

# **INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DEL SUR DE GUANAJUATO**



## **SISTEMAS DE CONTROL APLICADOS A LA TEORÍA DEL CAOS**

Opción 2: Titulación Integral – Tesis Profesional

Elaborada por:

**NORBERTO RUIZ FLORES**

Que presenta para obtener el título de:

**INGENIERO EN SISTEMAS AUTOMOTRICES**

Asesor:

**M.C. MARCO ANTONIO MARTINEZ BOCANEGRA**

# “Sistemas de Control Aplicados a la Teoría del Caos”

Elaborado por:

**Norberto Ruiz Flores**

Aprobado por ..... M.C Marco Antonio Martínez Bocanegra  
Docente de la carrera de Ingeniería en Sistemas Automotrices  
Asesor de la tesis profesional

Revisado por ..... M.C. Mariano Braulio Sánchez  
Coordinador de Ingeniería en Sistemas Automotrices  
Revisor de la tesis profesional

Revisado por ..... Dr. José Eli Eduardo Gonzáles Durán  
Coordinador de Ingeniería Electrónica  
Revisor de la tesis profesional

**LIBERACIÓN DE PROYECTO PARA LA TITULACIÓN INTEGRAL**

Uriangato, Gto. **06/marzo/2023**

Asunto: Liberación de proyecto para la titulación integral

**MI José Gabriel Aguilera González**  
**Director Académico**  
**ITSUR**  
**PRESENTE**

Por este medio informo que ha sido liberado el siguiente proyecto para la titulación integral:

Nombre de estudiante y/o egresado(a): Norberto Ruiz Flores	
Carrera: Ingeniería en Sistemas Automotrices	Núm. de control: T17120107
Nombre del proyecto: Sistemas de control aplicados a la teoría del Caos	
Producto: Tesis Profesional	

Agradezco de antemano su valioso apoyo en esta importante actividad para la formación profesional de nuestras y nuestros egresados.

**ATENTAMENTE**



**M.C. Mariano Braulio Sánchez**  
**Jefe de División de Ingeniería en Sistemas Automotrices**  
**ITSUR**



La comisión revisora ha tenido a bien aprobar la reproducción de este trabajo.

		
M.C. Marco Antonio Martínez Bocanegra Asesor del informe Técnico de Residencia Profesional	Dr. José Eli Eduardo González Durán Revisor 1	M.C. Mariano Braulio Sánchez Revisor 2

c.c.p.- Expediente



DEPARTAMENTO ACADEMICO	CLAVE:11EIT0002E ISA-EGR-EJ2023/03
------------------------	---------------------------------------

Uriangato, Guanajuato, **07/marzo/2023**

**Asunto:** Aprobación de impresión de trabajo profesional

**C. NORBERTO RUIZ FLORES**  
**PRESENTE:**

Por medio de este conducto, le comunico a usted que después de haber sido revisado su trabajo bajo la cual se derivó la Monografía Titulada:

**“Sistemas de control aplicados a la teoría del Caos”**

La comisión revisora, ha tenido a bien aprobar la impresión de este trabajo.

**ATENTAMENTE**

*“Excelencia en Educación Tecnológica”  
“Tecnología y Calidad para la Vida”*

**M.C Mariano Braulio Sánchez**

**Jefe de División de Ingeniería en Sistemas Automotrices**



Instituto Tecnológico Superior del Sur de Guanajuato  
COORDINACIÓN INGENIERIA EN SISTEMAS AUTOMOTRICES

C.c.p Unidad de Servicios Escolares  
C.c.p Coordinación de Ingeniería en Sistemas Automotrices  
C.C.p Archivo Consecutivo



## **Agradecimientos**

En primer lugar, quiero agradecer al TecNM campus CENIDET por brindarme la oportunidad y herramientas necesarias para llevar a cabo con éxito mis residencias profesionales y despertar mi interés por la investigación y desarrollo tecnológico.

Al Instituto Tecnológico Superior del Sur de Guanajuato, por abrirme sus puertas durante todos estos años, por apoyarme y guiarme durante toda mi trayectoria académica, así como conformar mi crecimiento profesional y personal.

A mi asesor de proyecto externo, por transmitirme un poco de su conocimiento y experiencia, así como el apoyo brindado para poder llevar a cabo mi trabajo dentro del Centro de Investigación y contribuir a mi crecimiento profesional y personal. Obteniendo satisfactoriamente los aprendizajes esperados y más, durante mi estancia.

Enseguida, quiero agradecer a mi asesor interno del ITSUR, así como a mi coordinador de la carrera, por autorizar y darme la oportunidad de llevar a cabo mi proceso de residencias profesionales, por sus asesorías brindadas a lo largo de este proceso, y el apoyo en general a lo largo del mismo.

A todo el centro de investigación CENIDET por darme su mano y apoyarme en todo momento.

Muy especialmente a mi familia, a mis padres y mis hermanos, que no solo estuvieron conmigo durante mi trayectoria académica, sino toda la vida, por su apoyo incondicional para seguir adelante y no desistir en el camino, por darme el buen ejemplo y por su gran sacrificio, por no abandonarme y formar lo que ahora soy.

A mis amigos y compañeros, por darme su apoyo y confianza durante esta etapa para obtener mi lugar.

Por último, a todas las personas con las que eh coincidido en esta etapa, por aprender un poco de cada una de ellas y sumarme en mi crecimiento personal.

## **Dedicatoria**

El presente trabajo tiene una especial dedicatoria a toda mi familia y las personas en general que me han ayudado a concluir esta etapa, pero muy especialmente a mis padres, por guiarme para lograr ser lo que soy ahora. A ellos que esperaron por este momento y que siempre me apoyaron con grandes sacrificios, tanto económicos como emocionales, por siempre haber estado en todo momento en mi vida, por darme el carácter suficiente para lograr mis metas; por esta razón este proyecto está dedicado a ellos.

Quiero dedicar este trabajo a las futuras generaciones, esperando que les sirva de motivación, para que logren sus metas y objetivos, que no desistan en el camino, que mantengan esa constancia que hace lograr todo lo que se propongan.

Por último, a mi yo del pasado, por seguir adelante, no rendirse y levantarse cada que fue necesario a lo largo de este camino, que no ha sido fácil, pero que se ha logrado concluir una etapa más, cada quien es responsable de sus propias acciones y cada decisión que he tomado me ha llevado al lugar donde estoy.

## **Resumen.**

El presente trabajo es una muestra de cómo se puede aplicar el control no solo en sistemas lineales, sino también en sistemas no lineales o también llamados Sistemas Caóticos. No hay que confundir el caos con la destrucción y el desorden, más bien, entenderlo como cualquier sistema donde al tener la mínima variación en sus condiciones iniciales, cambia completamente el comportamiento del mismo sistema.

Vivimos en un sistema caótico, en donde no es posible predecir el futuro, pero con el estudio del comportamiento de algunos sistemas caóticos fundamentales como la mariposa de Lorenz, el fractal de Genesio Tesi, el fractal de Lu, entre otros, y con la aplicación y adaptación de los observadores, es posible estimar como es que se comporta cada uno de estos sistemas, es decir, el observador sigue la trayectoria en el tiempo de cada uno de estos sistemas con muy poca información de los mismos, teniendo de esta forma un análisis sobre los sistemas caóticos y los observadores para poder cumplir con la recuperación de información en la transmisión y recepción de datos.

Para la metodología fue necesario entender la Teoría del Caos, así como el análisis de los observadores y como se pueden aplicar a cada tipo de sistema, además, fue necesario adentrarse con el uso de MATLAB como herramienta principal para simular y poner en práctica la aplicación de estos observadores hacia los sistemas no lineales, de esta manera se demuestra que es posible lograr la estimación de estos y por lo tanto cumplir con los objetivos propuestos.

## **Abstract.**

The present work is a sample of how control can be applied not only in linear systems, but also in non-linear systems or also called Chaotic Systems. Chaos must not be confused with destruction and disorder, rather, understand it as any system where having the slightest variation in its initial conditions completely changes the behavior of the same system.

We live in a chaotic system, where it is not possible to predict the future, but with the study of the behavior of some fundamental chaotic systems such as the Lorenz butterfly, the Genesio Tesi fractal, the Lu fractal, among others, and with the application and adaptation of the observers, it is possible to estimate how each of these systems behaves, that is, the observer follows the trajectory in time of each one of these systems with very little information about them, thus having a analysis on chaotic systems and observers in order to comply with the recovery of information in the transmission and reception of data.

For the methodology it was necessary to understand the Theory of Chaos, as well as the analysis of the observers and how they can be applied to each type of system, in addition, it was necessary to delve into the use of MATLAB as the main tool to simulate and put the application into practice. of these observers towards the non-linear systems, thus demonstrating that it is possible to achieve the estimation of these and therefore meet the proposed objectives.

## Palabras claves (keywords)

- **Control:** Se refiere a la verificación de que toda valla acorde a lo deseado, señalando posibles errores y evitarlos para llegar correctamente al objetivo.
- **Sistema Lineal:** Un sistema es lineal si cumple con el principio de superposición, dicho principio se cumple solo si se tiene aditividad y homogeneidad.
- **Caos:** Se refiere a lo impredecible
- **Modelos matemáticos:** Es la descripción matemática de las características dinámicas de un sistema.
- **Estimación:** Es proceso de encontrar una aproximación, lo que se ha de valorar con algún propósito es utilizable incluso si los datos de entrada pueden estar incompletos, incierto, o inestables.
- **Análisis:** Proceso detallado de una cosa para conocer sus características o cualidades, o su estado, y extraer conclusiones, separando o considerando por separado las partes que lo conforman.

## Índice general

Agradecimientos.....	V
Dedicatoria .....	VI
Resumen.....	VII
Abstract.....	VIII
Palabras claves (keywords).....	IX
Índice general.....	X
Índice de figuras.....	XII
Capítulo 1.....	1
Introducción.....	1
Capítulo 2.....	2
Marco teórico (Antecedentes).....	2
Teoría del Caos .....	2
Sistema Dinámico.....	4
Análisis de estabilidad para Sistemas Lipschitz.....	7
Análisis de estabilidad para Observador Adaptable de Besancon.....	10
Análisis de estabilidad para Observador de Estado Extendido.....	14
Sistemas osciladores Caóticos Utilizados.....	18
Sistema dinámico no lineal de Rössler.....	20
Sistema dinámico no lineal Genesio-Tesi.....	23
Sistema dinámico no lineal de Lu .....	24
Capítulo 3.....	27
Planteamiento del problema .....	27
Identificación.....	27
Justificación.....	27
Restricciones y Alcances.....	28
Capítulo 4.....	29
Objetivos.....	29
Objetivos generales.....	29

Objetivos específicos.....	29
Capítulo 5.....	30
Metodología.....	30
Estimación utilizando observadores Lipschitz.....	30
Estimación utilizando observadores de alta ganancia Besancon.....	34
Estimación utilizando observadores de estado extendido.....	35
Capítulo 6.....	38
Resultados.....	38
Sincronización de Sistema Caótico de Lorenz.....	38
Sincronización de Sistema Caótico de Lu.....	41
Capítulo 7.....	46
Análisis de Resultados.....	46
Sincronización y estimación de mensaje de Sistema Caótico de Rössler.....	46
Sincronización y estimación de mensaje de Sistema Caótico de Genesio-Tesi.....	51
Capítulo 8.....	56
Conclusiones y trabajo a futuro.....	56
Referencias bibliográficas.....	58
Anexos.....	60
MATLAB.....	60
Estabilidad, según el teorema de Lyapunov.....	62

## Índice de figuras

Figura 1: Diagrama de bloques de un observador general .....	6
Figura 2: Teorema de observador para Sistemas Lipschitz .....	7
Figura 3: Teorema 4.1 para observador adaptable Besancon .....	10
Figura 4: Teorema 4.2 para observador adaptable Besancon .....	11
Figura 5: Comportamiento de sistema caótico de Lorenz por planos.....	19
Figura 6: Fractal de Lorenz .....	20
Figura 7: Comportamiento de sistema caótico de Rössler por planos .....	21
Figura 8: Fractal de Rössler .....	22
Figura 9: Comportamiento de sistema caótico de Genesio por planos .....	23
Figura 10: Fractal de Genesio .....	24
Figura 11: Comportamiento de sistema caótico de Lu por estados.....	25
Figura 12: Fractal de Lu, vista A.....	26
Figura 13: Fractal de Lu, vista B.....	26
Figura 14: Código en MATLAB del cálculo de L para el sistema de Lorenz.....	31
Figura 15: Código en MATLAB del cálculo de L para el sistema de Lu.....	33
Figura 16: Function del observador de Besancon en Simulink.....	35
Figura 17: Funcion del observador de Estado Extendido en Simulink .....	37
Figura 18: Estimación de estado UNO .....	38
Figura 19: Estimación de estado DOS .....	39
Figura 20: Estimación de estado TRES .....	39
Figura 21: Sincronización del Sistema Caótico de Lorenz con un Observador Lipschitz .....	40
Figura 22: Diagrama de bloques Sistema Original – Observador .....	41
Figura 23: Estimación de estado UNO .....	42
Figura 24: Estimación de estado DOS .....	42
Figura 25. Estimación de estado TRES .....	43
Figura 26: Estimación de estado CUATRO .....	43
Figura 27: (a) Considerando el orden de estados $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ .....	44

Figura 28: Diagrama de bloques Sistema Original – Observador .....	45
Figura 29: (b) Considerando el orden de estados $x_1$ , $x_4$ , $x_3$ .....	45
Figura 30: Estimación de estado UNO .....	46
Figura 31: Estimación de estado DOS .....	47
Figura 32: Estimación de estado TRES .....	47
Figura 33: Sincronización del Sistema Caótico de Rössler con un Observador de Estado Extendido .....	48
Figura 34: Diagrama de bloques Sistema Original – Observador .....	49
Figura 35: Estimación del mensaje $m$ con Observador de Estado Extendido .....	50
Figura 36: Estimación de estado UNO .....	51
Figura 37: Estimación de estado DOS .....	52
Figura 38: Estimación de estado TRES .....	52
Figura 39: Sincronización del Sistema Caótico de Genesio con un Observador de Alta Ganancia de Besancon .....	53
Figura 40: Diagrama de bloques Sistema Original – Observador .....	54
Figura 41: Estimación del mensaje $m$ con de Alta Ganancia Besancon .....	55
Figura 42: Logo de MATLAB .....	60



## **Capítulo 1.**

### **Introducción.**

Los sistemas dinámicos son parte de la vida. Con el origen de la Teoría del Caos, hace apenas unas tres décadas y con el descubrimiento de la sincronización del caos, se han formulado una gran cantidad de cifradores que de una u otra manera, y en general con poco rigor criptoanalítico, explotan las buenas propiedades de confusión y difusión de las aplicaciones caóticas [1]. Por ello, las señales resultantes de sistemas caóticos son impredecibles en la práctica a mediano y largo plazo, debido a la sensibilidad de las condiciones iniciales y a sus propiedades estadísticas aleatorias a pesar de ser generadas por algoritmos deterministas. En cuanto a los sistemas de seguridad de la información resulta útil trabajar con secuencias binarias que puedan aplicarse a procesos que ofrezcan confidencialidad, privacidad, seguridad, autenticidad, etc., donde además estas secuencias mencionadas deben cumplir con requisitos fundamentales, tales como: aleatoriedad e impredecibilidad. Es aquí donde entra el estudio del comportamiento de sistemas dinámicos no lineales ya que ambos poseen un comportamiento caótico y por lo tanto tienen una buena aceptación en cuanto a las propiedades estadísticas que contienen. Los sistemas caóticos tienen una gran relevancia debido a que son sistemas dinámicos muy sensibles a cambios en las condiciones iniciales. A finales del siglo XIX, Henri Poincaré fue el primero en observar la existencia de caos al estudiar la estabilidad del sistema solar. Desde entonces importantes avances se han realizado en la teoría del caos y actualmente sigue siendo estudiada por sus aplicaciones en control, ingeniería biomédica, comunicación segura, optimización, cuántica y criptografía, entre otras [7].

## **Capítulo 2**

### **Marco teórico (Antecedentes).**

#### **Teoría del Caos**

##### ***EFEECTO MARIPOSA***

Recurramos nuevamente a Prigogine, quien nos explica que: “los sistemas caóticos son un ejemplo extremo de sistema inestable: en ellos las trayectorias correspondientes a condiciones iniciales tan vecinas como se quiera, divergen con el tiempo. Entonces hablamos de sensibilidad a las condiciones iniciales, y lo ilustramos con la conocida parábola del “efecto mariposa”, que dice que el aleteo de una mariposa en la cuenca amazónica puede afectar el clima de Estados Unidos. Definición La Teoría del Caos dice que el comportamiento de un sistema se puede predecir en el corto plazo con una alta probabilidad de ocurrencia. Y que en el mediano y largo plazo su dirección es errática, porque depende de pequeños cambios en múltiples condiciones iniciales que cambian su estado en forma intrínsecamente aleatoria. El corto plazo es una medición de tiempo asociada a las características particulares de cada sistema. Alta probabilidad de ocurrencia significa 90, 95, 99 % o mayor porcentaje de cumplir la predicción, no hay certeza. . . y no la hay en ninguna acción humana. Por condiciones iniciales, nos referimos a la interacción con el medio, esencialmente dinámico y, precisamente, el caos surge de creer que todo seguirá igual. Sin embargo, el comportamiento de esas condiciones en la frontera del sistema es intrínsecamente aleatorio. El primer trabajo relacionado con los sistemas dinámicos fue presentado por el matemático francés Poincaré [2], quien con el estudio del movimiento planetario inventó nuevos métodos topológicos para estudiar soluciones para ciertas ecuaciones diferenciales; en lugar de usar los métodos basados en series, desarrolló el concepto de funciones auto mórnicas, para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes algebraicos, y de esta manera descubrió que las ecuaciones diferenciales admitían soluciones de una complejidad 2 inimaginable hasta ese momento.

Con este trabajo se reveló por primera vez que las ecuaciones diferenciales que describen fenómenos naturales pueden tener soluciones que se comportan en forma “caótica”. Sin embargo, este trabajo tuvo poco interés; a pesar de ello podemos decir que representa el origen de una nueva era para el estudio de las ecuaciones diferenciales.

En 1963 Lorenz [3] publicó un modelo matemático para describir la forma en la que el aire se mueve en la atmósfera terrestre. Observó que, si ocurrían alteraciones mínimas en los valores de las variables iniciales de su modelo primitivo, resultaban patrones climatológicos ampliamente divergentes.

Esta sensible dependencia de las condiciones iniciales fue conocida después como el “Efecto Mariposa”; aun cuando las fluctuaciones en las condiciones iniciales o intermedias de un proceso sean muy pequeñas, casi imperceptibles, pueden ser lo suficientemente poderosas como para provocar grandes alteraciones de los estados finales. Con este hecho se inicia el estudio moderno de la dinámica caótica. También dedujo algunas de las propiedades generales del caos como son: la dependencia y sensibilidad a las condiciones iniciales, la existencia de órbitas periódicas densas, los puntos periódicos, el acotamiento de trayectorias y la no linealidad, entre otras.

Sin embargo, para los mapeos denominados caóticos, se consideran tres propiedades importantes:

- a) Dependencia sensitiva.
- b) Transitividad (órbita densa).
- c) Conjunto denso de puntos periódicos.

Las propiedades a y b corresponden a un comportamiento irregular e impredecible, de aquí que concuerdan con las ideas intuitivas del caos; la propiedad c, sin embargo, parece discrepar de las dos propiedades anteriores, al interpretarse como un comportamiento periódico, regular y predecible. No obstante, estos puntos periódicos son inestables, lo que significa que tan pronto como una órbita se acerca a un punto periódico, esta se empujará lejos en alguna otra parte.

Por esta razón, en términos prácticos, el conjunto denso de órbitas periódicas no implica un comportamiento ordenado. Basándose en estas tres propiedades Devaney [1], planteó en 1989 la definición de Caos como se indica;

*Sea  $V$  un intervalo. Decimos que:  $f : V \rightarrow V$  es caótica en  $V$  sí:*

- a)  *$f$  tiene dependencia sensitiva en las condiciones iniciales.*
- b)  *$f$  es transitiva*
- c) *Los puntos periódicos son densos en  $V$ .*

Las tres propiedades se demuestran cuando se presentan una gran cantidad de iteraciones, dando origen al Teorema:

*“si se tiene una función  $f$ , tal que:  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$  para muchas iteraciones  $f$  es caótica en  $[0,1]$ ”*

### **Sistema Dinámico**

Formalmente, un sistema puede ser definido como un conjunto de elementos interactuantes, es decir, un sistema es una cantidad de materia o región seleccionado del espacio para su estudio. La masa o el espacio afuera del sistema son llamados los alrededores del sistema mientras que la superficie real o imaginaria que separa al sistema de sus alrededores es conocida como frontera, esta puede ser fija o móvil y de un grosor mayor o igual a cero [17].

Dependiendo de la característica que se valla a considerar, los sistemas pueden clasificarse de diversas formas, una de estas clasificaciones los divide en abiertos si hay transferencia de masa y energía con los alrededores, cerrados si solo existe transferencia de energía y aislados si no se tiene transferencia de energía ni masa con los alrededores [18]. Otra clasificación los divide en sistemas lineales y no lineales, dependiendo si estan sujetos al principio de superposición. Y finalmente también se pueden clasificar en autónomos si no dependen explícitamente de la variable independiente tiempo  $t$ , y no autónomos cuando el sistema depende explícitamente del  $t$ .

### Espacio de estados

Se le llama espacio de estados del sistema a algún conjunto  $X$  donde todos los posibles estados de un sistema son caracterizados por los puntos de este conjunto. De hecho, la especificación de un punto  $x \in X$  debe ser suficiente no solo para describir la actual posición del sistema, sino también para determinar su evolución. El espacio de estados siguiendo la mecánica clásica es común llamarlo espacio fase [15]. Gracias a la estructura del espacio de estados permite la comparación entre diferentes estados. Mas específicamente una distancia  $\rho$  entre dos estados es definida haciendo estos conjuntos espacios métricos.

La norma Euclidiana puede ser usada para medir la distancia entre dos estados parametrizados por los puntos  $x_1, x_2 \in \mathcal{R}^n$  [16]. A partir de las variables de estado se puede formar un espacio  $n$ -dimensional cuyos ejes de coordenadas corresponden a las  $n$  variables de estado. De esta forma, un punto en el espacio de estado representa el valor del estado del sistema en ese instante. Para representar el estado del sistema se utilizará como herramienta de trabajo las matrices y los vectores, lo cual, es muy apropiado para expresar cálculos y operaciones en términos computacionales.

### Observadores

#### Definición de Observador

Los observadores de estados, son algoritmos matemáticos que reconstruyen la evolución en el tiempo del vector de estados real de un sistema, sobre la base de mediciones relacionadas las cuales son más fácilmente accesibles, y empleando un modelo matemático del sistema de interés [13] Un observador es un dispositivo u algoritmo computacional que estima u observa las variables de un sistema, basado en el conocimiento del modelo, a partir de las entradas y las salidas disponibles [12]. Entre sus diferentes aplicaciones de un observador se encuentra el monitoreo de sistemas, la detección de fallas, la estimación de parámetros, etc. En general, en la figura 1, se muestra el diagrama de bloques de un observador en donde  $\sigma$  representa el observador del sistema  $\Sigma$ .

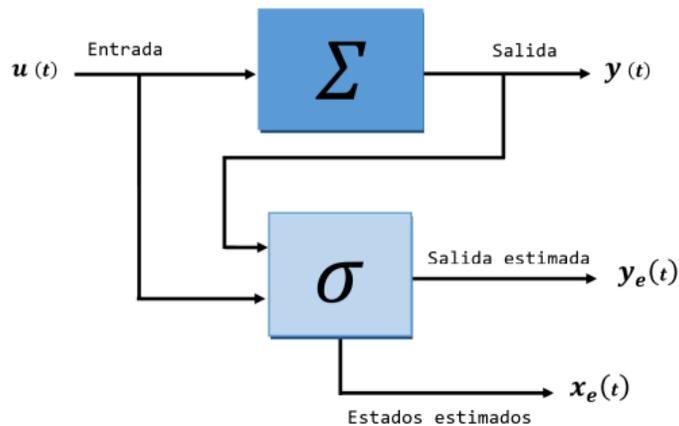


Figura 1: Diagrama de bloques de un observador general

En simples palabras, los observadores son programas de computadora que, a partir de las mediciones obtenidas por varios sensores físicos, realizan una estimación de las variables del proceso que no se pueden medir en tiempo real. El programa reproduce el sistema observado dándole la información de cuáles son los estímulos (entradas) que recibe el proceso real. Una segunda fuente de información útil para el observador son los datos que recibe del monitoreo de los resultados del sistema (salidas).

## Análisis de estabilidad para Sistemas Lipschitz

Teniendo el siguiente teorema.

### Teorema: Observador para Sistemas Lipschitz

Para el observador de estado de orden completo propuesto, la estimación  $\hat{x}(t)$  convergerá asintóticamente a  $x(t)$  siempre que exista una matriz definida positiva  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y un escalar positivo  $\delta$  tal que se cumpla la siguiente LMI:

$$\begin{bmatrix} A^T Q + Q A - G C - C^T G^T + \gamma^2 \delta I_n & Q \\ Q & -\delta I_n \end{bmatrix} < 0$$

donde la matriz de ganancia del observador  $L$  viene dada por  $L = Q^{-1}G$

Figura 2: Teorema de observador para Sistemas Lipschitz

Dado un sistema no lineal como:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \phi(u, x) \\ \dot{y} = Cx \end{cases} \quad (1)$$

Tomando en cuenta que el observador adaptable tipo Lipschitz propuesto para el sistema anterior es de la forma:

$$\sigma : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \phi(u, \hat{x}) + L(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{y}} = C\hat{x} \end{cases} \quad (2)$$

Considerando el error de estimación de nuestro sistema como:

$$e = x - \hat{x} \quad (3)$$

al derivar se tiene:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \quad (4)$$

Para demostrar que (4) sea 0 se consideran las condiciones según la teoría de control de Lyapunov.

$$\begin{aligned} V_{(0)} &= 0 \\ V_{(t)} &> 0 \\ \dot{V}_{(t)} &< 0 \end{aligned}$$

Se propone :  $V_{(e)} = e^T Q e$  y al derivar se obtiene:

$$\dot{V}_{(e)} = e^T Q \dot{e} + \dot{e}^T Q e \quad (5)$$

Considerando que la matriz  $Q$  sea simétrica  $Q = Q^T > 0$   
Resolviendo:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} &= Ax + Bu + \phi(u, x) - [A\hat{x} + Bu + \phi(u, \hat{x}) + L(y - \hat{y})] \\ \dot{e} &= Ax + \phi(u, x) - A\hat{x} - \phi(u, \hat{x}) - L(Cx - C\hat{x})\end{aligned}$$

Factorizando términos tenemos:

$$\dot{e} = A(x - \hat{x}) + \phi(u, x) + \phi(u, \hat{x}) - LC(x, \hat{x}) \quad (6)$$

Sustituyendo (3) en (6)

$$\begin{aligned}\dot{e} &= Ae + \phi(u, x) - \phi(u, \hat{x}) - LCe \\ \dot{e} &= (A - LC)e + \phi(u, x) - \phi(u, \hat{x})\end{aligned} \quad (7)$$

Sustituyendo (7) en (5) se propone la función de Lyapunov y se obtiene:

$$\dot{V}_{(e)} = e^T Q [(A - LC)e + \phi(u, x) - \phi(u, \hat{x})] + [(A - LC)e + \phi(u, x) - \phi(u, \hat{x})]^T Q e \quad (8)$$

Por motivos de comodidad considerar  $\lambda = \phi(u, x) - \phi(u, \hat{x})$ , resolviendo:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(e)} &= e^T [(QA - QLC)e + Q\lambda] + [(A^T Q - C^T L^T Q)e^T + \lambda^T Q]e \\ \dot{V}_{(e)} &= e^T (QA - QLC)e + e^T Q\lambda + e^T (A^T Q - C^T L^T Q)e + \lambda^T Qe \\ \dot{V}_{(e)} &= e^T (QA - QLC + A^T Q - C^T L^T Q)e + e^T Q\lambda + \lambda^T Qe\end{aligned} \quad (9)$$

Por motivos de comodidad  $A_o = (QA - QLC + A^T Q - C^T L^T Q)$ , y considerando las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\lambda^T \lambda &\leq \gamma^2 e^T e \\ \lambda^T \lambda - \gamma^2 e^T e &\leq 0 \quad (-1) \\ \gamma^2 e^T e - \delta \lambda^T \lambda &\geq 0\end{aligned}$$

La ecuación pasa de ser una igualdad a convertirse en:

$$\dot{V}_{(e)} \leq e^T A_o e + e^T Q \lambda + \lambda^T Q e + \gamma^2 \delta e^T e - \delta \lambda^T \lambda \quad (10)$$

$$\dot{V}_{(e)} = [e^T \quad \lambda^T] \begin{bmatrix} A_o + \gamma^2 \delta I_n & Q \\ Q & -\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (11)$$

Recordando que  $A_o = QA - QLC + A^T Q - C^T L^T Q$

Para resolver el sistema como LMI se considera  $R = R^T = QL$

Se obtiene:

$$A_o = QA - RC + A^T Q - C^T R^T \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en (13) y considerando:

$$\zeta = [e \quad \lambda]^T$$

Obtenemos:

$$\dot{V}_{(\zeta)} = \zeta^T \begin{bmatrix} QA - RC + A^T Q - C^T R^T + \gamma^2 \delta I_n & Q \\ Q & -\delta I_n \end{bmatrix} \zeta \quad (13)$$

Donde Gamma será la constante de Lipschitz que será el valor máximo según la norma infinito siguiente para cada uno de los sistemas caóticos utilizados en este proyecto de investigación.

$$\left\| \frac{\partial \phi(u,x)}{\partial x} \right\|_{1,\infty} \quad (14)$$

### Análisis de estabilidad para Observador Adaptable de Besancon

Teniendo el sistema general par este tipo de observadores:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(u, y)x + B(u, y) + \Psi(u, y)\theta \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{15}$$

#### Teorema. 4.1 [19] y [20]

Para cualquier  $u \in U$  existe  $\lambda_0 > 0$  tal que para cualquier  $\lambda \geq \lambda_0$ :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A(u, y)\hat{x} - S^{-1}C^T(C\hat{x} - y) + B(u, y) + \Psi(u, y)\theta \\ \dot{S} &= -\lambda S - A(u, y)^T S - SA(u, y) + C^T C, \quad S(0) > 0,\end{aligned}\tag{16}$$

Es un observador de estado asintótico para el sistema (15) y  $(\hat{x} - x)S(\hat{x} - x)$ , es una función de Lyapunov para el sistema de error de estimación.

Se tiene un cambio preliminar de coordenadas, que  $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ , que:  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

Con  $A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , que  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$  y que  $\psi$  es  $(n \times q)$  una matriz con  $\Psi$  con las primeras filas  $p$  y con las columnas  $\Psi_1[1], \dots, \Psi_1[q]$  y  $\Psi_2$  con las últimas  $n-p$  con columnas  $\Psi_2[1], \dots, \Psi_2[q]$ .

Considerando la posición:  $S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix}$

Con  $S_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  de la matriz de ganancia  $S$  de 16.

Dado el sistema:  $\dot{\zeta} = (A_{22} + S_3^{-1}S_2^T A_{12})\zeta$  es asintóticamente estable, entonces nosotros tendremos:

Lema 4.1. La transformación

$$n_1 = y$$

$$n_2 = z + \sum_{i=1}^q \zeta[i]\theta_i = z + \zeta\theta,\tag{17}$$

Donde  $\zeta$  es un  $(n-p) \times q$  matriz con  $\zeta[i]$  con columnas en  $\mathbb{R}^{n-p}$ , obteniendo como solución las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\zeta}[i] = (A_{22} + S_3^{-1}S_2^T A_{12})\zeta[i] - S_3^{-1}S_2^T \Psi_1[i](u, y) - \Psi_2[i](u, y), \quad i = 1, \dots, q\tag{18}$$

Es una transformación filtrada para cualquier entrada acotada/sistema de salida acotada (15), en el sentido de que (18) es en ese caso un filtro estable. la transformación es claramente invertible *w.r.t.x*. Esta transformación convierte (15) en lo siguiente forma:

$$\dot{\eta} = A(u, y)\eta + B(u, y) + \begin{bmatrix} Id_p \\ -S_3^{-1}S_2^T \end{bmatrix} (A_{12}\zeta + \Psi_1(u, y))\theta, \quad y = C\eta = \eta_1\tag{19}$$

La estabilidad de (18) acotado por  $(u, y)$ , el resultado de eso es:  $\dot{\zeta} = (A_{22} + S_3^{-1}S_2^T A_{12})\zeta$  mientras que el nuevo (19) puede obtenerse por calculo directo. Checando que (19) comple con la proposicion  $V(e) = e^T S e$  y  $k(e_y, t) = -S^{-1}C^T e_y$

De echo se puede obtener por la transformacion adicional  $\zeta = \eta_2 + S_3^{-1}S_2^T \eta_1$  del sistema (19), como se comprueb a continuacion (donde los argumentos  $(u, y)$  de  $A, B, \Psi$  son omitidos):

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_{12}\eta_2 + (-A_{12}\zeta + \Psi_1)\theta + A_{11}y + B_1 \\ &= A_{12}\zeta + A_{11} + B_1 - A_{12}S_3^{-1}S_2^T y + (-A_{12}\zeta + \Psi_1)\theta, \\ \dot{\zeta} &= (A_{22} + S_3^{-1}S_2^T A_{12})\zeta + \frac{d}{dt}(S_3^{-1} - S_2^T)\eta_1 + S_3^{-1}S_2^T (B_1 + A_{11}y) \\ &\quad + A_{21}y + B_2 - (A_{22} + S_3^{-1}S_2^T A_{12})S_3^{-1}S_2^T y \\ &= (A_{22} + S_3^{-1}S_2^T A_{12})\zeta + \Gamma_2(u, y, t)\end{aligned}\tag{20}$$

Figura 3: Teorema 4.1 para observador adaptable Besancon

**Teorema. 4.2**

Un sistema no lineal de salida única observable en el sentido de la condición de rango en  $x_0$  (el espacio de todos los diferenciales de elementos del subespacio de observabilidad en  $x_0$  es de dimensión  $n$ ) puede ser transformado en (15) con  $A(u, y) = A(u)$  por algunos cambios de coordenadas de estado definidas localmente alrededor de  $x_0$  si y solo si existe un campo vectorial  $X$  analítico alrededor de  $x_0$  satisfactorio.

- (i)  $L_X(h) = 1$ ,
- (ii)  $\dim \Omega = n - 1$ ,
- (iii)  $\forall \omega \in \Omega; di_X \omega = 0$ ,
- (iv)  $i_X \omega_1 \wedge \dots \wedge i_X \omega_{n-1} \wedge dh|_{x_0} \neq 0$  para cada base  $(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$  de  $\Omega$
- (v)  $\forall \omega \in \Omega di_{i_X} \omega \wedge dh = 0$ ,

Y la transformación es global si y solo si el vector campos  $\mu_j$  definido por  $j = 1$  a  $n - 1$  estan completos:

$$dh \cdot \mu_j = 0, \quad i_X \omega_k \mu_j = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (21)$$

Para cualquier base  $(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$  de  $\Omega$

**Figura 4: Teorema 4.2 para observador adaptable Besancon**

Teniendo el siguiente sistema:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{y} = \alpha(y, \zeta, u, t) + \beta(y, \zeta, u, t)\theta \\ \dot{\zeta} = z(u, \zeta, u, t) \end{cases} \quad (22)$$

Proponiendo el observador Besancon.

$$\sigma : \begin{cases} \dot{\hat{y}} = \alpha(y, \hat{\zeta}, u, t) + \beta(y, \hat{\zeta}, u, t)\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\zeta}} = z(u, \hat{\zeta}, u, t) \\ \dot{\hat{\theta}} = -K_\theta \beta^T(y, \hat{\zeta}, u, t)(\hat{y} - y)^T \end{cases} \quad (23)$$

Definición de errores:

$$e_y = \hat{y} - y \quad e_\zeta = \hat{\zeta} - \zeta \quad e_\theta = \hat{\theta} - \theta \quad (24)$$

Por tanto:

$$\dot{e}_y = \dot{\hat{y}} - \dot{y} \quad \dot{e}_\zeta = \dot{\hat{\zeta}} - \dot{\zeta} \quad \dot{e}_\theta = \dot{\hat{\theta}} - \dot{\theta} \quad (25)$$

Resolviendo  $\dot{e}_y$ .

$$\begin{aligned} \dot{e}_y &= \alpha(y, \hat{\zeta}, u, t) + \beta(y, \hat{\zeta}, u, t)\hat{\theta} - k_y(\hat{y} - y) - [\alpha(y, \zeta, u, t) + \beta(y, \zeta, u, t)\theta] \\ \dot{e}_y &= \alpha(y, \hat{\zeta}, u, t) + \beta(y, \hat{\zeta}, u, t)\hat{\theta} - k_y(\hat{y} - y) - \alpha(y, \zeta, u, t) - \beta(y, \zeta, u, t)\theta \end{aligned}$$

Agrupando términos y sumando  $\beta(y, \hat{\zeta}, u, t)e_\theta$  se obtiene:

$$\dot{e}_y = \alpha(y, \hat{\zeta}, u, t) - \alpha(y, \zeta, u, t) + [\beta(y, \hat{\zeta}, u, t)\hat{\theta} - \beta(y, \zeta, u, t)\theta] + \beta(y, \hat{\zeta}, u, t)e_\theta + k_y e_y \quad (26)$$

Resolviendo  $\dot{e}_\zeta$

$$\dot{e}_\zeta = z(y, \hat{\zeta}, u, t) - z(y, \zeta, u, t) \quad (27)$$

Resolviendo  $\dot{e}_\theta$

$$\dot{e}_\theta = -k_\theta \beta^T(y, \zeta, \hat{u}, t)e_y^T \quad (28)$$

Proponiendo la función de Lyapunov

$$V_e(t, e_y, e_\zeta, e_\theta) = \frac{\epsilon}{2} e_y^T e_y + V(t, e_\zeta) + \frac{\epsilon}{2k_\theta} e_\theta^T(t) e_\theta \quad (29)$$

Derivando (29) se obtiene:

$$\dot{V}_e(t, e_y, e_\zeta, e_\theta) \leq \frac{\epsilon}{2} (e_y^T \dot{e}_y + \dot{e}_y^T e_y) + \dot{V}(t, e_\zeta) + \frac{\epsilon}{2k_\theta} (e_\theta^T \dot{e}_\theta + \dot{e}_\theta^T e_\theta) \quad (30)$$

Sustituyendo las ecuaciones (26), (27), (28) en (30)

$$\begin{aligned} \dot{V}_e(t, e) \leq & \frac{\epsilon}{2} [e_y^T (\alpha(y, \hat{\zeta}, u, t) - \alpha(y, \zeta, u, t)) + [\beta(y, \hat{\zeta}, u, t) - \beta(y, \zeta, u, t)\theta] + [\beta(y, \hat{\zeta}, u, t)e_\theta - k_y e_y] \\ & + [\alpha^T(y, \hat{\zeta}, u, t) - \alpha^T(y, \zeta, u, t) + \theta^T (\beta^T(y, \hat{\zeta}, u, t) - \beta^T(y, \zeta, u, t))] + e_\theta^T \beta^T(y, \hat{\zeta}, u, t) - e_y^T k_y^T] \\ & + \dot{V}(t, e_\zeta) + \frac{\epsilon}{2k_\theta} [-e_\theta^T k_\theta \beta^T(y, \hat{\zeta}, u, t)e_y^T - e_y k_\theta \beta(y, \hat{\zeta}, u, t)e_\theta] \end{aligned} \quad (31)$$

Considerando las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} & \|\alpha(y, \hat{\zeta}, u, t) - \alpha(y, \zeta, u, t)\| \leq \gamma_a \sqrt{k(e_\zeta)} \\ & \|\beta(y, \hat{\zeta}, u, t) - \beta(y, \zeta, u, t)\| \leq \gamma_\beta \sqrt{k(e_\zeta)} \\ \dot{V}(t, e_\zeta) \leq & \frac{\partial V}{\partial t}(e, e_\zeta) + \frac{\partial V}{\partial e_\zeta} [z(y, \hat{\zeta}, u, t) - z(y, \zeta, u, t)] \leq -k(e_\zeta) \end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en (32)

$$\begin{aligned} \dot{V}_e(t, e_y, e_\theta, e_\zeta) \leq & \frac{\epsilon}{2} [e_y^T [\gamma_\alpha \sqrt{k(e_\zeta)} + e_y^T \gamma_\beta \sqrt{k(e_\zeta)} \theta(t) + e_y^T \beta(y, \hat{\zeta}, u, t) e_\theta - e_y^T k_y e_y] \\ & [\gamma_\alpha \sqrt{k(e_\zeta)} + \theta^T \gamma_\beta \sqrt{k(e_\zeta)} e_y + e_\theta^T \beta(y, \hat{\zeta}, u, t) e_y - e_y^T k_y^T e_y] - k(e_\zeta(t))] \\ & + \frac{\epsilon}{2k_\theta} [-e_\theta^T k_\theta \beta^T(y, \hat{\zeta}, u, t) e_y^T - e_y k_\theta \beta(y, \hat{\zeta}, u, t) e_\theta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, e_y, e_\theta, e_\zeta) \leq & \frac{\epsilon}{2} [e_y \gamma_\alpha \sqrt{k(e_\zeta)} + e_y \gamma_\beta \sqrt{k(e_\zeta)} \theta + e_y^T \beta(y, \zeta, u, t) e_\theta - k_y \|e_y\|^2] \\ & - k(e_\zeta) + \frac{\epsilon}{2k_\theta} [e_y^T \beta(y, \hat{\zeta}, u, t) e_\theta] \end{aligned}$$

$$\dot{V}(t, e_y, e_\theta, e_\zeta) \leq \epsilon [\gamma_\alpha + \gamma_\beta] \sqrt{k(e_\zeta)} - \epsilon k_y \|e_y\|^2 - k(e_\zeta) \quad (32)$$

Si  $\epsilon > 0$   $k > 0$   $\gamma_\alpha > 0$   $\gamma_\beta > 0$   $k_y > 0$   $k_\theta > 0$ , se cumple la desigualdad.

La ecuación (25) se parece a una ecuación cuadrática, así que se propone:

$$\dot{V}_e \leq -e_{y\zeta}^T Q e_{y\zeta} \quad e_{y\zeta} = \left[ \frac{\|e_y\|}{\sqrt{k(e_y)}} \right] \quad (33)$$

### Análisis de estabilidad para Observador de Estado Extendido

Se considera un sistema no lineal como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = A(u, x)x + \phi(u, x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (34)$$

En donde el observador que se propone para el sistema anterior tiene la siguiente forma:

$$\sigma : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(u, \hat{x})\hat{x} + \phi(u, \hat{x}) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}(t)C^T(C\hat{x} - Cx) \\ \dot{S} = \theta[-S - A(u, \hat{x})^T S - SA(u, \hat{x}) + C^T C] \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (35)$$

Definiendo el error:

$$\tilde{x} = \hat{x} - x \quad \therefore \quad \dot{\tilde{x}} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} \quad (36)$$

Sustituyendo (34) y (35) en (36), se obtiene:

$$\dot{\tilde{x}} = A(u, \hat{x})\hat{x} + \phi(u, \hat{x}) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}(t)C^T(C\hat{x} - Cx) - A(u, x)x - \phi(u, x) \quad (37)$$

$$\dot{\tilde{x}} = A(u, \hat{x})\hat{x} - A(u, x)x + \phi(u, \hat{x}) - \phi(u, x) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}(t)C^T C(\hat{x} - x)$$

$$\dot{\tilde{x}} - A(u, \hat{x})x = A(u, \hat{x})\hat{x} - A(u, x)x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^T C\tilde{x} - A(u, \hat{x})x$$

$$\dot{\tilde{x}} = A(u, \hat{x})(\hat{x} - x) + \tilde{A}(u, \hat{x}, x)x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^T C\tilde{x}$$

$$\dot{\tilde{x}} = A(u, \hat{x})\tilde{x} - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^T C\tilde{x} + \tilde{A}(u, \hat{x}, x)x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x)$$

$$\dot{\tilde{x}} = A(u, \hat{x})\tilde{x} - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}(t)C^T C\tilde{x} + \tilde{A}(u, \hat{x}, x)x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x)$$

$$\dot{\tilde{x}} = [A(u, \hat{x}) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}(t)C^T C]\tilde{x} + \tilde{A}(u, \hat{x}, x)x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x) \quad (38)$$

Para probar la convergencia exponencial se define  $\tilde{x} = \Delta_\theta \bar{x}$  en donde  $\bar{x} = x$  y recordando las propiedades de;  $\Delta_\theta A(u, x) \Delta_\theta^{-1} = \theta A(u, x)$  y  $C \Delta_\theta^{-1} = C$

Para esto se parte de la ecuacion (38) y se sustituye  $\Delta_\theta^{-1} \bar{x} = \tilde{x}$   $\Delta_\theta^{-1} \dot{\bar{x}} = \dot{\tilde{x}}$

$$\Delta_\theta^{-1} \dot{\bar{x}} = [A(u, \hat{x}) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T C] \Delta_\theta^{-1} \bar{x} + \tilde{A}(u, \hat{x}, x) x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x)$$

$$\Delta_\theta^{-1} \dot{\bar{x}} = A(u, \hat{x}) \Delta_\theta^{-1} \bar{x} - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T C \Delta_\theta^{-1} \bar{x} + \tilde{A}(u, \hat{x}, x) x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x) \quad (39)$$

Premultiplicando ambas por  $\Delta_\theta$  para conseguir dejar solo a  $\dot{\tilde{x}}$  se obtiene:

$$\Delta_\theta \Delta_\theta^{-1} \dot{\tilde{x}} = \Delta_\theta [A(u, \hat{x}) \Delta_\theta^{-1} \bar{x} - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T C \Delta_\theta^{-1} \bar{x} + \tilde{A}(u, \hat{x}, x) x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x)]$$

$$\dot{\tilde{x}} = \Delta_\theta A(u, \hat{x}) \Delta_\theta^{-1} \bar{x} - \Delta_\theta \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T C \Delta_\theta^{-1} \bar{x} + \Delta_\theta [\tilde{A}(u, \hat{x}, x) x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x)]$$

$$\dot{\tilde{x}} = \theta A(u, \hat{x}) \bar{x} - \theta S^{-1} C^T C \bar{x} + \Delta_\theta [\tilde{A}(u, \hat{x}, x) x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x)]$$

$$\dot{\tilde{x}} = \theta [A(u, \hat{x}) - S^{-1} C^T C] \bar{x} + \Delta_\theta [\tilde{A}(u, \hat{x}, x) x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x)] \quad (40)$$

Se propone la siguiente funcion cuadratica de Lyapunov:

$$V(\bar{x}, t) = \bar{x}^T S \bar{x} \quad (41)$$

Se obtiene su derivada :

$$\dot{V}(\bar{x}, t) = 2\bar{x}^T S \dot{\bar{x}} + \bar{x}^T \dot{S} \bar{x} \quad (42)$$

$$\dot{V}(\bar{x}, t) = 2\bar{x}^T S \{ \theta [A(u, \hat{x}) - S^{-1} C^T C] \bar{x} + \Delta_\theta [\tilde{A}(u, \hat{x}, x) x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x)] \} + \bar{x}^T \{ \theta (-S - A(u, \hat{x})^T S - S A(u, \hat{x}) + C^T C) \} \bar{x}$$

$$\dot{V}(\bar{x}, t) = 2\bar{x}^T S \theta A(u, \hat{x}) \bar{x} - 2\bar{x}^T S \theta S^{-1} C^T C \bar{x} - \bar{x}^T \theta S \bar{x} - \bar{x}^T \theta A(u, \hat{x})^T S \bar{x} - \bar{x}^T \theta S A(u, \hat{x}) \bar{x} + \bar{x}^T \theta C^T C \bar{x} + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta [\tilde{A}(u, \hat{x}, x) x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x)]$$

$$\dot{V}(\bar{x}, t) = 2\bar{x}^T S \theta A(u, \hat{x}) \bar{x} - 2\bar{x}^T S \theta A(u, \hat{x}) \bar{x} - 2\bar{x}^T \theta C^T C \bar{x} + \bar{x}^T \theta C^T C \bar{x} - \theta \bar{x}^T S \bar{x} + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta [\tilde{A}(u, \hat{x}, x) x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x)]$$

$$\dot{V}(\bar{x}, t) = -\theta \bar{x}^T C^T C \bar{x} - \theta \bar{x}^T S \bar{x} + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta [\tilde{A}(u, \hat{x}, x) x + \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x)] - 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \quad (43)$$

Procediendo como [21], se tiene:

$$\begin{aligned} \| 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \tilde{A}(u, \hat{x}, x) x \| &\leq 2\sqrt{n} \frac{\sqrt{\lambda_{max}(S)}}{\sqrt{\lambda_{min}(S)}} V(\bar{x}, t) L_{\tilde{A}} x_{max} \\ \| 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \tilde{A}(u, \hat{x}, x) x \| &\leq 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\lambda_{max}e}{\delta_0}} V(\bar{x}, t) L_{\tilde{A}} x_{max} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \| 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x) \| &\leq 2\sqrt{n} \frac{\sqrt{\lambda_{max}(S)}}{\sqrt{\lambda_{min}(S)}} L_{\tilde{\phi}} V(\bar{x}, t) \\ \| 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \tilde{\phi}(u, \hat{x}, x) \| &\leq 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\lambda_{max}e}{\delta_0}} L_{\tilde{\phi}} V(\bar{x}, t) \end{aligned} \quad (45)$$

Basado en la suposicion se procede a obtener [22], quedando:

$$\| 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \| \leq \frac{2}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda(S)} \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \delta_\epsilon \quad (46)$$

Sustituyendo (44), (45) y (46) en (43)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}, t) &\leq -\theta V(\bar{x}, t) + 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{max}e}{\delta_0}} V(\bar{x}, t) L_{\tilde{A}} x_{max} + 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{max}e}{\delta_0}} L_{\tilde{\phi}} V(\bar{x}, t) \\ \dot{V}(\bar{x}, t) &\leq -\theta \left( -2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{max}e}{\delta_0}} (L_{\tilde{A}} x_M + L_{\tilde{\phi}}) \right) V(\bar{x}, t) \end{aligned} \quad (47)$$

Dividiendo ambas partes entre  $\sqrt{V(\bar{x}, t)}$  y se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\bar{x}, t)} \leq \theta \left( 1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{max}e}{\delta_0}} (L_{\tilde{A}} x_M + L_{\tilde{\phi}}) \right) \sqrt{V(\bar{x}, t)} \quad (48)$$

Considerando  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0$

Reescribiendo se tiene:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\bar{x}, t)} \leq -\theta v_\theta \sqrt{V(\bar{x}, t)} \quad (49)$$

donde :

$$v_\theta = \left( 1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{max}e}{\delta_0}} (L_{\bar{A}}x_M + L_{\bar{\phi}}) \right) \quad (50)$$

Usando el lemma de comparacion se obtiene:

$$\sqrt{V(\bar{x}, t)} \leq e^{\theta v_\theta t} \sqrt{V(\bar{x}(\theta))} \quad (51)$$

Para obtener el error de observacion es necesario regresar a  $\bar{x}$ , por lo tanto

$$\| \bar{x}(t) \| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(S)}{\lambda_{min}(S)}} e^{-\theta v_\theta t} \| \bar{x}(0) \| \quad (52)$$

Sustituyendo  $\lambda_{min}(S)$ :

$$\| \bar{x}(t) \| \leq \zeta \sqrt{\alpha(\theta)} e^{-\theta v_\theta t} \| \bar{x}(0) \| \quad (53)$$

Donde  $\zeta = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(S)e}{\delta_0}}$ . Por lo tanto el error de estimación  $\tilde{x}(t) = \Delta_\theta \bar{x}$  desde  $\| \bar{x}(t) \| \leq \| \tilde{x} \| \leq \theta^{q-1} \| \bar{x} \|$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \| \tilde{x}(t) \| &\leq \theta^{q-1} \left( \zeta \sqrt{\alpha(\theta)} e^{\theta v_\theta t} \right) \| \tilde{x}(0) \| + \theta^{q-1} \\ \| \tilde{x}(t) \| &\leq \theta^q \zeta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} e^{\theta v_\theta t} \| \tilde{x}(0) \| \end{aligned} \quad (54)$$

### **Sistemas osciladores Caóticos Utilizados**

En los 60's, Edward Lorenz desarrolló un modelo matemático del clima, el cual consiste en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden [8, 9]. Este sistema presenta un comportamiento oscilatorio no-lineal, es decir, un comportamiento caótico determinista. Con base en este sistema, surgen otros osciladores caóticos, como lo son los osciladores de Rössler, Lu, Genesis Tesi. A continuación, se detallan estos osciladores caóticos clásicos. Considerando los sistemas no lineales como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + \phi \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{55}$$

### **Sistema dinámico no lineal de Edward Lorenz**

Este sistema fue encontrado por E. Lorenz en el año 1963, el objetivo que Lorenz tenía, era el de, mediante este sistema, poder predecir el clima. Los resultados no fueron óptimos para estos fines, sin embargo, su estudio aportó mucha información a la matemática, ya que fue el primer sistema tridimensional autónomo en el cual se encontró un atractor caótico, conocido como "La Mariposa de Lorenz". El sistema de Lorenz está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}\tag{56}$$

Los valores constantes son:  $\sigma = 16$ ,  $r=45.6$ ,  $b=4$ .

Para la observación del sistema se utilizará un software de simulación para el cual necesitamos representar el sistema de ecuaciones diferenciales a su forma matricial o espacio de estados el cual es el siguiente:

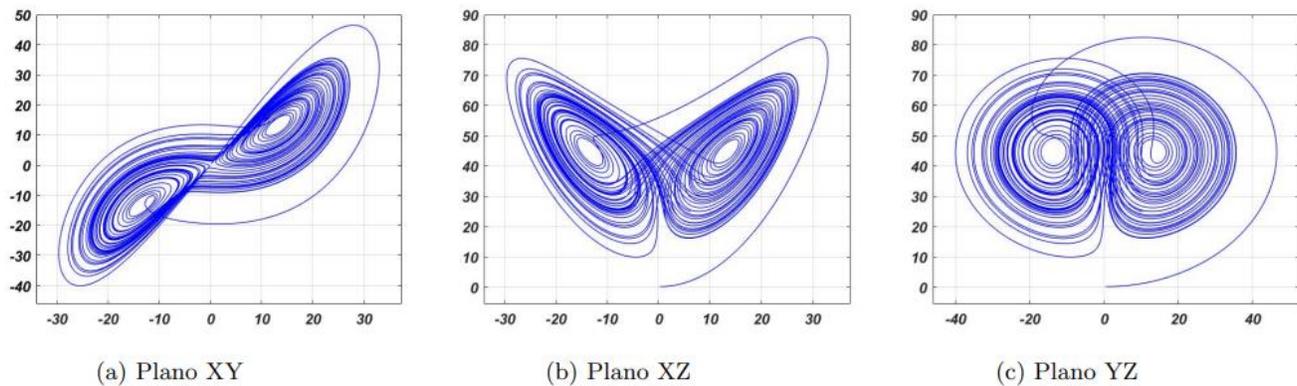
$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad fo(x) = \begin{bmatrix} -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}$$

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de estados.
- $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es la matriz de entradas de control.

Y además tomando en cuenta que el sistema de Lorenz es de la forma:

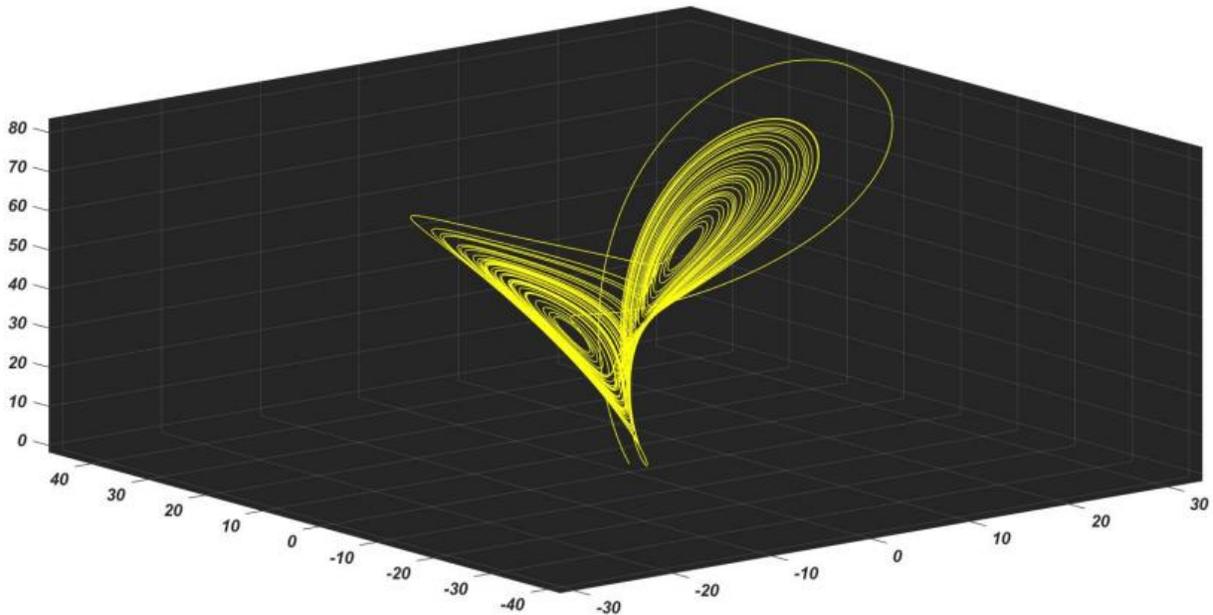
$$\dot{x} = Ax + Bfo(x) \tag{57}$$

Utilizando el software Simulink en MATLAB podemos apreciar la simulación de este sistema caótico. En la figura 5 se muestra dicho comportamiento por secciones, observando el sistema desde el plano XY, XZ y YZ respectivamente.



**Figura 5: Comportamiento de sistema caótico de Lorenz por planos**

Con ayuda de MATLAB es posible graficar cómo se comporta este sistema tomando en cuenta los 3 estados del mismo a la vez, el cual se observa en la figura 6 , obteniendo como resultado el Fractal de Lorenz, uno de los más sorprendentes por su peculiar patrón, haciendo referencia al "EFECTO MARIPOSA"



**Figura 6: Fractal de Lorenz**

### Sistema dinámico no lineal de Rössler

El sistema de Rössler está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(x_2 + x_3) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - ax_2 \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c) + m(t)x_3\end{aligned}\tag{58}$$

Tomando en cuenta las constantes con un valor de:  $a=0.398$ ,  $b=2$ ,  $c=4$ . Y donde  $m(t) = 0,5\text{sign}(\sin(0,2t))$  es la función del mensaje que se deseara estimar, pero para la simulación del sistema caótico no se tomara en cuenta.

Este sistema se representa en su forma de espacio de estados como:

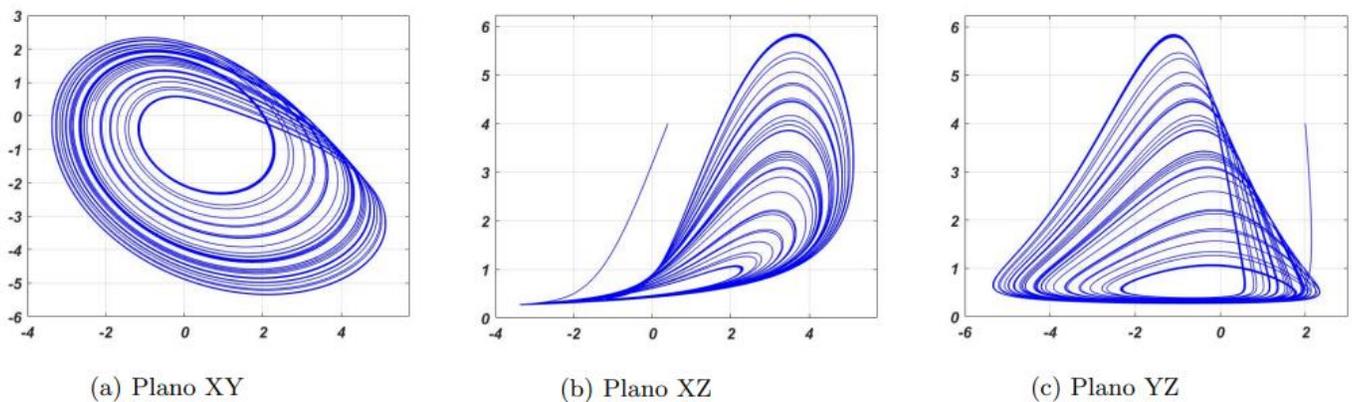
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad fo(x) = b + x_1x_3$$

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de estados.
- $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es la matriz de entradas de control.

El sistema de Rössler es de la forma:

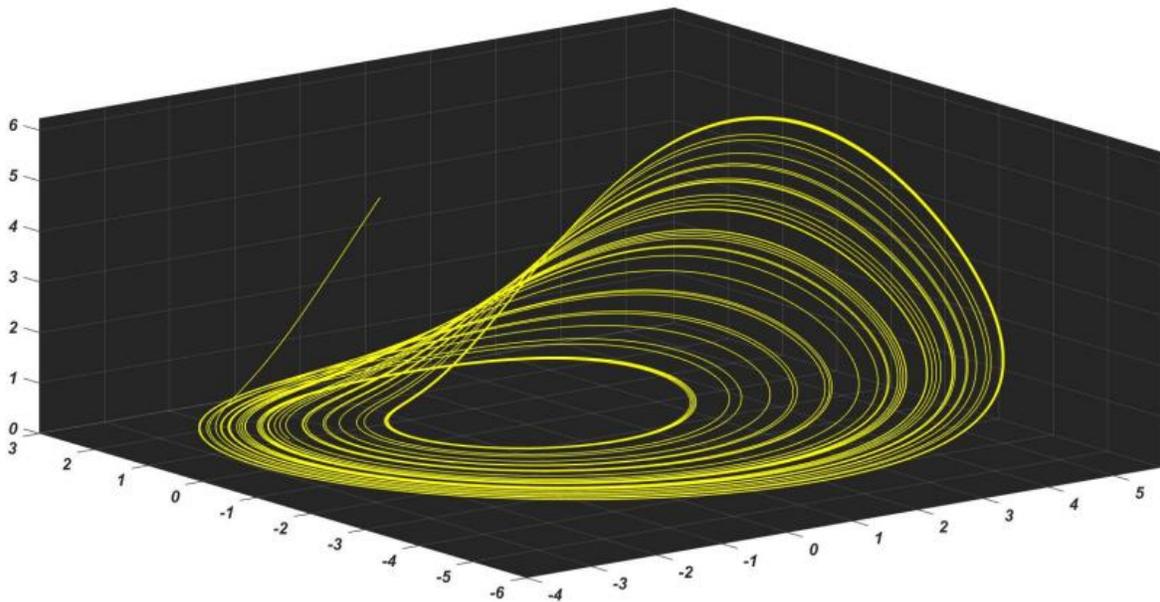
$$\dot{x} = Ax + Bfo(x) \tag{59}$$

Tomando en cuenta los parámetros dados para su simulación, obtendremos el comportamiento del sistema de Rössler como se muestra en la figura 7.



**Figura 7: Comportamiento de sistema caótico de Rössler por planos**

Utilizando MATLAB podemos observar el comportamiento de este sistema desde diferentes perspectivas como se muestra en la figura 7. Cabe recalcar que con los valores tomados en cuenta el sistema se muestra bastante pequeño con una escala inferior a 10 en los tres ejes del espacio, a diferencia de otros sistemas caóticos que con constantes semejantes alcanzan valores superiores a cincuenta en sus tres ejes del espacio,  $(x, y, z)$ . Considerando los tres estados de este sistema podemos observar el Fractal que genera el sistema de Rössler de acuerdo a los parámetros establecidos, en la figura 8, el cual describe el patrón que sigue este sistema caótico.



**Figura 8: Fractal de Rössler**

**Sistema dinámico no lineal Genesio-Tesi**

Este sistema dinámico no lineal está representado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -[c + m_1(t)]x_1 - bx_2 - ax_3 + x_1^2 \end{aligned} \tag{60}$$

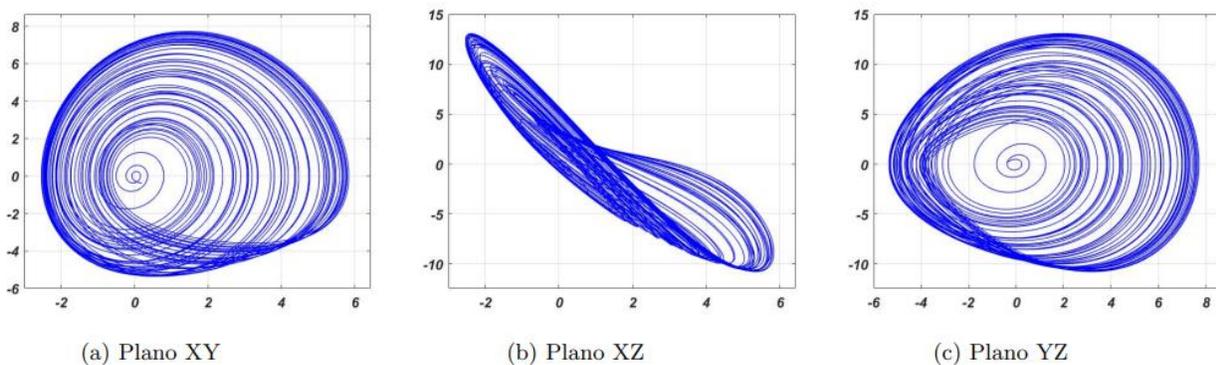
Los valores de las constantes son:  $a=1$ ,  $b=3.03$ ,  $c=5.5$  y además consideramos el mensaje como  $m = 0,05\text{sign}(\text{sen}(0,05(t)))$ . Este sistema se representa en su forma de variables de estados como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(c+m) & -b & -a \end{bmatrix} \quad \phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$$

Tomando en cuenta de que este sistema es de la forma:

$$\dot{x} = Ax + \phi \tag{61}$$

Considerando los parámetros mencionados podemos observar el comportamiento por secciones de este sistema, el cual se muestra en la figura 9, donde se puede observar que se limita a valores inferiores a quince, pero recordando que esto es debido al tiempo de la simulación y los valores de las constantes también influyen, lo que permanece es el patrón que sigue. Para este sistema se considera el mensaje  $m$  ya que se utiliza en la matriz  $A$  y no tenemos una matriz  $B$  pero tomaremos en cuenta otra representación matricial del sistema utilizando  $\phi$  para observar su comportamiento utilizando Simulink en MATLAB.



**Figura 9: Comportamiento de sistema caótico de Genesio por planos**

En la figura 10 podemos ver el Fractal de Gnesio, el cual describe como es su patrón con respecto al tiempo.

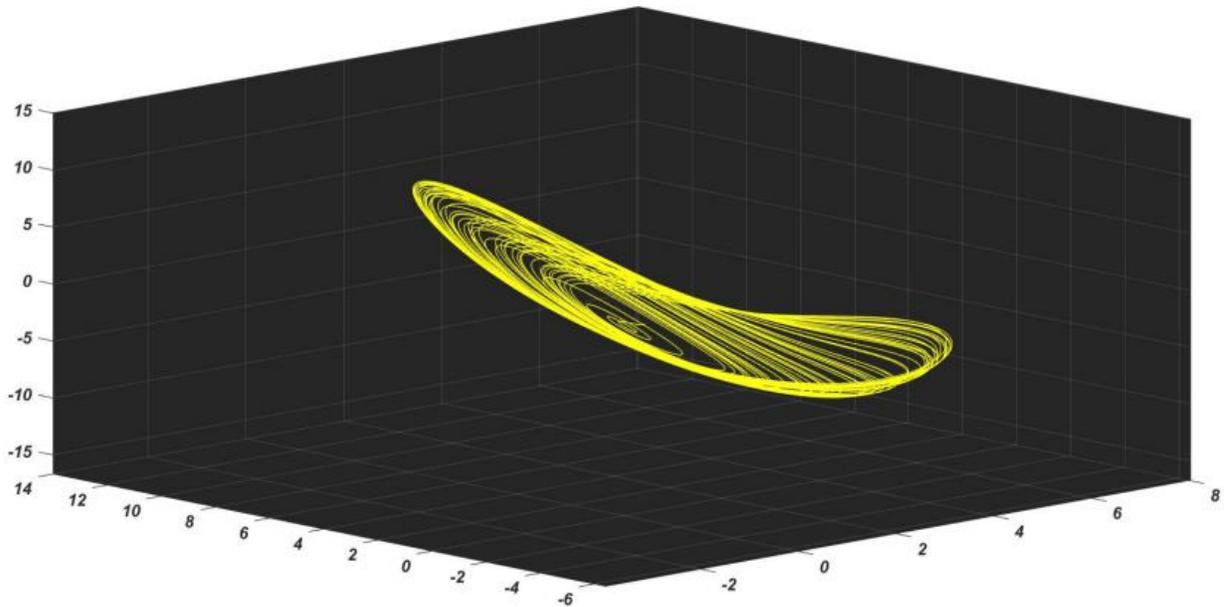


Figura 10: Fractal de Gnesio

### Sistema dinámico no lineal de Lu

El conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que representan el sistema de Lu es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= bx_1 - kx_1x_3 + x_4 \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + hx_1^2 \\ \dot{x}_4 &= -dx_1\end{aligned}\tag{62}$$

El valor de las constantes es:  $a=10$ ,  $b=40$ ,  $c=2.5$ ,  $k=1$ ,  $h=4$  y considerando el mensaje como  $d=10.5$ . Y teniendo en cuenta el sistema matricial de este como:

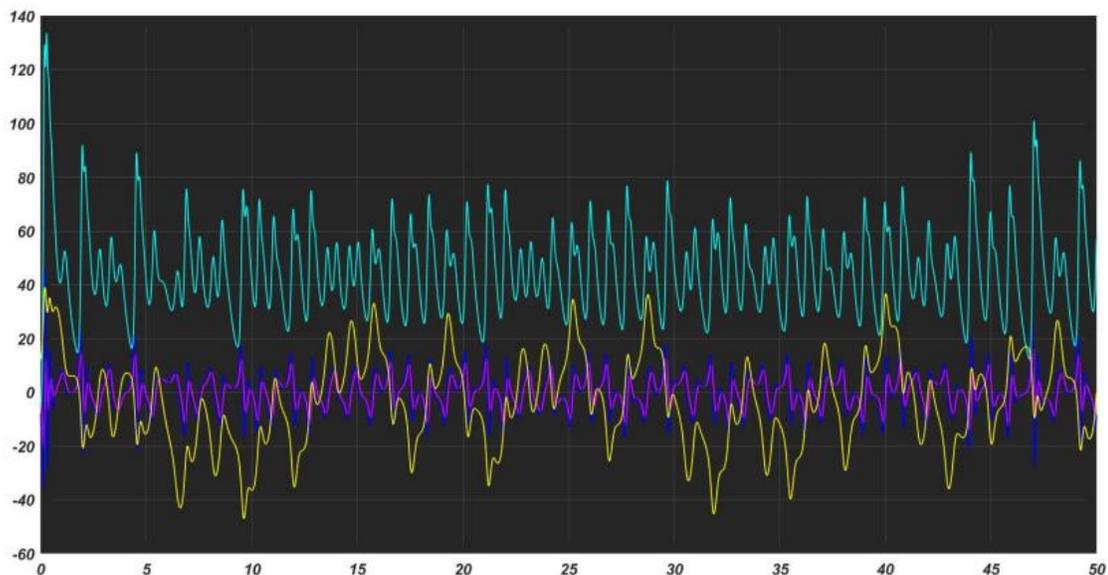
$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ -d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -kx_1x_3 \\ hx_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de estados.
- $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es la matriz de entradas de control.

Para este sistema tendremos la forma:

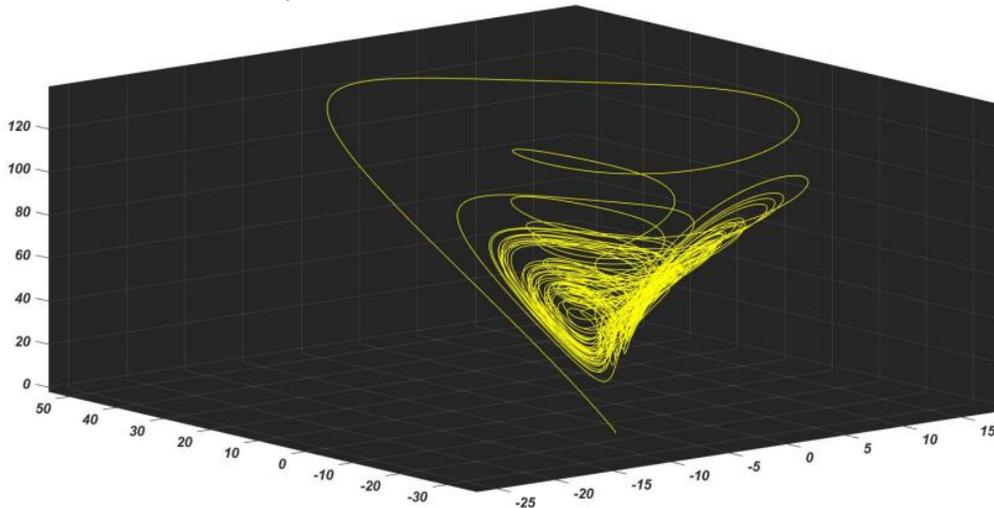
$$\dot{x} = Ax + B \tag{63}$$

Tomando en cuenta los parámetros dados podemos observar cómo se comporta este sistema en la figura 11, donde cada color representa un estado de los cuatro que tiene este sistema respectivamente.



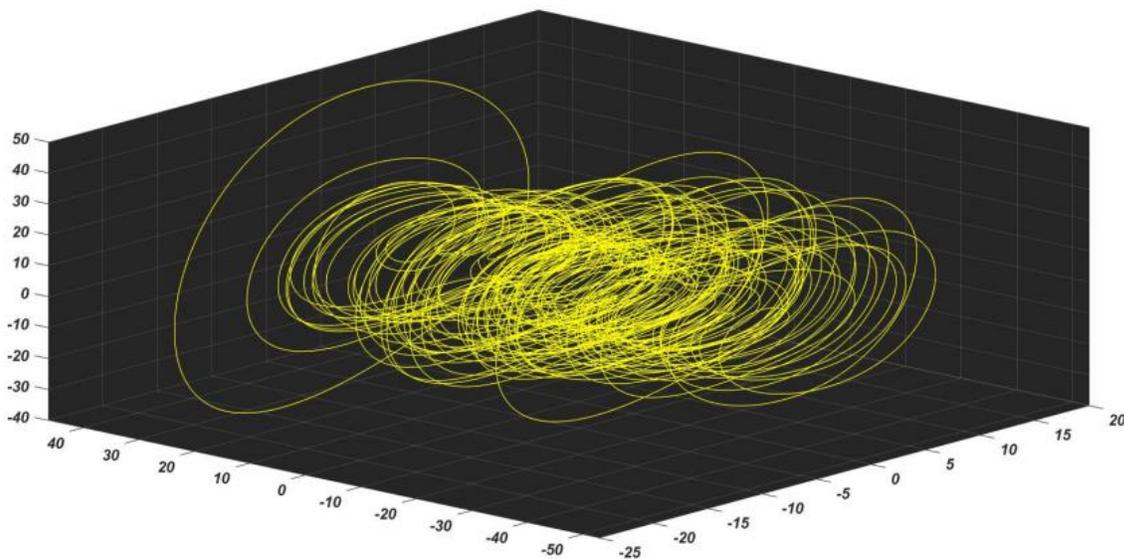
**Figura 11: Comportamiento de sistema caótico de Lu por estados**

Para observar el Fractal de este sistema tendremos que considerar solo tres estados a la vez de los cuatro que tiene y de esta forma alternar entre todos para tener una idea de cómo es el patrón de este sistema. En la figura 12 se muestra el Fractal de Lu considerando  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  para obtener su simulación en MATLAB y observar cómo es su patrón.



**Figura 12: Fractal de Lu, vista A**

De esta misma manera se tiene en la figura 13 el mismo Fractal de Lu, pero considerando el orden  $x_1$ ,  $x_4$ ,  $x_3$  para su simulación y observar su patrón, siguiendo el mismo método se pueden obtener varios patrones de fractales para este sistema y con un posicionamiento diferente.



**Figura 13: Fractal de Lu, vista B**

## **Capítulo 3**

### **Planteamiento del problema**

#### **Identificación.**

En el escenario donde existe un sistema maestro (controlador) y un sistema esclavo (respuesta) existen diversas propuestas para llevar a cabo la sincronización. Es posible diseñar estructuras de observadores capaces de estimar los estados del sistema y estimar el parámetro ya sea variable o constante en el tiempo en presencia de incertidumbres en sistemas no lineales sin importar la posición del parámetro desconocido.

#### **Justificación.**

La teoría del caos es un tema ampliamente estudiado por especialistas en el campo de control del caos. Este campo cuenta con un área de investigación que es la sincronización de caos, en la cual se centra este proyecto de investigación. En los últimos años, la sincronización caótica se ha vuelto objeto de estudio debido a sus aplicaciones en disciplinas como las comunicaciones seguras, procesamiento de señales, reacciones químicas, convertidores de potencia, Aero espacio, sistemas de satélites y sistemas biológicos [4, 5]. La sincronización caótica consiste en hacer coincidir y converger en la misma trayectoria varios sistemas caóticos después de un tiempo suficiente [6]. De forma general la sincronización caótica utilizada en las comunicaciones se puede explicar de la siguiente manera; Primero, existe un transmisor que cifra la información mediante un sistema caótico. Después, la información cifrada es enviada a través de un canal para ser recibida por un receptor, el cual utiliza la sincronización para recuperar el mensaje original de la información cifrada.

**Restricciones y Alcances.**

- Se analizarán algunos de los sistemas caóticos más conocidos.
- Se considerarán parámetros en sus condiciones ideales para observar cómo es su cambio en el tiempo.
- Simulación de los sistemas no lineales utilizando el software Multisim en Matlab.
- Se desarrollarán observadores establecidos a cada uno de los sistemas dinámicos.

## **Capítulo 4**

### **Objetivos**

#### **Objetivos generales.**

Estudiar y aplicar diferentes estrategias de control y observación para la sincronización de sistemas dinámicos que presentan comportamientos caóticos

#### **Objetivos específicos.**

- Identificar y obtener la simulación del comportamiento de algunos sistemas caóticos.
- Aplicar diferentes tipos de observadores para el diagnóstico de los sistemas caóticos.
- Diseño de observadores.

## Capítulo 5

### Metodología

La presente investigación se llevó a cabo durante un verano de investigación científica y tecnológica impartido por el TecNM campus CENIDET (Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico), Cuernavaca, Morelos.

#### Estimación utilizando observadores Lipschitz

Para la implementación de un observador Lipschitz a los sistemas caóticos se requiere un cálculo específico y considerar parámetros de los sistemas tales como los que se muestran a continuación:

#### Implementación de Observador Lipschitz al Sistema Caótico de Lorenz

Para el sistema de Lorenz se pusieron a prueba varios tipos de observadores, pero se escogió uno de tipo Lipschitz, ya que fue el más adecuado para este sistema caótico. Para comenzar, es necesario contar con la matriz A, B y una tercer matriz C del sistema original, así como el valor de las contantes que representa:

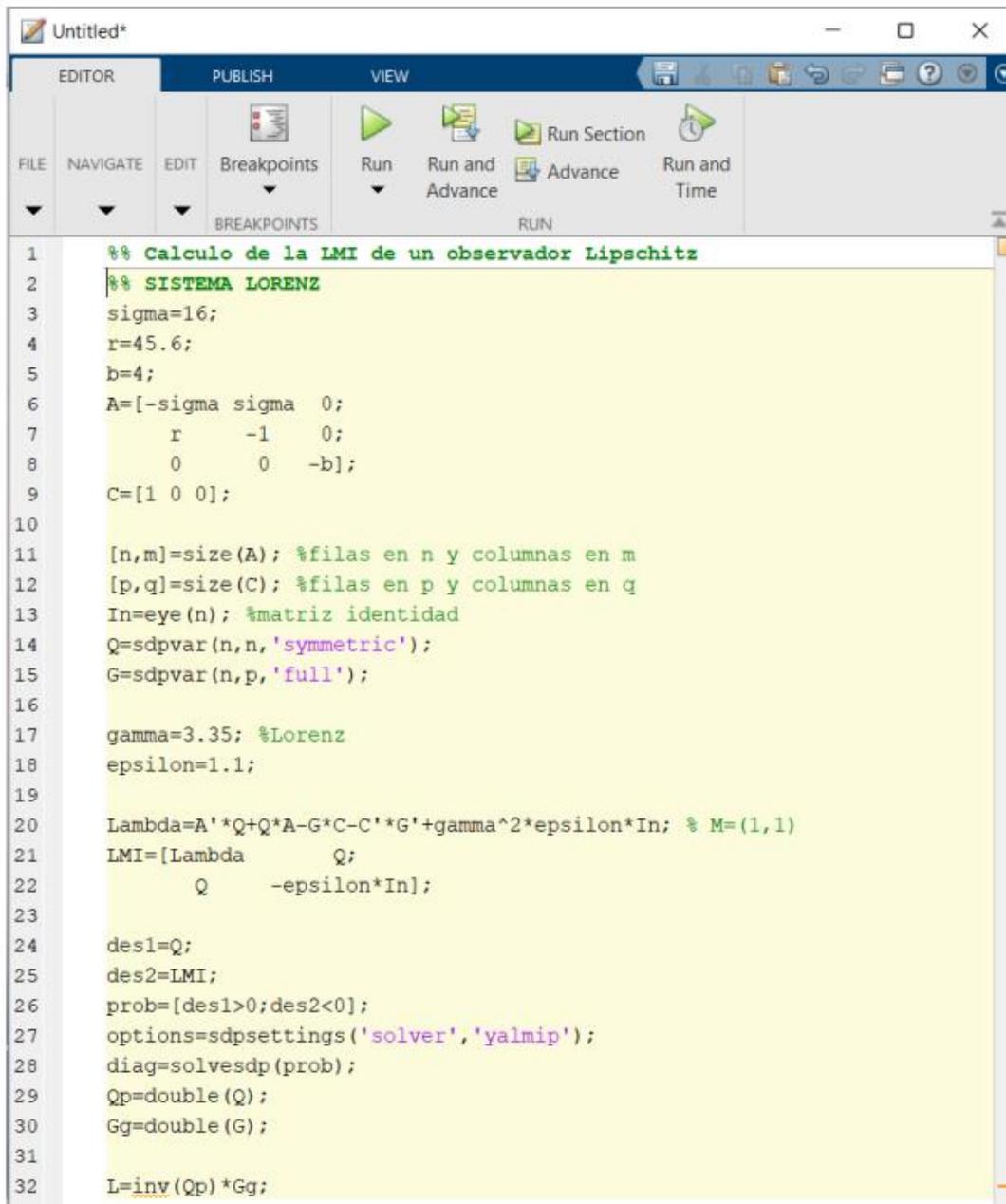
Donde:  $\sigma = 16$ ,  $r=45.6$ ,  $b=4$ .

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad fo(x) = \begin{bmatrix} -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}$$

Y de acuerdo con el análisis de estabilidad de este observador, (57), ahora se convierte en:

$$\dot{x} = Ax + Bfo(x) + L(Cy - Cx) \quad (64)$$

En la siguiente figura 14, se muestra un script en MATLAB para el cálculo de L para este tipo de observadores, especificando que el código que se muestra es para el sistema de Lorenz.



```
1 %% Calculo de la LMI de un observador Lipschitz
2 %% SISTEMA LORENZ
3 sigma=16;
4 r=45.6;
5 b=4;
6 A=[-sigma sigma 0;
7     r -1 0;
8     0 0 -b];
9 C=[1 0 0];
10
11 [n,m]=size(A); %filas en n y columnas en m
12 [p,q]=size(C); %filas en p y columnas en q
13 In=eye(n); %matriz identidad
14 Q=sdpvar(n,n,'symmetric');
15 G=sdpvar(n,p,'full');
16
17 gamma=3.35; %Lorenz
18 epsilon=1.1;
19
20 Lambda=A'*Q+Q*A-G*C-C'*G+gamma^2*epsilon*In; % M=(1,1)
21 LMI=[Lambda Q;
22     Q -epsilon*In];
23
24 des1=Q;
25 des2=LMI;
26 prob=[des1>0;des2<0];
27 options=sdpssettings('solver','yalmip');
28 diag=solvesdp(prob);
29 Qp=double(Q);
30 Gg=double(G);
31
32 L=inv(Qp)*Gg;
```

Figura 14: Código en MATLAB del cálculo de L para el sistema de Lorenz

**Implementación de Observador Lipschitz al Sistema Caótico de Lu**

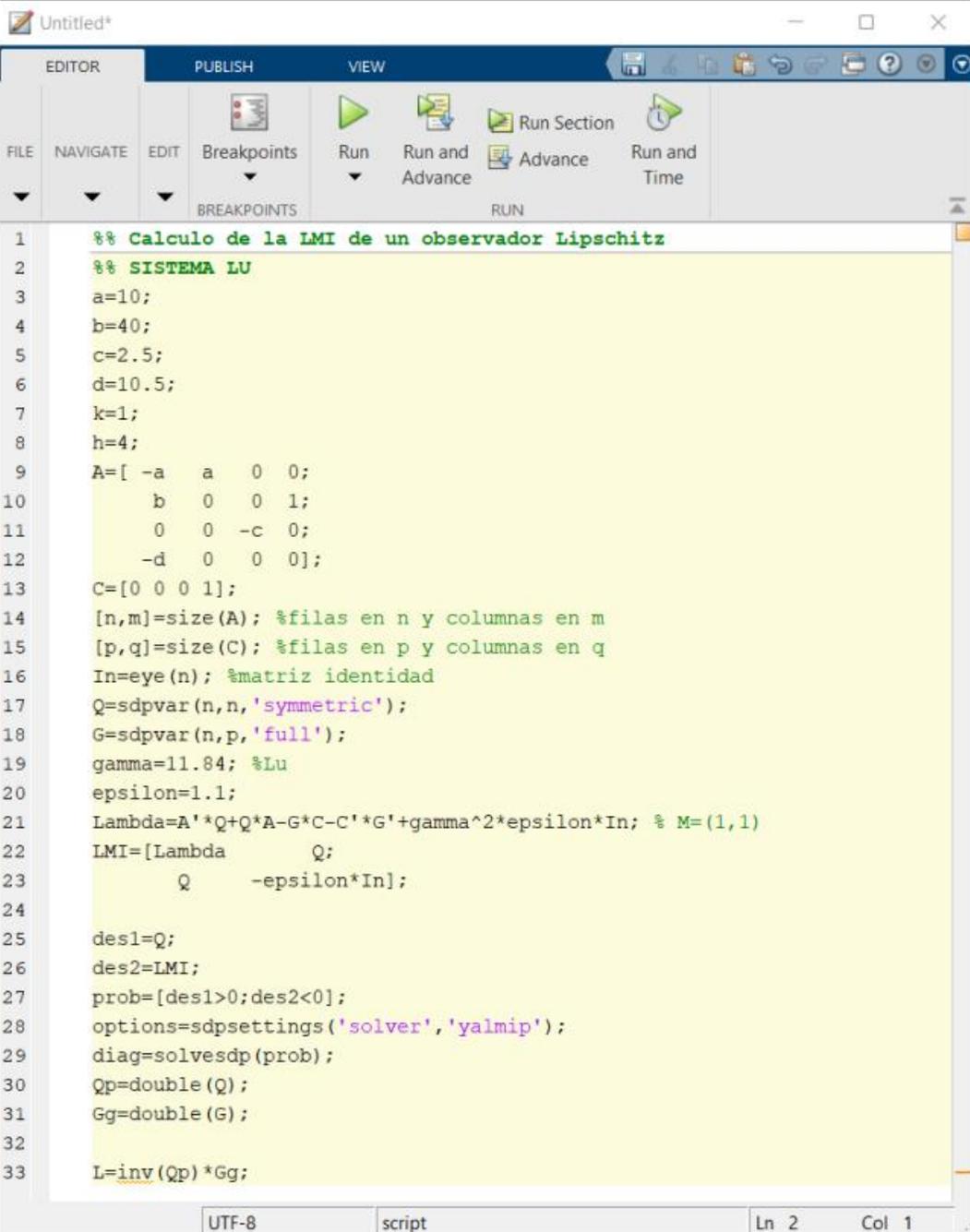
Para este sistema, se utilizó, al igual que en el ejemplo pasado, un observador Lipschitz ya que resulto ser el más adecuado y el que estimaba mejor a este sistema caótico. Por lo tanto, para llevar a cabo su implementación se requiere:

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ -d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -kx_1x_3 \\ hx_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Y donde ahora (63), se convierte en:

$$\dot{x} = Ax + B + L(Cy - Cx) \tag{65}$$

Igualmente, para este ejemplo se realizará un cálculo de  $L$ , el cual se realizó en un script en MATLAB mostrado en la figura 15.



```
1 %% Calculo de la LMI de un observador Lipschitz
2 %% SISTEMA LU
3 a=10;
4 b=40;
5 c=2.5;
6 d=10.5;
7 k=1;
8 h=4;
9 A=[ -a   a   0   0;
10      b   0   0   1;
11      0   0  -c   0;
12     -d   0   0   0];
13 C=[0 0 0 1];
14 [n,m]=size(A); %filas en n y columnas en m
15 [p,q]=size(C); %filas en p y columnas en q
16 In=eye(n); %matriz identidad
17 Q=sdpvar(n,n,'symmetric');
18 G=sdpvar(n,p,'full');
19 gamma=11.84; %Lu
20 epsilon=1.1;
21 Lambda=A'*Q+Q*A-G*C-C'*G'+gamma^2*epsilon*In; % M=(1,1)
22 LMI=[Lambda      Q;
23      Q      -epsilon*In];
24
25 des1=Q;
26 des2=LMI;
27 prob=[des1>0;des2<0];
28 options=sdpssettings('solver','yalmip');
29 diag=solvesdp(prob);
30 Qp=double(Q);
31 Gg=double(G);
32
33 L=inv(Qp)*Gg;
```

Figura 15: Código en MATLAB del cálculo de  $L$  para el sistema de Lu

### Estimación utilizando observadores de alta ganancia Besancon

Para la implementación de este tipo de observadores, se tomó en cuenta el sistema de Genesis ya que fue con el que se comportó mejor a la hora de la estimación de los estados, así como la sincronización y en este caso se logra estimar un mensaje.

Los parámetros necesarios para llevar a cabo este tipo de observador son los siguientes. Primero que todo el observador se comporta de la forma:

$$\dot{y} = \alpha + \beta\theta \quad (66)$$

En donde se establece que  $\theta = m$  y además  $\dot{y}$  será igual a la ecuación donde se encuentra el mensaje.

Por tanto, reescribiendo el sistema (39), como;  $\dot{z}_1 = \dot{x}_1$ ,  $\dot{z}_2 = \dot{x}_2$   $\dot{y} = \dot{x}_3$  tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{y}_3 &= -[c + m_1(t)]z_1 - bz_2 - az_3 + z_1^2 \end{aligned} \quad (67)$$

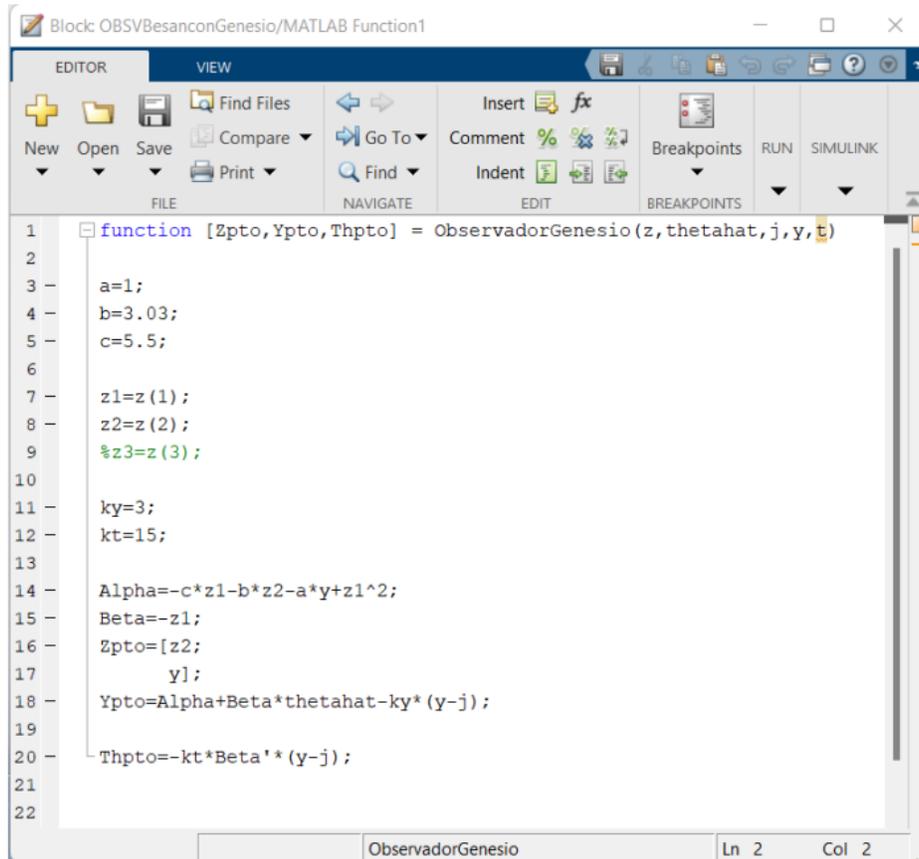
De este nuevo sistema se obtiene el siguiente vector:

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ y \end{bmatrix}$$

Recordando que  $\theta = m$ , y si:

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 &= -[c + m_1(t)]z_1 - bz_2 - az_3 + z_1^2 \\ \therefore \alpha &= -cz_1 - bz_2 - ay + z_1^2 \\ \beta &= -z_1 \end{aligned}$$

De esta manera se colocará dentro de la función del observador en el ambiente de Simulink, quedando como lo muestra la figura 16.



```
Block: OBSVBesanconGenesis/MATLAB Function1
EDITOR VIEW
New Open Save Find Files Compare Go To Insert Comment % Breakpoints RUN SIMULINK
Print Find Indent Breakpoints
FILE NAVIGATE EDIT BREAKPOINTS
1 function [Zpto,Ypto,Thpto] = ObservadorGenesis(z,thetahat,j,y,t)
2
3 a=1;
4 b=3.03;
5 c=5.5;
6
7 z1=z(1);
8 z2=z(2);
9 %z3=z(3);
10
11 ky=3;
12 kt=15;
13
14 Alpha=-c*z1-b*z2-a*y+z1^2;
15 Beta=-z1;
16 Zpto=[z2;
17 y];
18 Ypto=Alpha+Beta*thetahat-ky*(y-j);
19
20 Thpto=-kt*Beta*(y-j);
21
22
ObservadorGenesis Ln 2 Col 2
```

Figura 16: Funcion del observador de Besancon en Simulink

### Estimación utilizando observadores de estado extendido

Para la implementación del último observador visto durante este verano de investigación, se tiene el de tipo estado extendido que se implementó en esta ocasión al sistema caótico de Rössler ya que congenió bastante bien con este.

Primero que todo este observador se comporta de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(u(t), x(t))x(t) + \phi(u(t), x(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{68}$$

Donde ahora este observador dependerá de los estados y de la matriz de entrada y por lo tanto será menos restrictivo. Cumpliendo con la triangularidad de acuerdo a su análisis de estabilidad se tiene la forma:

$$\dot{\hat{x}} = A(u, \hat{x})\hat{x} + \phi(u, \hat{x}) - \theta\Delta_{\theta}^{-1}S^{-1}C^T(C\hat{x} - y) \quad (69)$$

Dado el sistema caótico de Rössler como 60, se reescribe agregando un estado más, el cual pertenece al mensaje que se intenta estimar, por lo tanto,  $m = x_4 = z_4$ . Y para la descripción del sistema se considera  $z_1 = x_2$ ,  $z_2 = x_1$ ,  $z_3 = x_3$  quedando ahora el sistema como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + az_1 \\ \dot{z}_2 &= -(z_1 + z_3) \\ \dot{z}_3 &= b + z_3(z_2 - c) + z_4z_3 \\ \dot{z}_4 &= 0 \end{aligned} \quad (70)$$

Por lo tanto, la matriz A y el vector  $\phi$  ahora quedaran como:

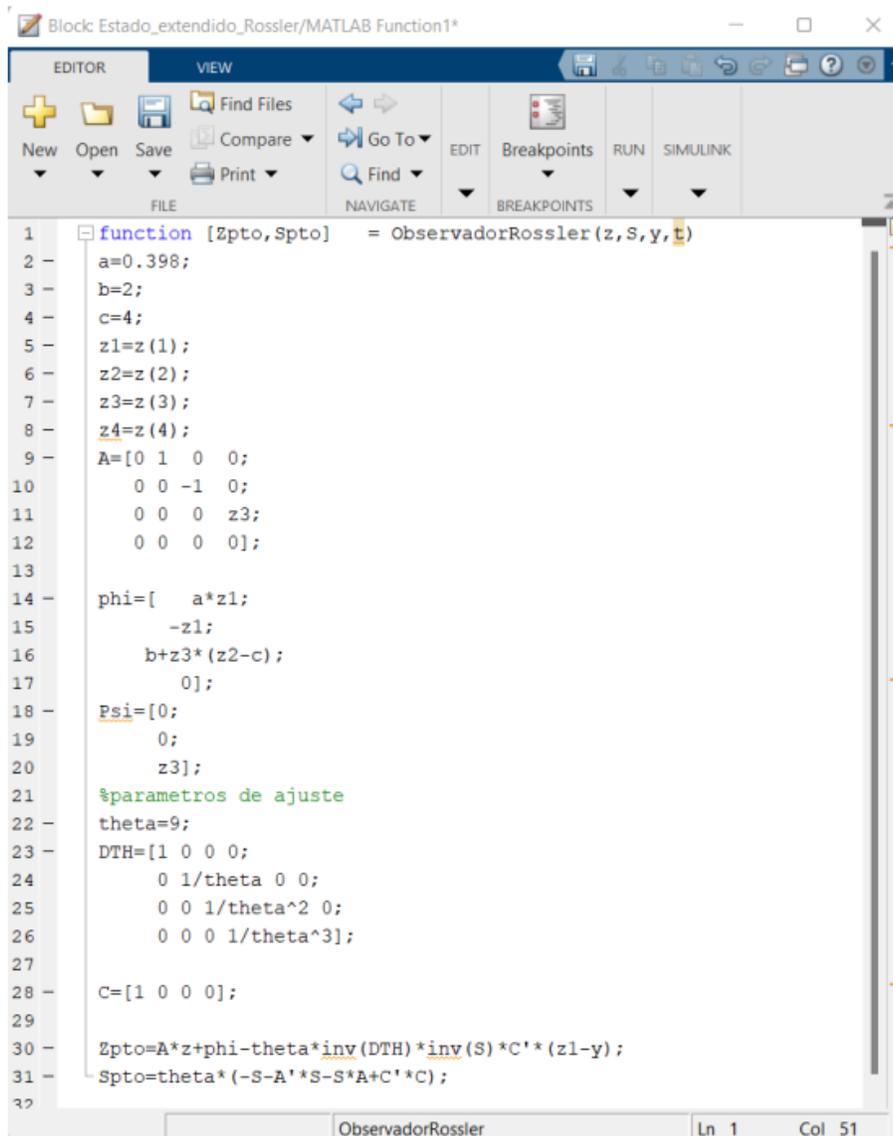
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \phi = \begin{bmatrix} az_1 \\ -z_1 \\ b + z_3(z_1 - c) \\ 0 \end{bmatrix}$$

En el caso de este observador también se tendrá:

$$\dot{\hat{z}} = A(\hat{z})\hat{z} + \phi(\hat{z}) - \theta\Delta_{\theta}^{-1}S^{-1}C^T(z_1 - x_2) \quad (71)$$

$$\dot{S} = \theta(-S^T A - A^T S + C^T C - S) \quad (72)$$

Contando con nuestro nuevo sistema reescrito, ahora se lleva a cabo la simulación en MATLAB, en la figura 17, se muestra cómo queda la función del observador en el ambiente de Simulink.



```
1 function [Zpto,Spto] = ObservadorRosler(z,S,y,t)
2     a=0.398;
3     b=2;
4     c=4;
5     z1=z(1);
6     z2=z(2);
7     z3=z(3);
8     z4=z(4);
9     A=[0 1 0 0;
10        0 0 -1 0;
11        0 0 0 z3;
12        0 0 0 0];
13
14     phi=[ a*z1;
15          -z1;
16          b+z3*(z2-c);
17          0];
18     Psi=[0;
19          0;
20          z3];
21     %parametros de ajuste
22     theta=9;
23     DTH=[1 0 0 0;
24          0 1/theta 0 0;
25          0 0 1/theta^2 0;
26          0 0 0 1/theta^3];
27
28     C=[1 0 0 0];
29
30     Zpto=A*z+phi-theta*inv(DTH)*inv(S)*C*(z1-y);
31     Spto=theta*(-S-A'*S-S*A+C'*C);
32
```

**Figura 17: Funcion del observador de Estado Extendido en Simulink**

Una vez hecho los cálculos para la implementación de cada uno de los observadores a cada uno de los sistemas caóticos con los que se trabajó, se presentan más adelante los resultados, donde se apreciara la estimación de parámetros que estos ofrecen, así como la estimación de algunos mensajes.

## Capítulo 6

### Resultados

Se presenta una serie de resultados de simulación para comparar nuestro enfoque contra la sincronización clásica basada en observadores diseñados (con rechazo de perturbaciones) para la comparación con la metodología clásica basada recientemente en varios trabajos [10, 11]. Aquí se logra ver de una forma más clara, por medio de diagramas de bloques y gráficas, como es en esencia la implementación de un observador hacia un sistema.

#### Sincronización de Sistema Caótico de Lorenz

En las figuras 18, 19 y 20, se logran apreciar los estados del sistema original en color negro y el tipo de observador aplicado a este sistema en color azul y seccionado para hacer la imagen más entendible, de esta manera se logra apreciar la estimación del observador para cada uno de los estados que es de manera muy rápida ya que desde que inicia el sistema original, el observador responde en decimas de segundos para replicar el sistema original y de esta manera lograr la estimación de cada uno de los estados.

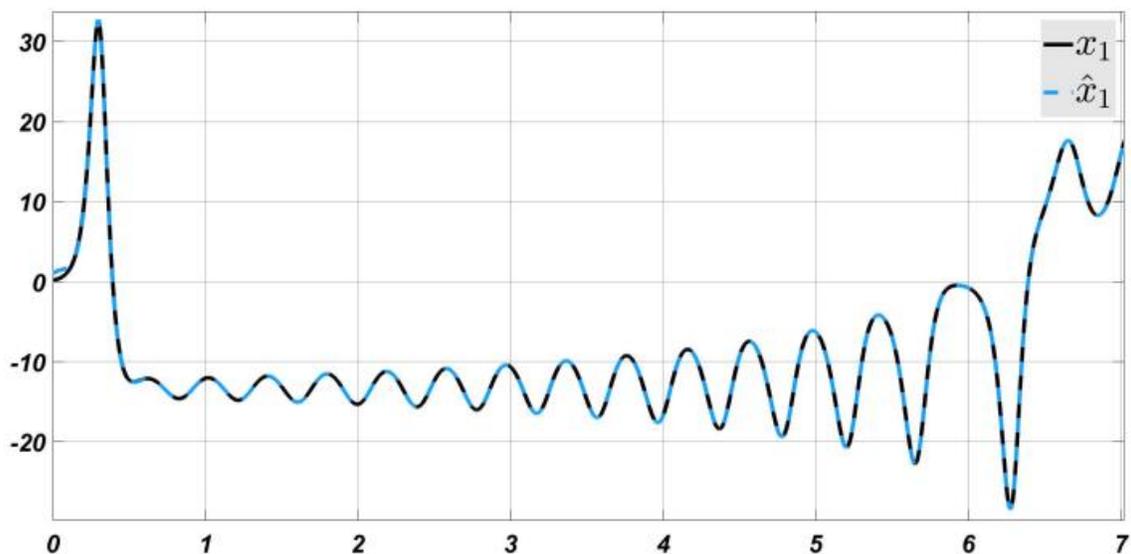


Figura 18: Estimación de estado UNO

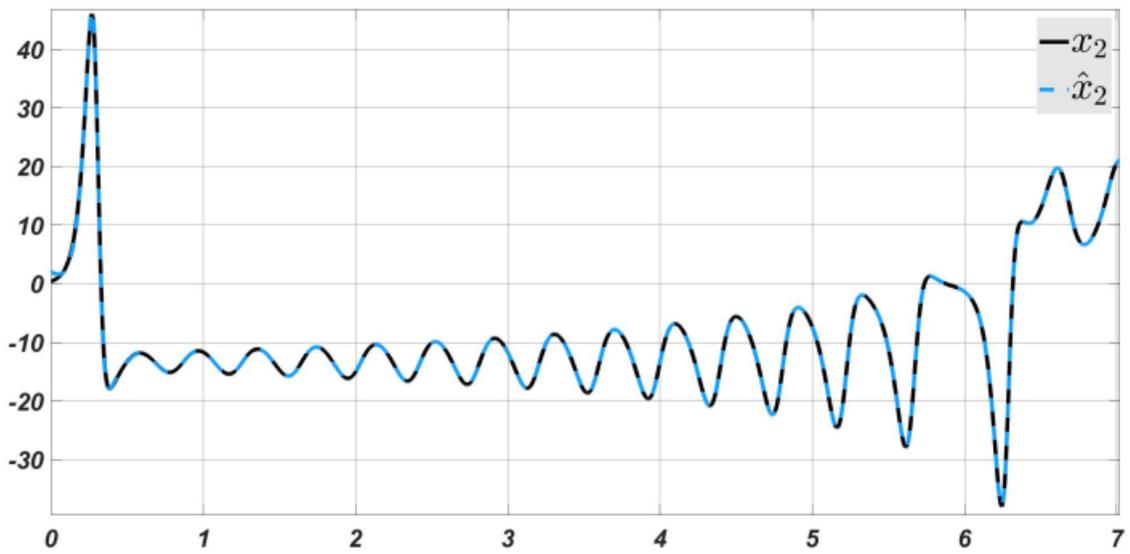


Figura 19: Estimación de estado DOS

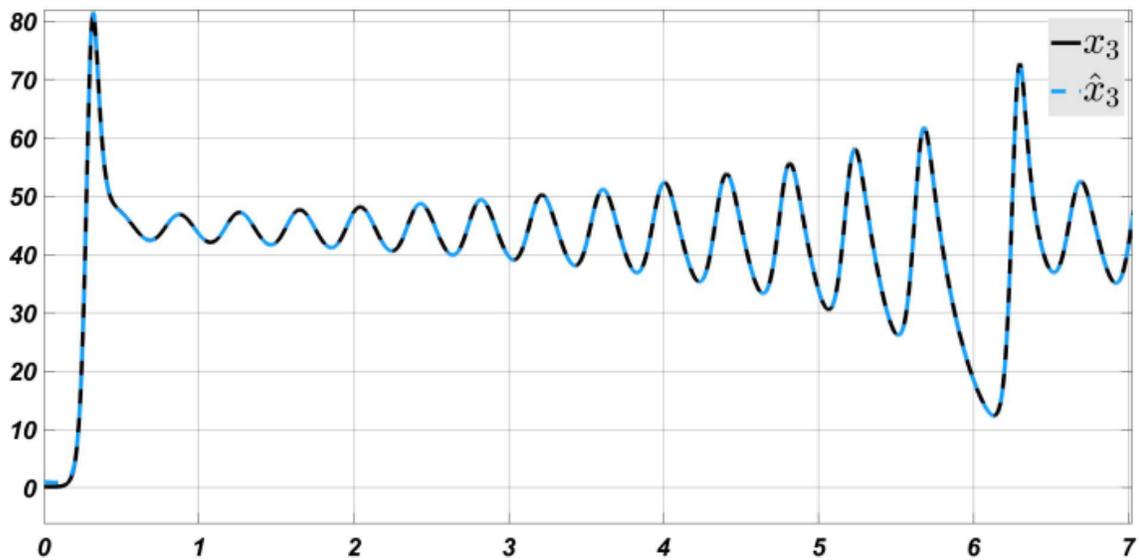
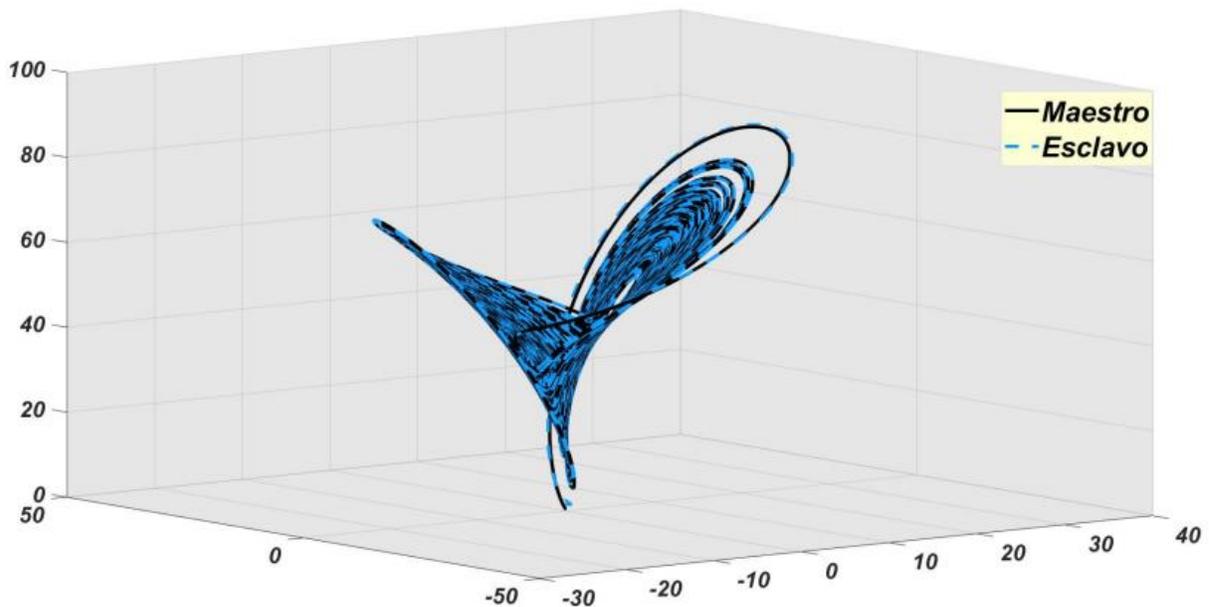


Figura 20: Estimación de estado TRES

Con cada uno de los estados estimados de manera correcta se lleva a cabo la estimación del sistema original, en este caso el sistema caótico de Lorenz, dando como resultado un sistema donde se tendrá un MAESTRO que será el sistema original y un ESCLAVO el cual es el observador implementado que seguirá la trayectoria del sistema original. En la figura 21 se logra observar la sincronización del sistema observando al ESCLAVO (en color azul con línea seccionada) y al MAESTRO (en color negro con línea continua).



**Figura 21: Sincronización del Sistema Caótico de Lorenz con un Observador Lipschitz**

En la figura 22 se presenta el diagrama de bloques en el ambiente de Simulink en MATLAB en donde se expresan las conexiones correspondientes para llevar a cabo la implementación del observador hacia el sistema, así como las herramientas utilizadas.

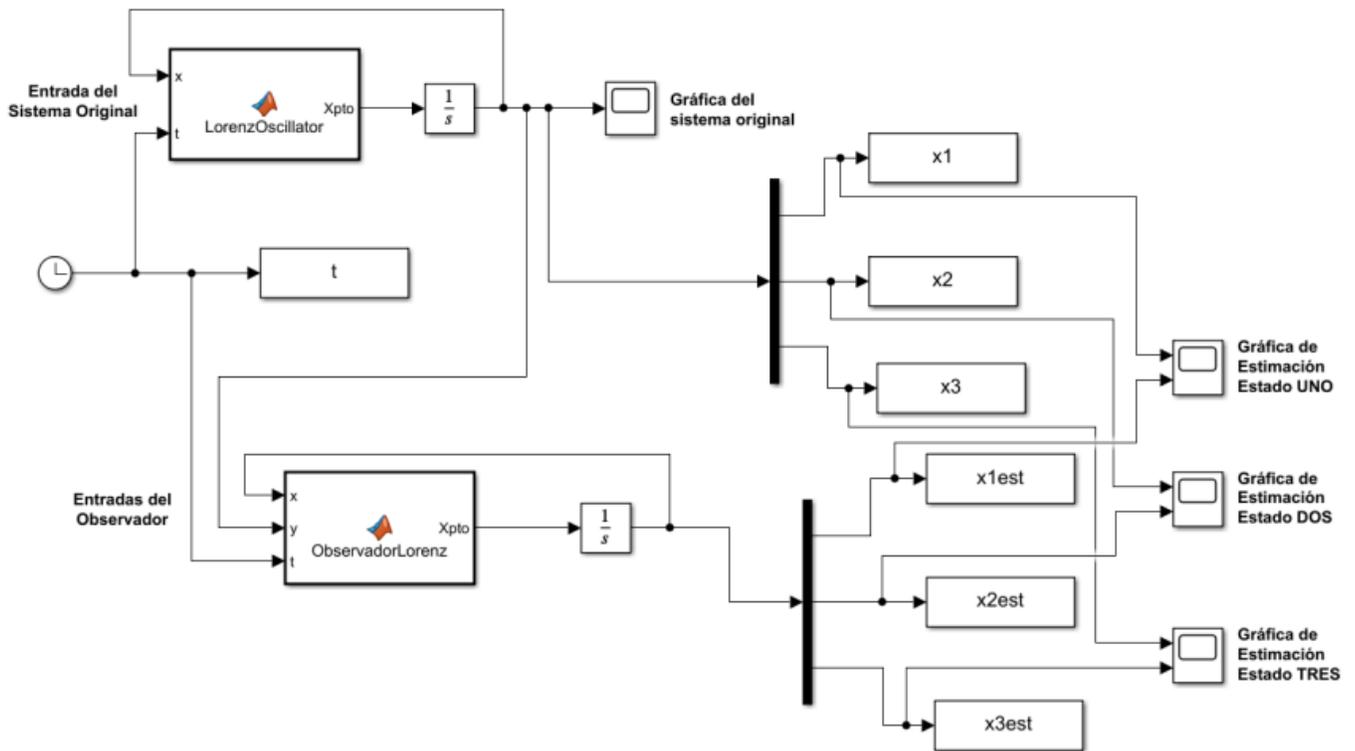


Figura 22: Diagrama de bloques Sistema Original – Observador

### Sincronización de Sistema Caótico de Lu

Continuando con la estimación de los estados, en las figuras 23, 24, 25 y 26, se muestra la sincronización de cada uno de los cuatro estados del sistema, teniendo en color negro la representación del estado del sistema y en color morado y con línea punteada la representación del estado estimado, cabe resaltar que el observador implementado a este sistema es demasiado preciso ya que al instante en que inicia el sistema original, inicia también el observador replicando la trayectoria en cada uno de los estados respectivamente.

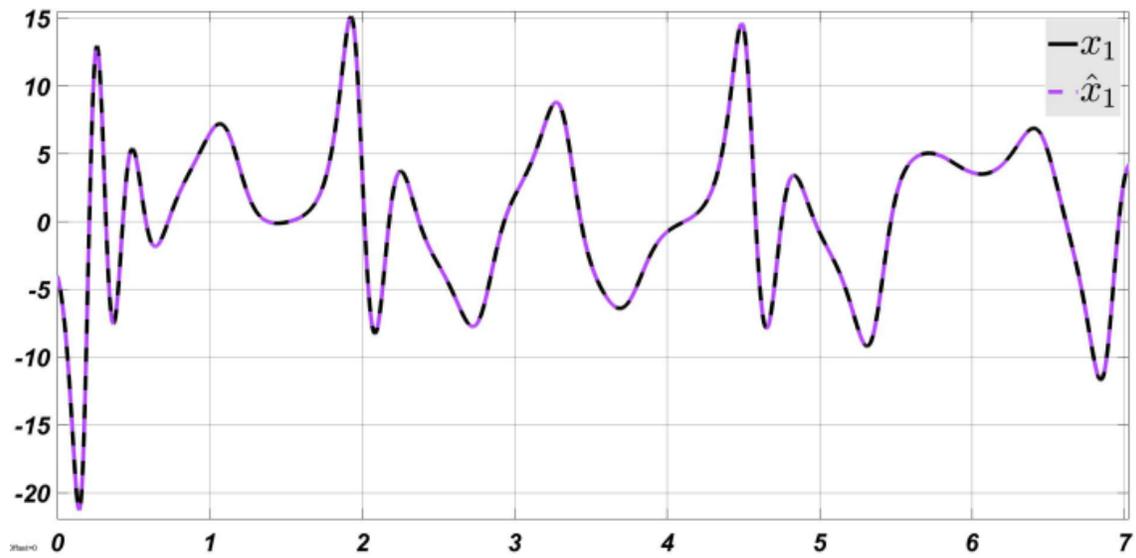


Figura 23: Estimación de estado UNO

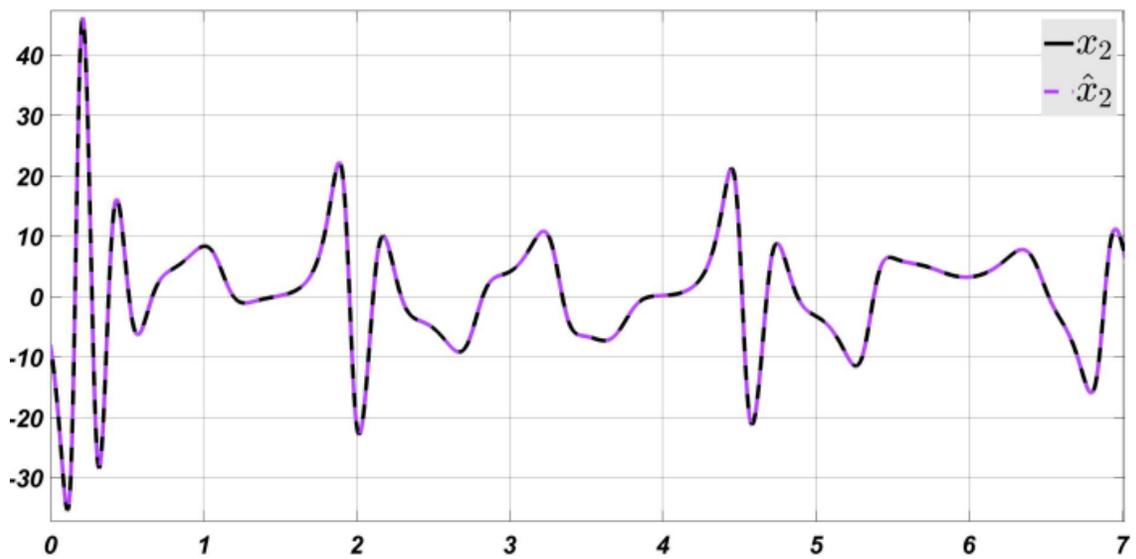


Figura 24: Estimación de estado DOS

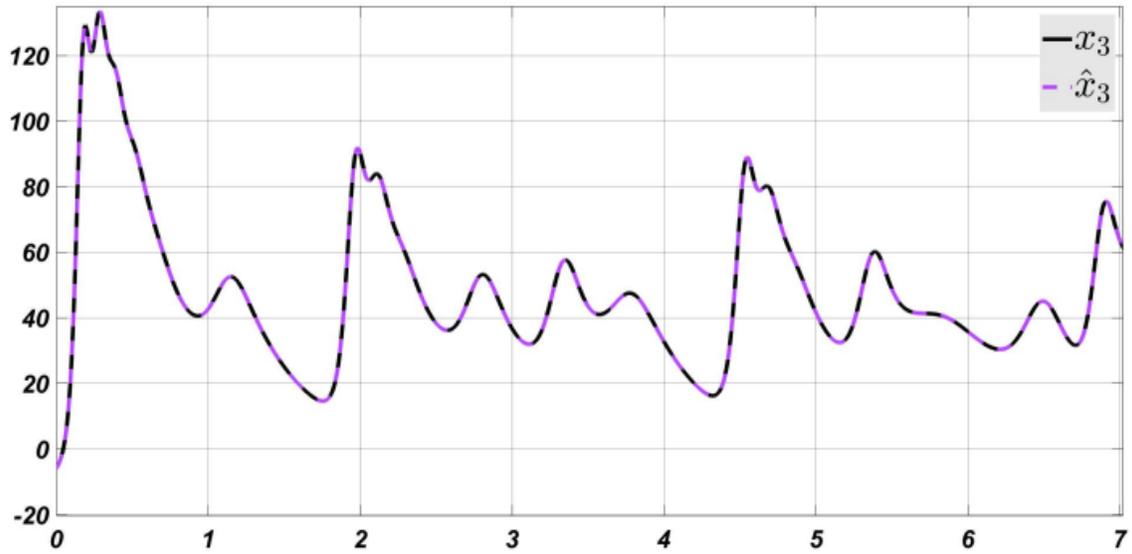


Figura 25. Estimación de estado TRES

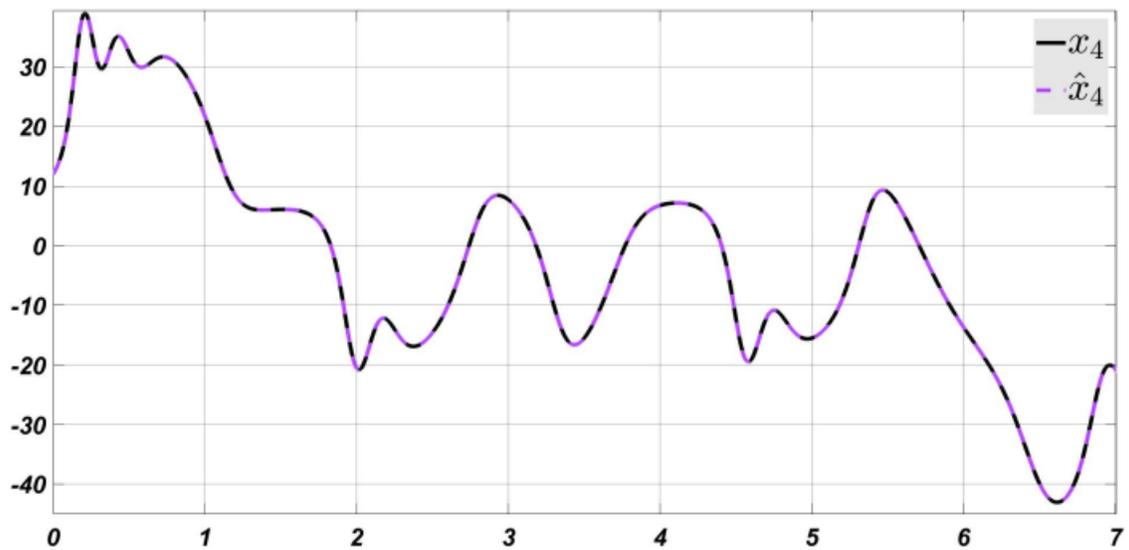
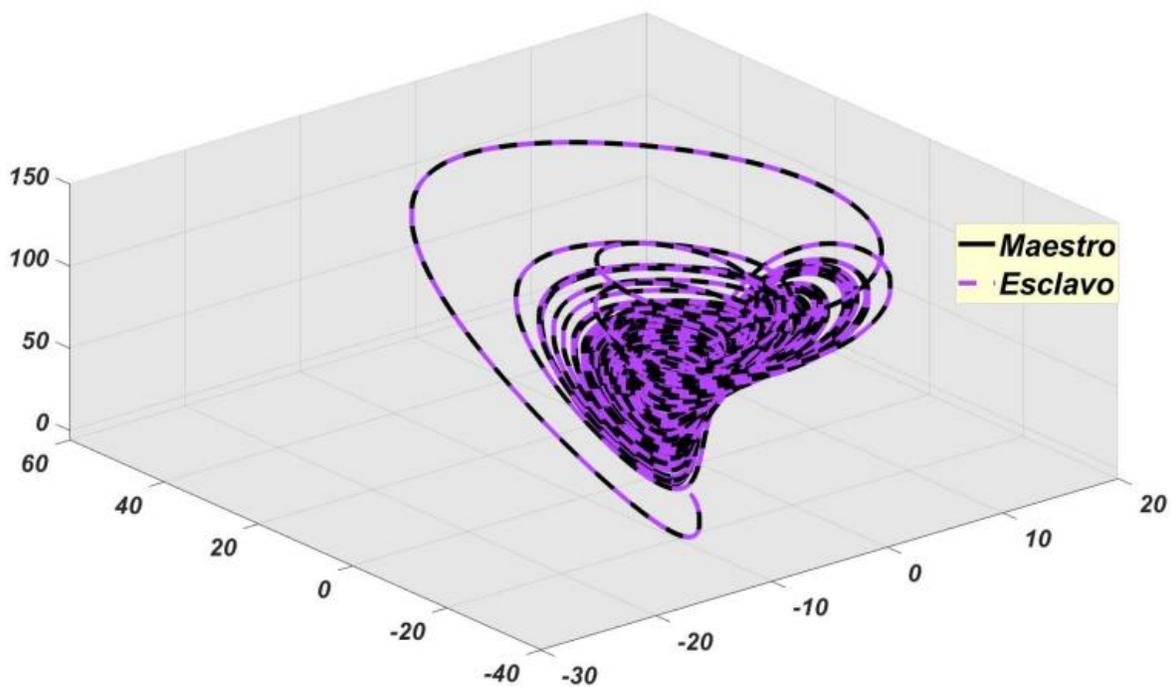


Figura 26: Estimación de estado CUATRO

Una vez que se logra obtener la estimación de los estados, se puede observar la sincronización del sistema. Recordando que este sistema es de cuatro estados, en la figura 27, se muestra en el inciso a) una forma de representar la sincronización de este sistema tomando en cuenta los estados utilizados para su simulación así como su orden, de la misma manera, así, en la figura 28 en el inciso b) se tiene la vista de otro fractal de Lu, que es parte de la misma sincronización del sistema caótico de Lu con el que estamos trabajando, pero considerando un cambio a sus estados al anterior mencionado, para los dos incisos se tiene un sistema de MAESTRO-ESCLAVO, el cual el Maestro representa el sistema original y en color negro con línea continua; el Esclavo representa el observador implementado a este sistema de color morado y con línea punteada para una mejor apreciación de la sincronización.



*Figura 27: (a) Considerando el orden de estados  $x_1, x_2, x_3$*

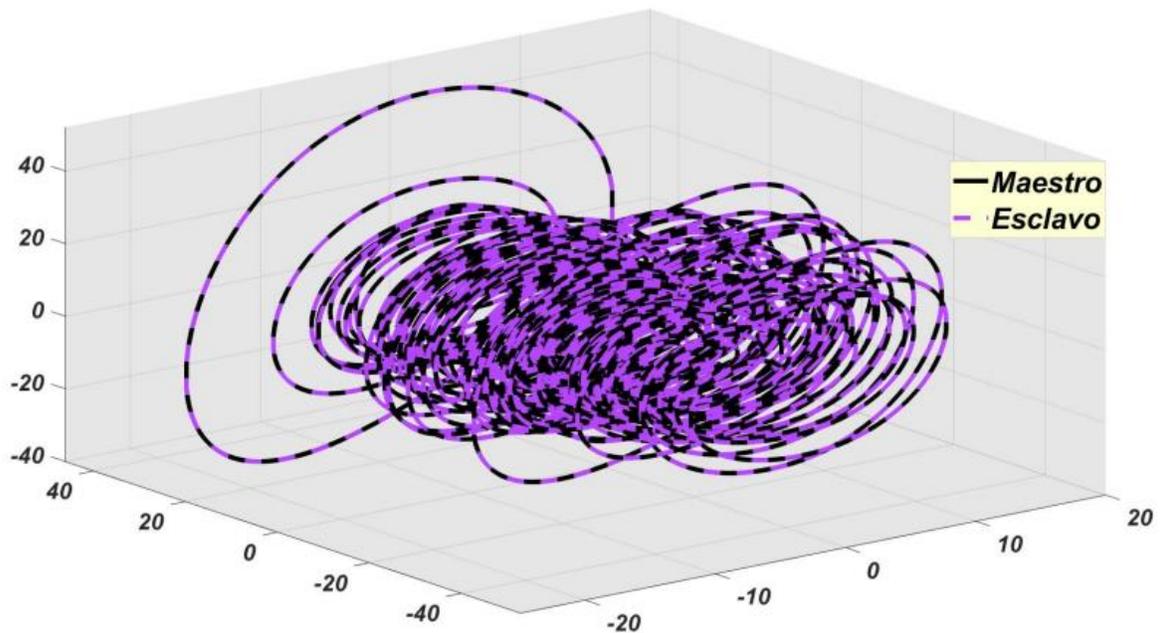


Figura 29: (b) Considerando el orden de estados  $x_1, x_4, x_3$

En la figura 29 se pueden observar las conexiones y herramientas utilizadas para formar el diagrama de bloques en el ambiente de Simulink en MATLAB para este sistema.

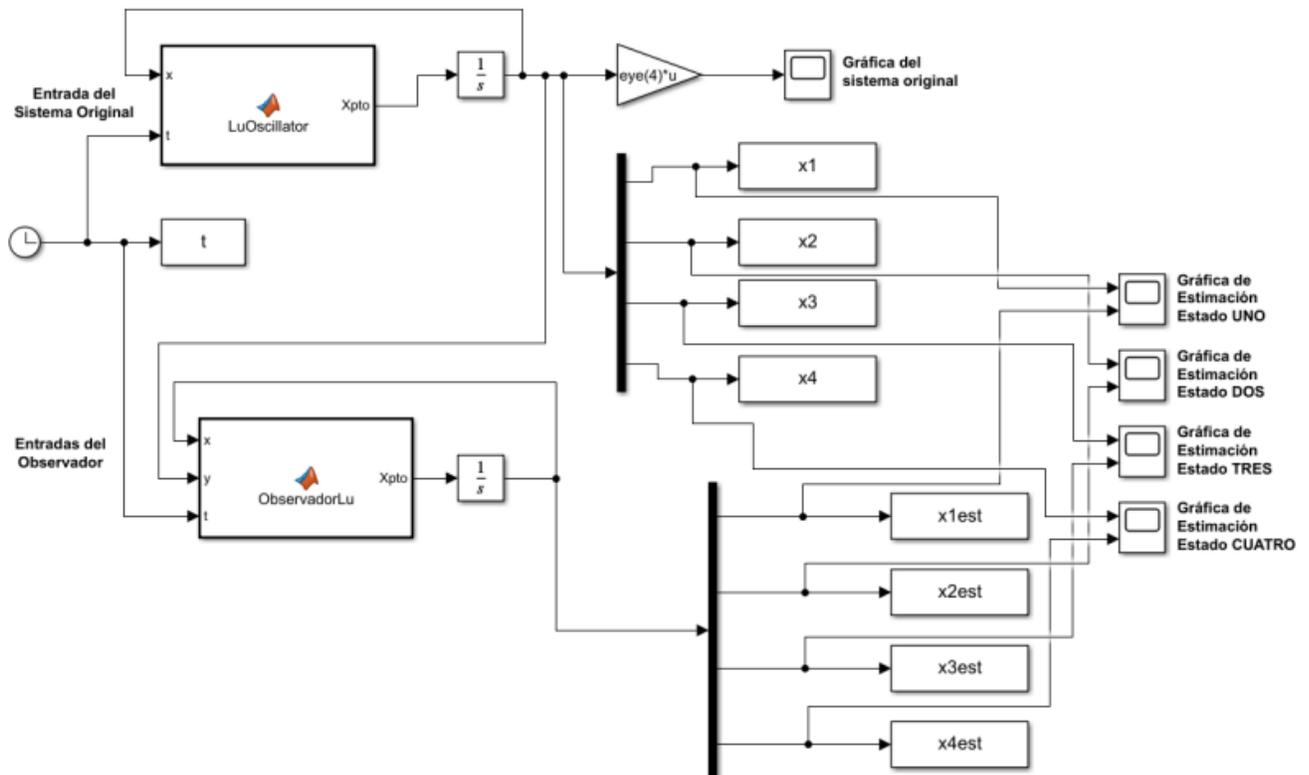


Figura 28: Diagrama de bloques Sistema Original – Observador

## Capítulo 7

### Análisis de Resultados

#### Sincronización y estimación de mensaje de Sistema Caótico de Rössler

##### Sincronización

Para este sistema se muestra en las figuras 30, 31 y 32, la estimación de los estados donde se logra apreciar que el observador implementado a este, al iniciar le toma unos instantes en seguir la trayectoria del sistema original, pero cabe recalcar que la estimación es muy buena. En mencionadas figuras se tienen los estados representados por una línea continua color negro y los estados estimados son representados por la línea segmentada en color rojo.

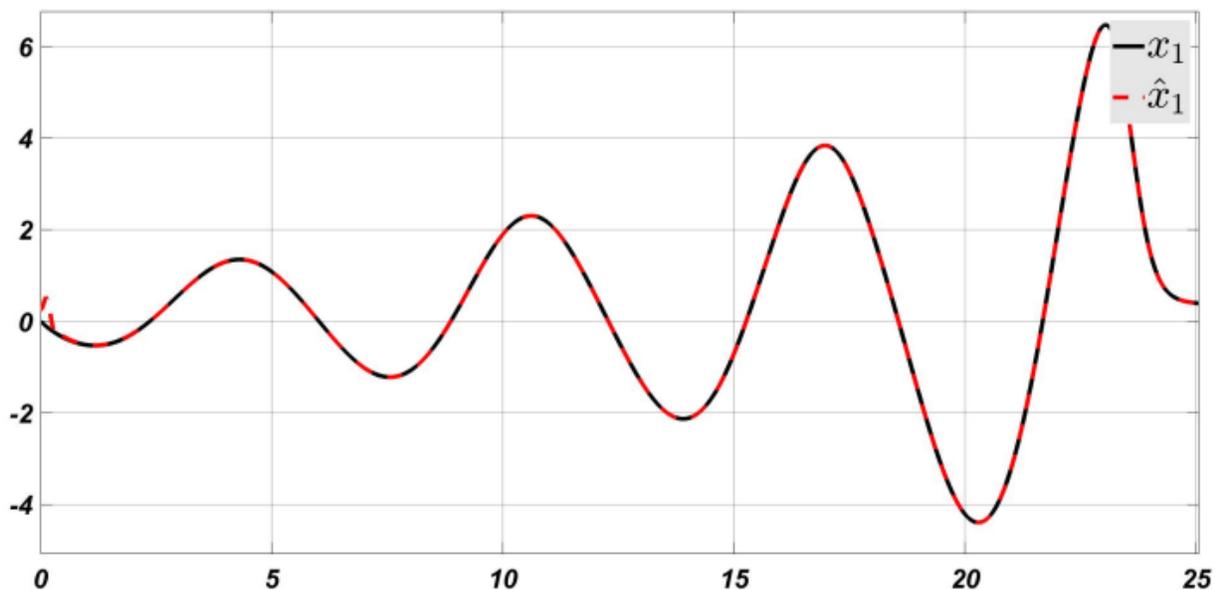


Figura 30: Estimación de estado UNO

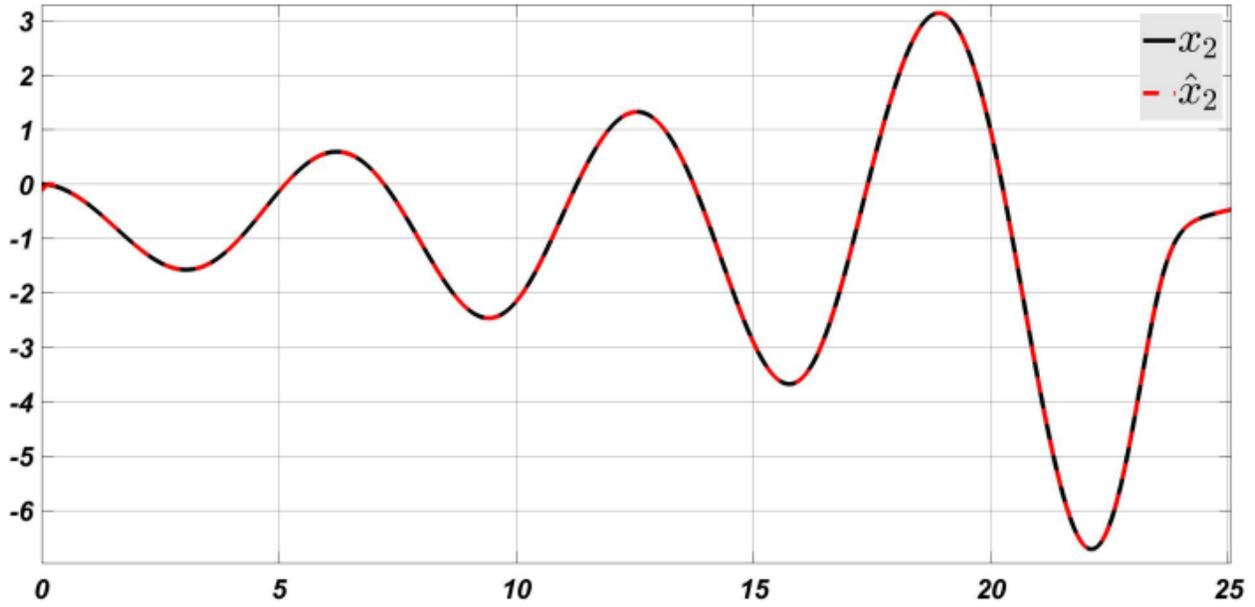


Figura 31: Estimación de estado DOS

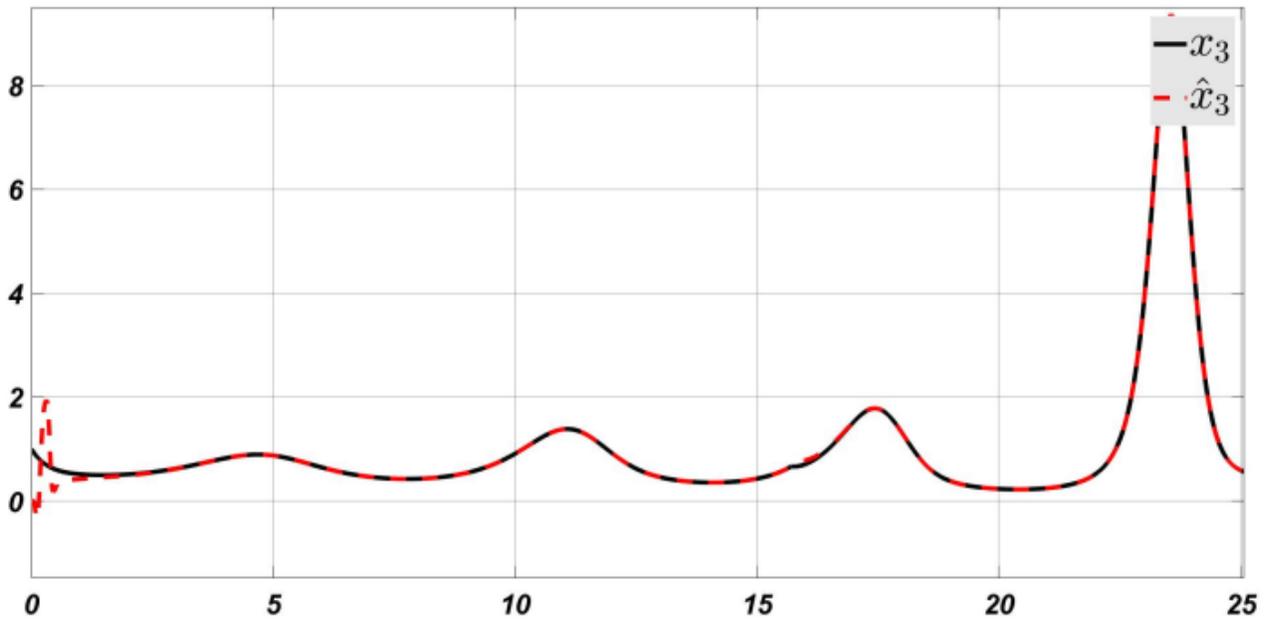
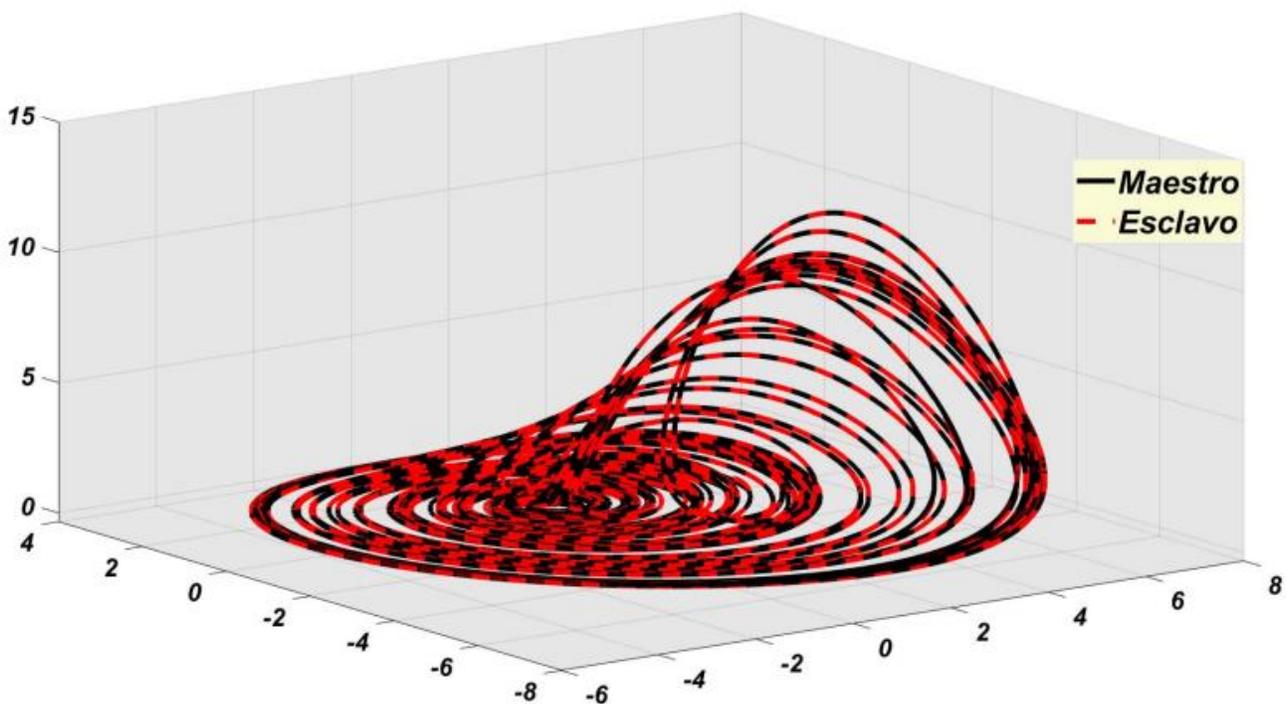


Figura 32: Estimación de estado TRES

En la figura 32, se ve más claro como en este estado, el observador tiene un estado de milésimas de segundos para la estimación de  $x_3$ , si bien no afecta a la sincronización del sistema, también se muestra como este estado tres no pasa por debajo de cero, que corresponde con una de las características que requiere el observador de Estado Extendido para ser implementado. Al tener los estados estimados correctamente es posible simular la sincronización del sistema caótico como se muestra en la figura 33, donde se aprecia el pequeño retardo, que él se milésimas de segundos, del observador hacia el sistema original. De igual forma que en los ejemplos pasados se tiene un sistema de MAESTRO-ESCLAVO donde el Maestro (en color negro con línea continua) representa el sistema caótico de Rössler y el Esclavo (en color rojo y con línea segmentada) representa el observador implementado, se aprecia una muy buena sincronización del observador con el sistema.



**Figura 33: Sincronización del Sistema Caótico de Rössler con un Observador de Estado Extendido**

A continuación, en la figura 34, se muestran las conexiones correspondientes y las herramientas utilizadas para su diagrama de bloques en el ambiente de Simulink en MATLAB, para llevar a cabo su posible simulación. Para este sistema, como ya vimos anteriormente, se implementó un cambio de estados, por lo que en el diagrama es posible notar que nuestra entrada y del observador corresponderá ahora al estado dos  $x_2$  del sistema original. Por lo tanto, debido a este cambio de estados, para observar la estimación del estado UNO, se compara  $x_1$  con  $\hat{x}_2$  y para obtener la estimación del estado DOS; se compara  $x_2$  con  $\hat{x}_1$ , para la estimación del estado TRES se comparan de manera normal;  $x_3$  con  $\hat{x}_3$ .

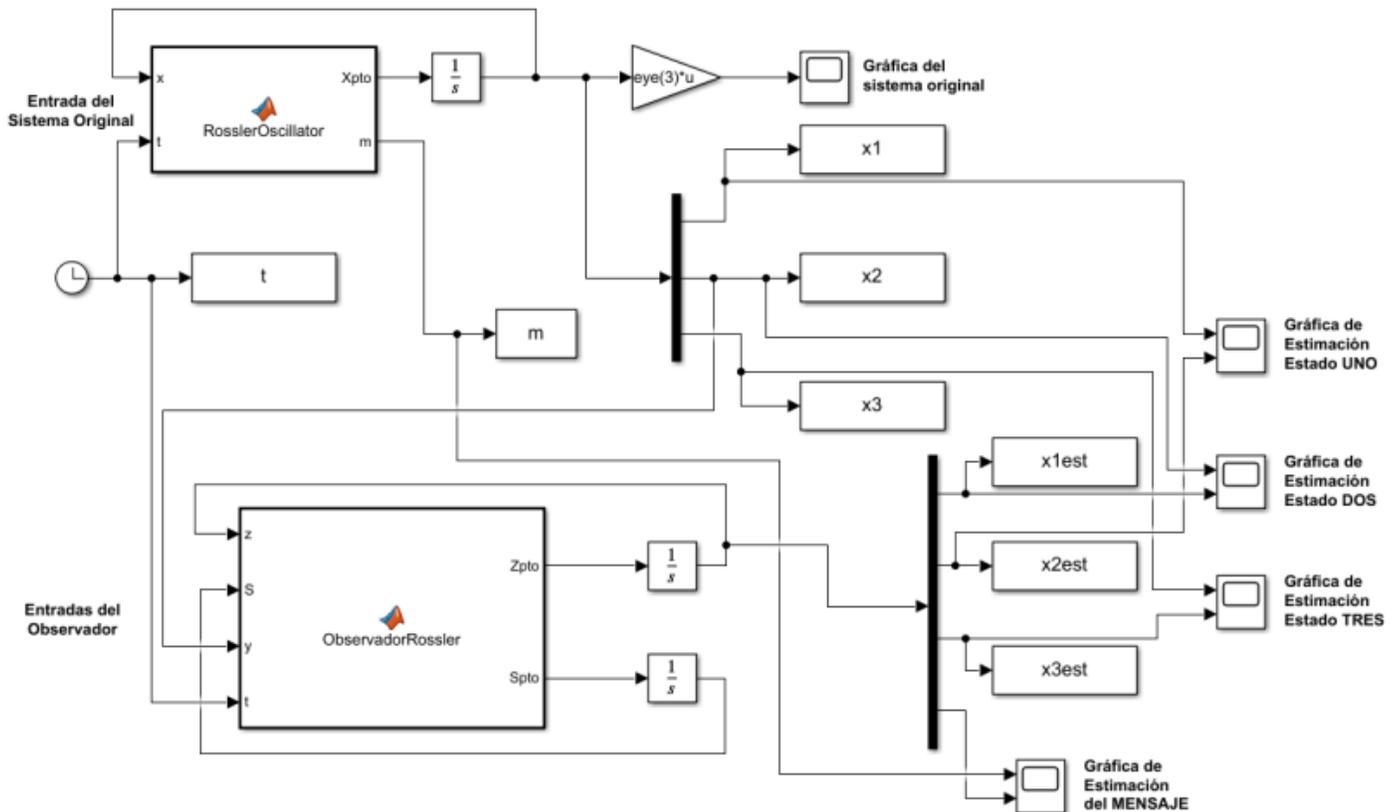


Figura 34: Diagrama de bloques Sistema Original – Observador

**Estimación de mensaje  $m$**

Para este ejemplo, en el sistema de Rössler se considera un mensaje  $m$  que representa una función mencionada anteriormente, donde por medio de la implementación de este observador, se logra estimar el mensaje que tiene este sistema. En la figura 35, se presenta la estimación del mensaje  $m$ , representada en color azul, y en color amarillo pertenece a el mensaje  $m$ , se obtiene un observador muy preciso ya que estima muy bien la forma escalonada de este mensaje, la finalidad de esto es que, si en un intervalo de tiempo,  $m$  llega a perder un segmento y continua, por medio del observador se conocerá esa pérdida de trayectoria, que dicho en otras palabras pertenece a una información, ya que la forma en que funciona el observador es que una vez que comienza, este va prediciendo el sistema original.

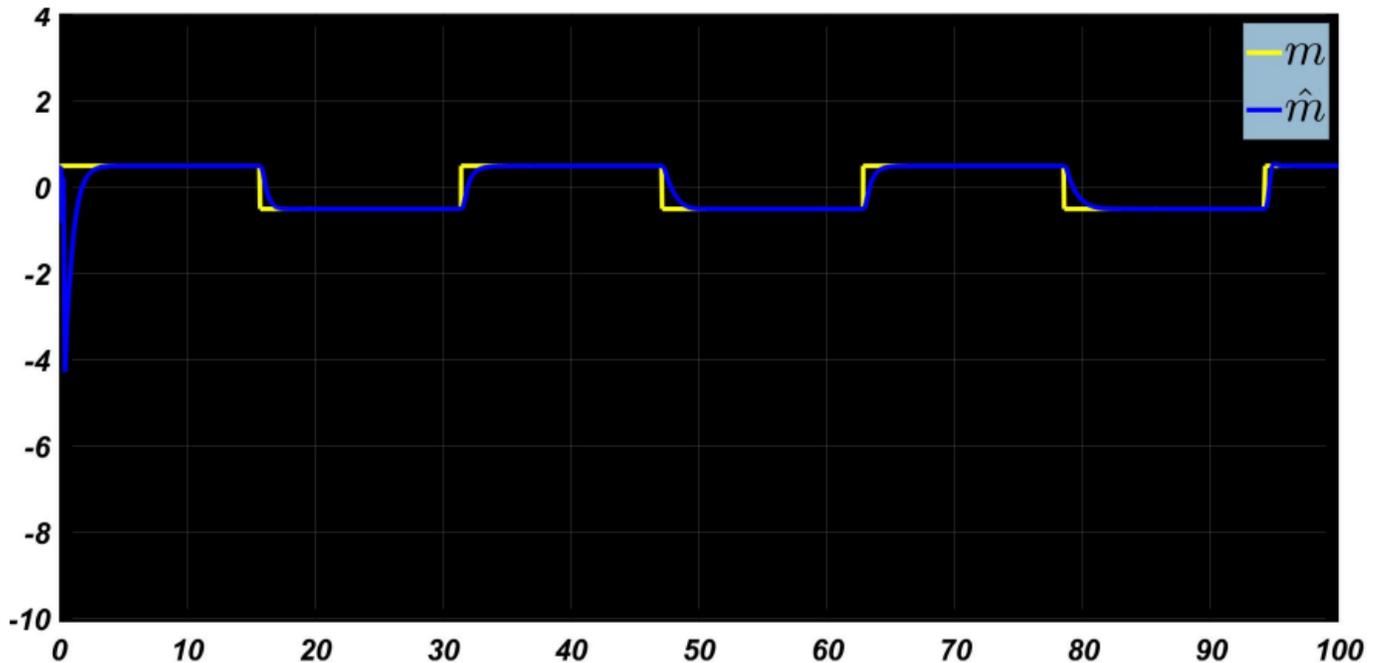


Figura 35: Estimación del mensaje  $m$  con Observador de Estado Extendido

## Sincronización y estimación de mensaje de Sistema Caótico de Genesio-Tesi

### Sincronización

Para la sincronización de este sistema se presenta en las figuras 36, 37 y 38, la estimación de cada uno de los estados respectivamente. Se representa en los tres estados del sistema a la estimación de cada uno de estos en color verde con línea punteada y en color negro con línea continua se tiene la representación de cada uno de los tres estados que pertenecen al sistema. En este ejemplo, el observador aplicado a este sistema fue de tipo alta ganancia de Besancon, el cual muestra un ligero retardo en la sincronización de algunos de sus estados, para ser más preciso, en las figuras 36 y 37, se aprecia más claramente este retardo al iniciar, aproximadamente de cinco segundos, después se logra simultanear con el sistema original y se mantiene, lo cual es indispensable para la estimación del mensaje.

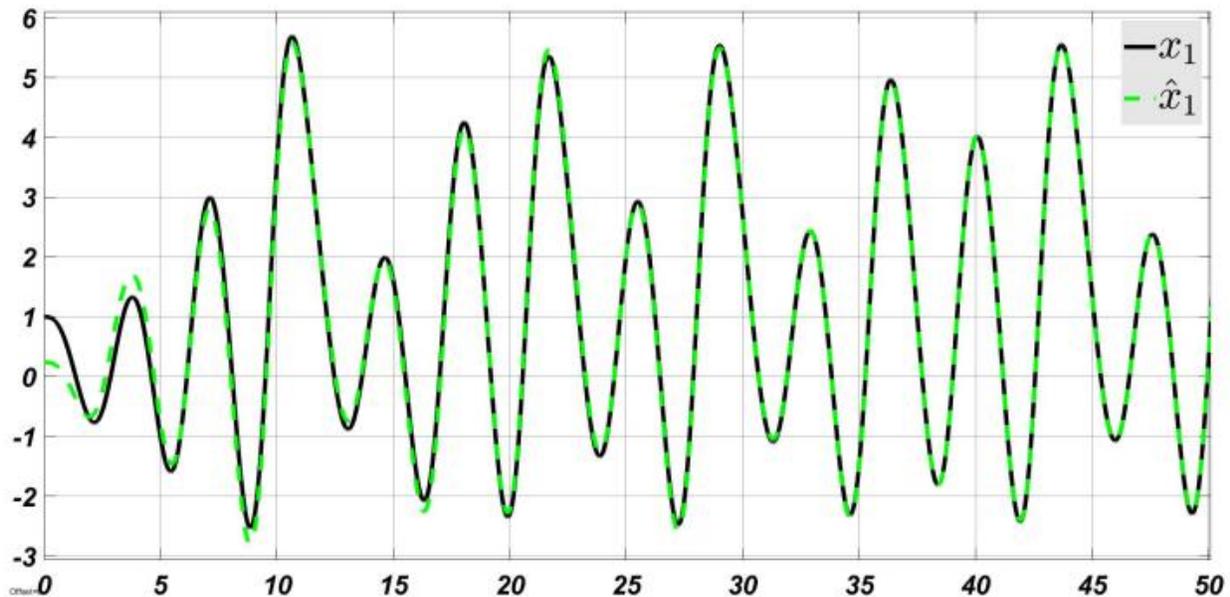


Figura 36: Estimación de estado UNO

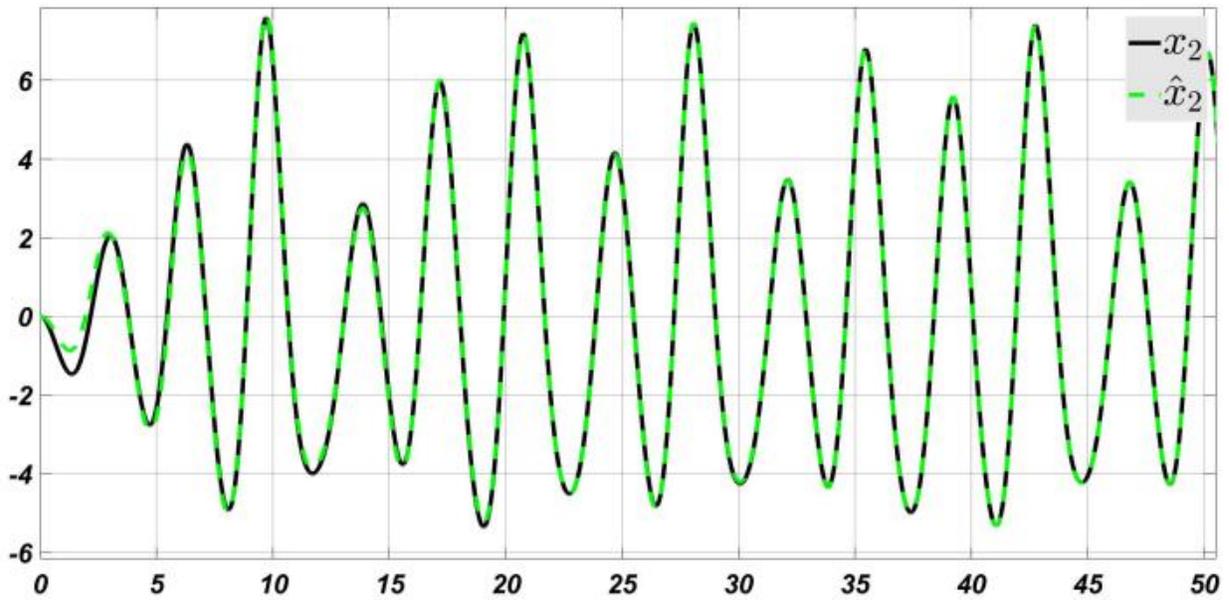


Figura 37: Estimación de estado DOS

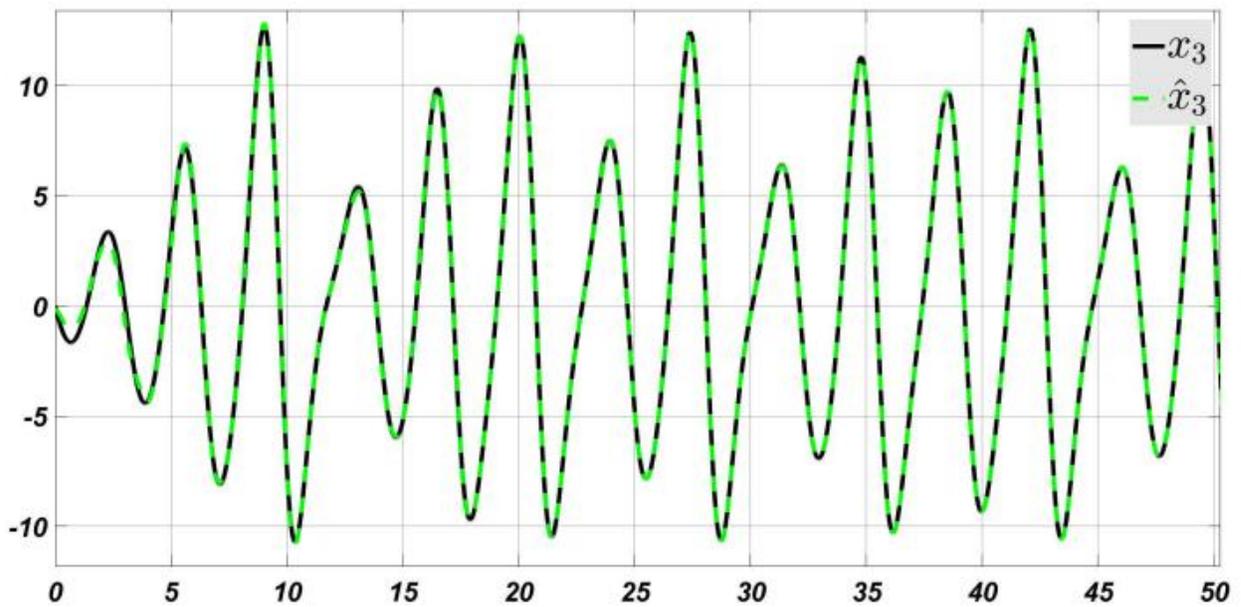
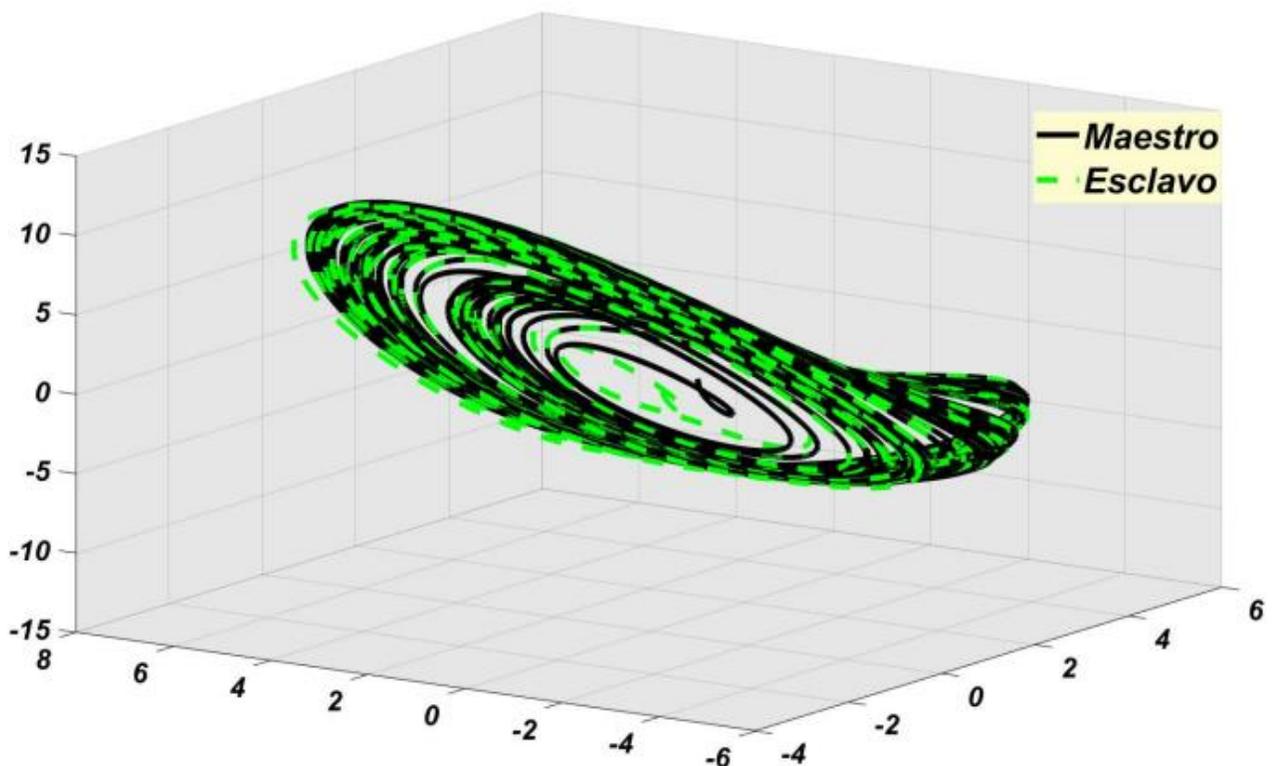


Figura 38: Estimación de estado TRES

Una vez estimados nuestros estados se tiene la sincronización del sistema completo, la cual se presenta en la siguiente figura 39, en la cual se muestra un sistema de MAESTRO-ESCLAVO, donde el Maestro (línea continua de color negro) es representado por el sistema original y el Esclavo (línea segmentada de color verde), que seguirá la trayectoria del Maestro, es representado por el observador implementado al sistema. En mencionada figura se logra ver el retardo que presentaban las estimaciones de los estados en las figuras 36 y 37, pero aun así se logra obtener la sincronización de manera exitosa.



**Figura 39: Sincronización del Sistema Caótico de Genesio con un Observador de Alta Ganancia de Besancon**

A continuación, para este sistema se tiene su diagrama de bloques en la figura 40, en el ambiente de Simulink en MATLAB, en donde se aprecian las conexiones necesarias, así como las herramientas utilizadas para llevar a cabo la correcta implementación del observador de alta ganancia al sistema caótico mostrado. Donde se resalta que la estimación para el estado tres este dado por  $\hat{y}$  y para observar  $m$  se compara con la salida  $\hat{\theta}$

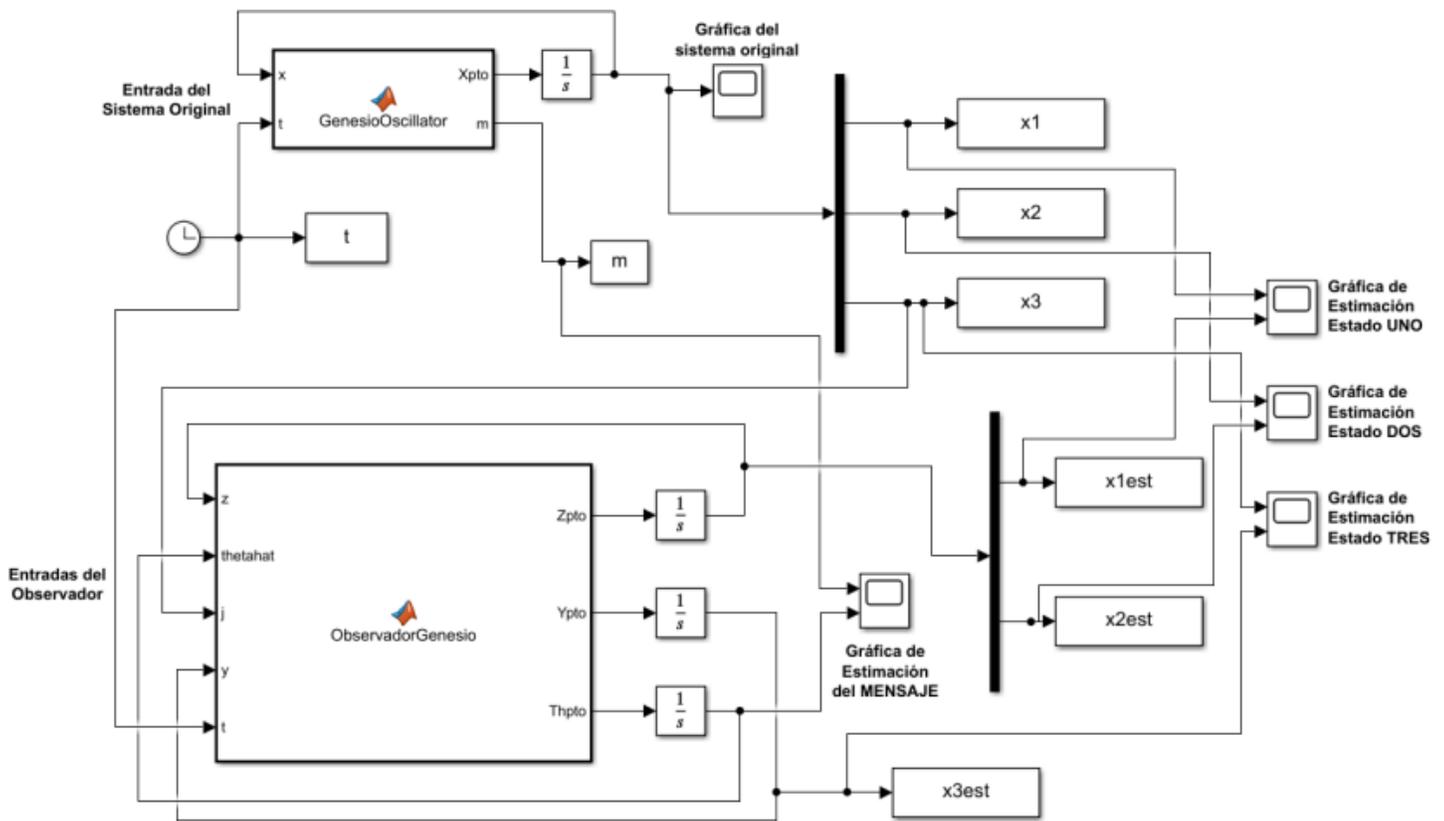
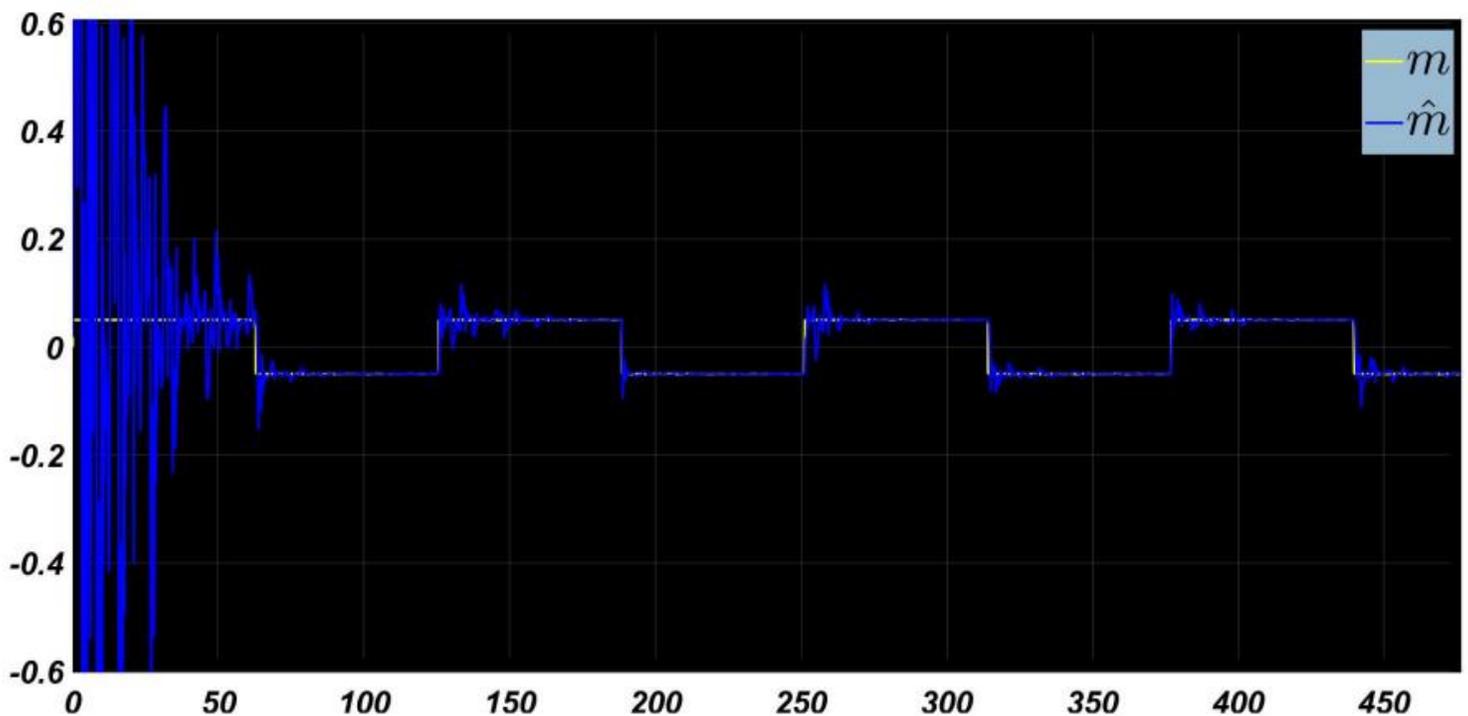


Figura 40: Diagrama de bloques Sistema Original – Observador

Estimación de mensaje  $m$  Para finalizar el presente reporte, se tiene la estimación de un mensaje, ahora con un observador de alta ganancia implementado al sistema caótico de Genesio. En la figura 41, se muestra como es la estimación de este mensaje en color azul y en color amarillo el comportamiento escalonado del mensaje, se aprecia como al principio para este ejemplo al observador le cuesta un poco la estimación, esto debido a que en algunos estados (figuras 36 y 37), se alcanza a notar como en la estimación de los mismos existe un pequeño retardo, esto llega a influir a la hora de la estimación del mensaje, en la figura mencionada se nota como el observador oscila demasiado durante los primeros cincuenta segundos del tiempo de simulación, después observamos como se estabiliza y estima de una buena manera a  $m$  en el transcurso del tiempo. En esencia, con la implementación de este observador hacia este sistema, es posible recuperar alguna parte del mensaje en caso de que tenga perdida de información.



**Figura 41: Estimación del mensaje  $m$  con de Alta Ganancia Besancon**

## **Capítulo 8**

### **Conclusiones y trabajo a futuro**

En este trabajo se abordó el análisis del comportamiento de algunos sistemas caóticos, así como la implementación de diferentes tipos de observadores hacia este tipo de sistemas no lineales. El principal enfoque fue comprender como funcionan estos observadores y sus principales funciones, entre las cuales este reporte se enfocó en la estimación de mensajes, ya que con esto es posible recuperar información en el envío y recepción si esta llegara a tener alguna pérdida. Se logró la sincronización de los sistemas caóticos con algunos de los observadores vistos y se adaptaron para cada uno de estos sistemas ya que cada uno es diferente, aun así, se logró obtener un observador para cada sistema caótico. Una vez que se consigue la sincronización de estos sistemas caóticos, se tiene la estimación de parámetros que manejan estos, de esta forma se puede tener una predicción de los sistemas originales y en esta ocasión a lo que se le dio enfoque fue a la estimación de mensajes en algunos de los sistemas caóticos vistos durante el verano de investigación. Durante el verano se logra obtener nuevas herramientas que favorecen al desarrollo tanto personal como profesionalmente ya que se manejaron softwares que son importante para el desarrollo tecnológico, así como también se tocaron temas que contribuyen al mismo.

Referente a los resultados obtenidos, la investigación aborda resultados positivos, mostrando por medio de dos ejemplos como es posible la sincronización del observador con el sistema original en este caso mandando un mensaje de 0 y 1, representado de manera escalonada en el software Simulink.

Para lograr la comprobación de esta sincronización entre el observador y el sistema con mensaje, en los resultados del primer ejemplo, se muestran primero la sincronización con cada uno de los estados por separados del sistema para enseguida presentar el como es que queda la estimación del mensaje la cual es muy exacta.

En el segundo ejemplo, al igual que en el primero, se muestra la estimación de los estados del sistema de manera individualmente donde en esta ocasión se muestra un pequeño retardo al principio de la estimación, el cual repercutirá en los resultados de la estimación del mensaje con ese observador para ese sistema.

En cuanto al trabajo a futuro, el estudio de los observadores es aplicable en casi cualquier área, especialmente en control automático y detección de fallas.

Hablando personalmente el trabajo de investigación presentado despertó mi interés por adentrarme a la investigación de algún otro proyecto relacionado con mi carrera y continuar creciendo tanto personal como profesionalmente.

## **Referencias bibliográficas**

- [1] Devaney, R. L. (2018). An introduction to chaotic dynamical systems. CRC press.
- [2] Murphy, R. P. (2010). Chaos theory. Ludwig von Mises Institute.
- [3] Rueppel, R. A. (2012). Analysis and design of stream ciphers. Springer Science & Business Media.
- [4] Kumar, S., Singh, C., Prasad, S. N., Shekhar, C., & Aggarwal, R. (2019). Synchronization of fractional order Rabinovich-Fabrikant systems using sliding mode control techniques. Archives of Control Sciences, 29.
- [5] Zhou, P., & Zhu, P. (2017). A practical synchronization approach for fractional-order chaotic systems. Nonlinear Dynamics, 89(3), 1719-1726.
- [6] Boubellouta, A., Zouari, F., & Boukroune, A. (2019). Intelligent fuzzy controller for chaos synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with input nonlinearities. International Journal of General Systems, 48(3), 211-234.
- [7] C, avu,sořglu, U., Panahi, S., Akg"ul, A., Jafari, S., & Kacar, S. (2019). A new chaotic system with hidden "attractor and its engineering applications: analog circuit realization and image encryption. Analog Integrated Circuits and Signal Processing, 98(1), 85-99.
- [8] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. Journal of atmospheric sciences, 20(2), 130-141.
- [9] H´enon, M. (1976). A two-dimensional mapping with a strange attractor. In The theory of chaotic attractors (pp. 94-102). Springer, New York, NY.
- [10] Feki, M. (2003). An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication. Chaos, Solitons & Fractals, 18(1), 141-148.
- [11] Zhu, F. (2008). Full-order and reduced-order observer-based synchronization for chaotic systems with unknown disturbances and parameters. Physics letters A, 372(3), 223-232.
- [12] Boizot, N., & Busvelle, E. (2007). Adaptive-gain observers and applications. In Nonlinear Observers and Applications (pp. 71-114). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [13] Dochain, D. (2003). State and parameter estimation in chemical and biochemical processes: a tutorial. Journal of process control, 13(8), 801-818.

- [14] Ali, J. M., Hoang, N. H., Hussain, M. A., & Dochain, D. (2015). Review and classification of recent observers applied in chemical process systems. *Computers & Chemical Engineering*, 76, 27-41.
- [15] Kuznetsov I. U. A. (2004). *Elements of applied bifurcation theory* (3rd ed.). New York: Springer.
- [16] Simmons, G. F. (1991). *Differential equations, with applications and historical notes* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill.
- [17] Cengel, Y. A. (1997). *Introduction to thermodynamics and heat transfer* (Vol. 846). New York: McGrawHill.
- [18] Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. (1960). *Transport Phenomena*. 212.
- [19] Besançon, G., Bornard, G., & Hammouri, H. (1996). Observer synthesis for a class of nonlinear control systems. *European Journal of control*, 2(3), 176-192.
- [20] Bornard, G., Couenne, N., & Celle, F. (1989). Regularly persistent observers for bilinear systems. In *New trends in nonlinear control theory* (pp. 130-140). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [21] Farza, M., M'Saad, M., Maatoug, T., & Kamoun, M. (2009). Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45(10), 2292-2299.
- [22] Bouraoui, I., Farza, M., Ménard, T., Abdennour, R. B., M'Saad, M., & Mosrati, H. (2015). Observer design for a class of uncertain nonlinear systems with sampled outputs—Application to the estimation of kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, 55, 78-87.

## **Anexos**

### **MATLAB**

Es un sistema de cómputo numérico que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Está disponible para las plataformas Unix, Windows, macOS y GNU/Linux.

Entre sus prestaciones básicas se hallan la manipulación de matrices, la representación de datos y funciones, la implementación de algoritmos, la creación de interfaces de usuario (GUI) y la comunicación con programas en otros lenguajes y con otros dispositivos hardware. El paquete MATLAB dispone de dos herramientas adicionales que expanden sus prestaciones, a saber, Simulink (plataforma de simulación multidominio) y GUIDE (editor de interfaces de usuario - GUI). Además, se pueden ampliar las capacidades de MATLAB con las cajas de herramientas (toolboxes); y las de Simulink con los paquetes de bloques (blocksets).

Es un software muy usado en universidades y centros de investigación y desarrollo. En los últimos años ha aumentado el número de prestaciones, como la de programar directamente procesadores digitales de señal o crear código VHDL.

En 2004, se estimaba que MATLAB era empleado por más de un millón de personas en ámbitos académicos y empresariales.



**Figura 42: Logo de MATLAB**

Las aplicaciones de MATLAB se desarrollan en un lenguaje de programación propio. Este lenguaje es interpretado, y puede ejecutarse tanto en el entorno interactivo, como a través de un archivo de script (archivos \*.m). Este lenguaje permite operaciones de vectores y matrices, funciones, cálculo lambda, y programación orientada a objetos. Además, MATLAB provee funciones y herramientas para visualizar datos en 2D y 3D

### Toolboxes

#### **MATLAB**

- Parallel Computing
- Math, Statistics, and Optimization
- Control Systems
- Signal Processing and Communications
- Image Processing and Computer Vision
- Test and Measurement
- Computational Finance
- Computational Biology
- Code Generation and Verification
- Application Deployment
- Database Connectivity and Reporting
- MATLAB Report Generator
- Text Analytics Toolbox™

#### **Simulink**

- Event-Based Modeling
- Physical Modeling
- Control Systems
- Signal Processing and Communications
- Code Generation
- Real-Time Simulation and Testing
- Verification, Validation, and Test
- Simulation Graphics and Reporting

## **Estabilidad, según el teorema de Lyapunov**

En sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad, como el de estabilidad entrada-salida, estabilidad interna, estabilidad por puntos de equilibrio.

La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov, un matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre. Un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es inestable. Un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito. Los teoremas de estabilidad de Lyapunov dan condiciones suficientes para estabilidad de puntos de equilibrio.

### ***El Teorema de Estabilidad de Lyapunov***

Considerando el sistema estacionario.

$$\dot{x} = f(x)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapeo localmente Lipschitz desde un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $x_e \in D$  es un PE de (1), es decir  $f(x_e) = 0$ . Vamos a caracterizar y estudiar la estabilidad de  $x_e$ . Por conveniencia, vamos a asumir que  $x_e = 0$  (esto no nos hace perder generalidad porque, si no es así, definimos  $y = x - x_e$  y trabajamos con la ecuación  $\dot{y} = g(y)$ , donde  $g(y) = f(y + x_e)$ , que tiene un equilibrio en el origen.)

**Definición 1.** El PE  $x = 0$  de (1) es estable, si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon)$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

El PE  $x = 0$  de (1) es *inestable* si no es estable.

El PE  $x = 0$  de (1) es *asintóticamente estable* (AE) si es estable y  $\delta$  puede elegirse tal que

$$\|x(0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{0}$$

Los tres tipos de estabilidad se pueden ver en la ecuación del péndulo de masa unitaria:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -bx_2 - \frac{g}{l} \text{sen } x_1 \end{cases}$$

Los PE son  $(0, 0)$  y  $(\pi, 0)$ . Considerando que no hay fricción, o sea tomando  $b = 0$ , las trayectorias en el entorno del primer PE son órbitas cerradas. Empezando suficientemente cerca del PE se puede garantizar que las trayectorias van a permanecer en cualquier bola preespecificada alrededor del PE. Por lo tanto, el PE es estable. No es AE, sin embargo, porque las trayectorias que comienzan fuera del PE nunca tienden a él.

La Definición 1 tiene como condición implícita la existencia de la solución para todo  $t \geq 0$ . Esta propiedad de existencia global (en el tiempo) de la solución no está garantizada por la Lipschitzidad local de  $f$ . Sin embargo, las condiciones adicionales que requiere el Teorema de Lyapunov van a garantizar la existencia global (en el tiempo) de la solución.

En 1892, Lyapunov mostró que algunas otras funciones, no sólo la energía, pueden usarse para determinar la estabilidad de un PE. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene el origen. La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (1) está dada por

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

**Teorema 1** (Lyapunov). Sea el origen  $x = 0$  un PE de (1) y sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene el origen. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad D$$

entonces  $x = 0$  es estable. Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\}$$

entonces  $x = 0$  es **AE**.