de los sistemas afines, pero con una dependencia polinomial respecto a los parámetros. Su representación se describe mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \\ y &= C(\theta)x(t) + D(\theta)u(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde las matrices $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ y $D(\theta)$ se descomponen de la siguiente manera:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \theta^{\alpha_i}$$

donde $\alpha_i = [\alpha_i^1 \dots \alpha_i^N]$ es un vector de parámetros que contiene los exponentes de los términos polinomiales $\theta^{\alpha_i} = \theta_1^{\alpha_i^1} \theta_2^{\alpha_i^2} \dots \theta_N^{\alpha_i^N}$.

El siguiente ejemplo muestra un sistema LPV polinomial:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \theta_1^2 & \theta_1\theta_2^2\theta_3 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} x$$

y puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\dot{x} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta^{\alpha_1} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta^{\alpha_2} \right\} x$$

donde:

$$\alpha_1 = [2 \ 0 \ 0] \text{ y } \alpha_2 = [1 \ 2 \ 1], \theta^{\alpha_1} = \theta_1^2 \text{ y } \theta^{\alpha_2} = \theta_1\theta_2^2\theta_3$$

2.2.1.4. Sistemas LPV racionales

Los sistemas LPV son racionales si y solo si, se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \varphi_i(\theta) \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde la expresión $\varphi_i(\theta)$ es una función racional en cada uno de los componentes θ_j de θ para $j \in [1 \ n_0]$, siendo r , en este caso, el número de funciones racionales distintos.

Los sistemas racionales son los más complicados de los sistemas LPV en cuanto al análisis y diseño de sistemas de control se refiere. Su expresión general es la siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x(t) + B(\theta)w(t) \\ z &= C(\theta)x(t) + D(\theta)w(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ y $D(\theta)$ son las matrices dependientes de las funciones racionales de θ .

El siguiente ejemplo muestra un sistema LPV racional:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\theta+2} & 4 \\ 0 & \frac{-\theta+1}{\theta^2+7} \end{bmatrix} x$$

y puede reescribirse como:

$$\dot{x} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \phi_1(\theta) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \phi_2(\theta) \right\} x$$

donde las funciones racionales $\phi_1(\theta)$ y $\phi_2(\theta)$ son:

$$\begin{aligned} \phi_1(\theta) &= \frac{1}{\theta+2} \\ \phi_2(\theta) &= \frac{\theta+1}{\theta^2+7} \end{aligned}$$

2.2.1.5. Sistemas LPV singulares

La representación general de un sistema singular lineal es la siguiente:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde la matriz E es singular, si el rango de la matriz E es inferior a n , siendo n la dimensión de espacio de estados del sistema, el sistema de la ecuación (2.2) no puede ser convertido a una descripción estándar en espacio de estados al multiplicar por E^{-1} , entonces en ese caso, se dice que la ecuación (2.2) representa un sistema singular.

2.2.1.6. Sistemas LPV Takagi-Sugeno

Este tipo de sistemas LPV se describen detalladamente en este tema de tesis en la sección 4.1.

2.3. Modelado difuso

No es nueva la idea del enfoque multimodelo [12], pero la idea del modelado difuso usando el concepto de la teoría de conjuntos difusos propone una nueva técnica para construir modelos múltiples del proceso basados en los datos de entrada-salida o el modelo matemático original del sistema, además de una combinación lineal claramente comprensible que trata el modelo difuso. Por lo tanto, Takagi y Sugeno [90] propusieron un modelo difuso descrito por reglas difusas IF-THEN que representan las relaciones locales entrada-salida de un sistema no lineal. La principal destreza en esta técnica es expresar la dinámica local de cada implicación difusa o regla mediante un modelo de un sistema lineal. La combinación difusa de los submodelos de sistemas lineales representa el modelo general difuso del sistema no lineal completo. Esta técnica emplea reglas difusas, que son declaraciones IF-THEN que implican conjuntos difusos, lógica difusa e inferencia difusa. Las reglas difusas desempeñan un papel primordial en la realización de un conocimiento experto y experiencia de modelado al vincular las variables de entrada de los controladores difusos con las variables de salida. Hay dos tipos principales de reglas difusas: las reglas difusas de Mamdani y T-S.

A continuación se muestra una regla de Mamdani que describe el movimiento de un quadrotor:

IF Rate is Big **THEN** Slope is Modest,

Donde Rate es una variable de entrada y Slope mediante el ángulo pitch o roll es una variable de salida, Big y Modest son conjuntos difusos, el primero se llama conjunto difuso de entrada mientras que el último se denomina conjunto difuso de salida. Las variables así como los términos lingüísticos, como "Grande", pueden representarse mediante símbolos

matemáticos. Por lo tanto, una regla difusa Mamdani para un controlador difuso de un quadrotor se puede describir de la siguiente manera:

$$\text{IF } x \text{ is } M \text{ THEN } y \text{ is } N,$$

Donde “ x ” es una variable de entrada, por ejemplo, la velocidad o posición de un quadrotor, “ y ” es una variable de salida, por ejemplo la velocidad de uno de los rrotores, M y N son conjuntos difusos. La parte del enunciado antes de “ENTONCES” se llama antecedente de regla y la regla de la otra parte es el consecuente. Ahora, vamos a canalizar las reglas difusas de T-S, a diferencia de las reglas difusas de Mamdani, las reglas de T-S usan funciones de variables de entrada como consecuencia de la regla. Para control difuso, una regla de T-S correspondiente a la regla de Mamdani del último ejemplo es:

$$\text{IF } x \text{ is } M \text{ THEN } y = f(x),$$

Donde $f(x)$ es una función real de cualquier tipo. La inferencia difusa o los sistemas basados en reglas se muestran esquemáticamente en la figura 2.3. Se componen de cinco bloques convencionales: una base de reglas que contiene varias reglas IF-THEN difusas, una base de datos que define las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos utilizados en las reglas difusas, una unidad de toma de decisiones que realiza las operaciones de inferencia sobre las reglas, una interfaz de fuzificación que transforma las entradas nítidas en grados de coincidencia con valores lingüísticos y una interfaz de defuzificación que transforma los resultados difusos de la inferencia en una salida nítida.

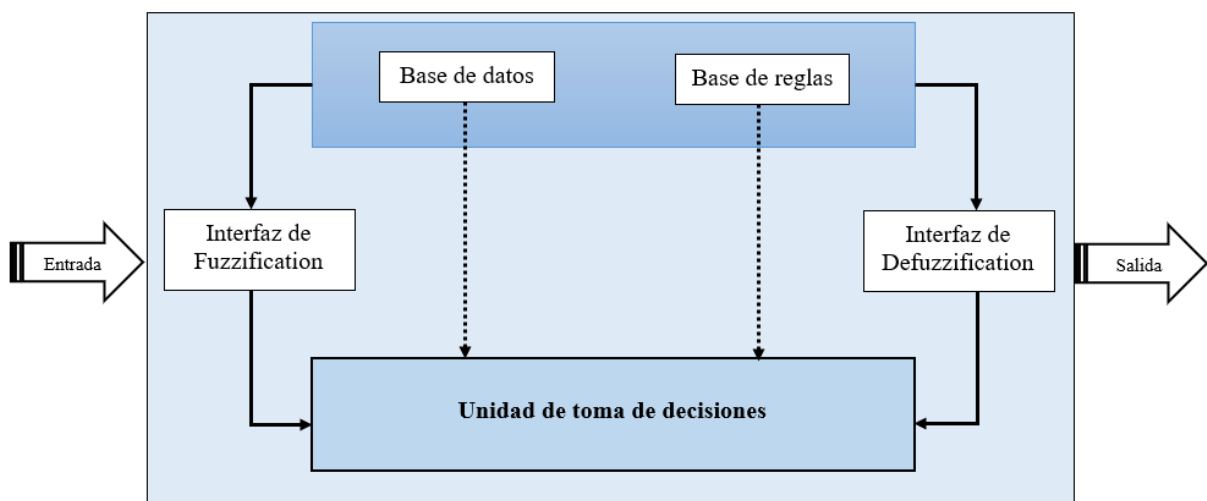


Figura 2.3: Sistema de interfaz difuso

2.3.1. Estructuras Multimodelo

Se pueden enumerar diferentes formas multimodelo dependiendo de, si la segmentación se realiza en la entrada o en la salida (es decir, en variables de estado medibles) y también en

la naturaleza del acoplamiento entre los modelos locales asociados con las zonas operativas. Sin embargo, se pueden observar tres estructuras de multimodelos que son, estructura acoplada, estructura desacoplada, y estructura jerárquica.

2.3.1.1. Estructura acoplada

La representación multimodelo se obtiene por interpolación de M modelos locales lineales:

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(\xi(t))(C_i x_m(t) + E_i u(t) + N_i) \end{cases} \quad (2.8)$$

Donde $\mu_i(\xi(t))$, $i \in \{1, \dots, M\}$ son las funciones de activación y $\xi(t)$ es el vector de las variables de decisión en función de las variables de estado medibles y posiblemente del control $u(t)$, esta estructura es la más utilizada.

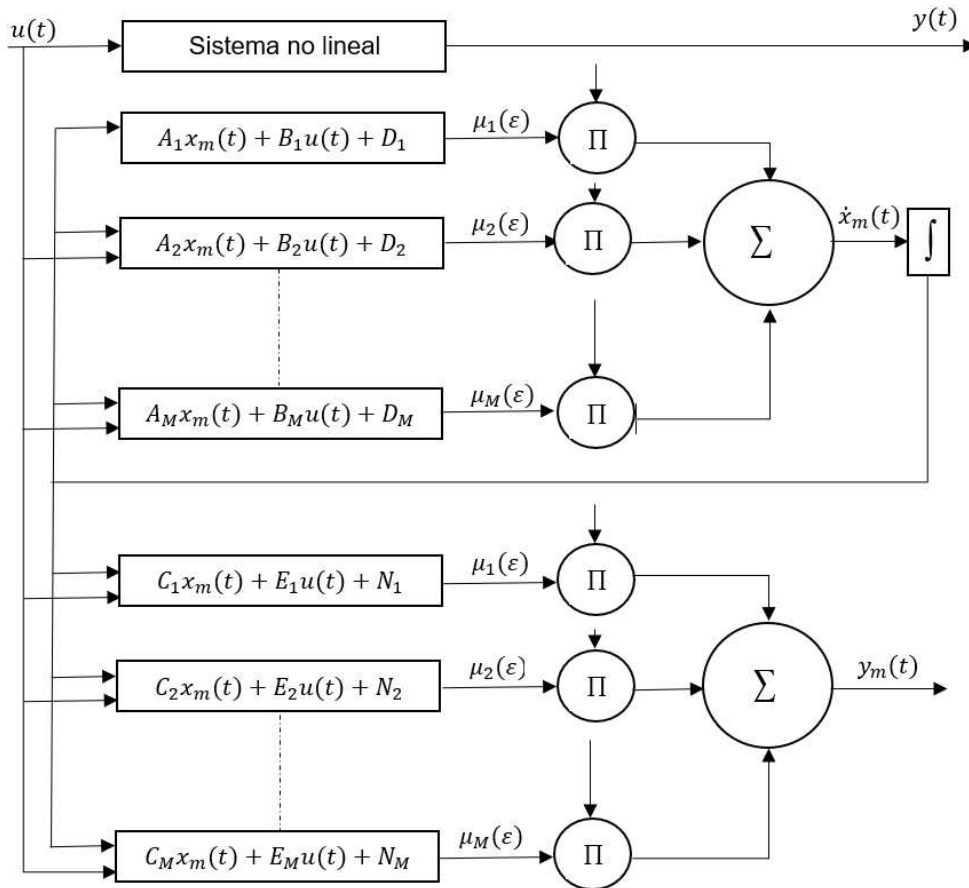


Figura 2.4: Arquitectura de multimodelos con modelos locales acoplados

2.3.1.2. Estructura desacoplada

Otra forma de multimodelo, propuesta por [34], es el resultado de agregar de modelos locales descritos en forma desacoplada. La diferencia entre esta estructura y la presentada en la sección anterior radica, en el hecho de que cada modelo es independiente de todos los demás (2.9).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) + D_i \\ y_i(t) = C_i x_i(t) + E_i u(t) + N_i \end{cases} \quad (2.9)$$

En esta estructura, la noción de estado local, que corresponde a un dominio de operación, aparece muy claramente. El multimodelo (modelo global) viene así dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) + D_i & i \in \{1, \dots, M\} \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (C_i x_i(t) + E_i u(t) + N_i) \end{cases} \quad (2.10)$$

Las variables locales $x_i(t)$ no necesariamente tienen un significado físico. Las matrices A_i , B_i y D_i así como las funciones de activación $\mu_i(\xi(t))$ se calculan de la misma manera que anteriormente (estructura acoplada). En esta estructura se puede ver como la conexión paralela de M modelos afines están ponderados por sus respectivos pesos.

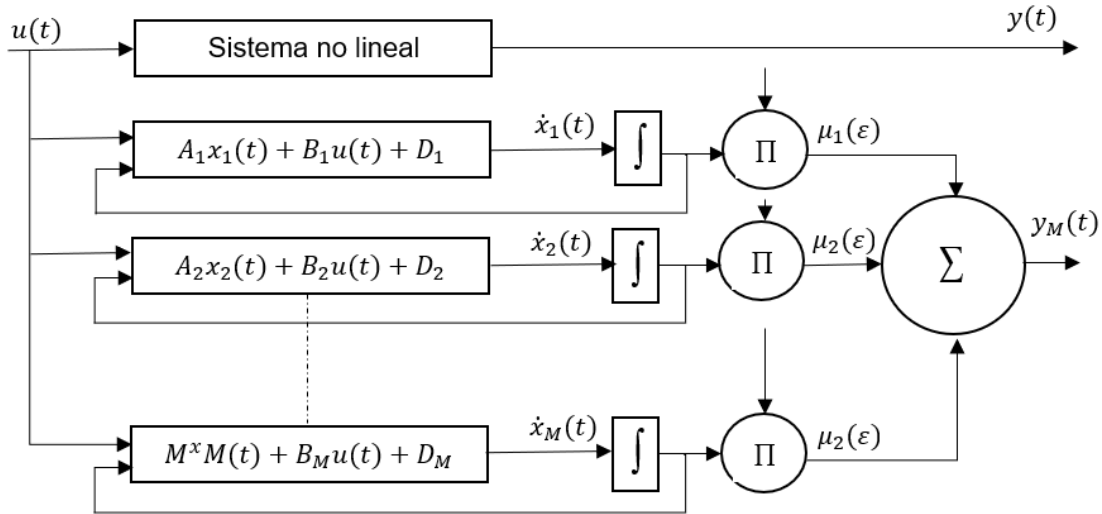


Figura 2.5: Arquitectura de multimodelos con modelos locales desacoplados

2.3.1.3. Estructura jerárquica

Aunque el enfoque multimodelo ha sido muy exitoso en muchas áreas (control, diagnóstico, ...), su aplicación se limita a sistemas con pocas variables (tamaño reducido). El número de modelos locales aumenta exponencialmente a medida que aumenta el número

de variables. Por ejemplo, un multimodelo de salida única con n variables y m funciones de activación definidas para cada variable se compone de m^n modelos locales. Los investigadores han estudiado este problema utilizando diferentes enfoques [35], [60] y [48].

Para superar este problema, [40] se propuso una estructura jerárquica multimodelo para reducir el número de modelos locales. La figura 2.6 muestra un ejemplo típico de un multimodelo jerárquico que tiene n entradas y $n - 1$ salidas; en esta estructura, los modelos locales tienen dos entradas cada uno, el modelo global se compone de n modelos locales; para más detalles, ver [96], [32] y [31].

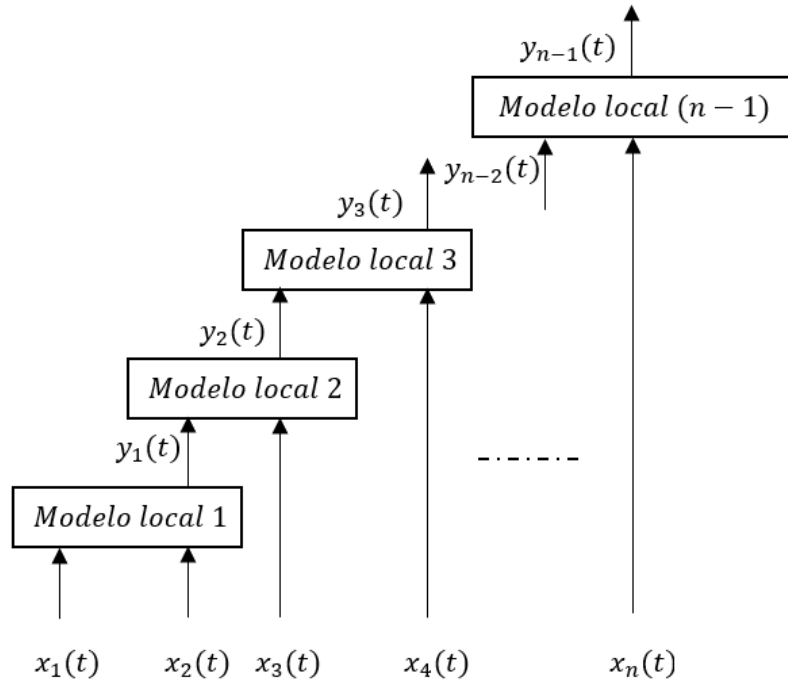


Figura 2.6: Arquitectura de un multimodelo jerárquico

2.3.2. Técnica de aproximación del sector no lineal

La idea de utilizar la técnica de aproximación del sector no lineal en la construcción de modelos difusos surgió por primera vez en [51]. El sector no lineal se basa en la siguiente idea.

Considere un sistema no lineal simple $\dot{x}(t) = f(x(t))$, donde $f(0) = 0$. El objetivo es encontrar el sector global tal que $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [a_1 a_2]x(t)$. La figura 2.7 ilustra el enfoque del sector no lineal. Este enfoque garantiza una construcción exacta del modelo difuso.

Sin embargo, a veces es difícil encontrar sectores globales para sistemas generales no lineales. En este caso, podemos considerar la no linealidad del sector local. Esto es razonable ya que las variables de los sistemas físicos siempre están limitadas. La figura 2.8 muestra la no linealidad del sector local, donde dos líneas se convierten en los sectores locales bajo

$-d < x(t) < d$. El modelo difuso representa exactamente el sistema no lineal en la región "local", es decir, $-d < x(t) < d$.

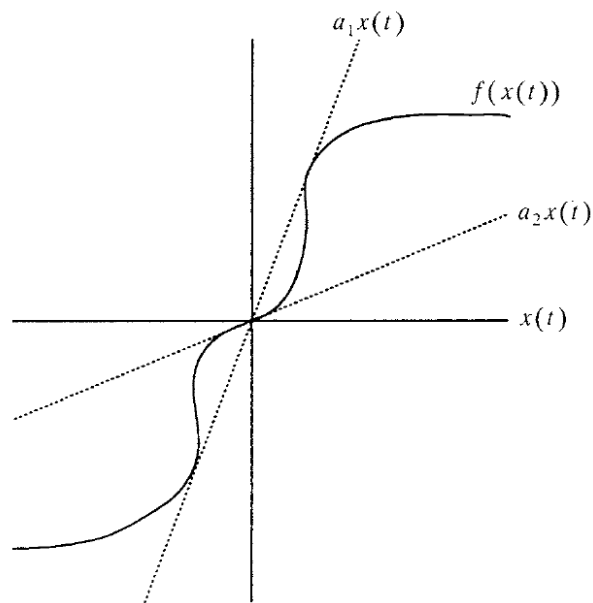


Figura 2.7: Sector global no lineal.

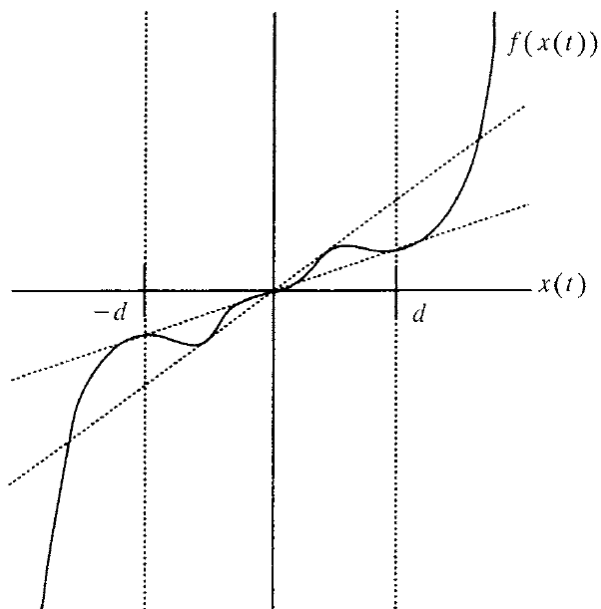


Figura 2.8: No linealidad del sector local.

2.4. Control Óptimo

2.4.1. Control y Optimización

En esta sección, se presenta la teoría matemática que describe el proceso para obtener las ganancias de realimentación para un sistema lineal usando control óptimo, además, se aplica lo antes mencionado al sistema utilizado como caso de estudio en el presente trabajo, y se realizan los correspondientes análisis de estabilidad para los controladores propuestos. El problema del control lineal cuadrático tiene su origen en el trabajo de Norbert Wiener sobre el filtrado cuadrático medio para el control de cañones anti-áreos durante la Segunda Guerra Mundial. Wiener empleó métodos basados en el dominio de la frecuencia para resolver este problema; sin embargo, aportó como novedad importante un desarrollo teórico que permitía un método analítico para resolver el problema de diseño. Este planteamiento analítico contrastaba con los métodos de ensayos sucesivos con métodos gráficos basados en el criterio de estabilidad de Nyquist, que entonces se empleaba. El método Wiener permitía además tener en cuenta cuestiones tales como los ruidos de medida y otras perturbaciones de carácter aleatorio. Las ideas de Wiener fueron reelaboradas durante los años 50 empleando la descripción interna de los sistemas y condujeron a lo que hoy se conoce como la teoría del control lineal cuadrático. De acuerdo con esta teoría el objetivo de un sistema de control es minimizar un índice de funcionamiento cuadrático el cual trata de mantener este sistema en un estado lo más cercano al reposo $x = 0$. El costo correspondiente a las desviaciones del estado de reposo se expresa por:

$$J_1 = \int x^T Q x dt + x^T(T) S x(T) \quad (2.11)$$

sujeto a las restricciones que representan un sistema lineal de la forma:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

Lo que recibe la denominación de problema del regulador lineal cuadrático o problema LQR (acrónimo de Linear Quadratic Regulator). Su solución se reduce a la de una ecuación diferencial de Ricatti la cual se explicara mas adelante. Durante el periodo de 1960-1970 se desarrollaron muchos estudios teóricos sobre este problema. Las ventajas que presenta la solución de este problema sobre las técnicas de diseño clásicas son las siguientes:

- Permite la optimización para intervalos de tiempo finito, los métodos en el dominio de la frecuencia de Wiener estaban limitados a intervalos de optimización infinitos.
- Son aplicables a sistemas que varían con el tiempo, los métodos en el dominio de la frecuencia están limitados a sistemas invariantes en el tiempo.
- Permiten abordar de forma relativamente simple el problema de los sistemas multi-variable.

Sin embargo, la teoría del LQR no aborda dos cuestiones muy importantes que aparecen en el diseño de sistemas de control realimentados: la falta de precisión en el modelo de la planta y el ruido en los sensores. Además, la teoría de LQR presupone el conocimiento del estado del sistema que es frecuente que no esté disponible. El problema lineal cuadrático con perturbaciones aleatorias se reduce a la resolución de dos ecuaciones de Ricatti desacopladas, ya que se puede demostrar que es posible separar el problema en dos: el problema de control óptimo con realimentación del estado, tal y como se aborda en la teoría LQR, y el problema de la estimación del estado. Esta separación se puede justificar teóricamente en el caso de que las perturbaciones estocásticas sean gaussianas, por lo que el problema lineal cuadrático estocástico se conoce comúnmente como el problema lineal cuadrático gaussiano (LQG) [5]. En [16], se presentan los resultados de aplicar dos técnicas de estrategias, PID y LQR, al control de la orientación de un micro helicóptero de cuatro rotores. Para el desarrollo del controlador LQR se utilizó un modelo dinámico más complejo que el que se utilizó para el diseño del PID. Sin embargo, no se logró un vuelo libre estable con el controlador LQR. Este hecho se atribuye a que no se tuvo en cuenta la dinámica de los actuadores, siendo el controlador LQR más sensible a los errores de modelado.

El control óptimo cuadrático es un criterio de desempeño muy importante que se puede expresar en forma general como:

$$J = x^T(T)Sx(T) + \int_0^T [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Rx(t)]dt \quad (2.12)$$

Las matrices de peso S, Q y R permiten un criterio previo particular, de tal manera que:

$$\begin{aligned} S = I; \quad Q = 0; \quad R = 0 &\implies J = \|x(T)\|^2 \\ S = 0; \quad Q = 0; \quad R = I &\implies J = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

Las matrices S y Q son simétricas y no definidas negativas, mientras R es simétrica y definida positiva. Recordemos que una matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva si $x^T M x > 0 \forall x \neq 0; x \in \mathbb{R}^n$, y no definida negativa si $x^T M x \geq 0 \forall x \neq 0; x \in \mathbb{R}^n$.

El criterio de desempeño cuadrático para sistemas de tiempo discreto es,

$$J_{0, N} = x_N^T S x_N + \sum_{k=1}^{N-1} x_k^T Q x_k + u_k^T R x_k \quad (2.14)$$

donde se ha escrito x_k para representar $x[k]$, por simplicidad de notación. Si N (horizonte de optimización) se fija a $N = \infty$ obtenemos un problema de control óptimo de horizonte finito, en este caso, por lo que se requiere que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X_N = 0$$

$$J_{0, \infty} = \sum_{k=1}^{N-1} x_k^T Q x_k + u_k^T R x_k \quad (2.15)$$

El criterio de horizonte infinito en tiempo continuo es:

$$J_{\infty} = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R x(t)] dt \quad (2.16)$$

2.4.1.1. Realimentación de estados óptima (LQR) continua

Teorema 2.1 (LQR). *Considere el sistema de espacio de estados*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu; \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad u \in \mathbb{R}^p \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.17)$$

y el criterio de desempeño:

$$J_{\infty} = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R x(t)] dt$$

de donde se sabe que Q es no definida negativa y R es definida positiva. Entonces el control óptimo que minimiza (J) está dado por la una ley de control lineal por reatrolimentación de estados de la forma:

$$\begin{aligned} u(t) &= -Kx(t) \quad \text{con} \\ K &= R^{-1} B^T P \end{aligned} \quad (2.18)$$

y donde P es la única solución definida positiva de la matriz Ecuación Algebraica de Riccati (EAR),

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (2.19)$$

Así, para diseñar una ley de reatrolimentación de estado óptima $u = -Kx$ minimizando el costo:

$$J_{\infty} = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R x(t)] dt$$

tenemos que,

1. Encontrar la solución simétrica y definida positiva de la (EAR), ecuación (2.19).
2. Fijar $K = R^{-1} B^T P$

En MATLAB K y P se pueden calcular usando, $[K,P]=lqr(A,B,Q,R)$. Las matrices $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (definidas no negativas) y $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ (definida positiva), son los parámetros de sintonía del problema. Por ejemplo, la elección $Q = C^T C$ Y $R = \lambda I > 0$ corresponde a hacer un equilibrio entre las energías de salida de la planta y la entrada, con el costo:

$$J = \int_0^\infty [\|y(\tau)\|^2 + \lambda \|u(\tau)\|^2] d\tau \quad (2.20)$$

- λ pequeña \implies respuesta de convergencia más rápida de $y(t) \rightarrow 0$; pero comandos de control $u(t)$ grandes (ganancia de control grande).
- λ grande \implies respuesta de convergencia más rápida de $y(t) \rightarrow 0$; pero comandos de control $u(t)$ pequeños (ganancia de control pequeña).

Bajo algunas asunciones razonables, la matriz P que resuelve la (EAR) $A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$ existe. El sistema de lazo cerrado correspondiente es estable (i.e. $A - BK$ es Hurwitz).

El resultado del control LQR se obtiene de la siguiente manera, deseamos encontrar una ley de control que minimize el criterio de desempeño de horizonte infinito:

$$J_\infty = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Rx(t)] dt$$

Suponga que P es simétrica definida positiva, solución de la EAR $A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$. si definamos la forma cuadrática $V(t) = x^T(t)Px(t)$. se nota que,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax + Bu)^T Px + x^T P(Ax + Bu) \\ &= x^T(A^T P + PA)x + u^T B^T Px + x^T P Bu \end{aligned}$$

De la EAR tenemos que $A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$, de tal manera que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -x^T Qx + x^T(PBR^{-1}B^T P)x + u^T B^T Px + x^T P Bu + u^T Ru - u^T Ru \\ &= [x^T Qx + u^T Ru] + (B^T Px + Ru)^T R^{-1}(B^T Px + Ru) \end{aligned}$$

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{V}(t) dt &= -J + \int_0^\infty (B^T Px + Ru)^T R^{-1}(B^T Px + Ru) dt \\ \longleftrightarrow \underbrace{V(\infty)} - V(0) &= -J + \int_0^\infty (B^T Px + Ru)^T R^{-1}(B^T Px + Ru) dt \\ \longleftrightarrow j &= x^T(0)Px(0) + \int_0^\infty (B^T Px + Ru)^T R^{-1}(B^T Px + Ru) dt \end{aligned}$$

Llegamos a,

$$j = x^T(0)Px(0) + \int_0^\infty (B^T Px + Ru)^T R^{-1} (B^T Px + Ru) dt \quad (2.21)$$

Ya que el segundo término de la derecha no es negativo, el mínimo de J se logra claramente cuando:

$$u = -R^{-1}B^T Px = -Kx$$

Por tal motivo se dice que el valor mínimo del costo es:

$$\min_u J = x^T(0)Px(0) \quad (2.22)$$

2.4.1.2. Realimentación de estados óptima (LQR) discreta

El criterio de desempeño cuadrático para sistemas de tiempo discreto es como en la ecuación (2.14), donde por simplicidad notacional escribimos x_k para representar $x[k]$. Cuando el tiempo final N (el horizonte de optimización) se fija a $N = \infty$, obtenemos un problema de control óptimo de horizonte infinito. En este caso, para estabilidad, requerimos que $\lim_{N \rightarrow \infty} X_N = 0$.

$$J_{0, \infty} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \quad (2.23)$$

Para sistemas de tiempo discreto hay un resultado paralelo al LQR de tiempo continuo. El control óptimo se encuentra también via realimentación de estado, pero se requiere resolver una ecuación de Riccati diferente.

Teorema 2.2 *Sea*

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k] \quad (2.24)$$

Entonces el control óptimo está dado por la ley de realimentación de estado $u_k = -Kx_k$, con $K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$, en donde P es la solución de la ecuación algebraica de Riccati discreta (EARD).

$$A^T P A - P - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q = 0 \quad (2.25)$$

Como en el caso continuo, bajo algunas asunciones razonables existe una solución única definida positiva P . Además, el sistema de lazo cerrado correspondiente es estable ($A - BK$ tiene sus autovalores en el círculo unitario). En MATLAB K y P se pueden calcular usando:

$$[K, P] = dlqr(ABQR)$$

Seleccionando:

$$Q = C^T C \quad y \quad R = \lambda I$$

Se obtiene:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\|y_k\|^2 + \lambda \|u_k\|^2] \tag{2.26}$$

Como antes, λ puede usarse como un parámetro simple de sintonía para equilibrar el desempeño de la salida contra la acción de control.

2.4.1.3. Controlabilidad

De acuerdo a [24] un sistema lineal representado en espacio de estados de la forma:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.27}$$

Con dimensión n y con m entradas ver figura 2.9, es controlable si para cada estado inicial $x(0)=x_0$ y para cada estado final X , existe una entrada que exite al sistema, de modo que transfiera x de x_0 a X en un tiempo finito donde $x(t)$ son los estados y $u(t)$ son las entradas del sistema. De otra manera se dice que el sistema no es controlable. Decir que un sistema es controlable o no, depende totalmente de las características físicas del sistema, es decir, la controlabilidad del sistema depende de cómo están relacionadas internamente las variables del sistema unas con otras. Existen distintos métodos para verificar la controlabilidad de un sistema, pero [44] definen que un sistema lineal invariante en el tiempo es controlable si la matriz de controlabilidad:

$$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \tag{2.28}$$

es de rango completo. Esto significa que el rango de la matriz C sea igual a la dimensión n del sistema.

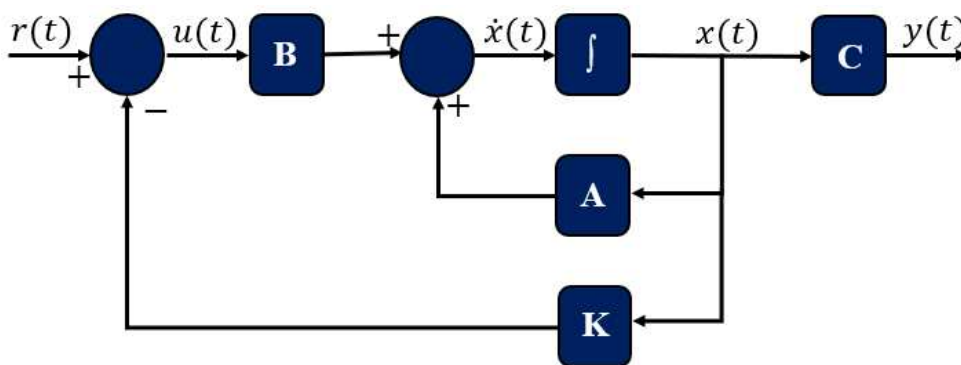


Figura 2.9: Esquema de control

2.5. Estabilidad

El problema de la estabilidad de los sistemas dinámicos ha sido una gran preocupación de matemáticos, físicos e ingenieros desde el siglo pasado. Muchos libros han sido escritos en esta área [65], [42], tanto teórica como prácticamente. Se pueden considerar dos tipos de estudios complementarios: el diseño de la prueba para saber si un sistema es estable o no, el estudio de las leyes de retroalimentación (retro de estado) que hacen estable un sistema inestable. Los criterios de análisis de estabilidad se pueden clasificar en dos categorías: criterios de frecuencia (de diagramas de Bode o Nyquist) y criterios temporales (círculos de Gerschgorin, segundo método de Lyapunov, etc). Si un sistema es lineal, invariante con respecto al tiempo, es fácil estudiar la estabilidad con la mayoría de los criterios existentes en la literatura (Nyquist, Hurwitz). Pero la cantidad de criterios que se pueden implementar fácilmente se reduce mucho si el sistema lineal tiene parámetros inciertos. En esta sección, presentamos algunos criterios de estabilidad que se pueden utilizar para analizar sistemas inciertos lineales o no lineales. En general, los sistemas no lineales son los más difíciles de estudiar porque es difícil estudiarlos en el dominio de la frecuencia (función de transferencia difícil de explotar). Entonces es preferible tener un criterio usando el modelo del sistema en el dominio del tiempo. Para estudiar este problema, conservamos los métodos de Lyapunov.

Definición 2.1 *Un sistema es localmente estable, por lo que se puede garantizar la estabilidad en torno a un valor de x_s particular.*

Por supuesto, si el equilibrio x_s es estable, hay un área pequeña alrededor de este punto donde el sistema es estable; pero el tamaño de este dominio es desconocido y no hemos probado la estabilidad del dominio alrededor del estado x_s .

Definición 2.2 *Un valor particular x_e del estado de un sistema, llamado estado de equilibrio, es asintóticamente estable si: es estable, si existe $r > 0$ tal que $\|r_2\|$*

2.5.1. LMI's

Un LMI es una desigualdad matricial lineal de la forma [17].

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^K x_i F_i > 0 \quad (2.29)$$

Donde $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_k]$ es una variable, $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para $i = 0, 1, \dots, k$, es conocida. el símbolo de desigualdad " $>$ " implica que $F(x)$ es definida positiva.

Un LMI es una restricción convexa en x , lo que quiere decir que el conjunto $\{x | F(x) > 0\}$ es convexo. El LMI de la ecuación 2.29 puede representar una amplia variedad de restricciones convexas en x . Particularmente, desigualdades lineales, desigualdades lineales

convexas, desigualdades de normas de matrices y restricciones que surgen en la teoría de control, tales como las desigualdades de Lyapunov y de matrices convexas cuadráticas; todas estas pueden ser representadas en forma de un LMI.

Múltiples LMI's $F^{(i)} > 0$ para $i = 0, 1, \dots, k$ pueden ser representados como un solo LMI diagonal, de la forma $diag(F^{(0)}, \dots, F^{(k)}) > 0$.

Frecuentemente las variables de los LMI's son matrices, un ejemplo es la ecuación continua de Lyapunov

$$A_i^T P + P A_i < 0 \tag{2.30}$$

Donde A_i es conocida y $P = P^T$ es la variable a encontrar, en este caso el LMI no será escrito explícitamente de la forma $F(x) > 0$. Además de ahorrar notación, esto hace más fácil el cómputo del problema. Pero, por supuesto que la desigualdad 2.30 puede reescribirse en la forma 2.29, siendo $F_0 = 0, F_i = -A_i^T P - P A_i$.

Dado un LMI de la forma $F(x) > 0$, el problema a resolver es encontrar una x^{fac} tal que $F(x^{fac}) > 0$, o en su defecto determinar que el LMI no es factible. Como ejemplo, la condición de estabilidad simultánea de la ecuación de Lyapunov 2.31, que tiene la misma forma que la del Teorema 2, dada A_i para $i = 1, \dots, 8$, y en la cual es necesario encontrar un P que satisfaga el LMI, o en su defecto determinar que tal P no existe.

$$P > 0, \quad A_i P + P A_i < 0, \quad i = 1, \dots, 8$$

En forma matricial toma la forma de

$$\begin{bmatrix} A_1^T + P A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^T + P A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^T + P A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4^T + P A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5^T + P A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6^T + P A_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_7^T + P A_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_8^T + P A_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{2.31}$$

Control Predictivo Modo Dual

3.1. Control Predictivo

El control predictivo basado en modelo (*MPC*), que también se conoce como (Receding Horizon Control), control de horizonte de retroceso, control de horizonte móvil o control predictivo, es el nombre general de diferentes algoritmos de control informático que utilizan la información pasada de las entradas y salidas, este tipo de control utiliza un modelo matemático de la planta que optimiza su futuro comportamiento predicho.

Durante las últimas tres décadas, el MPC ha demostrado ser enormemente exitoso en la industria, principalmente debido a la facilidad con la que se pueden incluir restricciones en la formulación del controlador. Vale la pena señalar que esta técnica de control ha alcanzado una gran popularidad a pesar de la falta original de resultados teóricos sobre algunos puntos cruciales, como la estabilidad y la robustez. De hecho, una base teórica para esta técnica comenzó a surgir más de 15 años después de su aparición en la industria [70]. Originalmente desarrollado para hacer frente a las necesidades de control de las centrales eléctricas y refinerías de petróleo, actualmente se usa con éxito en una amplia gama de aplicaciones, no sólo en la industria de procesos sino también en otros procesos que van desde la automoción [14], anestesia clínica [7].

Los algoritmos MPC abordan el problema de control de una manera intuitiva, el control predictivo utiliza un modelo del sistema para obtener una estimación (predicción) de su comportamiento futuro. Los principales elementos en el diseño de un controlador predictivo son:

- El modelo de proceso, utilizado para predecir el comportamiento futuro.
- El índice de rendimiento, utilizado para cuantificar la desviación de la salida medida, de la salida deseada y el esfuerzo de control.
- El algoritmo de optimización, utilizado para minimizar el índice de rendimiento sujeto a un conjunto de restricciones.

- La estrategia de control de retroceso, donde solo la primera entrada calculada se aplica al sistema cada tiempo de muestreo.

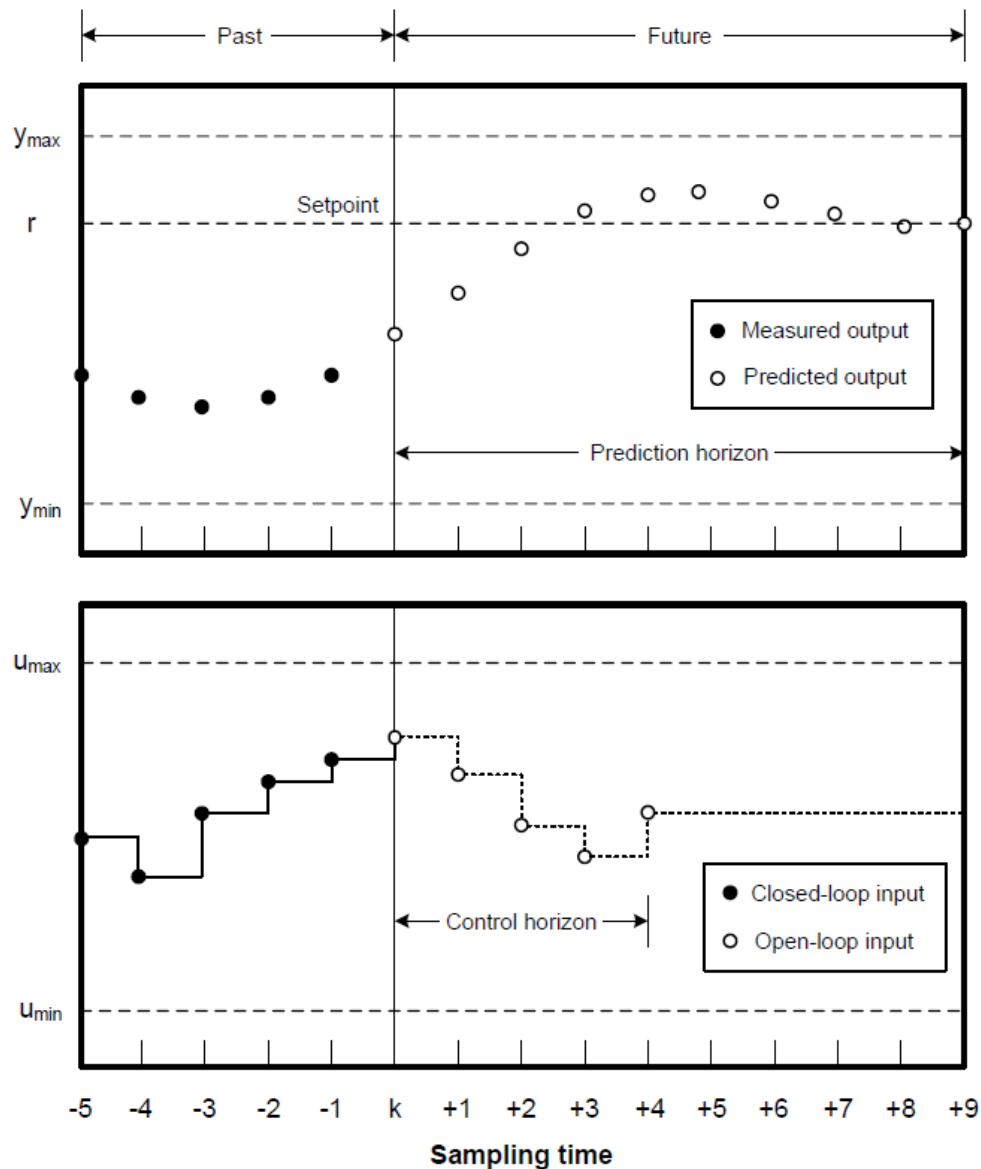


Figura 3.1: Ilustración gráfica de la estrategia MPC

En cada tiempo de muestreo k , un problema de control óptimo de horizonte finito se resuelve en un horizonte de predicción n_y , utilizando el estado actual x del proceso como estado inicial. El problema de optimización en línea tiene en cuenta la dinámica del sistema, las restricciones y los objetivos de control. La optimización produce una secuencia de control óptima, y solo se aplica la acción de control para el tiempo actual mientras se descarta el resto de la secuencia calculada. En el siguiente instante, el horizonte se desplaza

una muestra y la optimización se reinicia con la información de las nuevas mediciones, utilizando el concepto de horizonte de retroceso (Receding Horizon). La figura 3.1 muestra el principio básico del control predictivo basado en modelo.

3.1.1. Ventajas y desventajas del MPC

El control predictivo ha tenido un impacto significativo en la ingeniería de control industrial y ahora se considera una teoría exitosa en el mundo académico. Para conocer las fortalezas y debilidades de este método de control, [59] se resumen las ventajas y desventajas del MPC sobre otros controles existentes:

Aplicabilidad a una amplia clase de sistemas. El problema de optimización en el horizonte finito, en el que se basa el MPC, se puede aplicar a una amplia clase de sistemas, incluidos los sistemas no lineales y los sistemas con retardo de tiempo. Las soluciones analíticas o numéricas a menudo existen para tales sistemas.

Enfoque sistemático para obtener un control de lazo cerrado. Si bien los controles óptimos para sistemas lineales con restricciones de entrada y salida o sistemas no lineales suelen ser controles de lazo abierto, los MPC siempre proporcionan controles de lazo cerrado debido a los cálculos repetidos y la implementación de solo el primer control.

Capacidad de manejo de restricciones. Para los sistemas lineales con las restricciones de entrada y estado que son comunes en los problemas industriales, el MPC se puede calcular de manera fácil y eficiente mediante el uso de la programación matemática; por ejemplo, programación cuadrática (QP). Incluso para sistemas no lineales, el MPC puede manejar restricciones de entrada y estado numéricamente en muchos casos debido a la optimización en el horizonte finito.

Estabilidad garantizada. Para sistemas lineales y no lineales con restricciones de entrada y estado, el MPC garantiza la estabilidad en condiciones débiles. El control óptimo en el horizonte infinito, es decir, el control óptimo en estado estable, también puede ser una alternativa.

Buen rendimiento de seguimiento (Tracking). El MPC presenta un buen rendimiento de seguimiento al utilizar la señal de referencia futura para un horizonte finito que puede conocerse en muchos casos. En el control de seguimiento de horizonte infinito, todas las señales de referencia futuras son necesarias para el rendimiento de seguimiento. Sin embargo, no siempre están disponibles en aplicaciones reales y el cálculo sobre el horizonte infinito es casi imposible. En el control PID, que se ha utilizado más ampliamente en las aplicaciones industriales, solo se usa la señal de referencia actual, incluso cuando las futuras señales de referencia están disponibles en un horizonte finito, este control PID puede ser demasiado breve para el rendimiento de seguimiento y, por lo tanto, tiene un rendimiento inferior al MPC, lo que hace que sea la mejor de todas las señales de referencia futuras.

Adaptación al cambio de parámetros. El MPC puede ser una estrategia apropiada para sistemas conocidos que varían en el tiempo, sólo necesita parámetros futuros finitos del sistema para el cálculo del control actual, mientras que el control óptimo de horizonte infinito necesita todos los parámetros futuros del sistema. Sin embargo, no todos los parámetros futuros del sistema están siempre disponibles en problemas reales y el cálculo del control óptimo sobre el horizonte infinito es muy difícil y requiere memoria infinita para los controles futuros. Dado que el MPC se calcula repetidamente, puede adaptarse a los cambios futuros de los parámetros del sistema que pueden identificarse en línea (los métodos de identificación pueden introducir problemas de estabilidad que deben abordarse en la etapa de diseño), mientras que los controles óptimos de horizonte infinito no pueden adaptarse, hasta que sean calculados una vez en primera instancia.

Buenas propiedades para sistemas lineales. Es bien sabido que los controles óptimos de estado estable, como los controles LQR , LQG y $H\infty$, tienen buenas propiedades, como la estabilidad garantizada en condiciones débiles y cierta robustez. El MPC también posee estas buenas propiedades. Además, hay más parámetros de diseño, como matrices de ponderación finales y un tamaño de horizonte, que pueden ajustarse para un mejor rendimiento que los controles óptimos de estado estacionario mencionados anteriormente.

Cálculo más fácil en comparación con los controles óptimos de estado estable. Dado que el cálculo se realiza en un horizonte finito, la solución se puede obtener en forma de lote fácil para un sistema lineal. Para sistemas lineales con restricciones de entrada y estado, el MPC es fácil de calcular mediante el uso de programación matemática, como QP , mientras que un control óptimo en el horizonte infinito es difícil de calcular. Para sistemas no lineales con restricciones de entrada y estado, el MPC es relativamente más fácil de calcular numéricamente que el control óptimo de estado estable debido al horizonte finito.

Amplias aplicaciones industriales. Debido a las ventajas anteriores, existen amplias aplicaciones industriales para MPC, particularmente en procesos industriales. Esto se debe a que los procesos industriales tienen limitaciones en las entradas de control y requieren que los estados permanezcan en regiones específicas, lo que puede ser manejado eficientemente por el MPC. En realidad, la operación más rentable a menudo se obtiene cuando un proceso funciona en torno a una restricción. Por esta razón, cómo manejar la restricción es muy importante, los controles convencionales se comportan de forma conservadora, es decir, lejos de la operación óptima, con el fin de satisfacer las restricciones, ya que la restricción no se puede tratar en la fase de diseño. Si la dinámica del sistema es relativamente lenta, es posible realizar el cálculo del MPC cada vez dentro de un tiempo de muestreo.

Como es lógico, también tiene inconvenientes:

Requiere un conocimiento experto del proceso a controlar. Probablemente la parte más costosa del diseño y la implementación de los controladores predictivos es el desarrollo y la validación del modelo para la predicción. Esta es una parte crucial del controlador, ya que el cálculo de las entradas se basa en la precisión de este modelo. La

elección de un modelo no apropiado puede llevar a un rendimiento deficiente, incluso peor que un PID mal ajustado.

Mayor tiempo de cálculo en comparación con los controles no óptimos convencionales. El tiempo de cálculo absoluto del MPC puede ser más largo en comparación con los controles no óptimos convencionales, particularmente para sistemas no lineales, aunque el tiempo de cálculo del MPC en cada momento es más corto que el correspondiente control óptimo de horizonte infinito. Por lo tanto, el MPC puede no ser lo suficientemente rápido como para ser usado como un control en tiempo real para ciertos procesos. Sin embargo, este problema puede ser superado por la alta velocidad de los procesadores digitales, junto con las mejoras en los algoritmos de optimización.

Dificultad en el diseño de controles robustos para incertidumbres de parámetros. Las propiedades del sistema, como la estabilidad robusta y el rendimiento robusto debido a las incertidumbres de los parámetros, suelen ser difíciles de tratar en los problemas de optimización en los que se basan los MPC. El cálculo repetido para MPC hace más difícil analizar la robustez. Sin embargo, la robustez con respecto a las perturbaciones externas se puede tratar ‘fácilmente’ como se ve en los MPC mín-máx., pero incurre en una carga computacional excesiva.

3.2. Introducción al OMPC

Los primeros tres capítulos de [85] se han centrado en algoritmos como GPC (o DMC). Estos algoritmos usan predicción de lazo abierto, horizontes finitos y también los grados de libertad, son sólo los primeros movimientos de control n_u . El GPC supone que la trayectoria de control predicha es constante después de n_u pasos; sin embargo, como quedó claro en el capítulo 3 de [85], las suposiciones sobre los horizontes finitos pueden conducir a optimizaciones mal planteadas a menos que esos horizontes sean lo suficientemente grandes, lo que a su vez es computacionalmente exigente. El objetivo principal de este trabajo es construir una optimización bien planteada, usando estas ideas, se propone un algoritmo OMPC con absoluta confianza en la ley de control, ya que para obtener un mejor comportamiento la clase de predicciones dentro de la optimización debe incluir soluciones cercanas al comportamiento deseado en lazo cerrado, este comportamiento resulta del uso repetido de la optimización, y está vinculado a los polos de lazo cerrado que no están en el origen, esto significa que las trayectorias típicas convergen asintóticamente al estado estacionario y no a un horizonte fijo finito. Es importante resaltar que con horizontes finitos nunca se puede incluir el comportamiento real (o deseado) de lazo cerrado. Filosóficamente el MPC refleja el comportamiento humano mediante el cual se seleccionan acciones de control que conducirán al mejor resultado (o producción) pronosticado en un horizonte limitado. Para hacer esta selección, se usa un modelo interno del proceso en cuestión. Constantemente se actualizan las decisiones a medida que nuevas observaciones están disponibles. Por lo tanto, una ley de control predictivo tiene los siguientes componentes:

- La ley de control depende del comportamiento predicho.
- Las predicciones de salida se calculan usando un modelo de proceso.
- La entrada actual se determina optimizando alguna medida del rendimiento predicho.
- The receding horizon: la entrada de control se actualiza en cada instante de muestreo.

3.2.1. Desajuste de predicciones en MPC

Una de las principales debilidades de los algoritmos de control predictivo originales tales como DMC, GPC, IDCOM es la estructura de predicción utilizada en la optimización del rendimiento. En términos simples, la clase de predicciones sobre las que se realiza la optimización no necesariamente corresponde a las respuestas de lazo cerrado resultantes. Como tal, la optimización podría estar mal planteada; es decir, encontrar un mínimo para el objetivo dado no implica un buen desempeño, este problema se ilustra a continuación. En la figura 3.2 se ilustran dos gráficas, la curva correspondiente a la respuesta representa el comportamiento ideal de una trayectoria en lazo cerrado, pero si se utiliza el algoritmo GPC incluso con un n_u relativamente grande el comportamiento es deficiente, es decir, en la figura el n_u es alrededor de 6 ó 7, lo que es un valor significativo, sin embargo, como se puede observar las predicciones no pueden acercarse a una trayectoria típica de lazo cerrado, debido a que toma un valor fijo en un tiempo finito y permanece ahí. Este es uno de los problemas fundamentales que el GPC no puede tratar, el acercarse a las predicciones que realmente se desean es prácticamente imposible.

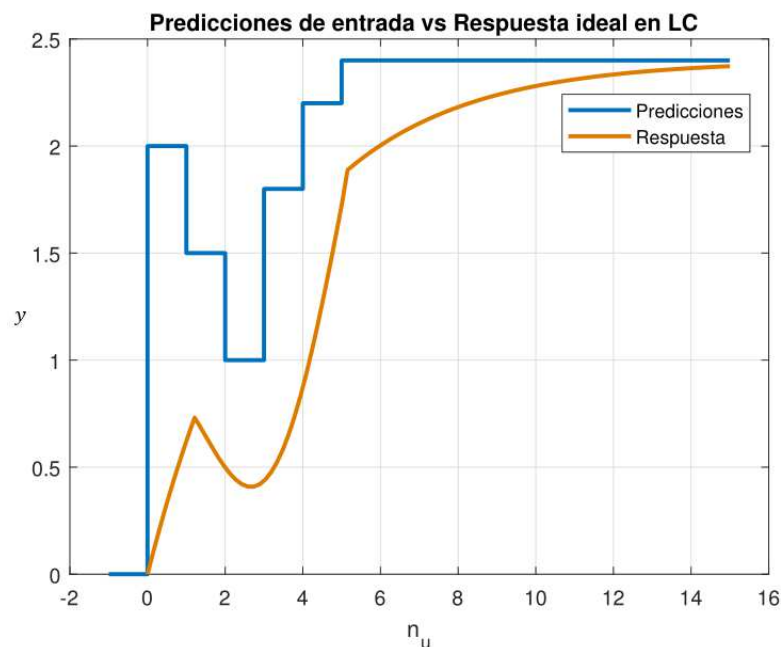


Figura 3.2: Idea fundamental del control predictivo

En resumen, para que coincida con el comportamiento de lazo cerrado “*deseado*”, la clase de predicciones dentro de la optimización debe incluir predicciones de entrada que converjan asintóticamente al estado estable, en lugar de a un número finito de pasos, por lo cual se necesita un nuevo paradigma para el control predictivo, implementando un tipo diferente de predicción. Por lo tanto se tienen algunos puntos claves, se supone que, para el caso no restringido, de una manera u otra se puede determinar la trayectoria global óptima de lazo cerrado cuando el sistema es lineal. El óptimo global se definirá en relación con un índice de rendimiento con horizontes infinitos; claramente esto es arbitrario hasta cierto punto, pero se requiere una medida que tome alguna forma antes de poder determinar las ventajas y desventajas. En resumen la minimización del horizonte finito GPC puede estar mal planteada; es decir, para un n_u pequeño, la predicción óptima puede tener solo una pequeña relación con el comportamiento real o deseado

3.2.2. Estabilidad Garantizada y Comportamiento Óptimo

Para garantizar la existencia de estabilidad en un algoritmo MPC, se tiene en cuenta lo siguiente, la clase de predicción actual debe contener como miembro las trayectorias óptimas del instante de muestreo anterior (denotado por la cola), el costo debe contener horizontes de salida infinitos. Además, para garantizar un buen rendimiento, existen dos requisitos adicionales, minimizar el desajuste de predicción y facilitar las pruebas en el caso restringido utilizando el concepto de invarianza.

3.2.3. Horizontes Infinitos y Estabilidad

La discrepancia en la predicción puede causar inestabilidad, incluso para un proceso estable en lazo abierto, queda claro que con los horizontes finitos, n_y y n_u , las predicciones óptimas de lazo cerrado pueden no coincidir bien con el comportamiento de lazo cerrado que surge de la implementación del horizonte de retroceso o con el óptimo global. Se puede pensar que minimizar J puede ser significativo o no, y está basado principalmente en asegurar que tanto n_u como n_y sean lo suficientemente grandes, si esto ocurre entonces la discrepancia entre las predicciones de lazo abierto y el comportamiento de lazo cerrado será pequeña, y por tanto la minimización estará bien planteada. Por otra parte, se debe tener en cuenta que las limitaciones computacionales pueden implicar que n_u (o el número de d.o.f. en la optimización) debe ser pequeño; en este caso, el uso del paradigma GPC podría dar inevitablemente una discrepancia significativa entre las predicciones de lazo abierto y el comportamiento deseado de lazo cerrado, lo cual debe considerarse en la etapa de diseño.

3.2.4. Definición de la cola (tail)

La inclusión de la cola en la clase de predicciones es importante para proporcionar un algoritmo de MPC bien planteado; a continuación se da una definición de la cola, donde

las predicciones óptimas en el instante de muestreo k están dadas por el par:

$$\Delta \underline{u}_{\gamma k-1} = \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1|k}^T \\ \Delta u_{k+2|k}^T \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad \underline{y}_k = \begin{bmatrix} y_{k+1|k}^T \\ y_{k+2|k}^T \\ y_{k+3|k}^T \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

En el siguiente instante de muestreo, $k + 1$ ya ocurrieron, y por tanto, no pueden ser llamadas predicciones. Esta parte que aún constituye una predicción se le llama cola, es decir,

$$\Delta \underline{u}_{\gamma k-1, tail} = \begin{bmatrix} \Delta u_{k+1|k}^T \\ \Delta u_{k+2|k}^T \\ \Delta u_{k+3|k}^T \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad \underline{y}_{k, tail} = \begin{bmatrix} y_{k+2|k}^T \\ y_{k+3|k}^T \\ y_{k+4|k}^T \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Es importante remarcar que las predicciones dadas en la cola en $k + 1$ son aquellas que se calcularon en el instate previo k . El principio de optimalidad de Bellman [9] establece que cualquier segmento de una trayectoria óptima también es óptima para $n_c = n_y = \infty$. Esto es porque en la planeación inicial de la trayectoria óptima se asume que el problema no cambiará, y que el sistema evoluciona como se predijo asumiendo que el modelo es perfecto, por tanto, la trayectoria óptima inicial se sigue. Entonces, $(\Delta \underline{u}_{\gamma k-1, tail}; \underline{y}_{k, tail})$, se pueden incluir en las posibles predicciones en $k + 1$. Esto es que los grados de libertad d.o.f, deben ser parametrizados de tal forma, para el caso nominal, que se puede hacer que:

$$\Delta \underline{u}_{\gamma k} = \Delta \underline{u}_{\gamma k-1, tail}; \quad \underline{y}_{k+1} = \underline{y}_{k, tail} \quad (3.3)$$

Para más detalle, por ejemplo, se puede seleccionar

$$\Delta \underline{u}_{\gamma k} = \begin{bmatrix} \Delta u_{k+1} \\ \Delta u_{k+2|k+1}^T \\ \Delta u_{k+3|k+1}^T \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u_{k+1|k} \\ \Delta u_{k+2|k}^T \\ \Delta u_{k+3|k}^T \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La cola es aquella parte de las predicciones que se realizan en la muestra anterior y que aún deben llevarse a cabo. Estas idealmente deberían ser parte de la clase de predicción actual.

3.3. Control de Modo Dual

La terminología de control modo dual [73] se asocia a menudo con estrategias de control no lineal. Las realizaciones más populares del horizonte infinito MPC tienen una forma de modo dual, por lo que la siguiente sección ofrece una descripción general de los componentes principales en una estrategia de control modo dual.

El modo dual toma en cuenta las predicciones basadas alrededor de la implementación de un regulador arbitrario utilizando variables de desviación y compensaciones c_k . Estas predicciones se denominan comúnmente de modo dual porque hay dos dinámicas claramente distintas para los transitorios y el comportamiento asintótico.

Modo Transitorio (para los primeros n_c pasos)

$$\{x_{k+1} = \Phi x_k + Bc_k; u_k - u_{ss} = -K(x_k - x_{ss}) + c_k\}; k \leq n_c \quad (3.5)$$

Modo terminal para el comportamiento asintótico (más allá de los primeros n_c pasos)

$$\{x_{k+1} = \Phi x_k; u_k - u_{ss} = -K(x_k - x_{ss})\}; k > n_c \quad (3.6)$$

Otro de los componentes que garantiza la estabilidad del MPC es el uso de un horizonte infinito con la inclusión de la cola y el uso de este horizonte es suficiente para demostrar que la función costo J es una función de Lyapunov. Se asume que las predicciones son determinísticas, entonces se puede evaluar la correspondiente función costo usando un tipo de ecuación de Lyapunov. Por ejemplo, asumiendo que:

$$x_{k+i+1} = \Phi x_{k+i} = \Phi^i x_k; u_{k+i} = -K x_{k+i} = -K \Phi^i x_k \quad (3.7)$$

La función costo es:

$$J_k = \sum_{i=0}^{\infty} x_{k+i+1}^T Q x_{k+i+1} + u_{k+i}^T R u_{k+i} \quad (3.8)$$

Sustituyendo (3.7) en (3.8) se tiene que:

$$\begin{aligned} J_k &= \sum_{i=0}^{\infty} x_k^T (\Phi^{i+1})^T Q \Phi^{i+1} x_k + x_k^T K^T (\Phi^i)^T R \Phi^i K x_k \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x_k^T \underbrace{[(\Phi^{i+1})^T Q \Phi^{i+1} + K^T (\Phi^i)^T R \Phi^i K]}_P x_k \\ &= x_k^T P x_k \end{aligned} \quad (3.9)$$

Donde,

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} (\Phi^{i+1})^T Q \Phi^{i+1} + K^T (\Phi^i)^T R \Phi^i K \quad (3.10)$$

La matriz P se obtiene de la solución de la siguiente ecuación de Lyapunov.

$$\Phi^T P \Phi = P - \Phi^T Q \Phi - K^T R K \quad (3.11)$$

Como consecuencia, la función costo para el control predictivo en modo dual constará de dos partes: $J = J_1 + J_2$;

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{i=0}^{n_c-1} \mathbf{x}_{k+i+1}^T Q \mathbf{x}_{k+i+1} + \mathbf{u}_{k+i}^T R \mathbf{u}_{k+i} \\ J_2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x}_{k+n_c+i+1}^T Q \mathbf{x}_{k+n_c+i+1} + \mathbf{u}_{k+n_c+i}^T R \mathbf{u}_{k+n_c+i} \end{aligned} \quad (3.12)$$

La función costo del modo 1 en forma concentrada tiene la forma:

$$J_1 = \underline{\mathbf{x}}_k^T \text{diag}(Q) \underline{\mathbf{x}}_k + \underline{\mathbf{u}}_{k-1}^T \text{diag}(R) \underline{\mathbf{u}}_{k-1} \quad (3.13)$$

Donde $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{u}}$ están definidas en el horizonte n_c , la función costo del modo 2 se puede representar como:

$$J_2 = \mathbf{x}_{k+n_c}^T P \mathbf{x}_{k+n_c} \quad (3.14)$$

En la figura 3.3 se muestra de forma resumida la idea fundamental del modo dual explicada desde la ecuación (3.5) hasta la ecuación (3.14), observándose que la función costo cuadrática es una función de Lyapunov, donde para encontrar a la matriz P se debe dar solución a la ecuación (3.11).

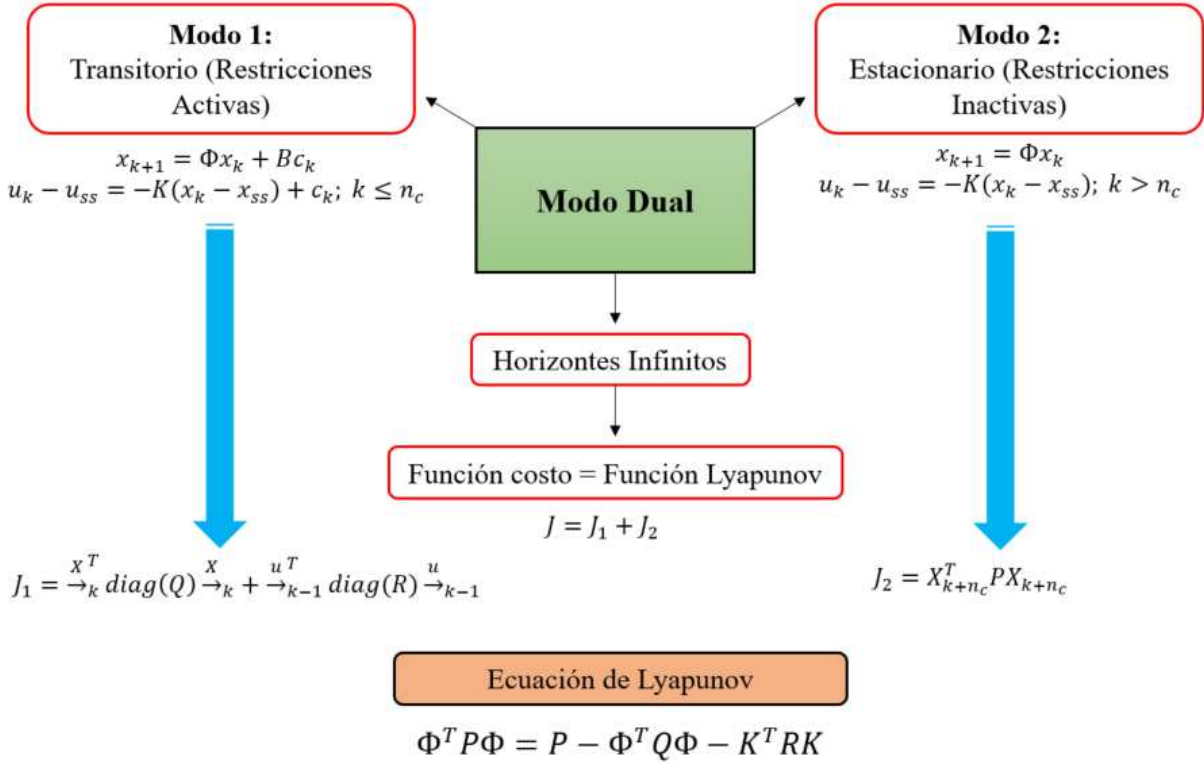


Figura 3.3: Idea fundamental del modo dual

3.4. Paradigma de Lazo Cerrado OMPC

El paradigma de lazo cerrado se basa en seleccionar una ley de control estabilizante y asumir que esta ley de control está presente a lo largo de las predicciones. A dicha ley se le agrega una compensación, la cual asegura que se cumplan las restricciones, a continuación se realiza el desarrollo de las predicciones utilizando el paradigma de lazo cerrado y se explica la adición de la compensación al control.

Para el desarrollo de las predicciones en lazo cerrado se considera el modelo en espacio de estado representado por (3.15).

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B u_k \\ y_k &= C x_k \end{aligned} \tag{3.15}$$

El control predictivo óptimo (OMPC) está basado en el control predictivo modo dual, sin embargo en este caso, en lugar de tener una función costo de la forma (3.12), los dos modos se establecen al reparametrizar la entrada. El sistema se estabilizará al origen, por lo que para poder realizar la regulación a una referencia deseada será necesario el cálculo del estado estable del sistema (ss). Por tanto, la ley de control estabilizante predictiva óptima de [50] y [85] para cada instante de muestreo k es:

$$U_{k+i} - U_{ss} = \begin{cases} -K(X_{k+i} - X_{ss} + C_{k+i}) & i \in \{0, \dots, n_c - 1\} \\ -K(X_{k+i} - X_{ss}) & i \in \{n_c, n_c + 1, \dots\} \end{cases} \quad (3.16)$$

Donde, X_{ss} y U_{ss} son los valores de estado estable del sistema, en [76] se dan los detalles para la obtención de P_x y P_u , los cuales se obtienen mediante:

$$\begin{aligned} X_{ss} &= P_x r_k \\ U_{ss} &= P_u r_k \end{aligned} \quad (3.17)$$

Donde, $r_k \in \mathfrak{R}^p$ es la referencia.

Del modelo (3.15) y (3.16) se genera el modelo de predicción a utilizar, el cual tiene la forma:

$$X_{k+i,k} = AX_{k+i} + BU_{k+i}; \quad U_{k+i} = -KX_{k+i} + C_{k+i} + P_r r_{k+i} \quad (3.18)$$

Sustituyendo la ecuación de control en la ecuación de estado se tiene el siguiente modelo de predicción en lazo cerrado.

$$X_{k+i,k} = \Phi X_{k+i} + BC_{k+i} + BP_r r_{k+i}; \quad U_{k+i} = -KX_{k+i} + C_{k+i} \quad (3.19)$$

Donde, $\Phi = A - BK$, con este modelo se realizan las predicciones de los estados y de las entradas de control. La ecuación de predicción de estados se define como

$$\underline{X}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{P_{cl}} X_k + \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \dots \\ \Phi B & B & 0 & \dots \\ \Phi^2 B & \Phi B & B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{H_c} \underline{C}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} BP_r \\ BP_r + \Phi BP_r \\ BP_r + \Phi BP_r + \Phi^2 BP_r \\ \vdots \end{bmatrix}}_{P_{rx}} r_k \quad (3.20)$$

La ecuación de predicción de estados de manera compacta se define como:

$$\underline{X}_k = P_{cl} X_k + H_c \underline{C}_k + P_{rx} r_k \quad (3.21)$$

Las predicciones de salida se obtienen mediante:

$$\underline{Y}_k = \begin{bmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & C \end{bmatrix} \underline{X}_k \quad (3.22)$$

Sustituyendo (3.21) en (3.22) se tiene:

$$\underline{Y}_k = P_{cly} Y_k + H_{cy} \underline{C}_k + P_{ry} r_k \quad (3.23)$$

Las predicciones de la entrada de control están dadas por

$$\underline{X}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} -K \\ -K\Phi \\ -K\Phi^2 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{P_{clu}} X_k + \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \dots \\ -KB & B & 0 & \dots \\ -K\Phi - KB & B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{H_{cu}} \underline{C}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} P_r \\ P_r - KBP_r \\ P_r - KBP_r - K\Phi BP_r \\ \vdots \end{bmatrix}}_{P_{ru}} r_k \quad (3.24)$$

o de manera más compacta:

$$\underline{U}_k = P_{clu} X_k + H_{cu} \underline{C}_k + P_{ru} r_k \quad (3.25)$$

C_{k+i} son los d.o.f (o movimientos de control) disponibles en el manejo de restricciones, y son las compensaciones aplicadas a la ley de control retroalimentada. La ecuación de predicción de los incrementos en la entrada se obtiene mediante:

$$\underline{\Delta U}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -I & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{bmatrix}}_{P_{\Delta u}} \underline{U}_k - \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{P_{u_{k-1}}} U_{k-1} \quad (3.26)$$

en forma compacta se tiene:

$$\underline{\Delta U}_k = P_{\Delta u} \underline{U}_k - P_{u_{k-1}} U_{k-1} \quad (3.27)$$

Asumiendo que K es una ganancia de retroalimentación de estado óptima LQ, se define la siguiente función costo en términos de \underline{C}_k :

$$J = z_k^T P z_k + \sum_{i=0}^{n_c-1} c_{k+i}^T [BPB + R] c_{k+i} = \|z_k\|_P^2 + \|\underline{C}_k\|_W^2 \quad (3.28)$$

Donde, $z_k = x_k - x_{ss}$, $W = \text{diag}(BPB + R)$, con $R > 0$, $BPB > 0 \Rightarrow W > 0$. El término $\|z_k\|_P^2$ no depende de la variable de decisión, y puede ignorarse en la minimización de la función costo (3.28), lo que resulta:

$$J_c = \|\underline{C}_k\|_W^2 \quad (3.29)$$

Una vez que se define la función costo se procede a definir las restricciones, lo cual se realiza en la siguiente subsección.

3.4.1. Restricciones

Una debilidad clave de las estrategias clásicas de control lineal es que no se toma en cuenta las restricciones; la razón principal para el éxito del control predictivo es la capacidad del manejo de restricciones de manera sistemática, por lo tanto, se mostrará cómo se pueden incorporar restricciones en un diseño de control. La mayoría de los sistemas sólo existen dentro de un dominio específico, los intentos de ir más allá de este dominio dan como resultado comportamientos indeseables, por ejemplo:

- Si un sistema está demasiado caliente, los componentes pueden fallar, derretirse, funcionar de manera imperfecta, etc.
- Si la presión es demasiado alta, se liberará un valor de seguridad.
- Una válvula sólo puede moverse entre 0% y 100% abierto; esperar más implicaría un absurdo.
- El movimiento físico real está restringido por paredes y otros obstáculos, los sistemas sólo pueden moverse tan rápido, debido a los límites de potencia, energía, agarre, etc.

Ignorar las restricciones no es una buena idea, un ejemplo simple y obvio es conducir un automóvil, el objetivo es llegar de un punto A a un punto B lo más rápido posible; una solución simple sería acelerar hasta la velocidad máxima y mantener eso durante toda la duración del viaje, sin embargo, esto no es adecuado porque en general, los automóviles no pueden acelerar a la velocidad máxima sin la probabilidad de provocar un accidente, esto también ignora las reglas de la carretera, otros usuarios de la carretera, etc.

Las restricciones son aplicadas a las entradas, las salidas, los estados y a los incrementos en las entradas. Estas restricciones generalmente tienen sentido físico, por ejemplo, en el caso de las entradas de control una restricción podría representar la saturación en una válvula. En un sistema electromecánico, la restricción representaría el par aplicado por el actuador. Para el caso de restricciones en las salidas del proceso, se podría pensar en las temperaturas mínimas y máximas de un reactor en un proceso químico, o los niveles de tanques. Para dar al sistema el mejor comportamiento deseado, es de gran ventaja la restricción de los estados internos del sistema que no sean medibles, por ejemplo, alguna temperatura interna o enlaces de flujo en un motor de inducción. Cotas simples en las entradas, por ejemplo, tienen la forma $U_{min} \leq U \leq U_{max}$, donde U_{min} y U_{max} son los valores mínimos y máximos que la desigualdad puede tomar [95]. Estas desigualdades se puede expresar en forma estándar:

$$\begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} U \leq \begin{bmatrix} U_{max} \\ U_{min} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Si las restricciones de las entradas no son solamente cotas entonces se pueden expresar como $A_u U \leq b_u$, lo cual es un poliedro m -dimensional. En este contexto, todo el conjunto de restricciones, puede se expresado en la tabla 3.1:

Tabla 3.1: Restricciones OMPC

Restricciones de los Estados	$\mathcal{X} = \mathbf{x} : A_x \mathbf{x} \leq b_x$
Restricciones de las Salidas	$\mathcal{Y} = \mathbf{Y} : A_y \mathbf{Y} \leq b_y$
Restricciones de las entradas	$\mathcal{U} = \mathbf{X} : A_u \mathbf{U} \leq b_u$
Restricciones de los incrementos	$\Delta \mathcal{U} = \Delta \mathbf{U} : A_{\Delta u} \Delta \mathbf{U} \leq b_{\Delta u}$

La solución al problema MPC es la predicción de trayectorias que satisfacen a todas las restricciones, en cada instante de tiempo futuro, en su respectivo horizonte como se muestra en la tabla 3.2:

Tabla 3.2: Restricciones OMPC

$X_{k+i} \in \mathcal{X}, i \in \{n_{xi}, n_{xi+1}, \dots, k + n_x\}$
$Y_{k+i} \in \mathcal{Y}, i \in \{n_{yi}, n_{yi+1}, \dots, k + n_y\}$
$U_{k+i} \in \mathcal{U}, i \in \{1, 2, \dots, k + n_u - 1\}$
$\Delta U_{k+i} \in \Delta \mathcal{U}, i \in \{1, 2, \dots, k + n_u - 1\}$

donde $n_{xi}; n_{yi} \in \mathbb{N}_0$ pueden ser mayor que cero para obtener trayectorias factibles. Por simplicidad se asume que $n_{xi}; n_{yi} = 0$, entonces todas las restricciones se pueden expresar como desigualdades lineales en forma politópica las cuales están en función de las predicciones:

$$\begin{aligned}
 \text{diag}(A_x) \underline{\mathbf{X}} &\leq \text{col}(b_x) \\
 \text{diag}(A_y) \underline{\mathbf{Y}} &\leq \text{col}(b_y) \\
 \text{diag}(A_u) \underline{\mathbf{U}} &\leq \text{col}(b_u) \\
 \text{diag}(A_{\Delta u}) \underline{\Delta \mathbf{U}} &\leq \text{col}(b_{\Delta u})
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Donde, $\text{col}(a) = [a^T a^T \dots]^T$. Las restricciones se pueden expresar en términos de la variable de decisión $\underline{\mathbf{C}}_{k-1}$. Sustituyendo (3.21) y (3.25) en (3.31) se obtienen las restricciones en forma de desigualdes lineales:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \text{diag}(A_x)H_{cx} \\ \text{diag}(A_y)H_{cy} \\ \text{diag}(A_u)H_{cu} \\ \text{diag}(A_{\Delta u})P_{\Delta u}H_{cu} \end{bmatrix}}_{M_c} \xrightarrow{\underline{\mathbf{C}}_{k-1}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \text{col}(b_x) \\ \text{col}(b_y) \\ \text{col}(b_x) \\ \text{col}(b_{\Delta u}) \end{bmatrix}}_{q_c(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, r_k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \text{diag}(A_x)P_{cl} & 0 & \text{diag}(A_x)BP_{rx} \\ \text{diag}(A_y)P_{cl} & 0 & \text{diag}(A_y)BP_{ry} \\ \text{diag}(A_u)P_{cl} & 0 & \text{diag}(A_u)BP_{ru} \\ \text{diag}(A_{\Delta u})P_{\Delta u}P_{clu} & -\text{diag}(A_{\Delta u})P_{u_{k-1}} & \text{diag}(A_{\Delta u})P_{\Delta u}P_{ru} \end{bmatrix}}_{r_k} \tag{3.32}$$

Las cuales son de la forma:

$$M_c \underline{\mathbf{C}}_{k-1} \leq q_c(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, r_k) \tag{3.33}$$

Con la función costo (3.29) y las restricciones (3.33) se obtiene el siguiente problema de programación cuadrática:

$$\underline{c}_{k-1}^* = \operatorname{argmin}_{\theta} \quad (3.34)$$

$$s.t. \quad M_c \underline{c}_{k-1} \leq q_c(x_k, u_k, r_k)$$

Los términos de la función costo y la matriz M_c se pueden calcular fuera de línea, pero la matriz q_c debe ser actualizada por el estado actual, la entrada de control del instante anterior y la señal de referencia deseada.

Finalmente, en la figura 2.3 se muestran los elementos que componen el esquema OMPC. Como se observa en esta figura, la optimización depende de los estados, de la señal de control y de la referencia.

En la subsección siguiente se muestran los conceptos de conjunto máximo admisible (MAS), el cual se utiliza para la definición de las restricciones del esquema OMPC y DOMPC en forma politópica.

3.5. Conjuntos Invariantes

Un conjunto es invariante [13] si, una vez que un estado entra en ese conjunto, ya no puede salir. Entonces, por ejemplo, el conjunto S es invariante si:

$$x_k \in S \rightarrow x_{k+1} \in S \quad (3.35)$$

Se puede notar que la condición (3.35) implica que $x_{k+i} \in S, \forall i > 0$. Existen varios tipos de invarianza [13] y [52], en este trabajo se emplea principalmente la invariancia controlada, es decir, la invariancia que surge en el sistema de lazo cerrado para una ley de control fija. Suponiendo que un sistema está sujeto a retroalimentación, la forma del conjunto invariante depende de dos factores:

1. La dinámica del sistema (o modelo)
2. La ley de retroalimentación

A lo largo de esta tesis se hará uso de modelos de espacio de estado y retroalimentación de estado. Sin embargo, la invariancia también se puede definir para los modelos de E/S. Las ecuaciones subyacentes se tomarán como:

1. La dinámica del sistema: $x_{k+1} = Ax_k = Bu_k$
2. La ley de retroalimentación: $u = -Kx$
3. La dinámica de lazo cerrado: $x_{k+1} = \Phi x_k; \quad \Phi = A - BK$

Para tal lazo cerrado, el conjunto invariante S es invariante si:

$$x_k \in S \rightarrow \Phi x_k \in S \quad (3.36)$$

En [85] se demuestra cómo se pueden construir conjuntos que satisfacen esta condición se consideran dos tipos de conjuntos invariantes: (i) conjuntos elipsoidales y (ii) conjuntos poliédricos. Para simplificar la presentación, se supone, sin pérdida de generalidad, que el origen está estrictamente dentro del conjunto invariante. Se demostró que la existencia de un conjunto invariante es equivalente a una prueba de estabilidad de Lyapunov. Como se señaló en el capítulo 6 de [85], las pruebas de estabilidad de Lyapunov también pueden aplicarse durante el manejo restringido. En el capítulo 11 de [85] se muestra cómo se pueden utilizar los conjuntos invariantes para garantizar la convergencia en presencia de restricciones.

Una de las principales capacidades de MPC es el manejo de restricciones en línea, es decir, la capacidad de optimizar el rendimiento sujeto a que no haya violaciones de restricciones predichas. Sin embargo, en la práctica, las predicciones evolucionan sobre un horizonte infinito, especialmente en el caso de algoritmos de modo dual, y esto parece implicar que las restricciones se deben verificar en un número infinito de instantes de muestreo. Los conjuntos invariantes son la clave para superar este obstáculo, teniendo en cuenta (i) una vez que un estado entra en un conjunto invariante, nunca sale de él; (ii) es necesario definir un conjunto invariante de modo que si el estado está dentro de él, las trayectorias de estado/entrada del sistema de lazo cerrado no violan ninguna restricción.

3.5.1. Conjunto Máximo Admisibles (MAS)

Asumiendo una ganancia de retroalimentación de estados estabilizante lineal K se aplica como ley de control para regular (3.15) al origen (originando la matriz de transición de estados en lazo cerrado $\Phi = A - BK$), las restricciones futuras se pueden considerar en el tiempo actual. La inserción de los conjuntos de restricciones futuras en el tiempo actual a través de la matriz de transición de estados es un único conjunto de restricciones \mathcal{O}_τ :

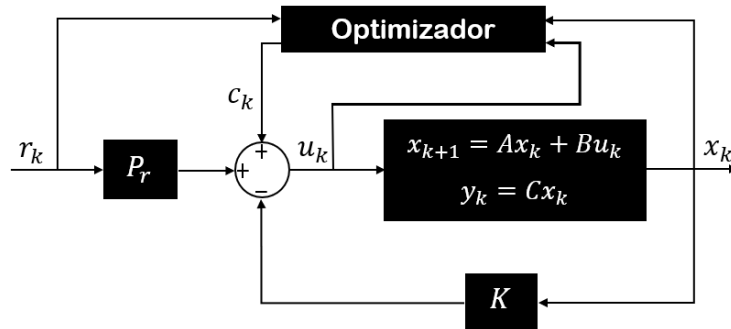


Figura 3.4: Esquema OMPC

$$\mathcal{O}_\tau \{x : C\Phi^i x \in \mathcal{Y}, -K\Phi^i x \in \mathcal{U}, \Phi^i x \in \mathcal{X}, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, \tau\}\} \quad (3.37)$$

Para $\tau \rightarrow \infty$ este conjunto es positivamente invariante y se le llama, Conjunto Máximo Admisibles (MAS). El considerar restricciones sobre el horizonte infinito no tiene solución,

pero puede existir un tiempo τ^* tal que $\mathcal{O}_\tau = \mathcal{O}_\infty, \tau > \tau^*$, tal que las restricciones futuras se vuelvan redundantes. Para un sistema discreto, observable, pre-estabilizado por una ganancia de retroalimentación lineal K con el conjunto restricciones $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}$, que tienen el origen en el interior, un MAS finito $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\tau^*}$ existe, y es un subconjunto de \mathcal{X} , por lo que las restricciones se satisfacen para todo tiempo futuro [39] y [84]. \mathcal{O}_∞ es "máximo" por que es el conjunto invariante más grande posible.

3.5.2. Conjunto Máximo Admisible Controlado (MCAS)

En el manejo de restricciones con predicciones de modo dual:

- El modelo toma la forma:

$$Z_{k+1} = \Psi Z_k \quad (3.38)$$

- Las restricciones en cada muestra pueden ser reformuladas de la forma:

$$GZ_k \leq f, \quad \forall k \quad (3.39)$$

Las expresiones (3.38) y (3.39) tienen la misma estructura (pero diferentes estados) que las expresiones usadas para formar el conjunto admisible; es decir;

Tabla 3.3: Estructura del MAS y MCAS

MAS	MCAS
$x_{k+1} = Ax_k$	$Z_{k+1} = \Psi Z_k$
$Gx_k \leq f$	$GZ_k \leq f, \quad \forall k$

Los conjuntos correspondientes a las expresiones (3.38) y (3.39) son llamados MCAS porque incluyen los d.o.f con c_k como el estado inicial.

Es conveniente expresar el MCAS de la forma siguiente:

$$FZ_k \leq t \quad (3.40)$$

Esto se expande a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{bmatrix} x_k \\ \underline{c}_k \end{bmatrix}}_Z \leq t \quad (3.41)$$

Donde, F es separado en dos bloques, M y N , al hacer esto se puede mapear nuevamente al espacio x original. Entonces, el S_{MCAS} es:

$$S_{MCAS} = \{x : \exists \underline{c}_k \text{ s.a. } N \underline{c}_k + Mx_k \leq t\} \quad (3.42)$$

La representación $N \underline{c}_k + Mx_k$ es la que se usará en el algoritmo *OMPC*, por tanto, se separan nuevamente los *d.o.f* en c y las dependencias en el estado inicial. De manera que, se ha utilizado el algoritmo de conjunto admisible usando el estado Z para obtener F y T , pero luego se separan estas para implementarlo en el *OMPC*. Para establecer un límite, mientras mas columnas haya en N , mayor será el S_{MCAS} .

Resultados de Investigación

4.1. Obtención del modelo Takagi-Sugeno del Octorrotor $X8^+$ 3DR

4.1.1. Modelo no lineal, basado en la metodología Euler-Lagrange

El modelado de sistemas es una parte fundamental de los sistemas de control debido a que en este se pretende representar el sistema real a partir de ecuaciones que describan su dinámica. Para el caso de los sistemas de control se suele representar los sistemas en variables de estado o funciones de transferencia, ambas técnicas tienen la particularidad de entregar el comportamiento del sistema en el tiempo; durante este trabajo se presentará el modelo a través de ecuaciones de estado. Como sabemos, el modelo del Octorrotor es complejo de construir; con el fin de simplificar la obtención del modelo se utilizará el método de Lagrangiano y una serie de simplificaciones, los cuales describen al Dron Octorrotor como un todo, en vez de seccionarlo como se hace en el método de Newton.

De tal manera que uno de los métodos más eficientes para el modelado matemático de un sistema físico, es la metodología de Lagrange, la cual se basa en la energía cinética del sistema (T) y la fuerza generalizada, (F_r) que provoca los cambios en dicha energía. Cabe mencionar que la fuerza generalizada corresponde a la sumatoria de fuerzas totales que afectan al sistema. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento del sistema son obtenidas mediante el enfoque Euler-Lagrange, y están representados por el sistema no lineal de la ecuación (4.1)

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) + g(X(t))\tau(t) \tag{4.1}$$

La ecuación general de Euler-Lagrange se muestra en la Ecuación 4.2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_r} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_r} = F_{q_r} \tag{4.2}$$

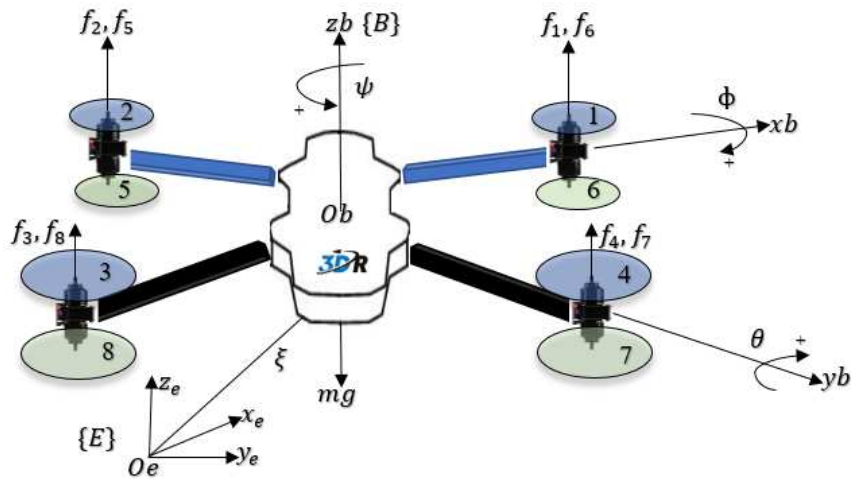


Figura 4.1: Sistema de coordenadas del X8⁺ 3DR

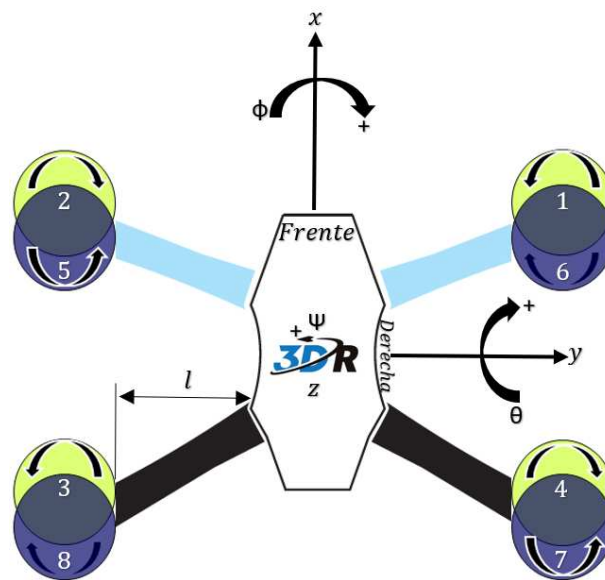


Figura 4.2: Vista superior del X8⁺ 3DR

Cinemática

A lo largo de este trabajo las letras c y s representan a las funciones coseno y seno respectivamente.

$$\begin{cases} \gamma x = (c\psi c\theta)x + (c\psi s\theta s\phi - s\psi s\phi)y + (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi)z \\ \gamma y = (s\psi c\theta)x + (s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi)y + (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi)z \\ \gamma z = (-s\theta)x + (c\theta s\phi)y + (c\theta c\phi)z \end{cases} \quad (4.3)$$

Las velocidades correspondientes se obtienen por diferenciación de (4.3), y la magnitud al cuadrado de la velocidad para cualquier punto viene dada por:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (4.4)$$

Energía

De la ecuación (4.4), y suponiendo que la matriz de inercia es diagonal, se puede extraer la expresión de energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}I_x(\dot{\phi} - \dot{\psi}s\theta)^2 + \frac{1}{2}I_y(\dot{\theta}c\phi + \dot{\psi}s\phi c\theta)^2 + \frac{1}{2}I_z(\dot{\theta}s\phi - \dot{\psi}c\phi) \quad (4.5)$$

Usando la fórmula de energía potencial bien conocida, uno puede expresar (4.5) en el marco fijo de tierra como:

$$V = \int xdm(x)(-gs\theta) + \int ydm(y)(gs\phi c\theta) + \int zdm(z)(gc\phi c\theta) \quad (4.6)$$

Ecuaciones de movimiento

Usando la fórmula Lagrangiana y la derivada para las ecuaciones de movimiento:

$$L = T - V, \Gamma_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (4.7)$$

Donde \dot{q}_i son las coordenadas generalizadas y Γ_i son las fuerzas generalizadas. Las tres ecuaciones de movimiento son entonces:

$$\begin{cases} I_x \ddot{\phi} = \dot{\theta} \dot{\psi} (I_y - I_z) \\ I_y \ddot{\theta} = \dot{\phi} \dot{\psi} (I_z - I_x) \\ I_x \ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} (I_x - I_y) \end{cases} \quad (4.8)$$

Los pares generalizados en $[\phi, \theta, \psi]^T$ están dados por la ecuación (4.9), Donde $\tau_B = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$ y l es la distancia entre los motores y el centro de gravedad, ver figura 4.2

$$\tau_B = \begin{bmatrix} lb(\Omega_3^2 - \Omega_4^2 + \Omega_7^2 - \Omega_8^2) \\ lb(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_5^2 - \Omega_6^2) \\ (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 - \Omega_4^2 + \Omega_5^2 + \Omega_6^2 - \Omega_7^2 - \Omega_8^2) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

El par giroscópico aplicado al vehículo está dado por:

$$\tau_{G_B} = -(\omega \times e_3) \sum_{i=1}^8 J_r \Omega_i \quad (4.10)$$

donde J_r es la inercia del rotor; la matriz inercial del vehículo se define como:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Las entradas U_1, U_2, U_3, U_4 y la perturbación Ω_r se representan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} U_1 &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2 + \Omega_5^2 + \Omega_6^2 + \Omega_7^2 + \Omega_8^2) \\ U_2 &= b(\Omega_3^2 - \Omega_4^2 + \Omega_7^2 - \Omega_8^2) \\ U_3 &= b(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_5^2 - \Omega_6^2) \\ U_4 &= d(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 - \Omega_4^2 + \Omega_5^2 + \Omega_6^2 - \Omega_7^2 - \Omega_8^2) \\ \Omega_r &= (-\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2 - \Omega_5^2 - \Omega_6^2 + \Omega_7^2 + \Omega_8^2) \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.1.1.1. Modelo no lineal del subsistema rotacional

El modelo dinámico del octorrotor que describe al subsistema rotacional se representa por la ecuación (4.13), estas ecuaciones contienen tres términos que son el efecto giroscópico resultante de la rotación rígida del cuerpo, el efecto giroscópico resultante de la rotación de la hélice junto con la rotación del cuerpo y finalmente la acción de los actuadores.

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi} \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta} \Omega_r + \frac{1}{I_x} U_2 \\ \ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi} \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_r}{I_y} \dot{\phi} \Omega_r + \frac{1}{I_y} U_3 \\ \ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{1}{I_z} U_4 \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.1.1.2. Modelo no lineal del subsistema traslacional

La ecuación (4.14) representa al subsistema traslacional del octorrotor $X8^+$, en donde $\xi = [x, y, z]^T$ denotan la posición del vehículo y $[\phi, \theta, \psi]^T$ representan la orientación (ángulos de Euler).

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi) \frac{1}{m} U_1 \\ \ddot{y} &= (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi) \frac{1}{m} U_1 \\ \ddot{z} &= -g + (c\theta c\phi) \frac{1}{m} U_1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Los subsistemas 4.13 y 4.14 se representan de la siguiente manera

$$\dot{X} = f(X, U)$$

con el vector de entradas $U = [U_1, U_2, U_3, U_4]^T$ y el vector de estados

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}]^T = [\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}]^T$$

El modelo no lineal del octorrotor $X8^+$ representado en espacio de estado se muestra en (4.15).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 O_r & 0 & a_1 x_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 O_r & 0 & 0 & 0 & a_3 x_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d_1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d_2}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d_3}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

(4.15)

Donde,

$$d_1 = \cos(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) + \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi)$$

$$d_2 = \text{sen}(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) - \cos(\psi)\text{sen}(\phi)$$

$$d_3 = \cos(\theta)\cos(\phi)$$

g = Aceleración de la Gravedad

Los parámetros utilizados en el octorrotor se muestran en la tabla 4.1.

Parámetro	Valor	Unidad	Parámetro	Valor	Unidad
m	1.64	kg	I_x	$44 \cdot 10^{-3}$	Kgm^2
g	9.81	ms^{-2}	I_y	$44 \cdot 10^{-3}$	Kgm^2
d	$0.3 \cdot 10^{-6}$	Nms^2	I_z	$88 \cdot 10^{-3}$	Kgm^2
b	$10 \cdot 10^{-6}$	Ns^2	l	0.4	m
J_r	$90 \cdot 10^{-6}$	Kgm^2			

Tabla 4.1: Parámetros utilizados en el octorrotor $X8^+$

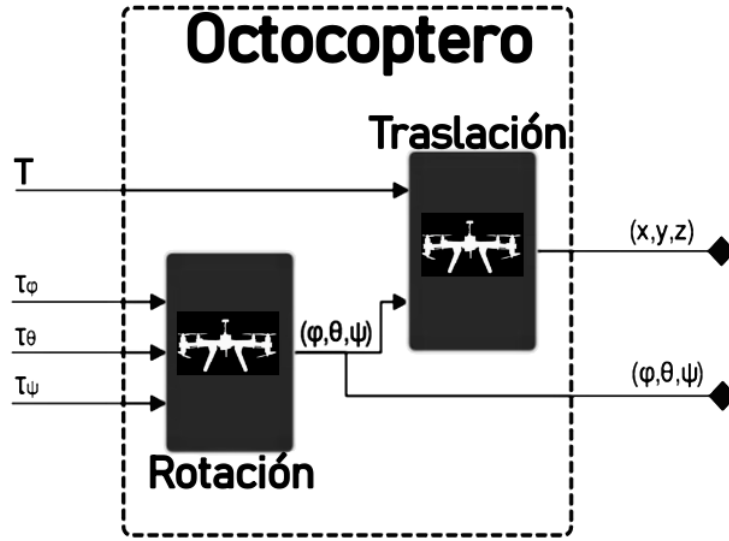


Figura 4.3: Subsistemas Rotación y Traslación X8+ 3DR

4.1.2. Modelo T-S del subsistema rotacional X8+ 3DR

La actitud del X8+ no depende del sistema de traslación, mientras que el movimiento de traslación si depende de la rotación, ver figura 4.3. Por lo tanto, primero se controlará la dinámica rotacional del vehículo debido a su independencia y luego consideraremos el control de traslación. El modelo T-S del X8+ se obtiene mediante el enfoque de aproximación del sector no lineal, descrito por [91], considerando un sistema no lineal de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f^m(x, u)x + g^m(x, u)u \\ y &= h^m(x, u)x \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde f^m , g^m y h^m son funciones suaves de matrices no lineales, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de entradas, e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de la salida medida. Las variables de programación se definen como $z_j(\cdot) \in [\underline{n1}, \overline{n1}]$, con $j = 1, 2, \dots, p$. Para cada z_j , se definen dos funciones de ponderación:

$$\eta_0^j(\cdot) = \frac{\overline{n1}_j - z_j(\cdot)}{\overline{n1}_j - \underline{n1}_j} \quad ; \quad \eta_1^j(\cdot) = 1 - \eta_0^j(\cdot) \quad (4.17)$$

Los conjuntos difusos correspondientes a 4.17 se definen en el dominio $[\underline{n1}_j, \overline{n1}_j] \forall z_j$, y se denotan por \overline{Z}_0^j y \overline{Z}_1^j . Las reglas difusas se construyen tal que todos los términos z_j , con $j = 1, 2, \dots, p$, son utilizados. El modelo **T-S** consiste en m reglas, donde $m = 2^p$ y las funciones de pertenencia se calculan como en 4.18.

$$\varpi_i(z) = \prod_{i=1}^8 \varpi_{ij}(z_j)$$

Las funciones de pertenencia son normalizadas:

$$\varpi_i(z) \geq 0 \quad ; \quad \varpi_i(z) = \sum_{i=1}^m \varpi_i(z) = 1 \quad (4.18)$$

Las matrices A_i , B_i y C_i se construyen respecto a las funciones de ponderación usadas en la regla i . Utilizando 4.18, el snl 4.16, es representado exactamente por el modelo difuso dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^m \varpi_i(z)(A_i x + B_i u) \\ y &= \sum_{i=1}^m \varpi_i(z)(C_i x) \end{aligned} \quad (4.19)$$

De acuerdo a 4.16 la representación **T-S** no es única. El snl del $X8^+$ (4.13) se reescribe de la forma (4.16). J_r es el momento de inercia rotacional alrededor del eje de la propela. La ecuación (4.20) se considera como en [63]. Las entradas U_1, U_2, U_3, U_4 y el efecto giroscópico O_r , dependen del voltaje aplicado V_i , con $i = 1, 2, \dots, 8$, y se representan como:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{bk_v^2(V_1^2+V_2^2+V_3^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2+V_7^2+V_8^2)}{m} \\ U_2 &= \frac{blk_v^2(V_3^2-V_4^2+V_7^2-V_8^2)}{I_x} \\ U_3 &= \frac{blk_v^2(V_1^2-V_2^2+V_5^2-V_6^2)}{I_y} \\ U_4 &= \frac{dk_v^2(V_1^2+V_2^2-V_3^2-V_4^2+V_5^2+V_6^2-V_7^2-V_8^2)}{I_z} \\ O_r &= k_v(-V_1^2 - V_2^2 + V_3^2 - V_4^2 - V_5^2 - V_6^2 + V_7^2 + V_8^2) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Las velocidades angulares se acotan como en la tabla 4.2.

Ángulo	Intervalo	Valor
Roll (ϕ)	$\dot{\phi} \in [d\alpha^-, d\alpha^+]$	$[-\pi/6, \pi/6]$ rad/s
Pitch (θ)	$\dot{\theta} \in [d\alpha^-, d\alpha^+]$	$[-\pi/6, \pi/6]$ rad/s
Yaw (ψ)	$\dot{\psi} \in [d\alpha^-, d\alpha^+]$	$[-\pi/6, \pi/6]$ rad/s

Tabla 4.2: Cotas de las velocidades angulares

La representación en espacio de estado del subsistema de rotación está dada por (4.13).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f^m(x_2, x_4, O_r)x + B^m u \\ y &= C^m x \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 O_r & 0 & x_4 a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 O_r & 0 & 0 & 0 & x_2 a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x_4 a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} u \tag{4.22}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Para cada variable de programación O_r, x_4 y x_2 , se generan dos funciones de ponderación como se muestra en la tabla 4.3.

Variable	Máximo	Mínimo
$z_1 = O_r \in [4kvV^+, 4kvV^-]$	$\eta_0^1(z_1) = \frac{4kvV^+ - O_r(t)}{4kvV^+ - 4kvV^-}$	$\eta_1^1(z_1) = 1 - \eta_0^1(z_1)$
$z_2 = x_4 \in [d\alpha^-, d\alpha^+]$	$\eta_0^2(z_2) = \frac{d\alpha^+ - x_4(t)}{d\alpha^+ - d\alpha^-}$	$\eta_1^2(z_2) = 1 - \eta_0^2(z_2)$
$z_3 = x_2 \in [d\alpha^-, d\alpha^+]$	$\eta_0^3(z_3) = \frac{d\alpha^+ - x_2(t)}{d\alpha^+ - d\alpha^-}$	$\eta_1^3(z_3) = 1 - \eta_0^3(z_3)$

Tabla 4.3: Funciones de ponderación y estados no lineales.

Regla	Modelo	F.Pertenencia
1) if z_1 es \overline{Z}_0^1 <i>and</i> z_2 es \overline{Z}_0^2 <i>and</i> z_3 es \overline{Z}_0^3	Then $\dot{x} = A_1 x + Bu$	$\varpi_1(z) = \eta_0^1 \eta_0^2 \eta_0^3$
2) if z_1 es \overline{Z}_0^1 <i>and</i> z_2 es \overline{Z}_1^2 <i>and</i> z_3 es \overline{Z}_0^3	Then $\dot{x} = A_2 x + Bu$	$\varpi_2(z) = \eta_0^1 \eta_1^2 \eta_0^3$
3) if z_1 es \overline{Z}_0^1 <i>and</i> z_2 es \overline{Z}_0^2 <i>and</i> z_3 es \overline{Z}_1^3	Then $\dot{x} = A_3 x + Bu$	$\varpi_3(z) = \eta_0^1 \eta_0^2 \eta_1^3$
4) if z_1 es \overline{Z}_0^1 <i>and</i> z_2 es \overline{Z}_1^2 <i>and</i> z_3 es \overline{Z}_1^3	Then $\dot{x} = A_4 x + Bu$	$\varpi_4(z) = \eta_0^1 \eta_1^2 \eta_1^3$
5) if z_1 es \overline{Z}_1^1 <i>and</i> z_2 es \overline{Z}_0^2 <i>and</i> z_3 es \overline{Z}_0^3	Then $\dot{x} = A_5 x + Bu$	$\varpi_5(z) = \eta_1^1 \eta_0^2 \eta_0^3$
6) if z_1 es \overline{Z}_1^1 <i>and</i> z_2 es \overline{Z}_1^2 <i>and</i> z_3 es \overline{Z}_0^3	Then $\dot{x} = A_6 x + Bu$	$\varpi_6(z) = \eta_1^1 \eta_1^2 \eta_0^3$
7) if z_1 es \overline{Z}_1^1 <i>and</i> z_2 es \overline{Z}_0^2 <i>and</i> z_3 es \overline{Z}_1^3	Then $\dot{x} = A_7 x + Bu$	$\varpi_7(z) = \eta_1^1 \eta_0^2 \eta_1^3$
8) if z_1 es \overline{Z}_1^1 <i>and</i> z_2 es \overline{Z}_1^2 <i>and</i> z_3 es \overline{Z}_1^3	Then $\dot{x} = A_8 x + Bu$	$\varpi_8(z) = \eta_1^1 \eta_1^2 \eta_1^3$

Tabla 4.4: Reglas difusas del subsistema rotacional

Los 8 submodelos de rotación de acuerdo a la tabla 4.4 fueron

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4a_2k_vV^- & 0 & a_1d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_4k_vV^- & 0 & 0 & 0 & a_3d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_5d\alpha^- & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4a_2k_vV^- & 0 & a_1d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_4k_vV^- & 0 & 0 & 0 & a_3d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_5d\alpha^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4a_2k_vV^+ & 0 & a_1d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_4k_vV^+ & 0 & 0 & 0 & a_3d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_5d\alpha^- & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4a_2k_vV^+ & 0 & a_1d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_4k_vV^+ & 0 & 0 & 0 & a_3d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_5d\alpha^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4a_2k_vV^- & 0 & a_1d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_4k_vV^- & 0 & 0 & 0 & a_3d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_5d\alpha^- & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4a_2k_vV^- & 0 & a_1d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_4k_vV^- & 0 & 0 & 0 & a_3d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_5d\alpha^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4a_2k_vV^+ & 0 & a_1d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_4k_vV^+ & 0 & 0 & 0 & a_3d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_5d\alpha^- & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4a_2k_vV^+ & 0 & a_1d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_4k_vV^+ & 0 & 0 & 0 & a_3d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_5d\alpha^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Las matrices B y C se representan como en (4.23) y (4.24), y es la misma para todos los submodelos.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

4.1.3. Modelo T-S del subsistema traslacional

El Subsistema no lineal de Traslación queda representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^m x + g^m + (x_1, x_3, x_6)u + G \\ y &= C^m x \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m(c\theta c\phi) \\ 0 \\ 1/m(s\psi s\theta c\phi - c\psi c\phi) \\ 0 \\ 1/m(c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (4.26)$$

Se considera que $x_1, x_3, x_6 \in [-\pi/6, \pi/6]$ rad. Con $T_\alpha^- = -\pi/6$ y $T_\alpha^+ = \pi/6$, para los términos no lineales en 4.28, z_4, z_5 , y z_6 son las funciones de ponderación y se definen como en (4.17).

Los conjuntos difusos correspondientes a ambas funciones de ponderación (4.17) para el sistema de traslación se definen en el dominio $[\underline{\Gamma}_j, \overline{\Gamma}_j] \forall z_j$.

Estos conjuntos difusos se denotan por \overline{Z}_0^j y \overline{Z}_1^j , utilizando las funciones de pertenencia que se calculan como en (4.18), el snl (4.16) es representado exactamente por el modelo T-S difuso:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^m \varpi_i(z) (Ax + B_i u + G) \\ y &= \sum_{i=1}^m \varpi_i(z) (Cx) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Las reglas difusas para el subsistema de traslación se presentan en la tabla 4.5, z_4, z_5 y z_6 son las variables de programación que se tomaron en cuenta con respecto a las no linealidades del subsistema.

	Regla	Modelo	F.Pertenencia
1)	if z_4 es \overline{Z}_0^4 and z_5 es \overline{Z}_0^5 and z_6 es \overline{Z}_0^6	Then $\dot{x} = Ax + B_1u$	$\varpi_1(z) = \eta_0^4\eta_0^5\eta_0^6$
2)	if z_4 es \overline{Z}_0^4 and z_5 es \overline{Z}_1^5 and z_6 es \overline{Z}_0^6	Then $\dot{x} = Ax + B_2u$	$\varpi_2(z) = \eta_0^4\eta_1^5\eta_0^6$
3)	if z_4 es \overline{Z}_0^4 and z_5 es \overline{Z}_0^5 and z_6 es \overline{Z}_1^6	Then $\dot{x} = Ax + B_3u$	$\varpi_3(z) = \eta_0^4\eta_0^5\eta_1^6$
4)	if z_4 es \overline{Z}_0^4 and z_5 es \overline{Z}_1^5 and z_6 es \overline{Z}_1^6	Then $\dot{x} = Ax + B_4u$	$\varpi_4(z) = \eta_0^4\eta_1^5\eta_1^6$
5)	if z_4 es \overline{Z}_1^4 and z_5 es \overline{Z}_0^5 and z_6 es \overline{Z}_0^6	Then $\dot{x} = Ax + B_5u$	$\varpi_5(z) = \eta_1^4\eta_0^5\eta_0^6$
6)	if z_4 es \overline{Z}_1^4 and z_5 es \overline{Z}_1^5 and z_6 es \overline{Z}_0^6	Then $\dot{x} = Ax + B_6u$	$\varpi_6(z) = \eta_1^4\eta_1^5\eta_0^6$
7)	if z_4 es \overline{Z}_1^4 and z_5 es \overline{Z}_0^5 and z_6 es \overline{Z}_1^6	Then $\dot{x} = Ax + B_7u$	$\varpi_7(z) = \eta_1^4\eta_0^5\eta_1^6$
8)	if z_4 es \overline{Z}_1^4 and z_5 es \overline{Z}_1^5 and z_6 es \overline{Z}_1^6	Then $\dot{x} = Ax + B_8u$	$\varpi_8(z) = \eta_1^4\eta_1^5\eta_1^6$

Tabla 4.5: Reglas difusas del subsistema traslacional

El modelo no lineal del octorrotor (4.14) puede reescribirse de la forma (4.16). Las entradas $[T, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi] = [U_1, U_2, U_3, U_4]$ dependen del voltaje aplicado V_i , con $i = 1, 2, \dots, 8$, y se representan como en (4.12). De acuerdo a la tabla 4.5, las matrices para el primer submodelo de traslación fueron:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Con la función de pertenencia

$$\varpi_1(z) = \eta_0^4\eta_0^5\eta_0^6$$

Los modelos restantes se obtienen con las reglas 2 a 8 de la misma manera que en 4.28, las 8 matrices B obtenidas las cuales fueron diferentes para cada uno de los submodelos junto con las matrices A y C que para este subsistema fueron las mismas para los 8 submodelos se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \end{bmatrix} \\
 B_5 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \end{bmatrix}, B_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^-}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \end{bmatrix}, B_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \\ 0 \\ \frac{T_\alpha^+}{m} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Con la función de pertenencia

$$\varpi_1(z) = \eta_0^4 \eta_0^5 \eta_0^6$$

con las matrices

$$\begin{aligned}
 A_i &= A, & \forall i &= 1, \dots, 8 \\
 C_i &= C, & \forall i &= 1, \dots, 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

4.2. Takagi-Sugeno en tiempo discreto

Para el desarrollo de este modelo se supone que el tiempo de muestreo es lo suficientemente pequeño como para que una discretización de Euler pueda usarse efectivamente para el modelo (4.15). En consecuencia, el modelo de tiempo discreto no lineal es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{K} + 1) &= A_d(x(\mathbf{K}))x(\mathbf{K}) + B_d u(\mathbf{K}) \\ \mathbf{Y}(\mathbf{K}) &= Cx(\mathbf{K}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$A_d(x(\mathbf{K})) = \begin{pmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T_s a_2 O_r(\mathbf{K}) & 0 & T_s a_1 x_4(\mathbf{K}) \\ 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & T_s a_4 O_r(\mathbf{K}) & 0 & 1 & 0 & T_s a_3 x_2(\mathbf{K}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & T_s a_5 x_4(\mathbf{K}) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} B_d &= T_s B_c \\ C_d &= T_s C_c \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para obtener la representación exacta del modelo difuso a partir del modelo no lineal (4.15) se utiliza el enfoque de aproximación del sector no lineal descrito por [91]. Los términos no constantes en la matriz $A_d(x(\mathbf{K}))$ son $x_2(\mathbf{K})$, $x_4(\mathbf{K})$ y $O_r(\mathbf{K})$, de tal manera que $z(\mathbf{K}) = [O_r(\mathbf{K}), x_2(\mathbf{K}), x_4(\mathbf{K})]^T$. Cada uno de estos términos está acotado y sus funciones de ponderación se construyen como en (4.17) y las funciones de pertenencia son normalizadas como en (4.18).

1. Los límites en el término $O_r(\mathbf{K})$ pueden ser calculados basándose en los límites del voltaje de entrada que son $O_r^- = 4k_v V^-$ y $O_r^+ = 4k_v V^+$. Las funciones de ponderación son $\eta_1^0 = \frac{O_r^+ - O_r(\mathbf{K})}{O_r^+ - O_r^-}$ y $\eta_1^1 = 1 - \eta_1^0$. El término $O_r(\mathbf{K})$ es expresado como $O_r(\mathbf{K}) = O_r^- \eta_1^0 + O_r^+ \eta_1^1$.
2. Los límites en el término $x_4(\mathbf{K})$ son los límites de la velocidad angular, $d\alpha^-$ y $d\alpha^+$. Las funciones de ponderación son $\eta_2^0 = \frac{d\alpha^+ - x_4(\mathbf{K})}{d\alpha^+ - d\alpha^-}$ y $\eta_2^1 = 1 - \eta_2^0$. El término $x_4(\mathbf{K})$ es expresado como $x_4(\mathbf{K}) = d\alpha^- \eta_2^0 + d\alpha^+ \eta_2^1$.
3. De igual manera el término $x_2(\mathbf{K})$ es una velocidad angular, y sus límites y funciones de ponderación son las mismas que para $x_4(\mathbf{K})$. Lo que significa que $\eta_3^0 = \frac{d\alpha^+ - x_2(\mathbf{K})}{d\alpha^+ - d\alpha^-}$ y $\eta_3^1 = 1 - \eta_3^0$. El término $x_2(\mathbf{K})$ es expresado como $x_2(\mathbf{K}) = d\alpha^- \eta_3^0 + d\alpha^+ \eta_3^1$.

Como se ha mostrado existen 3 no linealidades, para cada una de ellas se tienen 2 funciones de ponderación por tanto el modelo difuso tendrá $2^3 = 8$ reglas. Los modelos locales lineales correspondientes son obtenidos sustituyendo los valores correspondientes dentro de la matriz A_d .

Los 8 submodelos discretos del subsistema de rotación de acuerdo a la tabla 4.4 son:

$$A_{d1} = \begin{pmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -T_s 4a_2 k_v V^- & 0 & T_s a_1 d\alpha^- \\ 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 4T_s a_4 k_v V^- & 0 & 1 & 0 & T_s a_3 d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & T_s a_5 d\alpha^- & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varpi_1(z(\kappa)) = \eta_0^4 \eta_0^5 \eta_0^6$$

$$A_{d2} = \begin{pmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -T_s 4a_2 k_v V^- & 0 & T_s a_1 d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 4T_s a_4 k_v V^- & 0 & 1 & 0 & T_s a_3 d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & T_s a_5 d\alpha^+ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varpi_1(z(\kappa)) = \eta_0^4 \eta_1^5 \eta_0^6$$

$$A_{d3} = \begin{pmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -T_s 4a_2 k_v V^+ & 0 & T_s a_1 d\alpha^- \\ 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 4T_s a_4 k_v V^+ & 0 & 1 & 0 & T_s a_3 d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & T_s a_5 d\alpha^- & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varpi_1(z(\kappa)) = \eta_0^4 \eta_0^5 \eta_1^6$$

$$A_{d4} = \begin{pmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -T_s 4a_2 k_v V^+ & 0 & T_s a_1 d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 4T_s a_4 k_v V^+ & 0 & 1 & 0 & T_s a_3 d\alpha^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & T_s a_5 d\alpha^+ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varpi_1(z(\kappa)) = \eta_0^4 \eta_1^5 \eta_0^6$$

$$A_{d5} = \begin{pmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -T_s 4a_2 k_v V^- & 0 & T_s a_1 d\alpha^- \\ 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 4T_s a_4 k_v V^- & 0 & 1 & 0 & T_s a_3 d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & T_s a_5 d\alpha^- & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varpi_1(z(\kappa)) = \eta_1^4 \eta_0^5 \eta_0^6$$

$$A_{d6} = \begin{pmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -T_s 4a_2 k_v V^- & 0 & T_s a_1 d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 4T_s a_4 k_v V^- & 1 & 0 & 0 & T_s a_3 d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & T_s a_5 d\alpha^+ & 0 & 0 & 0 & T_s \end{pmatrix} \quad \varpi_1(z(\kappa)) = \eta_1^4 \eta_1^5 \eta_0^6$$

$$A_{d7} = \begin{pmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -T_s 4a_2 k_v V^+ & 0 & T_s a_1 d\alpha^- \\ 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 4T_s a_4 k_v V^+ & 0 & 1 & 0 & T_s a_3 d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & T_s a_5 d\alpha^- & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varpi_1(z(\kappa)) = \eta_1^4 \eta_0^5 \eta_0^6$$

$$A_{d8} = \begin{pmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4T_s a_2 k_v V^+ & 0 & T_s a_1 d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 4T_s a_4 k_v V^+ & 0 & 1 & 0 & T_s a_3 d\alpha^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & T_s a_5 d\alpha^+ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varpi_1(z(\kappa)) = \eta_1^4 \eta_1^5 \eta_1^6$$

4.2.1. Resultados de simulación

4.2.1.1. Actitud

La validación del modelo no lineal descrito con anterioridad y el modelo difuso Takagi-Sugeno se realiza comparando los resultados en lazo abierto de las variables no lineales del sistema, es decir las velocidades angulares para (Yaw, Pitch y Roll) y sus ángulos correspondientes.

Para el caso del ángulo pitch(θ) se simuló el modelo mediante la aplicación de un impulso en los motores (1, 5) al 75 % y (2, 6) al 25 %, de la velocidad máxima del motor, para el caso del ángulo roll(ϕ) se realizó el mismo experimento del ángulo pitch a diferencia que los actuadores fueron los motores (3, 7) y (4, 8), obteniendo una respuesta equivalente, esto se presenta debido a la simetría del quadrotor. Para el caso del ángulo yaw(ψ) se validó el modelo mediante la aplicación de un impulso en el par de motores (1,5,2,6) y (3,7,4,8). Para generar el movimiento de la planta se programó la señal de un par de rotores al 50 % de la velocidad máxima de estos y el otro par de rotores a un 15 % de la velocidad máxima.

Para el caso de las velocidades angulares existe una correlación total después de cierto tiempo de transición, los datos arrojados en la simulación se muestran en las gráficas 4.4 y 4.5.

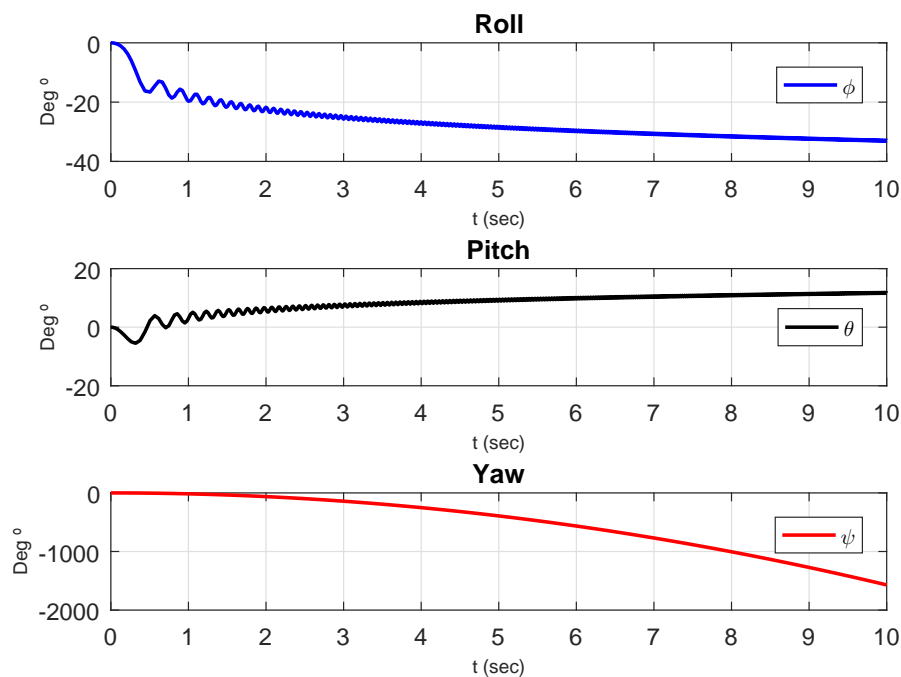
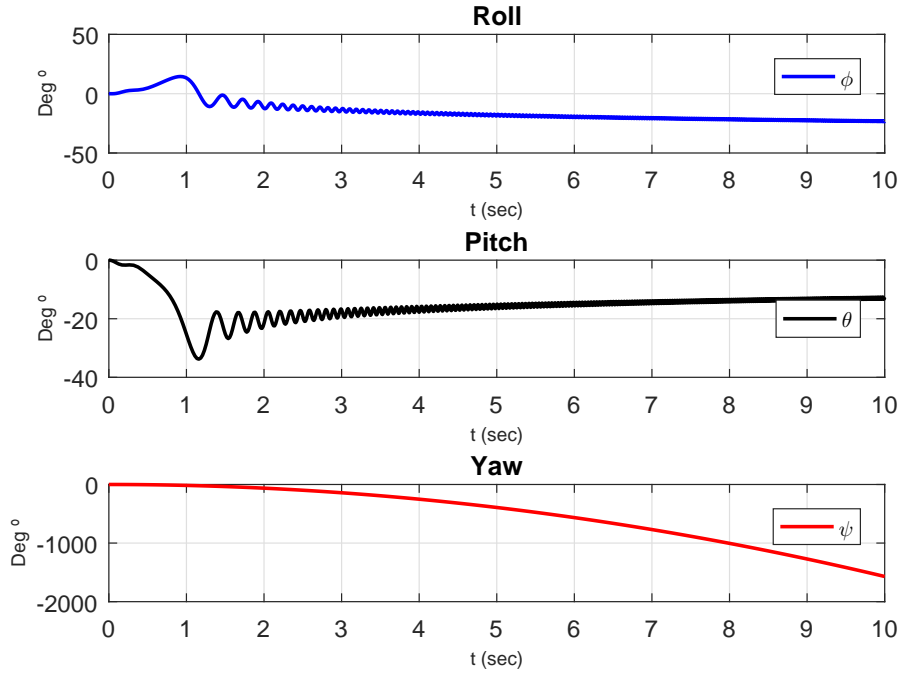


Figura 4.4: SNL X8⁺, LA

Figura 4.5: ST-S X8⁺, LA

Con respecto a la validación en lazo cerrado del sistema no lineal vs el sistema T-S, se diseña un controlador PD como en [29], para estabilizar el octorrotor; las ventajas de este tipo de controlador es la estructura simple y la fácil implementación del mismo, la forma general del controlador PID es:

$$\begin{aligned}
 e(t) &= x_d(t) - x(t) \\
 u(t) &= K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}, [8]
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

En el que $u(t)$ es la entrada de control, $e(t)$ es la diferencia entre el estado deseado $x_d(t)$ y el estado actual $x(t)$, y K_P , K_I y K_D son los parámetros para el valor proporcional, integral y derivativo del controlador PID. En un octorrotor, hay 12 estados, posiciones ξ y ángulos η , pero solo cuatro entradas de control, las velocidades angulares de los cuatro rotores w_i , las interacciones entre los estados y el empuje total T y los pares τ generados por los rotores son visibles a partir de la dinámica del octorrotor definidos por las ecuaciones (4.35) y (4.36). El empuje total T afecta la aceleración en la dirección del eje z y mantiene el octorrotor en el aire. El torque T_ϕ afecta la aceleración del ángulo ϕ , el torque T_θ afecta la aceleración del ángulo θ y el torque T_ψ contribuye a la aceleración del ángulo ψ . Por lo tanto, el controlador PID para el octorrotor se elige de la misma manera que en [29].

$$\begin{aligned}
 T &= (g + K_z, D(\dot{z}_d - \dot{z}) + K_z, p(z_d - z)) \frac{m}{C_\phi C_\theta} \\
 T_\phi &= (K_\phi, D(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}) + K_\phi, p(\phi_d - \phi)) I_x x \\
 T_\theta &= (K_\theta, D(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + K_\theta, p(\theta_d - \theta)) I_y y \\
 T_\psi &= (K_\psi, D(\dot{\psi}_d - \dot{\psi}) + K_\psi, p(\psi_d - \psi)) I_z z
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

En el que también se consideran la gravedad g , la masa m y los momentos de inercia I del octorotor. Las velocidades angulares correctas de los rotores w_i se pueden calcular a partir de las ecuaciones 4.9 y 4.10 con valores de la ecuación 4.35.

$$\begin{aligned}
 w_1^2 &= \frac{T}{8b} + \frac{T_\theta}{4lb} - \frac{T_\psi}{8d} \\
 w_2^2 &= \frac{T}{8b} - \frac{T_\theta}{4lb} + \frac{T_\psi}{8d} \\
 w_3^2 &= \frac{T}{8b} + \frac{T_\phi}{4lb} - \frac{T_\psi}{8d} \\
 w_4^2 &= \frac{T}{8b} - \frac{T_\phi}{4lb} - \frac{T_\psi}{8d} \\
 w_5^2 &= \frac{T}{8b} + \frac{T_\theta}{4lb} + \frac{T_\psi}{8d} \\
 w_6^2 &= \frac{T}{8b} - \frac{T_\theta}{4lb} + \frac{T_\psi}{8d} \\
 w_7^2 &= \frac{T}{8b} + \frac{T_\phi}{4lb} - \frac{T_\psi}{8d} \\
 w_8^2 &= \frac{T}{8b} - \frac{T_\phi}{4lb} - \frac{T_\psi}{8d}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

El rendimiento del controlador PD se prueba simulando la estabilización de un octorotor. Los parámetros del controlador PD se presentan en la tabla 4.6. La condición inicial del octorotor es para la posición $\xi = [0 \ 0 \ 1]^T$ en metros y para ángulos $= [10 \ 10 \ 10]^\circ$ en grados. La posición deseada para la altitud es $z_d = 0$. El propósito de la estabilización es el estado estable, por lo tanto $d = [0 \ 0 \ 0]^T$.

Tabla 4.6: Parámetros del controlador PD

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
K_z, D	2,5	K_z, P	1,5
K_ϕ, D	1,75	K_ϕ, P	6
K_θ, D	1,75	K_θ, P	6
K_ψ, D	1,75	K_ψ, P	6

Las entradas de control w_i , las posiciones y los ángulos durante la simulación se presentan en las figuras 4.6 y 4.7, los ángulos ϕ, θ y ψ se estabilizan a valor cero después de 5 segundos, tanto en el sistema T-S como en el SNL, lo que comprueba que el modelo T-S es una representación exacta del SNL, las ganancias obtenidas se muestran en la tabla 4.6.

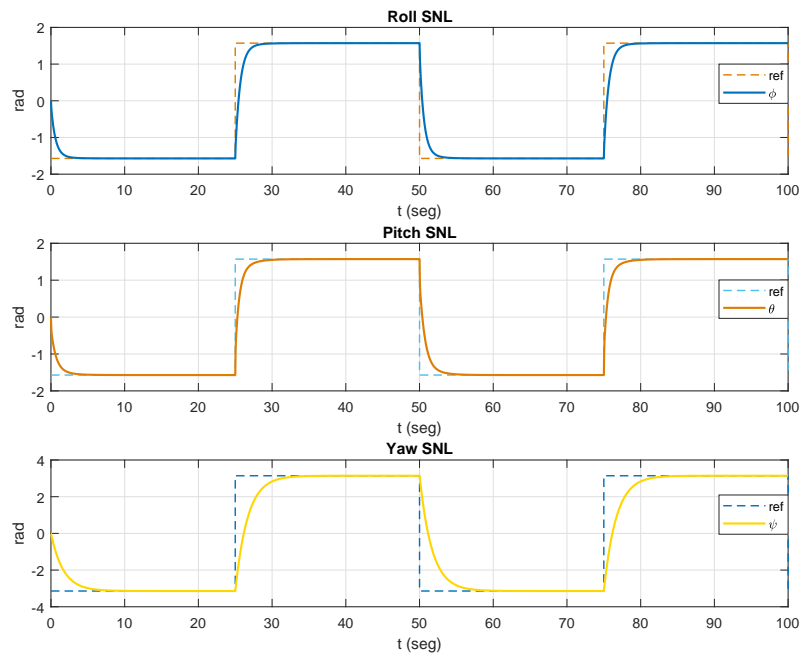


Figura 4.6: Sistema no lineal $X8^+$

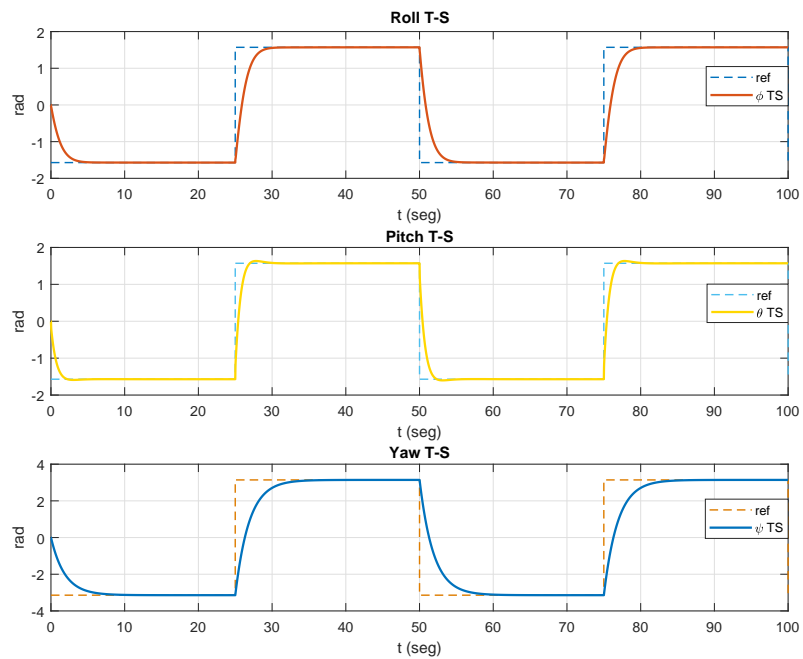


Figura 4.7: Sistema Takagi-Sugeno $X8^+$

4.3. Diseño del Control Predictivo Modo Dual

El modo dual describe una filosofía y, por lo tanto, se pueden desarrollar muchas variantes diferentes. En este trabajo se desarrollan los siguientes puntos:

1. Definir una ley de control, $u = -Kx$.
2. Defina una región S invariante en el plano de fase para el estado x , suponiendo la retroalimentación dada, $u = -Kx$, $x \in S$ implica que se cumplen las restricciones.
3. Definir nc y calcular las ecuaciones de predicción.
4. Definir una función costo e incluir los grados de libertad del sistema (d.o.f).
5. Defina desigualdades como garantía de satisfacción de restricciones solo durante los primeros pasos nc .

4.3.1. Diseño del controlador LQR

La solución de la ecuación de Ricatti algebraica se encuentra de manera similar a la ecuación de Lyapunov, en el sentido que debe proponerse una matriz simétrica y definida positiva.

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

que sea la solución algebraica del sistema de ecuaciones resultante de

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (4.37)$$

Al ser un caso particular del problema de optimización, el control seguirá teniendo la forma

$$u(t) = -Kx(t) + r(t) \quad (4.38)$$

en donde

$$K = R^{-1}B^T P \quad (4.39)$$

Siempre que el par $(A; B)$ sea controlable y las matrices de peso cumplan $Q \geq 0$ y $R \geq 0$, el controlador resultará en un controlador estable, es decir,

$$\Re \{ \lambda(A - BK) \} > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.40)$$

Para encontrar el controlador K_i que lleve al sistema de un punto inicial x_0 a un punto de operación X , se resuelve la ecuación de Ricatti (4.37) para cada uno de los subsistemas, por lo cual, se proponen las matrices Q_i y R_i [27].

$$Q_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x_1)_{max}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x_2)_{max}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(x_n)_{max}^2} \end{bmatrix} \quad R_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{(u_1)_{max}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(u_2)_{max}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(u_m)_{max}^2} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Donde $(x_i)_{max}$ es el valor máximo permitido para los estados y $(u_i)_{max}$ el máximo valor permitido para los actuadores. Sustituyendo estos valores en la ecuación (4.41), se obtiene

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Después de realizar las pruebas, se tuvieron que ajustar los valores de la diagonal principal con el fin de mejorar el desempeño del sistema, las matrices finales fueron:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Con las matrices de peso se proceden a calcular las ganancias de realimentación de cada subsistema por medio de la ecuación de Ricatti (4.37), para K_i :

$$\sum_{i=1}^8 (A_i^T S_i + S_i A_i + Q - S_i B R^{-1} B^T S_i = 0)$$

$$K_i = \sum_{i=1}^8 (R_i^{-1} B_i^T S_i)$$

Es importante hacer mención que el cálculo de las ganancias de realimentación K_i , se hizo utilizando una matriz S_i diferente para cada subsistema, esto no garantiza la estabilidad del sistema durante el salto de un subsistema a otro en el controlador global, como se muestra en la figura 4.8.

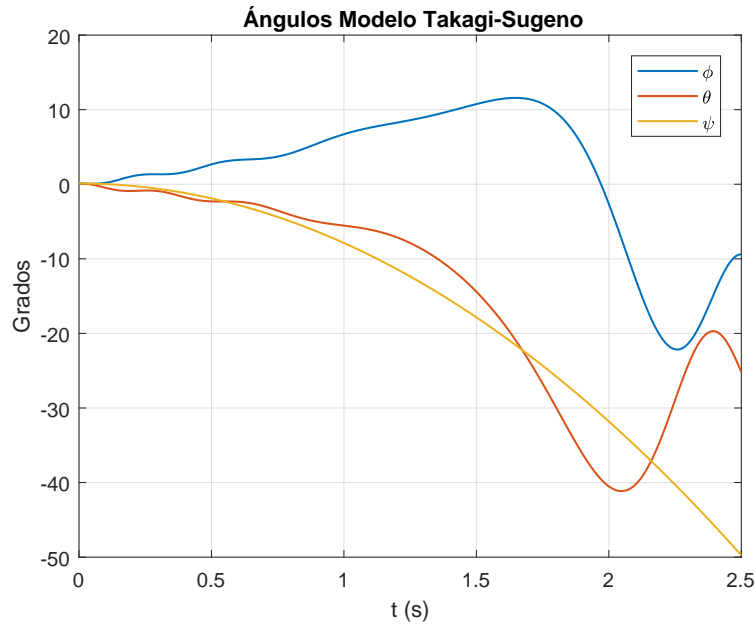


Figura 4.8: Estados Takagi-Sugeno $X8^+$

Por lo anterior, se necesita hacer una análisis de estabilidad más profundo, a manera que se garantice la estabilidad global del sistema, es decir, que la conmutación entre subsistemas se realicen sin pérdida de estabilidad.

4.3.2. Análisis de estabilidad

Teorema 4.1 [93] *Un sistema de control difuso continuo es asintóticamente estable de manera global si y sólo si, existe una matriz P común, definida positiva [92] tal que*

$$[A_i - B_i K_j]^T P + P[A_i - B_i K_j] < 0 \tag{4.44}$$

para cada $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0 \forall t, i, j = 1, 2, \dots, r$.

Al encontrar la matriz P común a todos los subsistemas lineales se garantiza que las transiciones se harán sin pérdida de estabilidad.

Un caso particular del Teorema 1 es:

Teorema 4.2 [93] *Cuando $B_i = B; i = 1, 2, \dots, r$, el sistema de control difuso es asintóticamente estable de manera global si y sólo si, existe una matriz P común, definida positiva tal que*

$$[A_i - BK_i]^T P + P[A_i - BK_i] < 0 \tag{4.45}$$

para cada función de pertenencia $h_i(z(t)) \neq 0, \forall t, \text{ con } i = 1, 2, \dots, r$.

Normalmente, encontrar la matriz P no es una tarea fácil de desarrollar analíticamente, afortunadamente existen herramientas matemáticas que pueden ser fácilmente implementadas en programas de cómputo, tal es el caso de los LMI's.

A partir del sistema difuso obtenido con anterioridad el Teorema 2 se puede aplicar para el análisis de estabilidad debido a que $B_i = B; i = 1, 2, \dots, 8$.

Esto se hace sustituyendo la ecuación (2.30) en la matriz (2.31), lo que resulta en la solución del problema de estabilidad, la matriz P resultante es

$$P = \begin{bmatrix} 1.79 & 0.17 & 0.10 & -0.12 & -0.02 & 0.01 \\ 0.17 & 0.15 & 0.18 & 0.00 & 0.02 & 0.01 \\ 0.10 & 0.18 & 2.20 & 0.23 & -0.03 & 0.02 \\ -0.12 & 0.01 & 0.23 & 0.17 & 0 & 0 \\ -0.02 & 0.02 & -0.03 & 0 & 2 & 0.03 \\ 0.01 & 0.01 & 0.02 & 0 & 0.03 & 0.08 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

de la cual se sabe que $P > 0$, dadas las raíces del polinomio característico $\lambda(P - \mathbb{I}) = \{2.2801, 2.0034, 1.7937, 0.1378, 0.1173, 0.0860\}$, si se aplica el Teorema 2 a cada uno de los subsistemas usando las ecuaciones (4.44) y (4.46), resulta una matriz para cada subsistema. De acuerdo a [24], la condiciones únicas y suficientes para garantizar que una matriz sea positiva definida, es que las raíces estén en el semiplano complejo izquierdo y los menores del sistema se vayan alternando en signo, es decir, los menores de las submatrices pares sean negativos y los impares sean positivos.

$$[A_1 - B_1 K_j]^T P + P[A_1 - B_1 K_1] < 0$$

$$\text{Menores: } |M| = \{-1.2265, 1.4009, -1.7078, 1.8010, -2.2119, 2.4472\}$$

$$\text{Raíces: } \lambda = \{-1.0300, -1.1313, -1.0940, -1.2395, -1.2441, -1.2448\}$$

De igual forma se realiza para cada uno de los modelos restantes, el haber encontrado una matriz P válida para la ecuación de Lyapunov evaluada en cada subsistema, garantiza que el sistema de control LQR para el modelo difuso propuesto es globalmente estable, es decir, aparte de garantizarse la estabilidad local las transiciones de un subsistema a otro se hacen sin pérdida de estabilidad. Por lo tanto, para cualquier punto de operación X dado por el usuario, el sistema será estable siempre y cuando éste se mantenga dentro del rango propuesto para las variables difusas $Z1(t)$, $Z2(t)$ y $Z3(t)$, como se muestra en la figura 4.9.

4.4. LQR para sistema Takagi-Sugeno

El control predictivo óptimo modo dual (por sus siglas en inglés, OMPC), parte del diseño de un controlador LQR; la diferencia del OMPC con el control predictivo generalizado (en inglés, GPC) es que no sólo se tomará en cuenta la planta, si no a la planta estabilizada de manera óptima, para ello se obtiene una ley de control por retroalimentación de estados de la forma que se muestra en la ecuación (4.38), de la cual se obtiene una ganancia como en (4.39), en este trabajo se denominará K_{OMPC} .

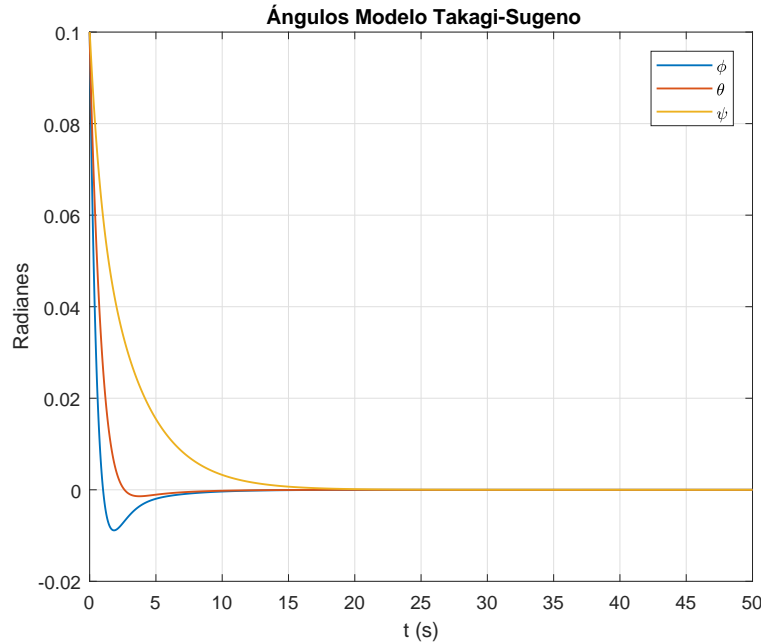


Figura 4.9: Estados T-S $X8^+$

En las figuras 4.9 se muestra el comportamiento de los ángulos de acuerdo a la sección 3.3 donde se aseguró estabilidad de manera global para el subsistema rotacional, con condiciones iniciales para los ángulos $[\phi(0), \theta(0), \psi(0)]^T = [0.1, 0.2, 0.3]^T$ se estabilizan aproximadamente después de 15 segundos.

La figura 4.10 representa la simulación del ángulo roll(ϕ), en la gráfica de color azul, se observa que la salida con $n_c = 2$ converge, la función costo es monótona (verde) alcanza el estado objetivo en un algoritmo de búsqueda informada; esto será admisible para cierto problema cuando el costo estimado sea menor o igual que el costo mínimo de alcanzar el estado objetivo, de tal manera que el algoritmo encuentra un camino óptimo hasta conseguir el objetivo, por último la gráfica (roja) muestra el valor de c_k , su valor deberá ser cero y lo cumple, por lo tanto se calculan los parámetros de este compensador K_{OMPC} porque se elige el modo terminal que coincide con el índice de rendimiento, entonces K no cambia y los parámetros son los mismos para todos los valores de n_c , ver figura 4.11.

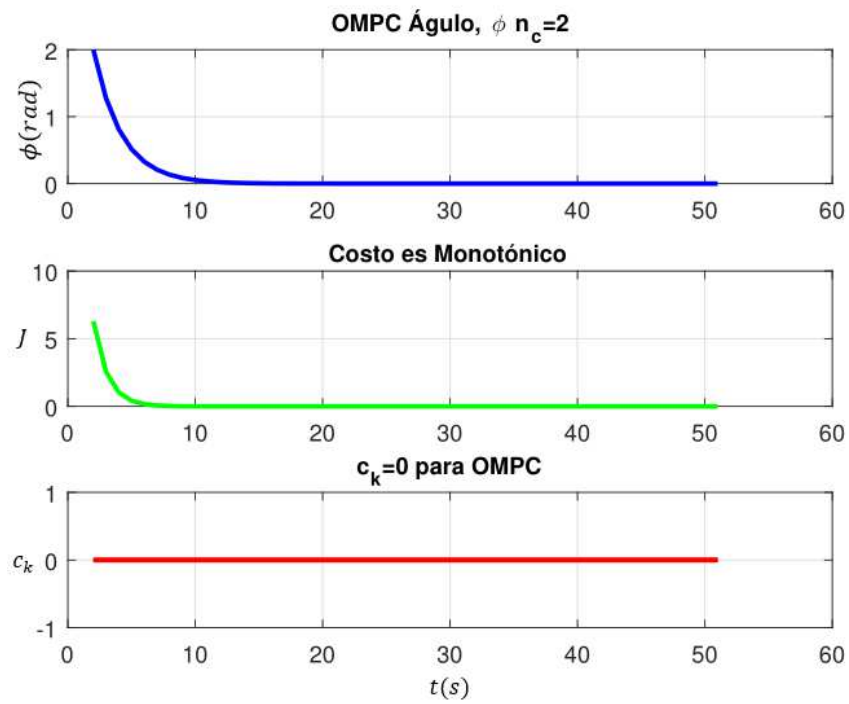


Figura 4.10: Salida ϕ , costo y c_k

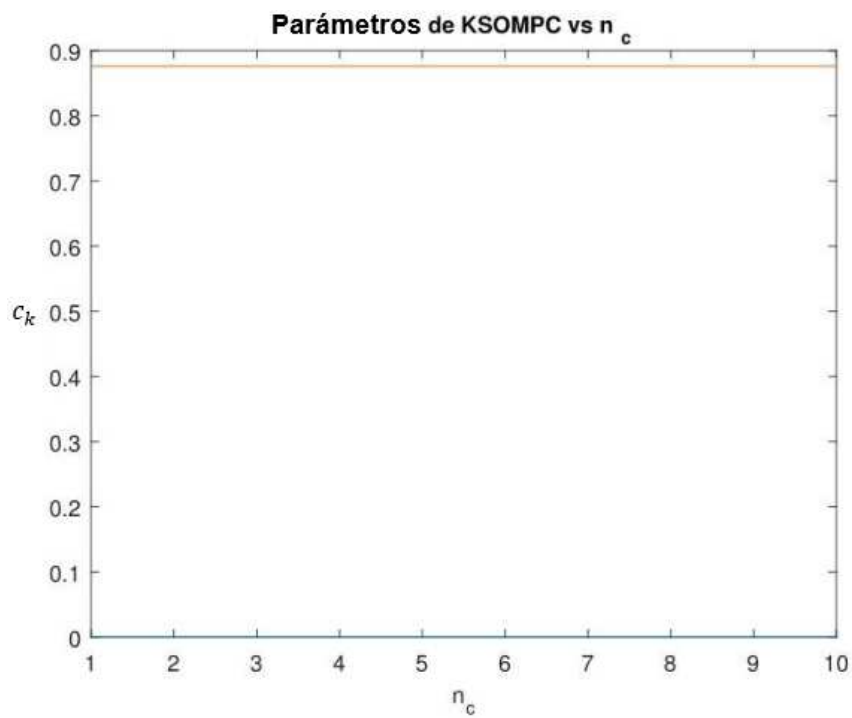


Figura 4.11: Parámetros SOMPC

Ángulo roll(ϕ) para $n_c = 4$

En las figura 4.12 y 4.13 se utilizan valores diferentes para la matriz de ponderación R , se nota que los resultados convergen, por lo que el sistema se estabiliza, la función costo J es monótona, pero aquí hay un dato interesante; si se observan los parámetros antes del tercer valor no son iguales a cero y también, no existe un patrón ordenado, en las muestras k y $k + 1$, cuando la optimización entra en función la muestra $k + 1$ sigue un patrón y se va a cero después de cinco pasos. En $k + 2$, inicia la muestra siguiente; se mueve y luego desciende, no es igual en su totalidad pero es bastante similar a los primeros movimientos, aunque no es igual a lo largo de todo el horizonte es similar a un cambio de decisión; posteriormente se actualiza a $k + 3$ o $k + 4$; de esta manera se puede ver que todo el tiempo se actualizan las decisiones obteniendo una propuesta ligeramente diferente y por lo tanto, se realizan varios cambios; si continua ese patrón se puede observar que el algoritmo OMPC es subóptimo y se le conoce como SOMPC (por sus siglas en inglés), porque toma decisiones diferentes constantemente.

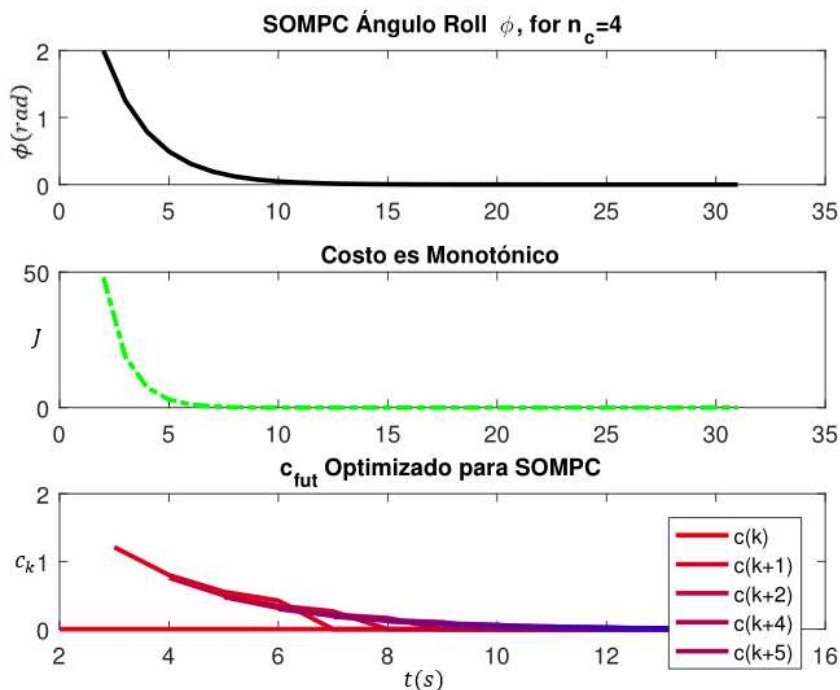


Figura 4.12: Salida ϕ , costo y c_k

En la figura 4.13 los parámetros K_{SOMPC} se trazan con el controlador que se encuentra en cero, se obtiene un compensador particular; por lo tanto, a medida que se aumente n_c , los parámetros del compensador cambian (línea naranja) pero no cambiarán mucho más allá de $n_c = 2$. Se puede ver un ligero cambio en n_c para los valores de 1 a 2 y puede haber una pequeña diferencia, pero más allá de dichos valores los cambios no son observables, por lo que para este resultado ha convergido a un compensador fijo con bastante rapidez.

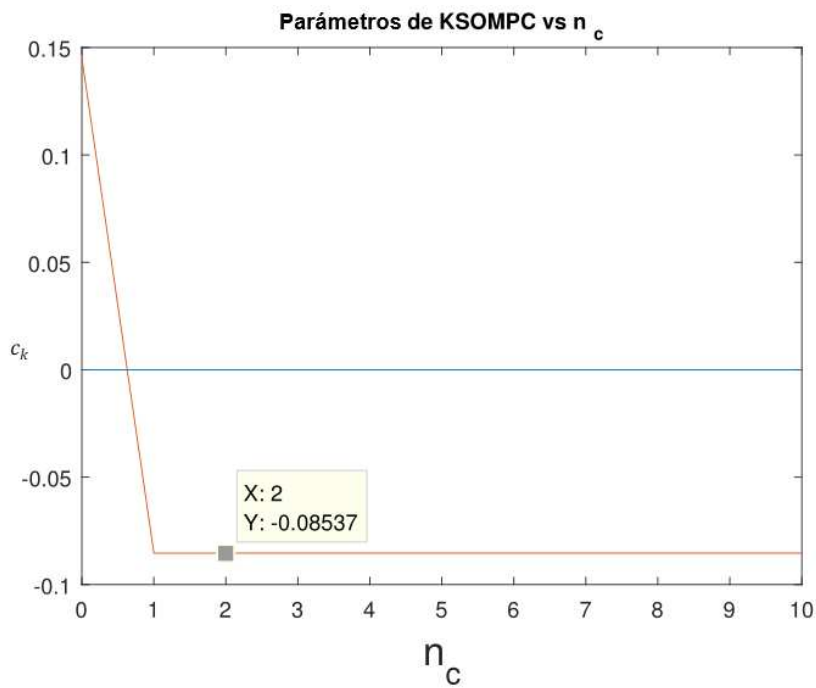


Figura 4.13: Parámetros ϕ SOMPC

Ángulo pitch(θ) para $n_c = 4$

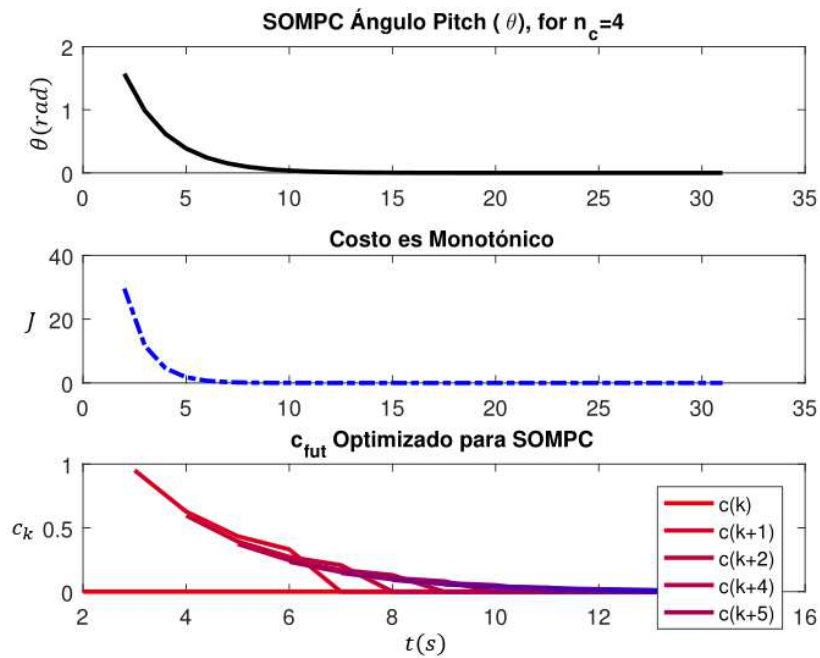
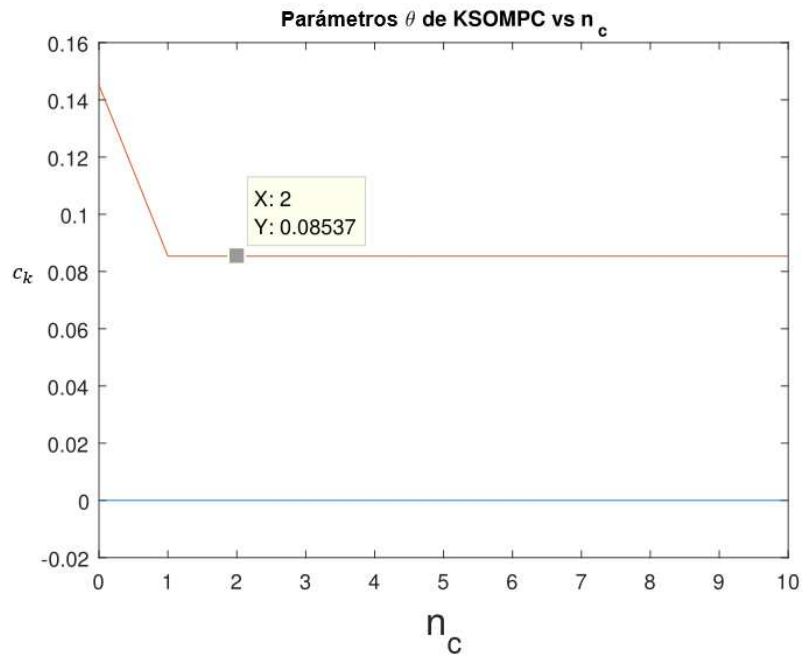


Figura 4.14: Salida θ , costo y c_k

Para las primeras dos gráficas en OMPC, para (ϕ) , variando n_c se notó que el costo es monótono, además las respuestas convergen y las perturbaciones son cero, por lo tanto el K_{SOMPC} no cambia con n_c . La simulación SOMPC para las gráficas siguientes, variando n_c se observa que el costo es monótono, las respuestas convergen, el K_{SOMPC} bastante cerca de K_{OMPC} incluso para $n_c = 1$. Las perturbaciones no son cero y pueden ser cambios muy grandes en c_k optimizado de una muestra a la siguiente

Figura 4.15: Parámetros θ SOMPC

Ángulo yaw(ψ) para $n_c = 4$

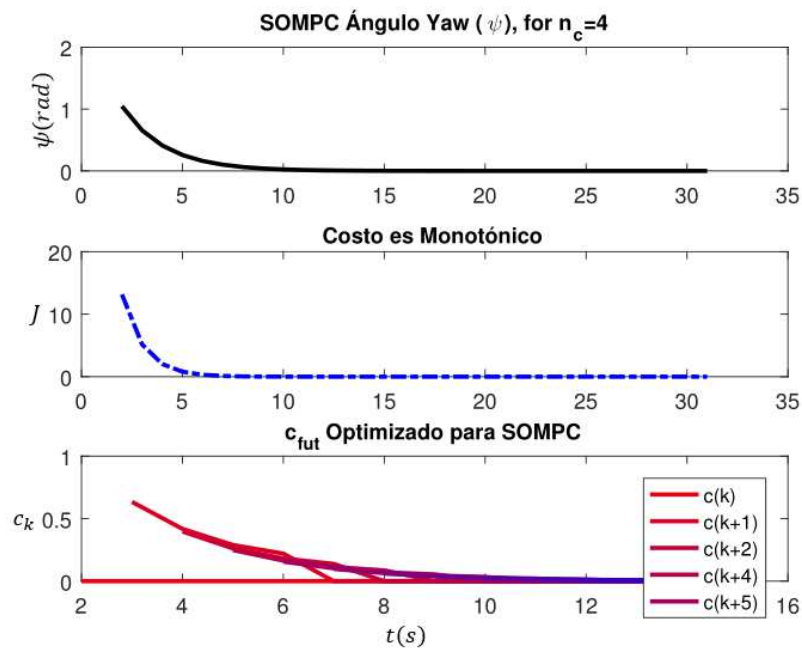


Figura 4.16: Salida Yaw, costo y c_k

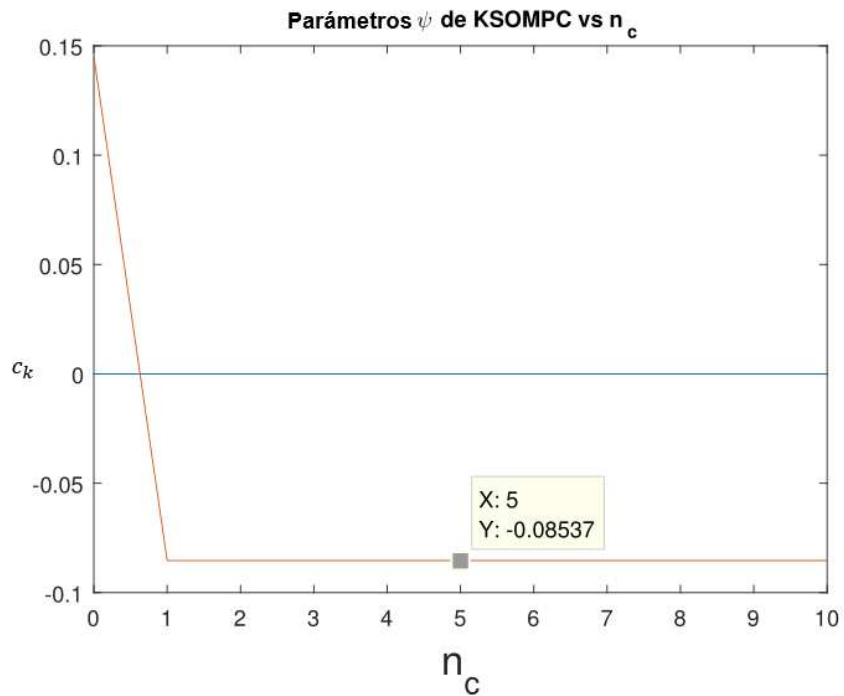


Figura 4.17: Parámetros ψ SOMPC

Ángulo roll(ϕ) seguimiento (Tracking)

En la figura 4.18 el objetivo (línea negra) a seguir, 10 muestras después, el objetivo sube parte de un estado inicial distinto de cero y se demuestra que originalmente el resultado (línea roja) converge a cero dado que el objetivo es cero; enseguida el objetivo cambia y la salida de la salida converge a este objetivo distinto de cero, lo que se obtiene es un seguimiento de trayectoria. Más adelante se observará que después de ciertas muestras la línea de color magenta indica que ha habido un cambio en el valor de la perturbación y notará nuevamente que el algoritmo reacciona, obviamente la salida cambia debido a esta perturbación, pero gradualmente regresa y se obtiene un seguimiento libre de compensación como se desea. Si observamos la función costo (color cyan), es monótona en las primeras muestras, donde reaccionamos ante la condición inicial distinta de cero obtenemos un cambio de objetivo, obviamente no puede ser monótona durante un cambio de objetivo, pero una vez que este cambio se completa, la función costo es nuevamente monótona. Si se produce un cambio de perturbación una vez que este desaparecido, el costo se vuelve monótono por lo que siempre que el objetivo y la perturbación sean constantes el costo es monótono, lo que se desea para nuestra prueba de estabilidad, esto es el OMPC. En esta simulación, notará que la c_k óptima siempre es cero como se esperaba (línea marrón).

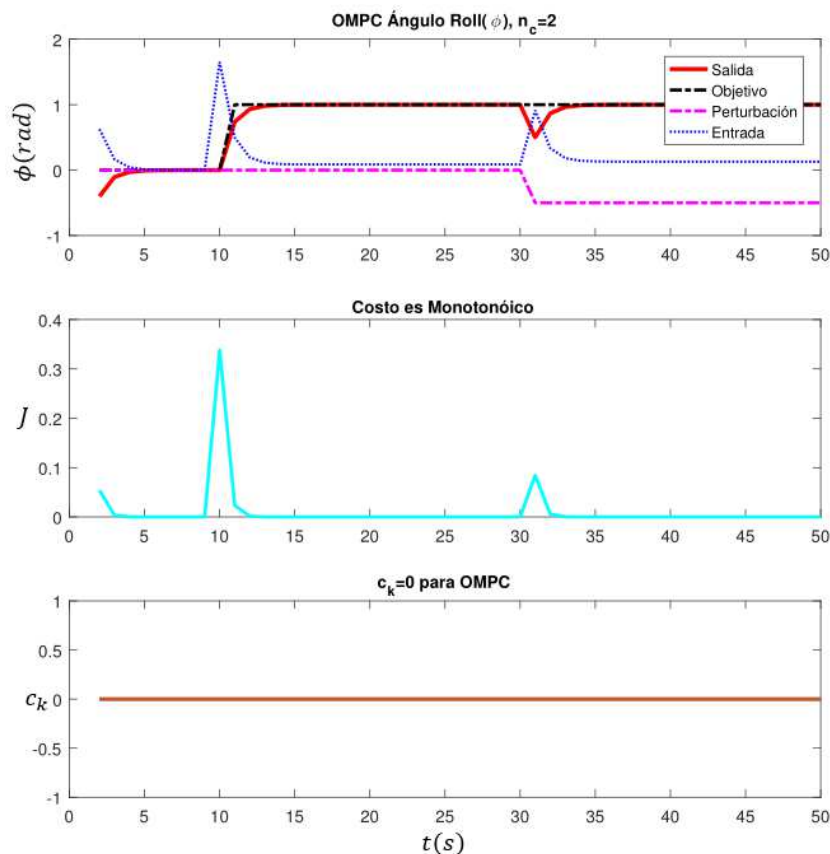


Figura 4.18: Tracking

Modo dual con restricciones en el ángulo ϕ

La restricción (gráfica color magenta punteada) representa las entradas máximas y mínimas de control. En la figura 4.19 un punto clave a destacar, es un $c_k \neq 0$ en la primera muestra (línea azul), es decir, el manejo de restricciones menciona que necesitamos usar c_k diferente de cero y notará que recibimos la entrada en el límite de restricciones que es el resultado deseado, lo que se demuestra aquí es que el algoritmo funciona calculando nuestras desigualdades de restricción y asegurando lo mencionado previamente en nuestro algoritmo OMPC podemos encontrar un punto de acceso apropiado para asegurar que se satisfacen las restricciones. Recordará que los primeros resultados que deseábamos obtener es que la función costo cumpla con el objetivo (línea verde). Si observamos las evoluciones del estado (línea roja), comprobamos que realmente llega al origen como se desea, por lo que para este sistema se obtuvo lo que se esperaba.

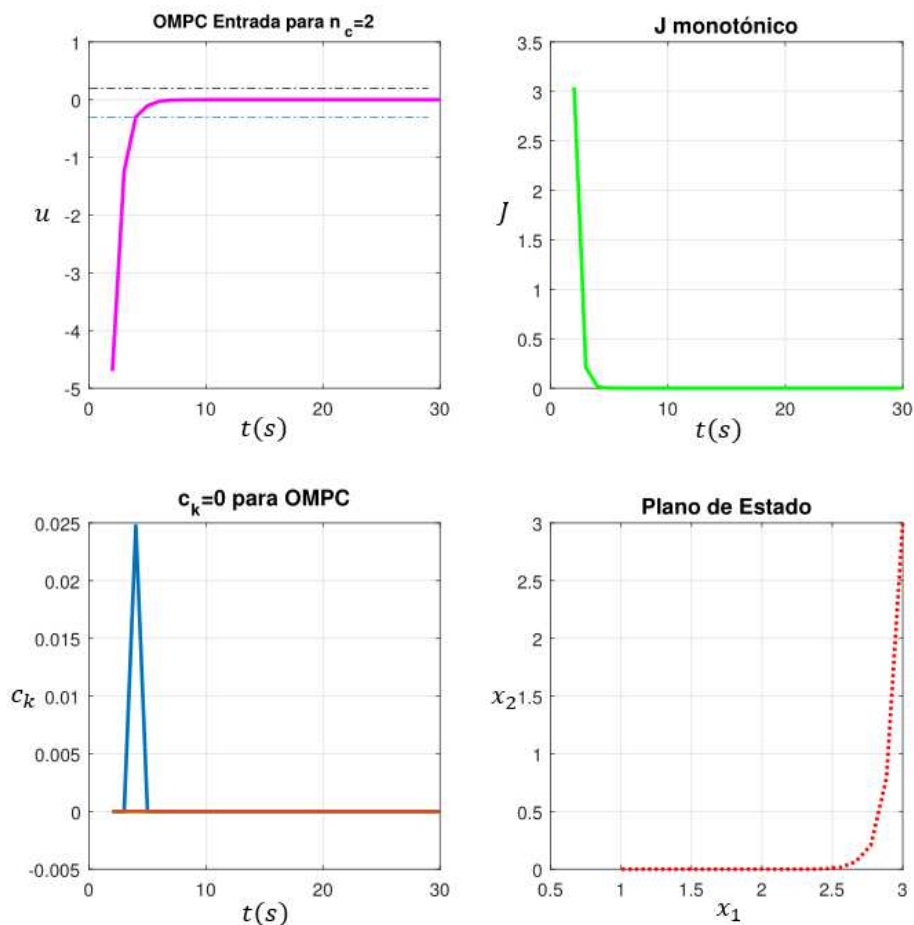


Figura 4.19: Restricciones Modo Dual

La simulación obtenida en la figura 4.20 muestra el caso (*con/sin*) restricciones observamos a la línea de color rosa; nos daremos cuenta que siempre satisface las restricciones y

también en la gráfica se muestra que c_k está usando valores distintos de cero, para asegurarse de que se satisfacen las restricciones. Si se hiciera la ley de control sin restricciones que es la línea verde, observaremos que la ley sin restricciones elige las entradas que violan las restricciones y, por lo tanto, no estarían permitidas.

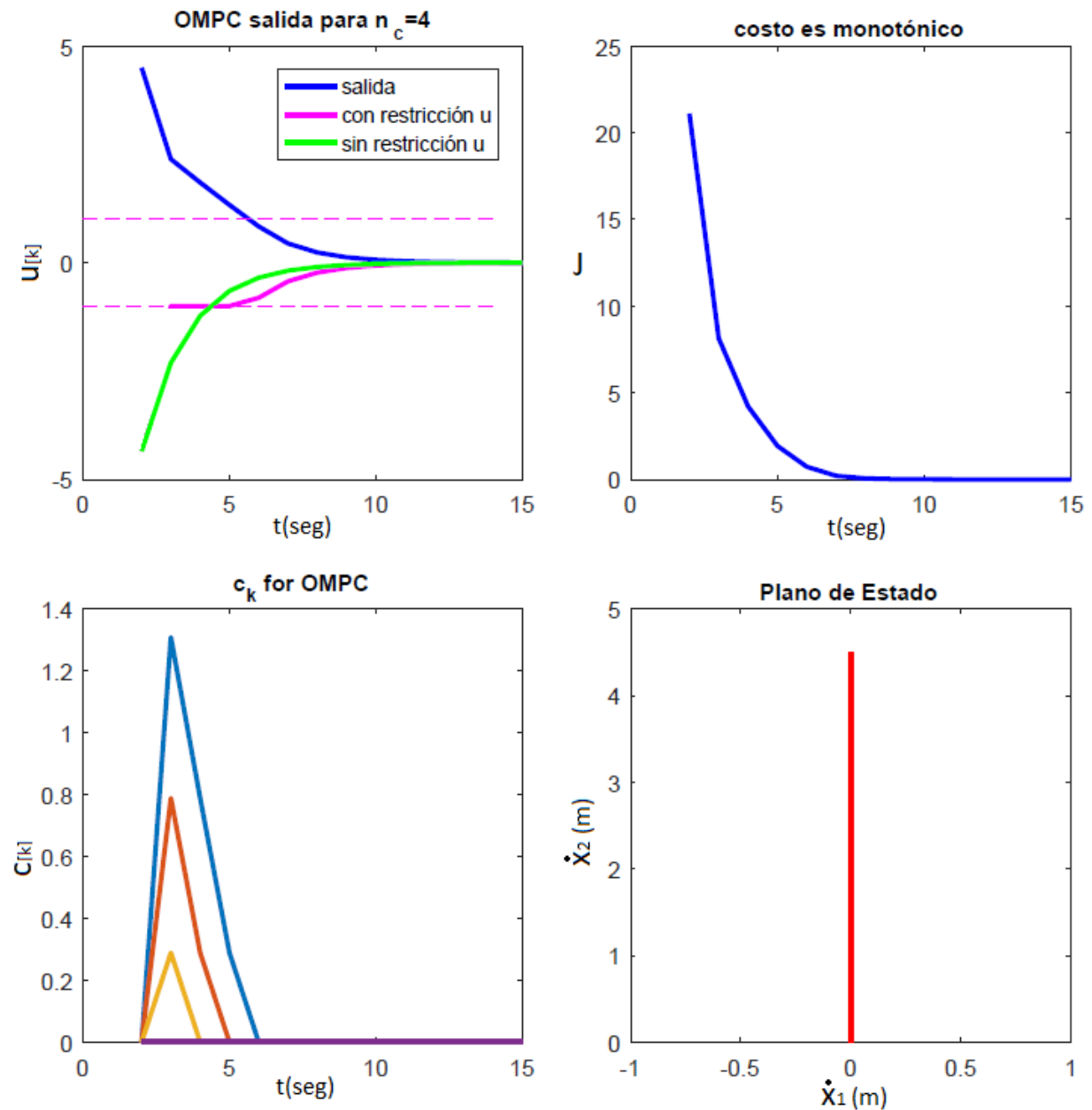


Figura 4.20: Restricciones Modo Dual

En la figura 4.21 correspondiente a los conjuntos admisibles, las líneas punteadas corresponden a los ejes x_1 y x_2 , las cuales muestran las restricciones en cada muestra y la trayectoria de fase, respectivamente, se puede observar de la solución restringida, que las trayectorias de estado siempre se mantienen dentro de las restricciones, en otras palabras, estas siempre satisfacen las restricciones; si se siguieran las no restringidas, entonces se puede notar que estas eligen las entradas que siempre violan las restricciones; es decir, se tiene que hacer un manejo adecuado de las mismas, ya que de otra manera las trayectorias de estado no satisfarán las restricciones, de esta forma se demuestra que el algoritmo funciona correctamente y se logra una optimización bien planteada. En la gráfica, a la región de color verde se le conoce como Conjunto Máximo Admisible (*MAS*), el detalle principal de esta región es que si se asume una $c_k = 0$, la ley de control será $u = -Kx$, entonces en este caso se puede notar que sólo se satisfarán las restricciones si se inicia dentro de esa región; en cambio, si se inicia fuera de ella la ley de control conduce a una violación de restricciones. Por otra parte, la región más grande que es la de color blanco se denomina Conjunto Máximo Admisible Controlado (*MCAS*), en la misma se usa como ley de control $u = -Kx + c_k$ y se debe encontrar una c_k tal que se satisfagan las restricciones, se puede notar que el *MCAS* es mucho más grande que el *MAS*, y el beneficio de añadir el término de compensación c_k el cual está relacionado con los *d.o.f* del sistema, es que se pueden tomar x (estados), para formar una región más grande y continuar asegurando que las predicciones siempre satisfagan las restricciones.

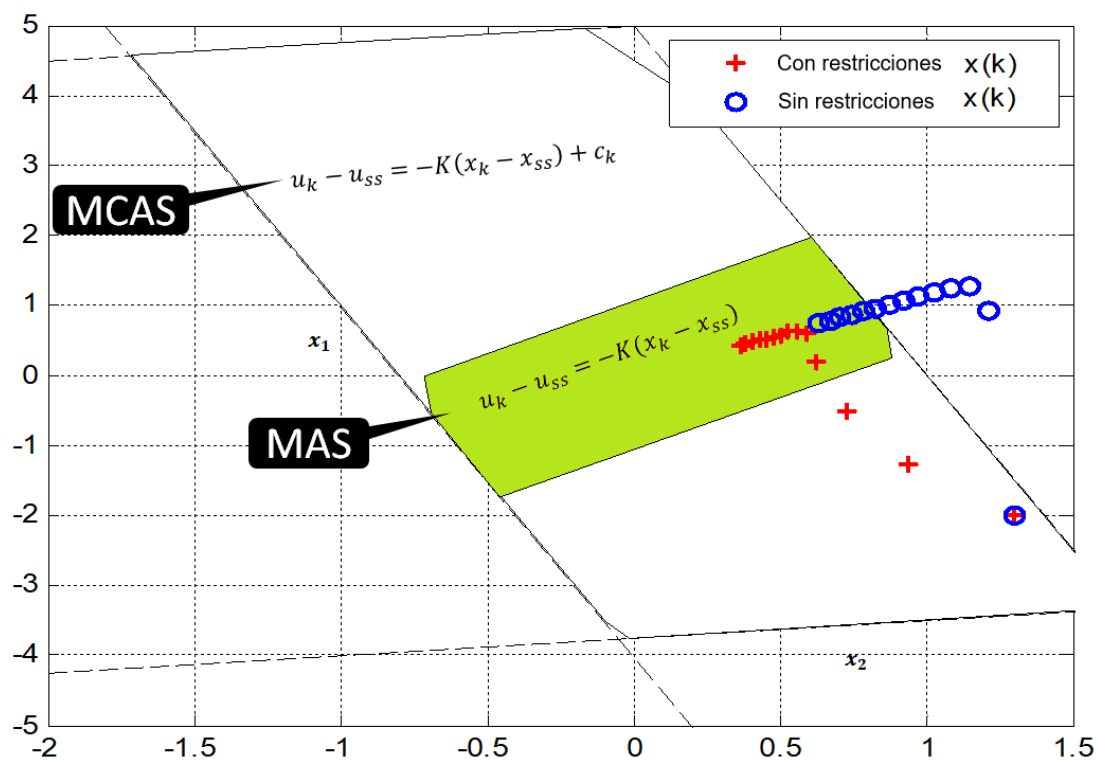


Figura 4.21: Conjuntos Admisibles

4.4.0.1. Traslación

Para la traslación, considerando lo expuesto en la figura 4.20 parte superior derecha, la función costo alcanza el estado objetivo, es decir su valor es cero y la compensación c_k a pesar de las transiciones mostradas siempre regresa a cero, en la figura 4.22 se traza una ruta con diferentes desplazamientos en las posiciones x , y , z iniciando en cero y realizando el recorrido cumpliendo con cada objetivo asignado, se muestran movimientos ligeramente suaves durante su trayectoria, esto demuestra que si se hace el uso adecuado de horizontes infinitos, de los d.o.f del sistema, y no existe desajuste en las predicciones, entonces el algoritmo OMPC funciona correctamente.

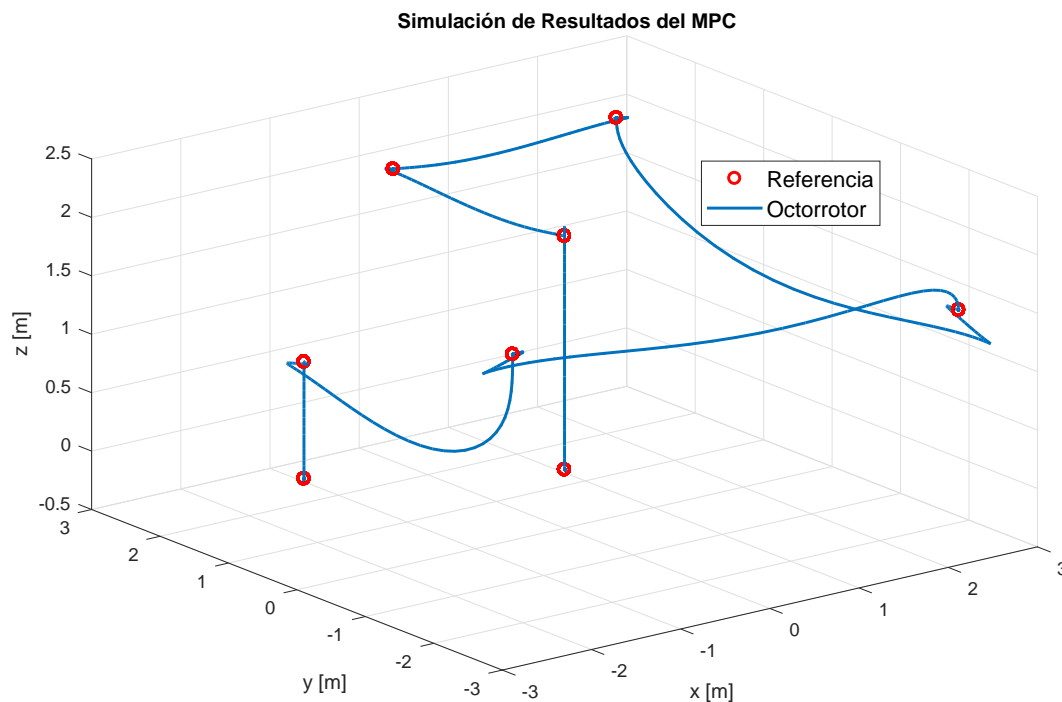


Figura 4.22: Posición x , y , z OMPC

El objetivo de esta simulación es el seguimiento de trayectoria en (x, y, z) , inicialmente se asignaron valores de referencia y un horizonte de predicción ($n_x = 50$). Como se puede observar en la figura 4.23 se eligen como referencias para las posiciones $x_{ref} = (2.5m, -2.5m, -2m)$, $y_{ref} = (2.5m, -2.5m, 1.2m)$ y $z_{ref} = (2m, 1.5m, 2m, 1m, 0m)$.

Por ejemplo, para la posición en z (altura), el vehículo inicialmente se encuentra en reposo, alrededor de los primeros 5s se realiza el armado de los motores, para que luego se posicione a una altura de $2m$, se puede notar que a los 13s y 19s el sistema es perturbado, sin embargo el controlador actúa inmediatamente y lo posiciona nuevamente en su referencia, lo mismo sucede alrededor de los 27s, 31s, 33s y 39s, una vez se han cambiado las referencias, finalmente, alcanzado los 44s el vehículo retorna a su posición inicial.

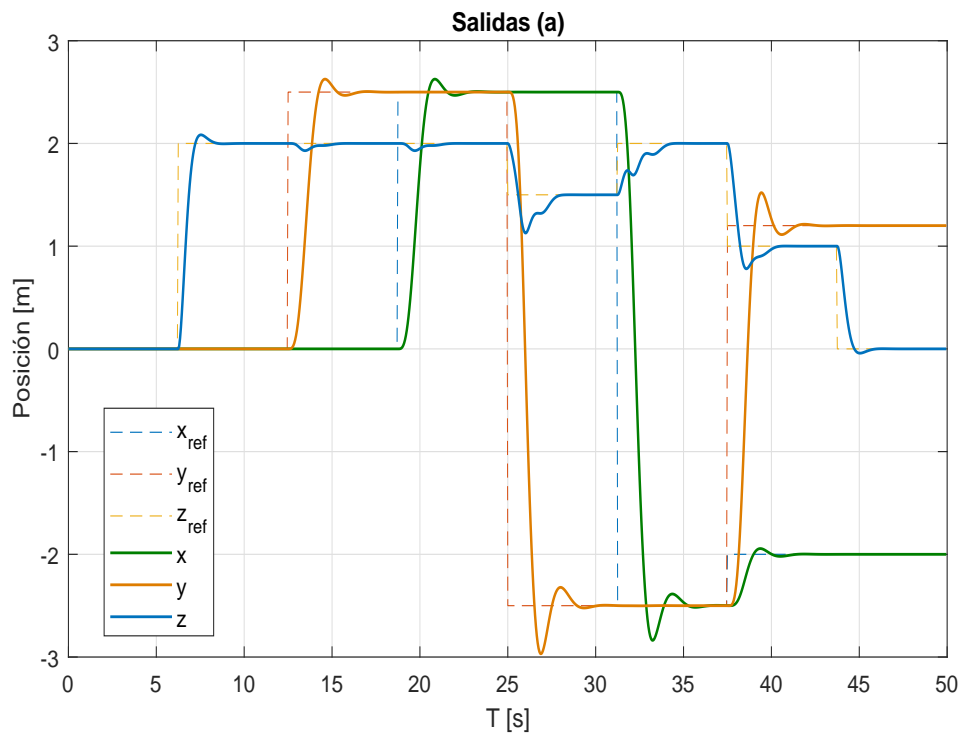


Figura 4.23: Salidas

En la figura 4.24 se muestran los errores de posición en x, y, z , obtenidos de los resultados de la figura 4.23.

En la gráfica 4.24(a), se muestra el error correspondiente a la posición en x , se observa que mientras no se le da un valor de referencia, el error es $0m$, pero pasados aproximadamente $19s$ se realiza el primer cambio de posición el cual conlleva a un valor de error diferente de cero durante el estado transitorio, y transcurrido este, el error toma valores iguales a $0m$ en estado estacionario; esta situación se repite para los siguientes cambios de referencias en x . En el caso de las gráficas 4.24(b) y 4.24(c), ocurren situaciones similares; es decir; en cada cambio en las referencias, los errores son diferentes de $0m$ y ya estabilizado el vehículo retornan a dicho valor.

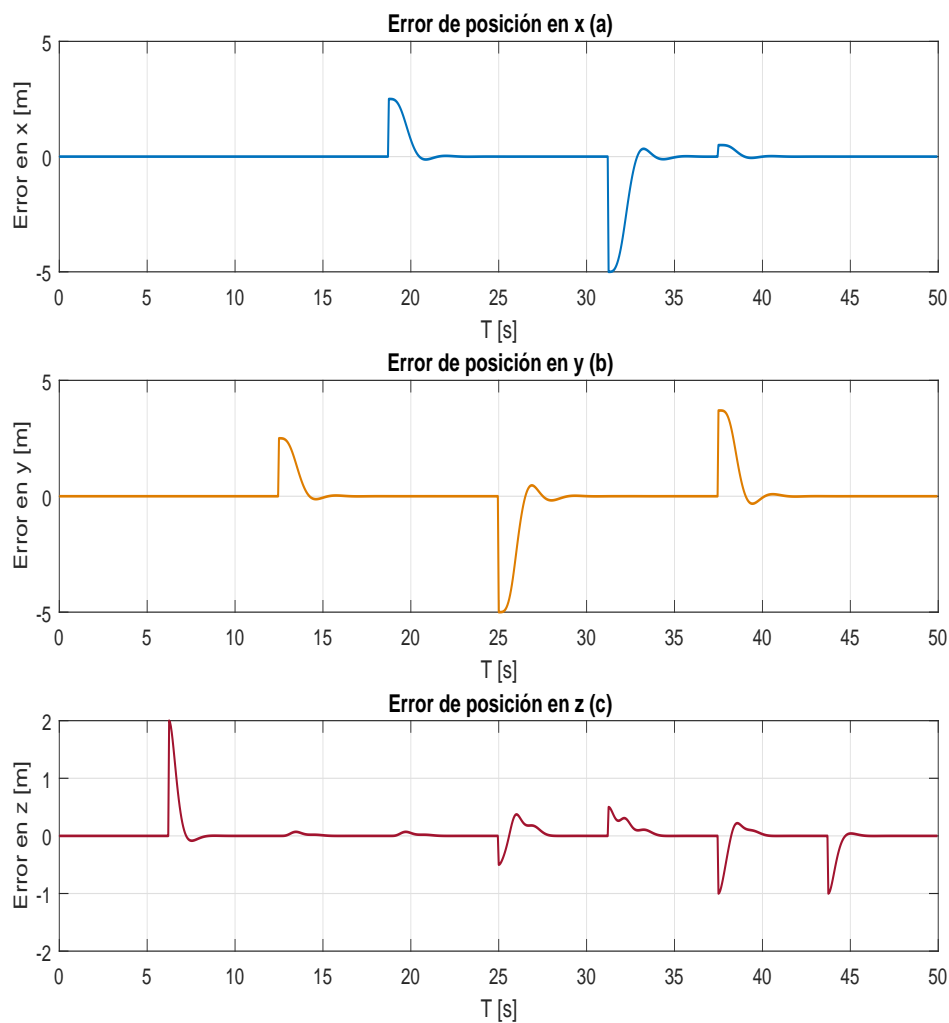


Figura 4.24: Errores

En lo que concierne a las acciones de control mostradas en la figura 4.25, están relacionadas con los rangos propuestos de las variables difusas, en este caso se propuso que los voltajes de entrada estuvieran en el rango $V_i \in [V^-, V^+]$ con $V^- = -14.8V$ y $V^+ = 16.8V$.

Como se puede observar en la gráfica, se tienen los voltajes de los 8 rotores del vehículo, las entradas están limitadas, debido a esto se mantienen muy por debajo del rango propuesto para las variables difusas.

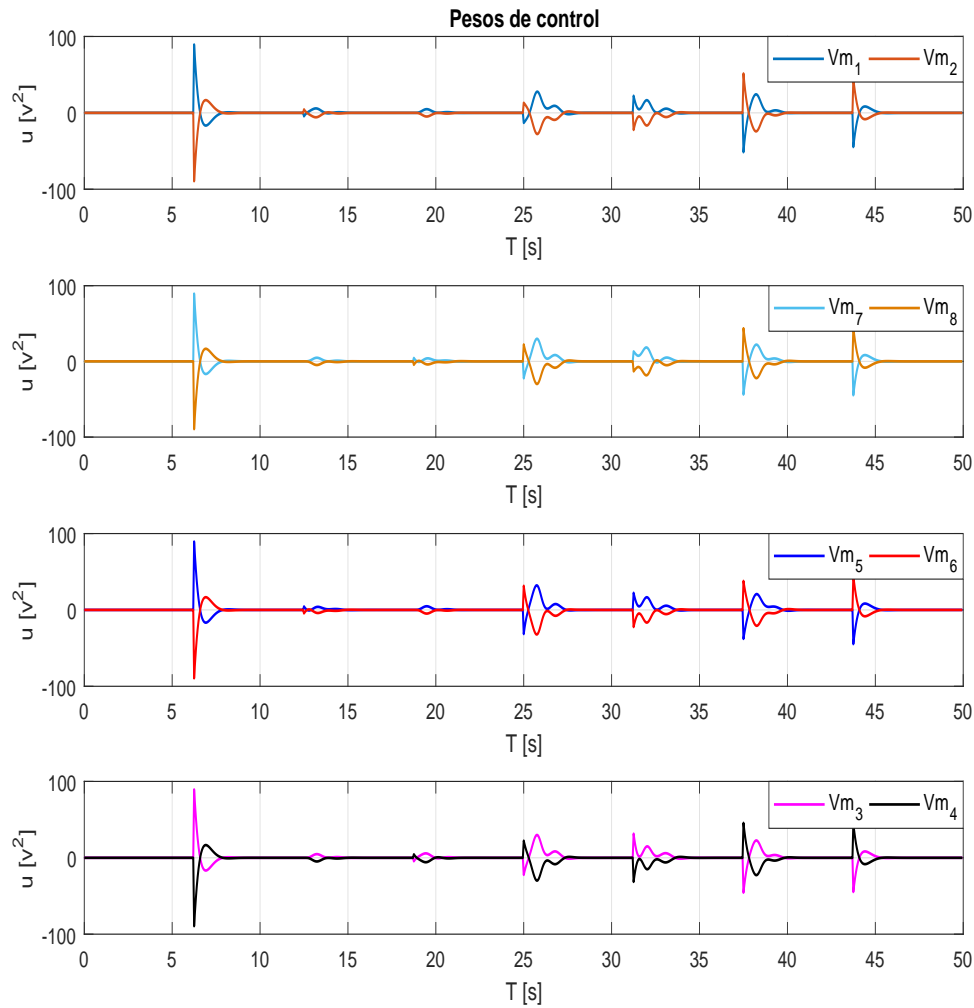


Figura 4.25: Pesos en las entradas de control

En la figura se muestra la evolución de los estados $v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$, correspondientes a $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$, respectivamente, y las salidas $x, y, z, \phi, \theta, \psi$ obtenidas luego de aplicar el algoritmo OMPC al vehículo.

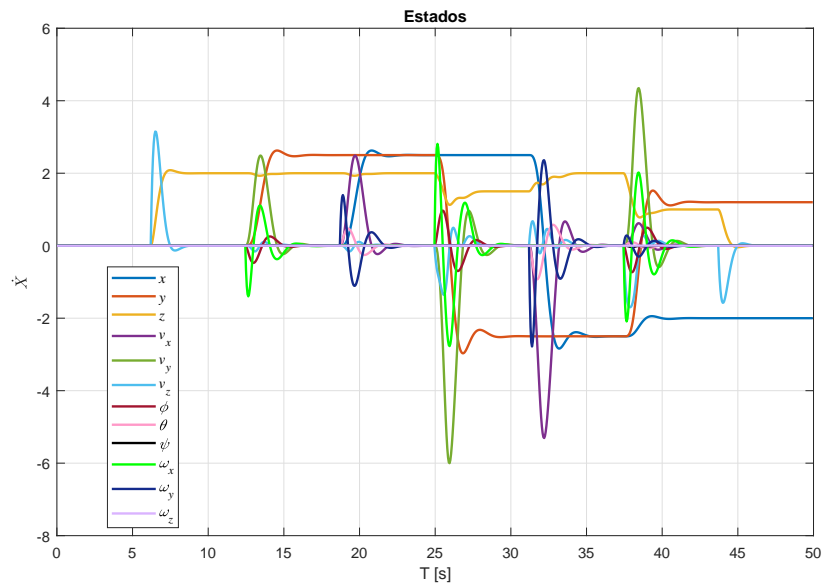


Figura 4.26: Estados y salidas

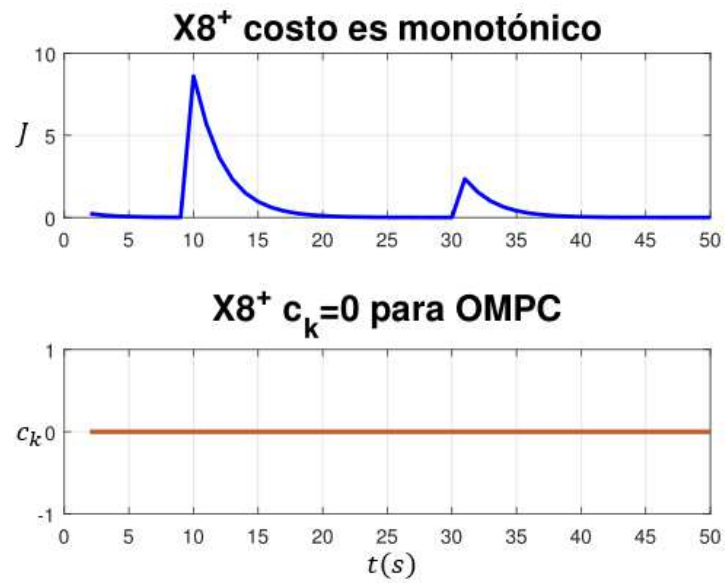


Figura 4.27: Función costo y c

En la figura 4.27 se muestra la función costo J a pesar de tener valores diferentes después de cada transición alcanza el objetivo, y los valores para la compensación c_k siempre se encuentra en el modo 1.

4.5. Puesta en Marcha Pixhawk y Pruebas.

Uno de las metas que se propuso para este trabajo fue la de validar la propuesta experimentalmente, debido a que no se tiene la certeza hasta este momento el poder implementar un controlador predictivo que exige una carga computacional extremadamente alta se deja una parte de esto como futura investigación. Hasta donde se logro implementar fue un controlador PID o LQR sin restricciones, ya que es incierto resolver el problema de optimización, pero sin duda es un importante avance el poder diseñar un controlador convencional y montarlo en la tarjeta de vuelo, las siguientes gráficas muestran un controlador PD para el sistema de rotación y traslación del drone octorotor $X8^+$ de 3D Robotics. Los pasos a seguir para montar el controlador desde Simulink a Pixhawk son configurar los parámetros del modelo en Simulink, construcción del modelo con la opción Build y el último paso del proceso de compilación consiste en copiar un script de inicio que llamamos '*rc.txt*' a la tarjeta SD del piloto automático Pixhawk, cambiando el nombre del archivo '*rc.txt*' a '*rc.txt.simulink*' en el directorio raíz de la tarjeta SD. Tras el arranque del sistema del piloto automático Pixhawk, ejecutará px4 simulink app.

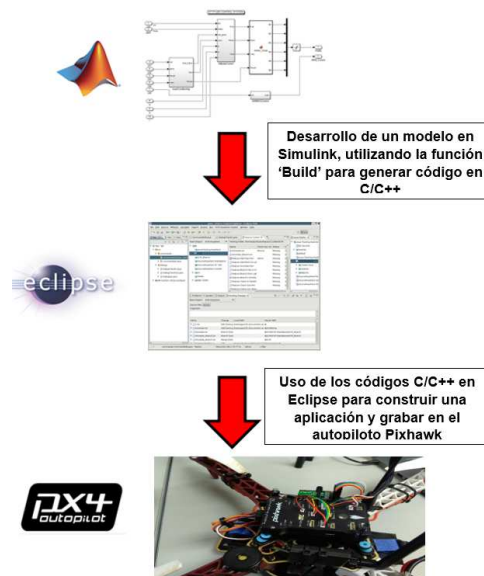


Figura 4.28: Proceso de creación y descarga de aplicaciones para piloto automático Pixhawk

Las figura 4.29 representa de forma experimental el comportamiento de actitud del $X8^+$ los ángulos ϕ y θ se limitaron a un movimiento de 25 grados cada uno, el controlador es montado desde simulink a la tarjeta de vuelo pixhawk con el fin de comprobar únicamente que se puede realizar la descarga del controlador a la tarjeta de vuelo, el comportamiento fue aceptable de acuerdo a que se encontraron limitaciones en cuanto a propelas que no correspondían al vehículo.

La línea naranja representa la orden de magnitud del ángulo roll (ϕ) transmitida por el radiocontrol y la línea verde representa la magnitud del movimiento del ángulo roll medido por el sensor *PX4FLOW X8+*. Se puede observar un comportamiento correcto del vehículo aunque con algunas perturbaciones debido a que se usaron propelas diferentes a las originales, sin embargo se trata de acercarlo lo más cercano al objetivo que se busca, los ángulos pitch (θ) y yaw (ψ) se comportaron de la misma manera tratando de ser lo más preciso posible.

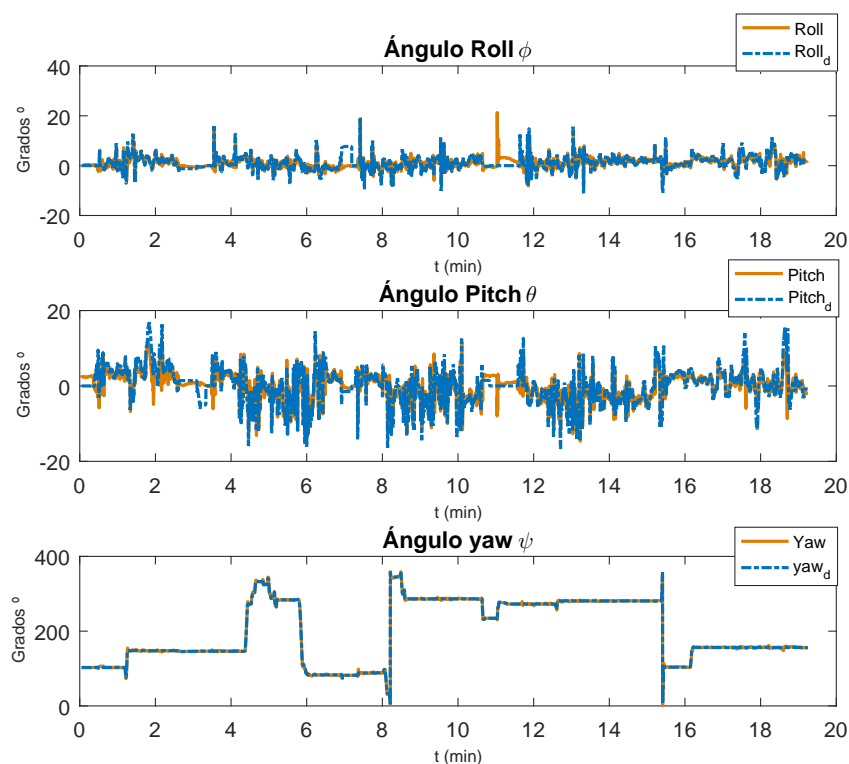


Figura 4.29: Ángulos ϕ, θ, ψ

Las gráficas de la figura 4.30 muestran el error que debe estar comprendido entre valores de 0 y 1 por lo tanto están dentro del rango permitido de error para el vehículo; aunque no fue una de las metas el implementar un controlador de este tipo y por lo tanto no se profundizó en el mejor funcionamiento del mismo, esto se hizo con el fin de demostrar que tenemos una herramienta muy poderosa el poder descargar un controlador diseñado a la tarjeta de vuelo ya que la característica principal es el código abierto de la misma, lo que se pretende a futuro es poder movernos a realizar un controlador óptimo con restricciones y que la carga computacional que este demanda pueda ser resuelta de manera correcta. Por otra parte para monitorear y obtener datos en tiempo real de la posición de vehículo se hace uso del sensor *PX4FLOW* que es un sensor de flujo óptico y de los módulos de telemetría

del X8⁺, se muestra la posición en x, y y z , con entradas al subsistema 2 entre 25, 30 y 180 grados para los ángulos roll, pitch y yaw respectivamente y una altura máxima de 15 metros para z , se observa que se comportó de manera adecuada con valores de ganancias como en la tabla 5 de la sección 3.2. Los ángulos y las trayectorias deseadas tales como $Roll_d$, $Pitch_d$, Yaw_d , x_d , y_d , y z_d , las genera por default el Pixhawk Autopilot, para este caso se descargó el controlador a la tarjeta y se crea una aplicación llamada Pixhaw Simulink App, de esta manera la tarjeta crea por default las referencias de acuerdo a los puntos trazados que se le indiquen al vehículo para comenzar a moverse.

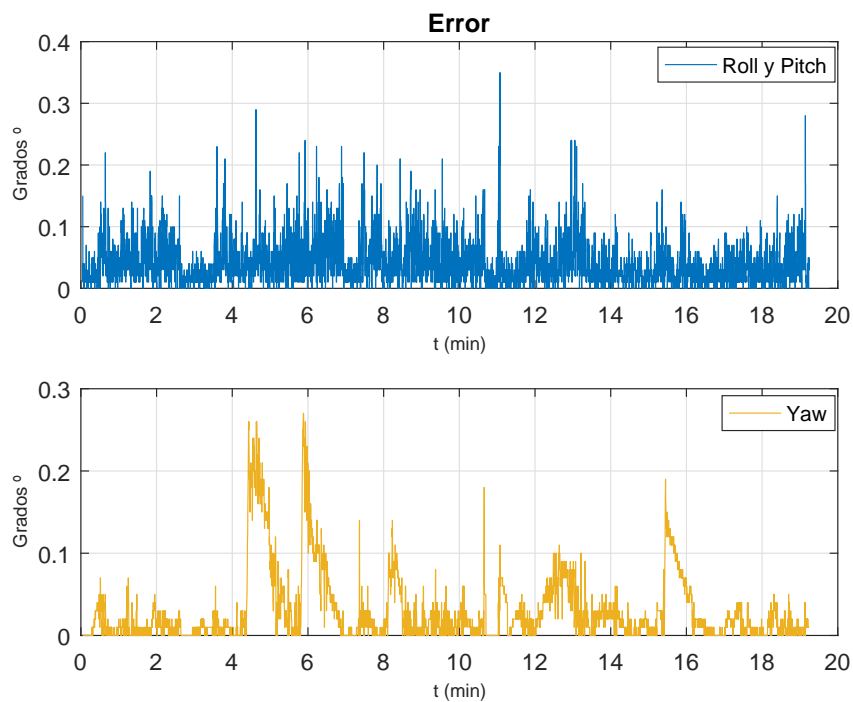


Figura 4.30: Error en los ángulos ϕ, θ, ψ

Con el fin de observar de la mejor manera posible en las figuras 4.31 y 4.32, los datos de vuelo se redujeron a los primeros 3 minutos y medio aproximadamente, ya que como se realizó un vuelo de varios minutos, la cantidad de datos que se obtuvo fue demasiado grande y al graficar es más difícil apreciar el comportamiento del controlador, es por eso que se tomó la decisión de reducir el número de datos de vuelo.

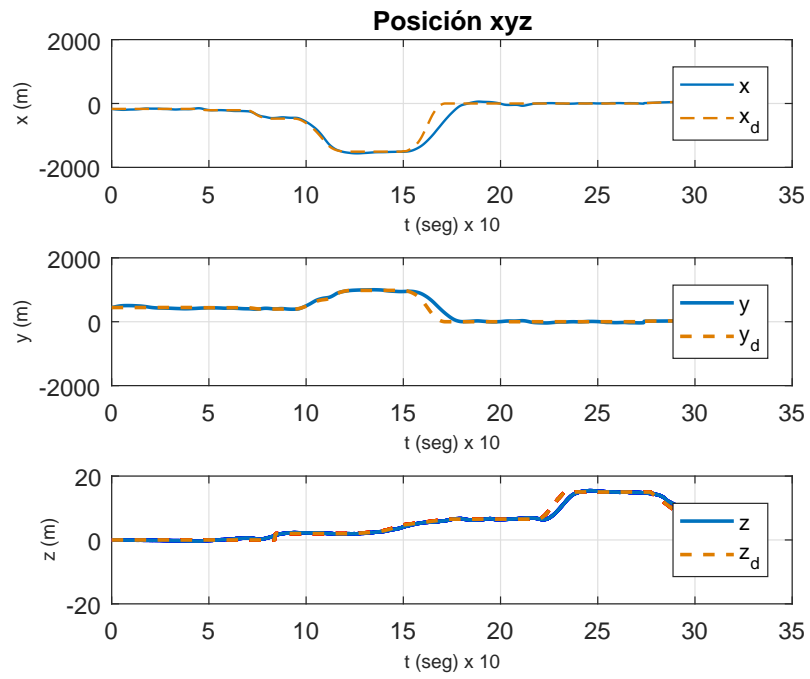


Figura 4.31: Salidas x, y, z

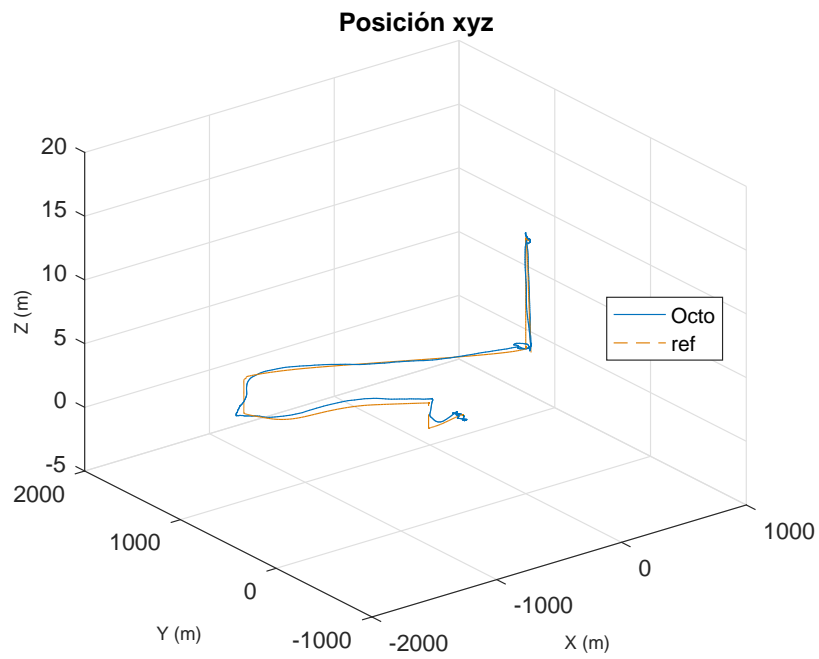


Figura 4.32: Posición x, y, z

Los datos se obtuvieron por medio de telemetría en conjunto con el sensor de flujo óptico PX4FLOW.

En la figura 4.33 la línea de color verde es el ángulo deseado y la roja es el ángulo actual, en la parte inferior derecha del graficador se muestran las opciones del subsistema rotacional.

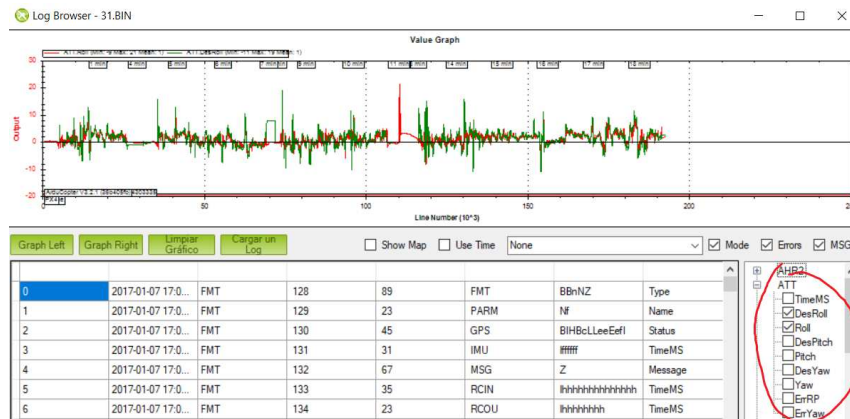


Figura 4.33: Mavlink Actitud

La figura 4.34 muestra las posiciones actuales y deseadas del sistema, en la parte inferior derecha se observan los datos obtenidos de telemetría los cuales muestran las opciones que se generan al montar el controlador a la tarjeta.



Figura 4.34: Mavlink x, y, z

Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones del desarrollo del trabajo de investigación y los resultados obtenidos. Se hace la propuesta de posibles trabajos futuros de temas relacionados a la investigación que han quedado abiertos. Finalmente se enlista el artículo generado por este trabajo de tesis.

- En este trabajo de tesis se obtuvo el modelo no lineal a través del enfoque E-L que sirvió como base para la obtención del modelo Takagi-Sugeno desde el punto de vista LPV mediante la técnica de aproximación del sector no lineal para el UAV octorrotor X8⁺ de 3D Robotics, comprobándose por medio de simulación que el modelo difuso es una representación exacta del modelo no lineal. Esta técnica multimodelo dió como resultado 8 submodelos locales para el subsistema rotacional y 8 submodelos locales para el subsistema traslacional.
- Se diseñó la estrategia OMPC para sistemas Takagi-Sugeno desde el punto de vista LPV con y sin restricciones, tomando en cuenta las predicciones basadas alrededor de la implementación de un regulador arbitrario (LQR) utilizando variables de desviación y compensaciones c_k , de lo que se comprobó que existen dos dinámicas distintas para los transitorios y el comportamiento asintótico, lo cual dió paso a la estrategia de control predictivo modo dual. Además, se probó que haciendo uso de los *d.o.f* del sistema, horizontes infinitos y la inclusión de la cola conducen a una optimización bien planteada, es decir, no existe desajuste en las predicciones y es suficiente para garantizar que la función costo es una función de Lyapunov, la cual por la característica de este control de presentar dos modos se divide en una función costo para el modo 1 y otra para el modo 2, lo que se pretende es dar solución a la ecuación de Lyapunov para determinar una matriz P que resuelva el problema de optimización. Al ser multimodelado se obtienen 16 matrices P que no aseguran estabilidad durante las transiciones de un submodelo a otro, por lo que se realizó un análisis de estabilidad para sistemas difusos en el que se encontró una matriz P común a todos los submodelos, con lo que se aseguró estabilidad asintótica global de

manera óptima.

Se corroboró que las restricciones para las predicciones pueden ser probadas en horizontes infinitos usando un número finito de desigualdades. Es esencial que la dinámica de predicción sea estrictamente convergente, y que los valores asintóticos estén estrictamente dentro de las restricciones de muestra, con ello se obtuvieron funciones de costo monotónicas, es decir siempre alcanzan el estado objetivo. En cuanto a las compensaciones optimizadas c_k , a pesar de que toman valores diferentes de cero cuando son violadas las restricciones, siempre retornan a su estado inicial una vez transcurrido el transitorio, es decir, el término de compensación c_k vuelve a ser cero al alcanzar el estado estable.

- Se llevó a cabo la puesta en marcha del octorotor X8⁺, con la tarjeta de vuelo Pixhawk y el sensor de flujo óptico PX4FLOW para sensar los ángulos de Euler ϕ , θ , ψ y las posiciones en x , y , z .
- Se llevó a cabo la implementación y pruebas en el sistema 3DR Pixhawk, de algunos controladores durante la estancia en el Instituto Tecnológico de Hermosillo, la fase de experimentación se redujo a controladores convencionales (PID, LQR) debido a la fuerte carga computacional que demanda la optimización.

Trabajos Futuros

- Implementar los algoritmos de optimización en un sistema embarcado.
- Diseñar e implementar algoritmos para optimización de trayectorias en sistemas multiagentes.
- Evasión de obstáculos utilizando el sensor de flujo óptico PX4FLOW.
- El principal reto a futuro es implementar la estrategia de control predictivo óptimo propuesta en el sistema real, con el objetivo de prescindir de un software de simulación y probar el controlador diseñado en procesadores capaces de realizar una optimización sin problemas de carga computacional, tales como, Jetson TX1 o Raspberry Pi.

Artículos y conferencias

- Artículo sobre Control Predictivo Óptimo de un UAV Multirrotor basado en modelo Takagi-Sugeno. Rogelio I. Flores, Carlos D. García-Beltrán, Guillermo Valencia-Palomo. 1^a Jornada de Ciencia y Tecnología, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2018.
- Conferencia sobre Control de un Vehículo Aéreo Multirrotor basado en Modelo Takagi-Sugeno. Rogelio I. Flores, Carlos D. García-Beltrán, Guillermo Valencia-Palomo. Marco de la jornada académica 2017. Instituto Tecnológico de Hermosillo, Sonora.

Bibliografía

- [1] T. Abdelazim and O. P. Malik. Identification of nonlinear systems by takagi–sugeno fuzzy logic grey box modeling for real-time control. *Control Engineering Practice*, 13(12):1489–1498, 2005.
- [2] W. Al-Gherwi. A robust distributed model predictive control based on a dual-mode approach. *Chemical Engineering, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.*, 2012.
- [3] K. Alexis, C. Papachristos, G. Nikolakopoulos, and A. Tzes. Model predictive quadrotor indoor position control. In *Proc. 19th Mediterranean Conf. Control Automation (MED)*, pages 1247–1252, June 2011.
- [4] B. Anis. *Approche descripteur pour l'analyse et la commande des systèmes LPV rationnels*. PhD thesis, University de nantes ecole doctorale sciences et technologie de l' information des materiaux annee, 2008 Thèse de doctorat, Diplôme délivré par l'université de Nantes. Spécialité : automatique et informatique appliquée.
- [5] J. Aracil and F. Gordillo. The inverted pendulum: a benchmark in nonlinear control. In *Proc. World Automation Congress*, volume 16, pages 468–482, June 2004.
- [6] A. Arpornwichanop. Model predictive control of an industrial pyrolysis gasoline hydrogenation reactor. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry, Volume 14, Issue 2, March 2008, Pages 175-181*, 2008.
- [7] M. Mahfouf A. J. Asbury and D.A. Linkens. Unconstrained and constrained generalised predictive control of depth of anaesthesia during surgery. *Control Engineering Practice*, 11(12):1501–1515, 2003.
- [8] K.J. Astrom and T. Hagglund. Advanced pid control, isa—the instrumentation, systems, and automation society. *Research Triangle Park, NC 27709*, 2006.
- [9] R. Bellman. On the theory of dynamic programming. *In: Proceedings of the National Academy of Sciences.*, 35:716–719, 1952.

-
- [10] C. Berbra, S. Gentil, and S. Lesecq. Hybrid priority scheme for networked control quadrotor. In *Proc. 17th Mediterranean Conf. Control and Automation*, pages 516–521, June 2009.
- [11] T. Besselmann, J. Lofberg, and M. Morari. Explicit MPC for lpv systems: Stability and optimality. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(9):2322–2332, September 2012.
- [12] Z. Binder. About a multimodel control methodology, algorithm, multi-processors, implementation and application. 1981.
- [13] F. Blachini. Set invariance in control. *Automatica*, 35:1747–1767, 1999.
- [14] F. Borrelli, T. Keviczky P. Falcone, and J. Asgari. Mpc-based approach to active steering for autonomous vehicle systems. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 3(2):265–291, 2005.
- [15] S. Bouabdallah, P. Murrieri, and R. Siegwart. Design and control of an indoor micro quadrotor. In *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004 IEEE International Conference on*, volume 5, pages 4393–4398. IEEE, 2004.
- [16] S. Bouabdallah, A. Noth, and R. Siegwart. PID vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566)*, volume 3, pages 2451–2456 vol.3, September 2004.
- [17] S. Boyd and L. El Ghaoui. Linear matrix inequalities in system and control theory, vol. 15, siam, philadelphia, pa, usa, 1994. *View at MathSciNet*.
- [18] C. Briat. *Commande et Observation Robustes des Systèmes LPV Retardés*. PhD thesis, Grenoble INP, Departamento de Automático GIPSA-Lab.Francia., 2008 Tesis de Doctorado.
- [19] J. De Caigny, J. F. Camino, and J. Swevers. Interpolation-based modeling of MIMO lpv systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 19(1):46–63, January 2011.
- [20] S. Cairano and A. Bemporad. Model predictive control of magnetically actuated mass spring dampers for automotive applications. *International Journal of Control*, 80(11):1701–1716, 2007.
- [21] E. Camacho, F. Alba, and C. Bordons. *Model predictive control*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [22] P. Castillo, P. Albertos, P. Garcia, and R. Lozano. Simple real-time attitude stabilization of a quad-rotor aircraft with bounded signals. In *Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control*, pages 1533–1538, December 2006.

-
- [23] P. Castillo, R. Lozano, and A. E. Dzul. Modeling and control of mini-flying machines. *America: Springer*, 2005.
- [24] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, INC., 2008.
- [25] Y. C. Choi and H. S. Ahn. Nonlinear control of quadrotor for point tracking: Actual implementation and experimental tests. *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, 20(3):1179–1192, 2015.
- [26] P. S. Cisneros, C. Hoffmann, M. Bartels, and H. Werner. Linear parameter-varying controller design for a nonlinear quad-rotor helicopter model for high speed trajectory tracking. In *American Control Conference (ACC), 2016*, pages 486–491. IEEE, 2016.
- [27] J. Concha and A. Cipriano. A design method for stable fuzzy lqr controllers. In *Fuzzy Systems, 1997., Proceedings of the Sixth IEEE International Conference on*, volume 1, pages 271–276. IEEE, 1997.
- [28] C. de Prada. El futuro del control de procesos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial.*, 1(1):5–14, 2004.
- [29] I. Dikmen, A. Arisoy, and H. Temeltas. Attitude control of a quadrotor. In *Recent Advances in Space Technologies, 2009. RAST'09. 4th International Conference on*, pages 722–727. IEEE, 2009.
- [30] S. Durand, J. Dumon, N. Marchand, and J. F. Guerrero-Castellanos. Event-based control for embedded and networked system application to a mini quadrotor helicopter using motion capture. In *Proc. Int. Conf. Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 1188–1195, May 2014.
- [31] M. G. Joo et J. S. Leeb. Universal approximation by hierarchical fuzzy system with constraints on the fuzzy rule. *Fuzzy Sets and Systems*, 130:175–188, 2002.
- [32] C. Wei et L. X. Wang. A note on universal approximation by hierarchical fuzzy systems. *Information Sciences*, 123:241–248, 2000.
- [33] G. Feng. *Analysis and synthesis of fuzzy control systems: A model-based approach*, volume 37. CRC press, 2010.
- [34] D. Filev. Modelling of complexe systems. *International Journal of Approximate Res*, 5:281–290, 1991.
- [35] J. Friedman and W. Stuetzle. Projection pursuit regression. *J. Amer. Statist. As-soc*, 76:817–823, 1981.
- [36] C. Fuyang. Adaptive compensaion control of the quadrotor helicopter using quantum information technology and disturbance observer. In *Journal of the Franklin Institute*, pages 442-455., 2014.

-
- [37] C. De Prada G. Gutiérrez, P. Vega. Integrated closed loop control and process design. *IFAC Proceedings Volumes, Volume 40, Issue 5, 2007, Pages 243-248*, 2007.
- [38] D. Gautam and C. Ha. Control of a quadrotor using a smart self-tuning fuzzy pid controller. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 10(11):380, 2013.
- [39] E. G. Gilbert and K. T. Tan. Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 36:1008–1020, 1991.
- [40] J. Zhou et R.A. Kisner G.V.S. Raju. Hierarchical fuzzy control. *International Journal of Control*, 54:1201–1216, 1991.
- [41] H. X. Lib H. T. Zhangab and G. Chenc. Dual-mode predictive control algorithm for constrained hammerstein systems. *International Journal of Control.*, 2008.
- [42] W Hahn. Stability of motion. berlin, de, 1967.
- [43] L. Ben Hamouda, O. Bennouna, M. Ayadi, and N. Langlois. Quasi-lpv model predictive reconfigurable control for constrained nonlinear systems. In *Proc. Conf. Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, pages 590–595, October 2013.
- [44] Hendricks and et. al. *Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods*. Springer-Verlag, 1999.
- [45] W. H. Ho and J. H. Chou. Design of optimal controllers for takagi–sugeno fuzzy-model-based systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 37(3):329–339, 2007.
- [46] S. K. Hong and Y. Nam. Stable fuzzy control system design with pole-placement constraint: an lmi approach. *Computers in Industry*, 51(1):1–11, 2003.
- [47] J. P. How, B. Behihke, A. Frank, D. Dale, and J. Vian. Real-time indoor autonomous vehicle test environment. *IEEE control systems*, 28(2):51–64, 2008.
- [48] P. Huber. Projection pursuit (with discussion). *Ann. Statist*, 13:435–475, 1985.
- [49] J. A. Isaza Hurtado. Evaluación de un controlador predictivo basado en un modelo semifísico de inferencia borrosa takagi-sugeno con conjuntos multidimensionales. Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2012.
- [50] B. Kouvaritakis J. A. Rossiter and M. J. Price. A numerically robust state-space approach to stable-predictive control strategies. *Automatica*, 83(4):789–797, 1998.
- [51] S. Kawamoto, K. Tada, A. Ishigame, and T. Taniguchi. An approach to stability analysis of second order fuzzy systems. In *Proc. / IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems /1992*, pages 1427–1434, March 1992.

-
- [52] E.C. Kerrigan and J.M. Maciejowski. Invariant sets for constrained nonlinear discrete-time systems with application to feasibility in model predictive control. In *Conference on Decision and Control*, 2000.
- [53] A. Q. Khan, G. Mustafa, and N. Iqbal. Lqg/ltr based controller design for three degree of freedom helicopter/twin rotor control system. In *Proc. Pakistan Section Multitopic Conf*, pages 1–5, December 2005.
- [54] M. Klug, E. Castelan, and D. Coutinho. A t-s fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 26(3):191–200, 2015.
- [55] M. Klug, E. Castelan, D. Coutinho, and L. Silva. Compensadores dinâmicos para sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy ts: Estudo comparativo e implementação hil. In *Congresso Brasileiro de Automática*, 2014.
- [56] M. Klug et al. Realimentação dinâmica de saídas com parâmetros variantes e aplicação aos sistemas fuzzy takagi-sugeno. 2010.
- [57] M. Klug et al. Control of nonlinear systems using n-fuzzy models. 2015.
- [58] B. C. Kuo. *Automatic Control Systems*. Prentice-Hall International editions, 1995.
- [59] W. H. Kwon and S. Han. *Receding horizon control: model predictive control for state models*. Springer Verlag, 2005.
- [60] J. Olshen et C. Stone L. Breiman, J. Friedman. *Classification and Regression Trees*. Wadsworth, Belmont, CA, 1984.
- [61] M. J. Rice L. Chisci, J. A. Rossiter. Stabilising predictive control: static vs dynamic programming approach. *UKACC International Conference on Control '96 (Conf. Publ. No. 427)*, 1996.
- [62] H. Lee and H. J. Kim. Robust control of a quadrotor using takagi-sugeno fuzzy model and an lmi approach. In *Control, Automation and Systems (ICCAS), 2014 14th International Conference on*, pages 370–374. IEEE, 2014.
- [63] Z. Lendek and A. Berna. Application of takagi-sugeno observers for state estimation in a quadrotor. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 7530–7535. IEEE, 2011.
- [64] Z. Lendek and T. M. Guerra. *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*. Springer, 2011.

-
- [65] A. Liapounoff. Problème général de la stabilité du mouvement. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, volume 9, pages 203–474. GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-EDITEUR; ED. PRIVAT, IMPRIMEUR-LIBRAIRE, 1907.
- [66] D. Limon. *Control predictivo de sistemas no lineales con restricciones: estabilidad y robustez*. PhD thesis, Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla, 2002.
- [67] J. Liu. On-line soft sensor for polyethylene process with multiple production grades. *Control Engineering Practice*, 15(7):769–778, 2007.
- [68] J. S Liu and Q. Geng. The h infinity robust control algorithm of the 3-dof four rotors system. In *5th International Symposium on Computational Intelligence and Design*, pages 306–309., 2012.
- [69] F. R. López-Estrada, J. C. Ponsart, D. Theilliol, C. M. Astorga-Zaragoza, and Y. M. Zhang. Robust sensor fault diagnosis and tracking controller for a UAV modelled as lpv system. In *Proc. Int. Conf. Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 1311–1316, May 2014.
- [70] D. Mayne and J. Rawlings. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789–814, 2000.
- [71] D. Q. Mayne and H. Michalska. Adaptive receding horizon control for constrained nonlinear systems. In *Proc. 32nd IEEE Conf. Decision and Control*, pages 1286–1291 vol.2, December 1993.
- [72] L. Mejias, P. Campoy, S. Saripalli, and G. S. Sukhatme. A visual servoing approach for tracking features in urban areas using an autonomous helicopter. In *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation ICRA 2006*, pages 2503–2508, May 2006.
- [73] H. Michalska and D. Q. Mayne. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(11):1623–1633, November 1993.
- [74] M. Morari. Process control theory: Reflections on the past and goals for the next decade. In *The Second Shell Process Control Worksho:: Solutions to the Shell Standard Control Problem.*, 1990.
- [75] R. M. Murray. Future directions in control, dynamics, and systems: Overview, grand challenges, and new courses. *European Journal of Control*, 9(2-3):144–158, 2003.
- [76] K. Muske, B. James, and R. Rawlings. Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, 39(2):262–287, 1993.

-
- [77] G. Nikolakopoulos and A. Kostas. Switching networked attitude control for an unmanned quadrotor. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 11:389–397., 2013.
- [78] K. Ogata. *Ingenieria de control moderno*. Pearson education, 2003.
- [79] H. Ohtake, K. Tanaka, and O. Wang. Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 10(4):333–341, 2003.
- [80] R. L. Pereira and K. H. Kienitz. Design and application of gain-scheduling control for a hover: Parametric h_∞ loop shaping approach. In *Proc. 9th Asian Control Conf. (ASCC)*, pages 1–6, June 2013.
- [81] R. E. Precup, S. Preitl, and I. Rudas. Design and experiments for a class of fuzzy controlled servo systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 13(1):22–35, 2008.
- [82] H. Qiong, L. Tian, F. Qing, and G. Qingbo. Attitude control research for quad-rotor UAV. In *Proc. Fifth Int. Conf. Intelligent Control and Information Processing*, pages 41–47, August 2014.
- [83] K. Ramírez. *Control predictivo basado en modelo no lineal por modo dual viable*. PhD thesis, Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín., 2008.
- [84] C. V. Rao and J. B. Rawlings. Steady state and constraints in model predictive control. *American Institute of Chemical Engineers (AIChE)*, 45:1266–1278, 1999.
- [85] J. A. Rossiter. *Model-based predictive control: a practical approach*. CRC press, 2003.
- [86] et al. Scokaert. Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability). *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999.
- [87] A. Serirojanakul and M. Wongsaisuwan. Optimal control of quad-rotor helicopter using state feedback lqv method. In *Proc. Telecommunications and Information Technology 2012 9th Int. Conf. Electrical Engineering/Electronics, Computer*, pages 1–4, May 2012.
- [88] I. Škrjanc, S. Blažič, and D. Matko. Model-reference fuzzy adaptive control as a framework for nonlinear system control. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 36(3):331–347, 2003.
- [89] A. Soumelidis, P. Gaspar, G. Regula, and B. Lantos. Control of an experimental mini quad-rotor UAV. In *Proc. 16th Mediterranean Conf. Control and Automation*, pages 1252–1257, June 2008.

-
- [90] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, (1):116–132, 1985.
- [91] K. Tanaka and H. Ohtake. Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, 37(4):372–378, 2001.
- [92] K. Tanaka and O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis A Linear Matrix Inequality Approach*. Wiley-Interscience, 2001.
- [93] K. Tanaka and O. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, 2004.
- [94] F. Torres, A. Rabhi, D. Lara, G. Romero, and C. Pégard. Fuzzy state feedback for attitude stabilization of quadrotor. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 13(1):2, 2016.
- [95] G. Valencia. *Efficient implementations of predictive control*. PhD thesis, The University of Sheeld, 2010.
- [96] L. X. Wang. Universal approximation by hierarchical fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 93:223–230, 1998.
- [97] O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 4(1):14–23, 1996.
- [98] K. Wesselowski and R. Fierro. A dual-mode model predictive controller for robot formations. In *Proc. 42nd IEEE Int. Conf. Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475)*, volume 4, pages 3615–3620 vol.4, December 2003.
- [99] F. Yacef, O. Bouhali, H. Khebbache, and F. Boudjema. Takagi-sugeno model for quadrotor modelling and control using nonlinear state feedback controller. *International Journal of Control Theory and Computer Modelling (IJCTCM)*, 2(3):9–24, 2012.
- [100] H. Yang, B. Jiang, and K. Zhang. Direct self-repairing control of the quadrotor helicopter based on adaptive sliding mode control technique. In *Proc. IEEE Chinese Guidance Navigation and Control Conf*, pages 1403–1408, August 2014.
- [101] M. Zuñiga. Estabilización de un quadrotor utilizando un control por retroalimentación de estados basado en el enfoque difuso de takagi-sugeno. In *XXIX Congreso de instrumentación, paginas 2863-2869.*, 2014.