

# **INTRODUCCION**

## INTRODUCCIÒN

Existen métodos tradicionales de la evaluación de los sistemas hidráulicos y de bombas centrífugas (turbomáquinas), en lo que generalmente se calcula la capacidad de operación de la instalación, siendo esta, función de las capacidades particulares de los elementos que componen el sistemas, otros como el Método de Balance de Energía según el teorema de Bernolli (1ª ley de la termodinámica); basada en las pérdidas de la capacidad de trabajo de un sistema debidas a las irreversibilidades de los procesos que lo integran, de tal forma, que la suma de la capacidad de trabajo (energía), en los elementos es igual a la pérdida total de capacidad de trabajo del sistema, de esta manera se conocen los procesos que presentan una pérdida significativa las cuales al ser mejoradas participan directamente en la mejora del sistema. Este último tratamiento enfoca su estudio a la irreversibilidad debida a una fuente, el rozamiento debido al flujo en movimiento a través de los conductos cerrados (tuberías).

La eazon del presente proyecto de investigación es la de efectuar evaluaciones más efectivas de la energía consumida en los sistemas hidráulicos de bombeo por lo que es necesario contar con una herramienta de calculo que permita evaluar los costos energéticos de operación, las cuales son aplicables al proceso enseñanza – aprendizaje pudiendo ser utilizada en las materias de mecánica de fluidos, sistemas y máquinas , materias indispensables en la formación de los alumnos de Ingeniería Mecánica y afines a ella.

Los objetivos específicos de este proyecto de investigación son:

- 1.- Realizar un modelo matemático que simule el comportamiento hidráulico de un sistema de bombeo.
- 2.- Calcular las energías asociadas al sistema hidráulico y así como también al de la bomba.
- 3.- Encontrar el punto óptimo de operación.
- 4.- Determinar la eficiencia total del sistema.

# **CAPITULO 1**

## **CAPITULO I GENERALIDADES DEL INSTITUTO TECNOLOGICO DE MINATITLAN**

### **1.1 Datos Generales**

Dirección: Bulevar Institutos Tecnológicos s/n Colonia: Buena Vista Norte Municipio de Minatitlán, Entidad Federativa: Veracruz, Código Postal 96868 Apartado Postal 777 Teléfonos 01-922 2 43 39 y 2 543 36 Internet: [www.itmina.edu.mx](http://www.itmina.edu.mx)

### **1.2 Reseña Histórica del Instituto Tecnológico de Minatitlán**

Existe una reseña histórica que se encuentra en el sitio web del Instituto Tecnológico de Minatitlán y comenta lo siguiente: El constante empeño del gobierno federal durante la década de los setentas para incrementar la preparación de la juventud del país, y el afán de descentralizar la enseñanza especializada, ha dado como resultado la proliferación de escuelas de educación superior. El instituto Tecnológico de Minatitlán, fue producto de minucioso y exhaustivo estudio socioeconómico en el sureste del país que determinó la necesidad de construirlo en la región comprendida entre Minatitlán, Coatzacoalcos, Villahermosa y Acayucan, poblaciones en ese entonces carentes de instituciones de estudios superiores en la rama tecnológica.

El C. Lic. Luis Echeverría Álvarez, candidato a la presidencia de la República, al realizar campaña presidencial en el año de 1970 y encontrándose en una junta de trabajo en el teatro auditorio de la Sección N° 10 del S.T.P.R.M., al escuchar la petición del Dr. Esteban Hernández, director en ese entonces de la Escuela Secundaria Técnica Agropecuaria, amenazada con desaparecer, provocó en él una gran inquietud a lo que respondió: “Antes de que concluyera de hablar el Dr. Esteban Hernández, antes de que acabara de exponernos el problema que trató mandé a hablar a la Ciudad de México con funcionarios amigos, a efectos de rogarles me dieran información sobre el asunto. No quiero en estos momentos lanzar una opinión y menos un compromiso, pero aprovecho la oportunidad para rogar a los distinguidos elementos técnicos aquí

presentes, que me ayuden a formular, dentro del Instituto de Estudios Económicos, Políticos y Sociales de nuestro partido, un proyecto tecnológico en esta región, que no solo prepare jóvenes con aptitudes para ser empleados, sino también a obreros calificados para servir en este emporio industrial que además, tenga una sección importante dedicada a los estudios ganaderos y de los campesinos de todo el sureste de México”.

Más tarde el entonces candidato volvió a expresar: “Yo quiero contraer ante ustedes el compromiso, siempre que me aporten sus conocimientos, sus luces y su voluntad... pero vamos a poner desde luego manos a la obra.

La exhortación tuvo respuesta inmediata los señores industriales, representaciones sindicales, el entonces gobernador del estado Lic. Rafael Murillo Vidal, el ex gobernador C. Lic. Marco Antonio Muñoz y algunos particulares más, aportaron cantidades de dinero que permitieron la creación del Tecnológico. Fue nombrado un patronato pro-construcción que presidió el Ing. Antonio Dovalí Jaime, para que administrara el dinero donado. A las 10:45 del día 18 de marzo, el Lic. Luis Echeverría Álvarez, presidente de la República, se hizo presente en los terrenos del km 2777 de la carretera Transísmica, allí se colocaría la primera piedra de lo que sería el Instituto Tecnológico Regional. En este acto el presidente de la República menciona: “Aquí mismo, siendo candidato presidencial contraí el compromiso de poner la primera piedra de una gran institución técnica, destinada a la juventud del sur de Veracruz, a la juventud de toda la nación, de aquí podrá prepararse con la eficiencia técnica que la patria necesita. En asamblea pasada, un distinguido conjunto de empresarios mexicanos, la institución Petróleos Mexicanos y el Gobierno de Veracruz, contrajeron el compromiso de contribuir a este Instituto Tecnológico, cuya primera piedra colocaré en algunos minutos, pero sepa la juventud del sur, que esta piedra constituye para mí , una promesa de que el Instituto habrá de construirse pronto y eficazmente y aunque los problemas inherentes de la construcción no nos permitieran inaugurarlos dentro de pocos meses, el próximo 18 de marzo vendré, aunque sea solo unos instantes a descubrir la placa que inicie las actividades de este Instituto. Dedicamos este Instituto, sobre todo, a los hijos de los trabajadores y los campesinos para que se preparen aquí con la convicción

revolucionaria, pensando que la patria no solo se edifica con buenos deseos, sino con los esfuerzos perseverantes de los individuos preparados. “QUE SEA POR VERACRUZ Y POR MÉXICO.” De esta manera nace el Instituto Tecnológico regional “Nenito Juárez” de Minatitlán, Ver., abriendo sus puertas a la juventud estudiosa de la región el 17 de septiembre de 1972.

### 1.3 Ubicación

El Instituto Tecnológico de Minatitlán está ubicado en la ciudad de Cosoleacaque, Municipio del estado de Veracruz, México. Es parte integrante de un total de 96 Institutos tecnológicos que se encuentran distribuidos por los 32 estados del país.



Figura 1.1.- Ubicación del Instituto Tecnológico de Minatitlán, en México



Figura 1.2.- Ubicación del Instituto Tecnológico de Minatitlán, en Veracruz

El Instituto Tecnológico de Minatitlán se localiza en el extremo sureste del Estado de Veracruz, en la Cuenca Salina del Istmo de Tehuantepec, a 32 kilómetros de la desembocadura del Río Coatzacoalcos en el Golfo de México, su ubicación se encuentra en la ciudad de Minatitlán.

#### **1.4 El organigrama del Instituto Tecnológico de Minatitlán**

El Organigrama de Instituto Tecnológico de Minatitlán cuenta con una estructura del sistema administrativo dividido en tres subdirecciones

Figura 1.3.- Organigrama del Instituto Tecnológico de Minatitlán

## **1.5 La oferta Educativa del Instituto Tecnológico de Minatitlán**

En la actualidad, el Instituto ofrece 7 opciones a nivel licenciatura, 3 especialidades y 3 postgrados. Licenciaturas: Ingeniería Química, Ingeniería Industrial, Ingeniería Ambiental, Ingeniería Electrónica, Ingeniería electromecánica, Ingeniería en Sistemas Computacionales, Licenciatura en Administración. Postgrados: Maestría en Ingeniería Ambiental, Maestría en Ingeniería Electrónica, Maestría en Ingeniería Energética. Con esta oferta educativa, el Instituto satisface la demanda de educación tecnológica en la región sur de Veracruz, ya que sus alumnos provienen de los municipios de Acayucan, Aguadulce, Coatzacoalcos, Cosoleacaque, Chinameca, Hueyapan de Ocampo, Hidalgotitlán, Isla, Ixhuatlán del Sureste, Jáltipan, Jesús Carranza, Juan Díaz Cobarrubias, Las Chopas, Mecayapan, Minatitlán, Moloacán, Nanchital, Oluta, Oteapan, Pajapan, Rodríguez Clara, Sayula, San Juan Evangelista Soconusco, Soteapan, Texistepec, Zaragoza y algunos otros de los estados de Oaxaca y Tabasco, además de que, encontrándose en el corredor industrial más grande de América Latina, al integrarse sus egresados al sector laboral constituyen el desarrollo tecnológico, económico y social del entorno.

## **1.6 Política de calidad y objetivos del Instituto Tecnológico de Minatitlán**

### **Misión**

Ser una institución de educación superior tecnológica de calidad, que promueve el desarrollo nacional en el ámbito de la globalización

### **Visión**

Ofrecer servicios educativos con calidad para formar profesionales que contribuyan al desarrollo integral de la sociedad.

La organización establece el compromiso de implementar todos sus procesos orientándolos hacia la satisfacción de sus Alumnos sustentada en la Calidad del

Proceso Educativo, para cumplir con sus requerimientos mediante la eficacia de un Sistema de Gestión de la Calidad y de mejora continua, conforme a la norma ISO 9001:2000/NMX-CC9001-IMNC-2000.

### **Certificación en la norma ISO 9001:2000**

En el año 2004, iniciamos un Sistema de gestión de la calidad, considerando la norma internacional ISO 9001:2000, con el propósito de lograr para el año 2005, la certificación de nuestros procesos.

A la fecha el Instituto cuenta con un Manual del Sistema de gestión de la calidad, basado en esta norma internacional. En el proceso se han formado auditores internos que han realizado ya varias acciones de auditoría a los procesos especificados en el manual. Así mismo el semestre de enero-junio 2005, recibimos auditorías externas que se complementarán con las realizadas en el periodo agosto-diciembre 2005. Hasta lograr la CERTIFICACIÓN, lo que sin duda significará un avance hacia la consolidación de nuestra institución.

### **Objetivos**

- ✚ Promover el desarrollo integral y armónico del educando en relación con los demás, consigo mismo y en su entorno mediante la formación que le permita forjarse una mente y un cuerpo sano.
- ✚ Atender la demanda superior y de postgrado con alta y reconocida calidad, en las áreas industrial, agropecuaria, y de servicios en la región sur de Veracruz.
- ✚ Compartir con la comunidad la cultura científica, técnica y humanista, así como la recreación y el deporte.
- ✚ Ofertar perfiles profesionales que integren las necesidades específicas de la región, para que el egresado contribuya de manera satisfactoria al desarrollo de cada comunidad, en especial en la planta productiva.

- ✚ Actualizar permanentemente al personal docente y administrativo para favorecer el desarrollo armónico de toda la comunidad tecnológica.
- ✚ Ofrecer a los sectores productivos y educativos; una amplia gama de servicios en las esferas de la investigación y el desarrollo científico y tecnológico de organización del trabajo, destacando los de formación, capacitación y actualización profesional; la innovación, la diversificación, la adaptación, la adquisición y la difusión tecnológica.

### **1.7 Estructura organizacional del Instituto Tecnológico de Minatitlán**

El Instituto Tecnológico debe desarrollar las actividades académicas con calidad, de tal manera que responda a las necesidades del entorno, de acuerdo a la oferta de carreras de que dispone. Para el cumplimiento de estas actividades, se deben conjugar de manera funcional y organizada todos los recursos humanos y materiales, financieros y de servicios de que se dispone.

Por otro lado, es innegable que la infraestructura física y el equipamiento con que cuenta, son parte fundamental para que se lleve a cabo el proceso enseñanza aprendizaje.

El Instituto tecnológico de Minatitlán cuenta con 27 edificios construidos en una superficie total de 128,090.71 m<sup>2</sup>. Los edificios albergan oficinas administrativas, aulas, laboratorios, talleres etc.

A continuación se presenta una relación de los edificios que integran el Instituto Tecnológico de Minatitlán, con la finalidad de que se facilite la localización de aulas, laboratorios, talleres, oficinas, etc.

EDIFICIO ACA Subdirección Académica, División de Estudios Profesionales, Departamento de Ciencias Básicas, Departamento de Ciencias Económico Administrativas, Departamento de Desarrollo Académico y Sala de Titulación.

EDIFICIO ACB	Dirección, Subdirección de Servicios Administrativos, Sala de Juntas, Subdirección de Planeación, Departamento de Comunicación y Difusión, Departamento de Planeación y Presupuestación, Departamento de Recursos Financieros, Departamento de Recursos Humanos, Departamento de Servicios Escolares y Departamento de Gestión Tecnológica y Vinculación.
EDIFICIO A	Planta Alta: Aulas 1, 2, 3 y 4. Planta Baja Aulas 5, 6 y 7 Departamento de Ingeniería Química y Bioquímica.
EDIFICIO B	Salón de Artesanías, Delegación Sindical, Laboratorio de Análisis Clínicos Consultorio Médico y Aula 8.
EDIFICIO C	Aulas 9, 10, 11, 12 y 13.
EDIFICIO D	Aulas 14, 15, 16 y Sanitarios
EDIFICIO D	Laboratorio de Química general, Laboratorio9 de Investigación del medio Ambiente.
EDIFICIO E	Aulas 17, 18, 19 Y 20
EDIFICIO F	Sala Audiovisual, Planta Alta: aulas 21, 22 23, 24. Planta Baja: aulas 25 y 26
EDIFICIO F Aulas	Laboratorio de Química Analítica, División de Estudios de Postgrado, de postgrado1 y 2.
EDIFICIO G	Local para equipo electroneumático, Local para investigación de postgrado y Comité de Alumnos.
EDIFICIO G	aulas 27, 28, 29 y 30. Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
EDIFICIO H	Departamento de Ingeniería Metal-Mecánica, Aula de Bombas y Taller de Electrónica.
EDIFICIO H	Planta Alta: Aulas 31, 32, 33, 34 y 35 Planta Baja: Aulas 36, 37, 38 y 39.
EIFICIO I	Planta Alta: Aulas 40, 41, 42, 43 y 44 Planta Baja: Aulas 45, 46, 47 y Laboratorio de idiomas.

EDIFICIO J	Departamento de recursos Materiales y Servicios, Departamento de Mantenimiento de Equipo y Almacén..
EDIFICIO J	Laboratorio de Instrumentación Digital, Laboratorio de Instrumentación Neumática, Departamento de Actividades Extraescolares y aula 48.
EDIFICIO M	Cafetería.
EDIFICIO O	Centro de Información.
EDIFICIO Q	Laboratorio de Análisis Industriales.
EDIFICIO S	Departamento de Sistemas y Computación, Laboratorio de Cómputo.
EDIFICIO V	Cubículos para docentes.
EDIFICIO X	Laboratorio de Química Pesada.
EDIFICIO X1	Cuarto de Caldera
EDIFICIO Y	Departamento de Ingeniería Industrial y Laboratorio de Ingeniería Industrial.
EDIFICIO I.E.1	Impresos, Cuarto Oscuro, Microprocesadores, Analógica Avanzada y Potencia.
EDIFICIO I.E.2	Robótica, Fibra Óptica, Computación Digital Avanzada e Investigación

Además de estos edificios mencionados, se cuenta con áreas deportivas, áreas verdes Estacionamientos u una Plaza Cívica.

Por otro lado, para responder con la calidad y eficiencia al proceso educativo y a las expectativas sociales, el I.T.M. cuenta con avanzadas formas de organización y administración del trabajo a través, de una estructura por subdirecciones conformada por departamentos. Toda la información relacionada con la institución se obtuvo de la página [www.itmina.edu.mx](http://www.itmina.edu.mx)

## CAPÍTULO II

## CAPITULO II DISEÑO DE TUBERÍAS SIMPLES

### 2.1 Ecuaciones Generales Para La Fricción En Tuberías.

Uno de los principales objetivos es establecer las ecuaciones que gobiernan el flujo uniforme en tuberías. Estas ecuaciones se conocen con el nombre de **Ecuaciones de Fricción**, ya que por lo general relacionan la energía que se pierde en el proceso del movimiento del fluido a causa de la fricción entre la pared del ducto y el fluido. Todas las ecuaciones que describen el flujo uniforme en tuberías son de naturaleza similar: Se basan en un equilibrio de fuerza muy sencillo. La diferencia entre estas ecuaciones, más de forma que de fondo, obedecen a los procesos empíricos utilizadas en la deducción.

#### Definición y Tipos de Flujo

Desde el punto de vista de su comportamiento mecánico, un fluido es una sustancia de que no puede resistir esfuerzo cortante. Si se presenta, el fluido de deformación continua deformándose mientras el esfuerzo exista. En este proceso de deformación continua las diferentes partes del fluido cambian de posición relativa en forma permanente; este movimiento relativo se conoce como **flujo**. En términos sencillos, flujo es el movimiento de un fluido con respecto a un Sistema Inercial de Coordenadas, generalmente ubicado en un contorno sólido.

El flujo en un canal o tubería se puede determinar mediante las siguientes cantidades físicas:

- Desplazamiento de una partícula de fluido.
- Velocidad de una partícula de fluido en un punto del campo de flujo.
- Aceleración de una partícula en un punto del campo de flujo.

Las cantidades anteriores pueden permanecer constantes o variar con el espacio y/o el tiempo. Con respecto al espacio los flujos se clasifican en:

- ✓ Uniformes (si hay cantidades físicas permanentes constantes en el espacio).
- ✓ No Uniformes.

Con respecto al tiempo se clasifican en:

- ✓ Permanentes.
- ✓ Estacionarios (si las cantidades de flujo permanecen constantes en el tiempo).
- ✓ No Permanentes.

Estos cuatro tipos de flujo se combinan así:

- **Flujo Permanente Uniforme:** Ninguna de las características del flujo (presión y velocidad) varían en el espacio y/o tiempo.
  
- **Flujo No Permanente:** Las características no varían con el espacio pero si con el tiempo. Es muy difícil encontrar este tipo de fluido en la naturaleza, debido a que los cambios tendrían que ocurrir en forma simultánea a todo lo largo de la tubería (la velocidad de la señal de cambio tendrían que ser infinita).
  
- **Flujo Variado Permanente:** Las características del flujo varían con el espacio pero no con el tiempo.

Existen 2 subtipos de flujo:

- ✓ **Gradualmente Variado.-** Los cambios en las características del flujo (presión y velocidad) son graduales a lo largo de la dirección principal de este. Por ejemplo, las contracciones y expansiones suaves en tuberías, el flujo a través de Tubos Venturi, etc.

✓ **Rápidamente Variado.**- Los cambios en las características del flujo son abruptos a lo largo de la dirección principal de este. Por ejemplo, las abruptas en tuberías. El flujo a través de válvulas y los rotores de bombas. Generalmente este tipo de flujo va acompañado de gran turbulencia.

✓ **Flujo Variado No Permanente.**- Las características del flujo varían con el espacio y con el tiempo. Debido a que el flujo uniforme no existe, este nuevo tipo se conoce con el nombre de Flujo no Permanente. En el caso permanente está relacionado con el fenómeno de Golpe de Ariete.

### **Flujo Uniforme**

En el flujo uniforme las características del flujo (presión y velocidad) permanecen constantes en el espacio y en el tiempo. Por consiguiente es el tipo de flujo más fácil de analizar y sus ecuaciones se utilizan para el diseño de sistemas de tuberías. Como la velocidad no está cambiando; el fluido no está siendo acelerado. Si no hay aceleración, según la Segunda Ley De Newton para el movimiento, la sumatoria de las fuerzas que actúan sobre un volumen de control debe ser cero. Es decir, existe un equilibrio de fuerzas.

En el caso del flujo en tuberías actúan 3 fuerzas:

- ✓ Fuerzas de Presión.
- ✓ Fuerzas Gravitacionales.
- ✓ Fuerzas de Fricción.

Las dos primeras tratan de acelerar el flujo y la última trata de frenarlo, en el caso del flujo uniforme existe un equilibrio entre las fuerzas de fricción, por un lado, las fuerzas gravitacionales y de presión por el otro, dada la importancia de las fuerzas de fricción en el problema de flujo uniforme, el cual es básico para el diseño de sistemas de tuberías nos abocaremos a estudiarlas y deducirlas.

### 2.1.1 Distribución de Esfuerzos en Tuberías Circulares.

Si se utiliza la ecuación de Bernoulli para el flujo en tuberías se puede encontrar que las pérdidas de energía se manifiestan como pérdidas en la cabeza piezométrica, la cual se define como:

$$\frac{p^*}{\rho g} = \frac{p}{\rho g} + z$$

Donde:

$p^*$  = Presión piezométrica =  $P + \rho g z$

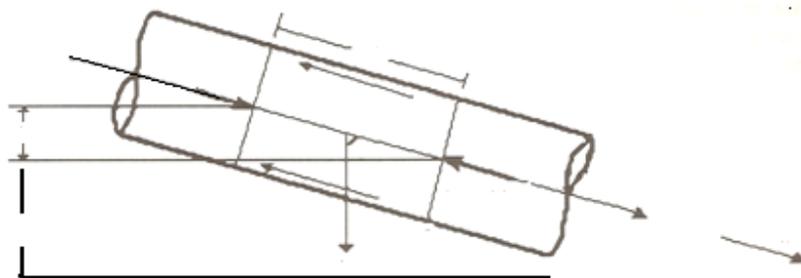
$p$  = Presión.

$z$  = Altura hasta un nivel de referencia.

$\rho$  = Densidad del fluido.

$g$  = Gravedad.

Estas pérdidas son consecuencia del esfuerzo cortante que existe entre el fluido en movimiento y la pared sólida. Para encontrar la distribución de este esfuerzo en la sección transversal del flujo, se debe tomar el fluido contenido en un tramo de tubería (volumen de control) e indicar todas las fuerzas que actúan en él (Ver Figura 2.1).



**Figura 2.1** Volumen de control para el flujo en una tubería. Se muestran todas las fuerzas que actúan en un fluido contenido en un volumen de control.

Si el fluido contenido en el volumen de control mostrado en la Figura 2.1 no se está acelerando, entonces  $\sum F_x = 0$ . Teniendo en cuenta este hecho se obtiene la siguiente ecuación:

$$pA - (p + dp)A + W \cos \theta - \tau_0 S dx = 0$$

Donde:

S = Perímetro mojado (perímetro interno del tubo).

W = Peso del fluido en el volumen de control.

El peso del volumen de control es:

$$W = \rho g A dx$$

$$pA - (p + dp)A + \rho g A dx \cos \theta - \tau_0 S dx = 0$$

Pero de acuerdo con la figura:

$$dx \cos \theta = -dz \quad (\text{Ver figura 2.1})$$

Por consiguiente

$$-dpA - \rho g A dz - \tau_0 S dx = 0 \qquad -dpA - \rho g A dz = \tau_0 S dx$$

$$\text{Pero } \tau_0 = -\mu \frac{dv}{dx} \qquad \tau_0 S dx = A(dp + \rho g dz)$$

Como  $(p + \rho g z) = p^*$ , la presión piezométrica es entonces:

$$\tau_0 S dx = A dp^*$$

De donde finalmente se obtiene:

$$\tau_0 = \frac{A}{S} \frac{dp^*}{dx} \dots\dots\dots (2.1)$$

Para conocer el esfuerzo cortante en las paredes de la tubería ( $\tau_0$ ) solo hay que conocer la caída en la presión piezométrica en una determinada longitud de la misma tubería, así como su geometría.

Para tuberías circulares

$$A = \pi r_0^2$$

$$S = 2\pi r_0$$

Luego

$$\tau_0 = \frac{\pi r_0^2}{2\pi r_0} \frac{dp^*}{dx} = \frac{r_0}{2} \frac{dp^*}{dx}$$

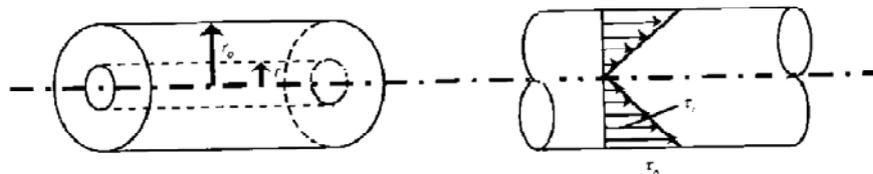
Además, si se aplica un razonamiento similar a un “tubo” de fluido de radio  $r < r_0$  (ver Figura 2.2) se obtiene:

$$\tau_r = \frac{r}{2} \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \dots\dots\dots (2.1)'$$

Al dividir esta última ecuación por la ecuación para  $\tau_0$  se obtiene la expresión:

$$\frac{\tau_r}{\tau_0} = \frac{r}{r_0}$$

Esta última ecuación indica una variación lineal de  $\tau$  con respecto a  $r$ , tal como se muestra en la siguiente figura:



**Figura 2.2** Distribucion lineal del esfuerzo cortante en tuberías circulares

$$h_f = \frac{p}{\rho g} \therefore p = \rho g h_f \quad (2.2)$$

Sub la Ecu. 2.2 en la Ecu. 2.1

Se obtiene

$$\tau_0 = \frac{A}{S} \frac{\rho g h_f}{L} \quad (2.3)$$

Donde:

$h_f$  = pérdidas por fricción.

L = longitud del tramo de tubería.

$$\frac{A}{S} = \frac{\pi r_0^2}{2\pi r_0}$$

Nuevamente, para tubos circulares:

$$\tau_0 = \frac{\rho g h_f r_0}{2L} \quad \dots (2.4)$$

Esta última ecuación establece una relación directa entre el esfuerzo cortante en la pared de una tubería y la caída en la cabeza piezométrica  $h_f$ . De ahí que sea un primer paso para la deducción de una ecuación de diseño. Es importante tener en cuenta que dicha caída de la cabeza es la que ocurre en un tramo de la tubería de longitud  $l$ , el cual debe ser recto, estar hecho de un solo material y no debe tener ningún tipo para el diseño de sistemas de tuberías.

### **Distribución de velocidades (tuberías circulares)**

En este aparte se examinan las distribuciones de velocidad en las secciones transversales de tuberías circulares. Posteriormente, dichas distribuciones son utilizadas para establecer las diferencias entre los tipos de flujo y, por último, para

establecer las ecuaciones de resistencia fluidas, las cuales se utilizaran para el diseño de sistemas de tuberías.

### Flujo laminar

En el caso de flujo laminar en tuberías, el esfuerzo cortante está definido por la ecuación de Newton para fluidos viscosos:

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr}$$

Para tuberías circulares, de acuerdo con la distribución de esfuerzos, se tiene:

$$\tau_r = -\mu \frac{dv}{dr} = \tau_0 \frac{r}{r_0}$$

Donde:

$$r < r_0$$

De esta última ecuación de obtiene:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\tau_0}{\mu} \frac{r}{r_0}$$

Cuando se integra con respecto al radio  $r$  se obtiene la distribución de velocidades:

$$v = \int dv = -\frac{\tau_0}{\mu r_0} \int_0^r r dr$$

$$v = -\frac{\tau_0}{\mu r_0} \left( \frac{r^2}{2} \right) + C_1$$

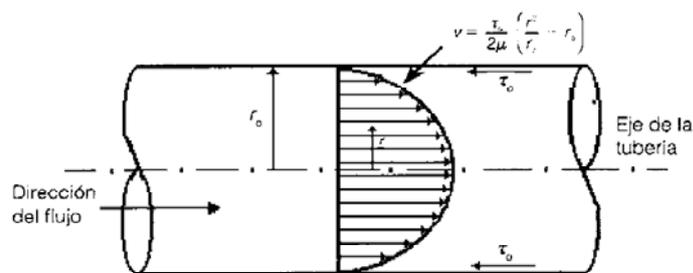
Para evaluar la constante de integración se utiliza el hecho de que cuando  $r = r_0, v = 0$ ; luego

$$C_1 = +\frac{\tau_0}{2\mu} r_0$$

Finalmente

$$v = \frac{\tau_0}{2\mu} \left( \frac{r^2}{r_0} - r_0 \right) \quad (2.5)$$

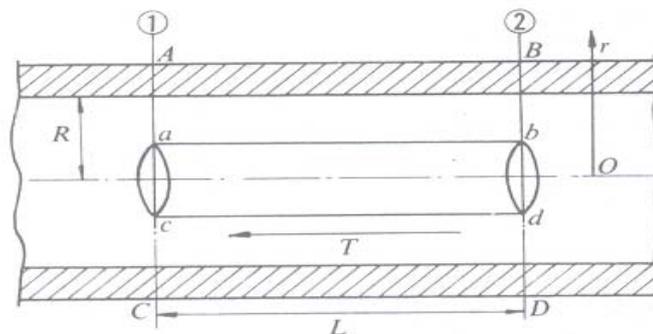
La cual es una distribución parabólica de la velocidad. En flujo laminar, la velocidad sigue esta distribución con su máximo en el centro y su mínimo ( $v = 0$ ) en las paredes internas de la tubería.



**Figura 2.3** Distribución de velocidades para flujo laminar en una tubería de sección circular.

## 2.2 El factor de fricción para el Flujo Laminar

Weisbach propuso determinar el factor de fricción para el caso de fluido lamina, para poder determinarlo se tiene que hacer uso de la ecuación de Hgen-Piseville.



**Figura 2.4** Al flujo laminar de izquierda a derecha en una tubería circular se opone la fuerza  $t$  originada por el esfuerzo constante.

Por la 1ª Ley de Newton que es aplicable como es sabido tanto a la estática como, en este caso, al movimiento uniforme tendremos.

$$P_1 w - P_2 w - T = 0 \quad (2.6)$$

Donde  $T$  = fuerza debida la esfuerzo constante

$P_1, P_2$  = Presiones en el C. G. del área transversal del tubo de las secciones 1 y 2

$$w = AREA$$

$$P_1 \pi r^2 - P_2 \pi r^2 - \left( -2\pi r l n \frac{dv}{dr} \right) = 0$$

$$\pi r^2 (P_1 - P_2) = -2\pi r l n \frac{dv}{dr}$$

Como  $P_1 - P_2 = \Delta\rho$

$$\pi r^2 \Delta\rho = -2\pi r l n \frac{dv}{dr}$$

$$r \Delta\rho = -2 l n \frac{dv}{dr}$$

Despejando  $dv$

$$dv = \frac{\Delta\rho}{2 l n} r dr$$

Integrando

$$v = -\frac{\Delta\rho}{4 l n} r^2 + c \quad (2.7)$$

La constante c se determina por las condiciones en los límites:

$$v = 0 \text{ para } r = R$$

$$0 = -\frac{\Delta\rho}{4 l n} R^2 + c$$

Substituyendo obtendremos

$$c = \frac{\Delta\rho}{4 l n} R^2 \quad (2.7.1)$$

$$v = -\frac{\Delta\rho}{4 l n} r^2 + \frac{\Delta\rho}{4 l n} R^2 = \frac{\Delta\rho}{4 l n} (R^2 - r^2) \quad (2.8)$$

$V_{\text{máx}}$  será  $r = 0$  es decir en el eje de la paraboloides que es el eje de la tubería:

$$v_{m\acute{a}x} = \frac{\Delta\rho}{4L\eta} R^2 \quad (2.9)$$

En la práctica es mucho más fácil medir la velocidad media ( $\bar{v}$ ), que la velocidad máxima ( $v_{m\acute{a}x}$ ) la ecuación 2.8 se expresa en  $f(v)$  por definición.

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} \quad (2.10)$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{A}$$

Donde

$$A = 2\pi r dr$$

Caudal elemental ( fig.2 )

$$Q = Av$$

$$dQ = 2\pi r dr v$$

$$\text{Pero } v = \frac{\Delta\rho}{4L\eta} (R^2 - r^2)$$

$$dQ = 2\pi r dr \frac{\Delta\rho}{4L\eta} (R^2 - r^2) \therefore \int_0^R$$

$$Q = \int_0^R dQ = \int_0^R 2\pi r \frac{\Delta\rho}{4L\eta} (R^2 - r^2) dr$$

$$Q = \frac{2\pi\Delta\rho}{2L\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi\Delta\rho}{2L\eta} \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right)$$

$$Q = \frac{\Delta\rho\pi R^4}{8L\eta R^2}$$

Sustituyendo en la operación (2.10)

$$v = \frac{\Delta\rho\pi R^4}{8L\eta\pi R^2} = \frac{\Delta\rho R^2}{8L\eta}$$

$$v = \frac{\Delta\rho R^2}{8L\eta} \quad (2.11)$$

Comparando con la ecuación (2.9)

$$v = \frac{v_{m\acute{a}x}}{2}$$

La velocidad media es la mitad de la velocidad máxima.

Expresándola con su diámetro (la tubería se pide por diámetro no por radio)

De la ecuación (2.7)

$$v = \frac{\Delta\rho R^2}{8Ln}$$

$$v = \frac{\Delta\rho D^2}{32Ln}$$

Despejando  $\Delta\rho$

Ecuación de Hgen-Piseville. 
$$\Delta\rho = \frac{32nLv}{D^2} \quad (2.12)$$

Obtener la ecuación de Darcy – Weisbach

$$\Delta\rho = \frac{32nLv}{D^2} \cdot \frac{2Pvg}{2Pvg} = \frac{64n}{vDP} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot Pg$$

$$\frac{64n}{vDP} = \frac{64}{Re}$$

$$\Delta\rho = \frac{64 L v^2}{Re D D^2} = Pg$$

Pero  $\frac{\Delta\rho}{Pg} = H$  (perdida de carga)

$$H = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{v^2}{Pg} \quad \text{Flujo laminar} \quad (2.13)$$

Piseville deduce

$$f = \frac{64}{Re}$$

$f$  = Coeficiente de rugosidad admisión para fluido laminar en tuberías lisas y rugosas

Sustituyendo la ecuación 2.13 obtenemos

$$H = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = \text{Ecuación de Darcy – Weisbach} \quad (2.14)$$

La ecuación de Darcy – Weisbach (2.14) es la ecuación general de las pérdidas primarias.

Los experimentos realizados han demostrado que la pérdida de carga (H) era directamente proporcional al cuadrado de la velocidad media (v) en la tubería y a la longitud de la tubería e inversamente proporcional al diámetro de la misma. Esta ecuación es la más general para aplicar la pérdida de energía ocurrida durante el movimiento de fluidos

## Perdidas de cabeza debido a la fricción

Cuando se trata de conductos cerrados, el único tipo de energía que puede perderse por razón del movimiento del fluido es la energía de presión, ya que la energía cinética debe permanecer constante, y la energía potencial sólo depende de la posición. La energía de presión expresada como energía por unidad de peso del fluido tiene unidades de cabeza (h); tal como se encontró en el análisis dimensional anterior, la pérdida de cabeza por fricción es:

$$H_f = f \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (2.14)$$

Donde:

$h_f$  = energía por unidad de peso perdida por fricción.

$f$  = factor de fricción de Darcy

$l$  = longitud del tramo de la tubería en el cual se pierde  $h_f$

$d$  = diámetro de la tubería

$v$  = velocidad media

Si se utiliza el radio eléctrico (  $R$  ) en lugar del diámetro (  $d$  ), la ecuación 2.15 se convierte en:

$$R = \frac{A}{P} = \frac{\pi d^2}{4d\pi} = \frac{d}{4} \text{ entonces } d = 4R$$
$$h_f = \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g}$$

En donde el factor de fricción, tal como se estableció anteriormente, es una función compleja del número de Reynolds y de la rugosidad relativa:

$$f = F(Re, k_s/d) \quad (2.15)$$

Una vez establecida esta relación de dependencia entre el factor de fricción  $f$  y el número de Reynolds del flujo ( $Re$ ) y la rugosidad relativa de la tubería ( $k_s/d$ ), el siguiente paso obvio era determinar la forma exacta de la función de relación. Este trabajo probó ser altamente complejo y sólo hasta finales de la década de 1920 culminó. Sin embargo, después de los trabajos de Darcy y Weisbach muchos investigadores

llevaron a cabo estudios que constituyeron pasos clave en el desarrollo de la teoría del flujo en tuberías. En los siguientes numerales se resumen dichos trabajos, los cuales mostraron tendencias: trabajos basados en desarrollos teóricos y trabajos de laboratorio.

### Relación entre $f$ y $\tau_0$

El factor de fricción de Darcy debe estar relacionado directamente con el esfuerzo cortante, ya que este último es el responsable de las pérdidas de energía por fricción. Ese argumento fue desarrollado por Darcy de la siguiente forma:

Si se toma la longitud de la tubería como un diferencial de longitud  $dl$ , las pérdidas de cabeza que ocurrirán en ese tramo serían:  $dh_f = f \frac{dl}{d} \frac{v^2}{2g}$

Al despejar el factor de fricción se obtiene la expresión:

$$f = \frac{2}{v^2} \frac{dg}{dl} \frac{dh_f}{dl} \quad (2.16)$$

Si se utiliza el radio hidráulico en lugar del diámetro de tubería:

$$f = \frac{8}{v^2} \frac{gR}{dl} \frac{dh_f}{dl} \quad (2.17)$$

Tal como se encontró antes, se tiene que:

$$\tau_0 = \frac{A}{S} \frac{dp^*}{dx} = R \frac{dp^*}{dl} \quad (2.1)$$

De donde

$$\frac{dp^*}{dl} = \frac{\tau_0}{R} = \rho g \frac{dh_f}{dl}$$

$$\frac{dh_f}{dl} = \frac{\tau_0 \rho g}{R} \quad (2.18)$$

Si se reemplaza la ecuación 2.19 por la 2.18 se obtiene:

$$f = \frac{8}{v^2} \frac{gR}{pgR} \frac{\tau_0}{pgR} \quad (2.18)'$$

De donde se obtiene fácilmente la siguiente expresión que relaciona el factor de fricción con el esfuerzo cortante en la pared de la tubería:

$$f = \frac{8\tau_0}{\rho v^2}$$

Esta última indica que el factor de fricción debe disminuir a medida que la velocidad  $v$  aumenta, es decir, cuando el número de Reynolds ( $Re$ ) se hace mayor, lo cual no implica que el esfuerzo cortante sea menor. Este resultado se debe entender de la siguiente manera: a medida que la velocidad aumenta, las pérdidas de energía por unidad de pesos (cabeza) disminuyen: es decir, es más eficiente mover un fluido, por unidad de peso, con números de Reynolds altos que con números de Reynolds bajos en una tubería dada.

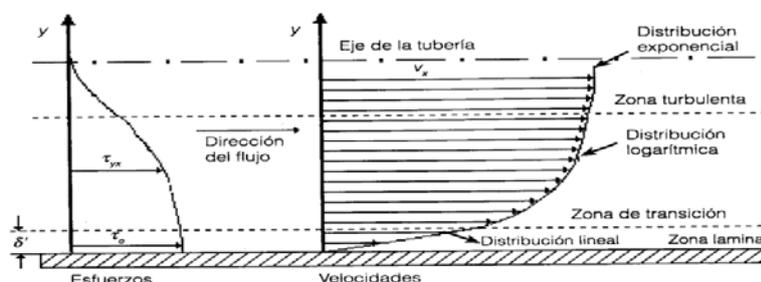
## 2.2.1 PARA FLUJO TURBULENTO

En este numeral se plantean las diferentes ecuaciones que describen el factor de fricción de Darcy para el caso del flujo turbulento, desde hidráulicamente liso hasta hidráulicamente rugoso. En el resumen los diferentes trabajos teóricos y empíricos desarrollados para establecer las ecuaciones que describen  $f$ , las cuales se utilizan para el diseño de sistemas de tuberías en los temas siguientes.

### Flujo Turbulento

La presencia de esfuerzos cortantes en las fronteras fluidos – sólidos y entre las diferentes capas del fluido afecta la distribución de velocidades que, en principio, debería ser uniforme. En flujo turbulento, la presencia de la subcapa laminar viscosa modifica aun mas dicha distribución.

En una tubería con flujo turbulento se distinguen tres capas, tal como se muestra a continuac



**Figura 2.5** Distribución de esfuerzos y velocidades para flujo turbulento en una tubería de sección circular (se muestra media tubería).

Para cada una de las tres zonas mostradas (la figura debería de ser simétrica en el sentido vertical con el fin de incluir toda la sección transversal de la tubería) las distribuciones de velocidades son:

*Subcapa laminar viscosa (flujo laminar)*

En esta capa, la magnitud del esfuerzo es prácticamente constante e igual a  $\tau_0$ . Por ser flujo laminar, el esfuerzo debe estar gobernado por la ecuación de viscosidad de Newton:

$$\tau_0 = -\mu \frac{dv}{dy}$$

Tal hecho implica que los gradientes de la velocidad en esta zona deben ser muy grandes. Igualmente, en la subcapa laminar, por ser de espesor tan pequeño, se pueden aproximar así:

$$\frac{dv}{dy} \approx \frac{v_x}{y}$$

Luego

$$\tau_0 = -\mu \frac{v_x}{y}$$

Dividiendo por la densidad:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu V_x}{\rho y} = \nu \frac{V_x}{y}$$

Donde  $\nu$  = viscosidad cinemática

La raíz cuadrada del término  $\tau_0/\rho$ , localizando en la parte derecha de esta última ecuación, tiene las siguientes dimensiones:

$$\left[ \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right] = \frac{m}{s} \quad (\text{dimensiones de velocidad})$$

Por definición:

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = V_*$$

Donde:

$$V_* = \text{velocidad de corte}$$

Esta velocidad mide la magnitud relativa del esfuerzo cortante en la superficie solido-fluido; es muy importante en el estudio de transporte de sedimentos por arrastre en ríos y canales o en el diseño de tuberías utilizadas para el transporte de material solido en suspensión. La velocidad de corte corresponde a la raíz cuadrada del promedio temporal del producto de las vibraciones aleatorias en las velocidades en  $x$  y  $y$  ( $V'_x$  y  $V'_y$ ).

Luego

$$V_*^2 = \nu \frac{V_x}{y}$$

De donde se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{V_x^2 y}{\mu} = V_x$$

$$\frac{(V_x)(V_x)y}{\mu} = V_x$$

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{V_* y}{\nu} \quad (2.20)$$

La ecuación 2.20 indica que la velocidad sigue una distribución lineal con respecto a  $y$  (ver figura 2.4) siempre y cuando  $y \leq \delta'$ , el espesor de la subcapa laminar viscosa. Esta ecuación ha probado ser válida hasta el siguiente límite:

$$\frac{V_x}{V_*} = 11.6$$

Lo cual implica que

$$\frac{V_x y}{\nu} = 11.6$$

Este último resultado permite establecer una ecuación para el cálculo del espesor de la subcapa laminar viscosa, lo que a su vez hará posible establecer con claridad la diferencia entre flujos hidráulicamente lisos e hidráulicamente rugosos.

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{V_*} \quad (2.21)$$

Donde  $\delta'$  = subcapa laminar viscosa.

### **Zona de transición**

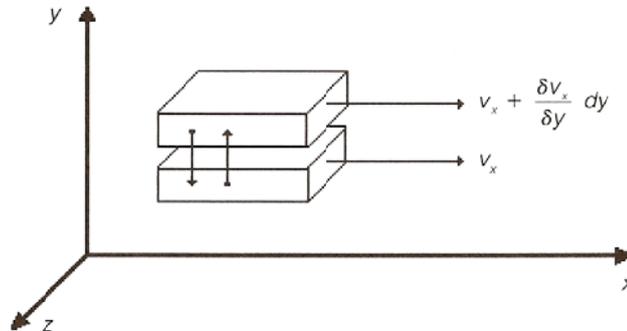
Entre la subcapa laminar viscosa y la zona completamente turbulenta existe una zona de transición donde el flujo deja de ser laminar para convertirse en turbulento. Se ha encontrado (White, 1994) que esta zona se extiende entre los siguientes límites:

$$5 \frac{\mu}{V_*} \leq y \leq 70 \frac{\mu}{V_*}$$

El flujo no pasa de laminar a turbulento en forma súbita, sino de modo gradual a medida que las fuerzas viscosas pierden importancia frente a las inerciales. En esta zona, los esfuerzos cortantes deben seguir la definición de Prandtl (1925) este, introdujo en el movimiento de fluidos su concepto de longitud de mezcla  $\ell$ , por definición esta longitud corresponde a la distancia que un paquete de moléculas tienen que viajar para perder un momentum, cuando se mueve de una capa con velocidad a otra con diferente velocidad media. Prandtl supuso que tanto  $V_x^1$  como  $V_y^1$  eran proporcionales a  $\Delta v_x$ , el cambio de  $V_x^1$  entre las diferentes capas de flujo. A continuación procederemos a determinar el esfuerzo turbulento de Reynolds ( $\tau_{yxt}$ )

### **\*Viscosidad Turbulenta (de remolino o de Eddy)**

Boussinesq introdujo el concepto de viscosidad turbulenta, teniendo en cuenta la siguiente figura:



**Figura 2.6** Dos placas de fluido moviéndose a diferente velocidad dentro de un campo de flujo.

Introdujo un nuevo esfuerzo cortante, causado por la turbulencia del flujo. Supuso que el intercambio típico de paquetes de moléculas entre capas del flujo añade o resta *momentum* (ya que las velocidades son diferentes) a las diferentes capas, haciendo que estas se aceleren o frenen, respectivamente, con lo cual se produce un efecto similar al de la viscosidad dinámica. El intercambio de *momentum* produce un nuevo esfuerzo cortante:

En esta última expresión el primer subíndice significa que el esfuerzo actúa en el plano ; el segundo subíndice significa que la dirección del esfuerzo es paralela al eje . De acuerdo con el planteamiento de Boussinesq, se puede establecer la siguiente ecuación:

—

Donde  $\eta$  representa la viscosidad turbulenta, causada por el intercambio de “paquetes” de moléculas, y por consiguiente de *momentun*, entre las dos capas (ver Figura 2.6). Luego:

$$\tau_{yx_T} = \mu \frac{\delta V_x}{\delta y} + \eta \frac{\delta V_x}{\delta y}$$

$$\tau_{yx_T} = (\mu + \eta) \frac{\delta V_x}{\delta y} \quad (2.22)$$

Por similitud con la viscosidad cinemática  $\nu$ , Boussinesq define la viscosidad turbulenta cinemática como:

$$\varepsilon = \eta / \rho \quad (2.23)$$

Las ecuaciones 2.22 y 2.23 tuvieron un uso limitado debido a la dificultad de definir un valor para  $\eta$ , ya que este dependía de las características del flujo y no del fluido. Algunos de los valores que se establecieron fueron los siguientes:

- Para flujo laminar:  $\eta = 0^\circ$
- Para flujo turbulento:  $0 \leq \eta \leq 10000 \mu$

Este ultimo rango hacia muy difícil determinar la viscosidad turbulenta; por ello el método de Boussinesq no tuvo aplicación práctica, aunque es muy útil para explicar el fenómeno.

### **\*Esfuerzo de Reynolds**

Con el fin de obtener una mejor ecuación que definiera el aumento del esfuerzo cortante cuando el flujo era turbulento, Reynolds desarrollo los siguientes supuestos:

1. La velocidad en el sentido principal del flujo (eje x) está compuesta por una velocidad media y una variación aleatoria de esta:

Donde:

$$v = \bar{v} + v' \quad . \text{ (Por ejemplo } \bar{v} = Q/A)$$

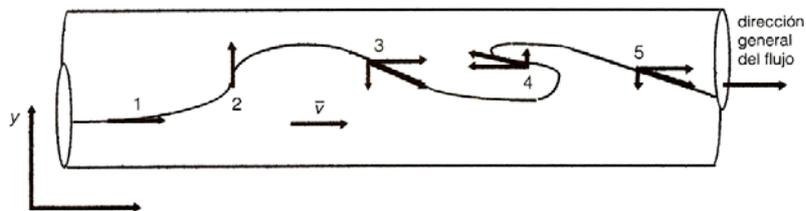
Para un punto, el promedio de  $v'$  con respecto al tiempo debe ser 0.

Es claro que  $\bar{v} = Q/A$ , Por lo consiguiente:

—

Donde T es el periodo donde se hace el promedio, el cual debe ser mayor por cualquier periodo significativo de las variaciones de velocidad en sí.

La trayectoria seguida por una partícula refleja esto, tal como se puede ver en la Figura 2.7



**Figura 2.7** trayectoria seguida por una partícula individual del fluido en un campo de flujo turbulento. Se muestran el vector de la velocidad media y los vectores velocidad y sus componentes en  $y$  para 5 puntos de la trayectoria.

Teniendo en cuenta el planteamiento anterior y la trayectoria mostrada en la Figura 2.7 se pueden establecer, al comparar los vectores velocidad para los 5 puntos con el vector de la velocidad ( $Q/A$ ), las siguientes conclusiones:

- a) Para el punto 1 el vector velocidad únicamente tiene como componente en el sentido x y esta es igual, en magnitud, dirección y sentido al vector de la velocidad media. Por consiguiente, para este punto se tiene que  $V_x^1$  es igual a cero.
- b) Para el punto 3 la componente x del vector velocidad es igual en magnitud, dirección y sentido al vector de la velocidad media, lo cual nuevamente implica que  $V_x^1$  es igual a cero.
- c) Para el punto 4 la componente x del vector velocidad es igual en magnitud y dirección al vector de la velocidad media, pero el sentido es el contrario. Esto significa que  $V_x^1$  es igual al doble negativo de la velocidad media.
- d) Para el punto 2 la componente x del vector velocidad es nulo, lo cual nuevamente implica que  $V_x^1$  es igual a cero.
- e) Para el punto 5 la componente x del vector velocidad es mayor que el vector de la velocidad media lo cual implica que  $V_x^1$  es positivo y con una magnitud inferior a dicho vector.

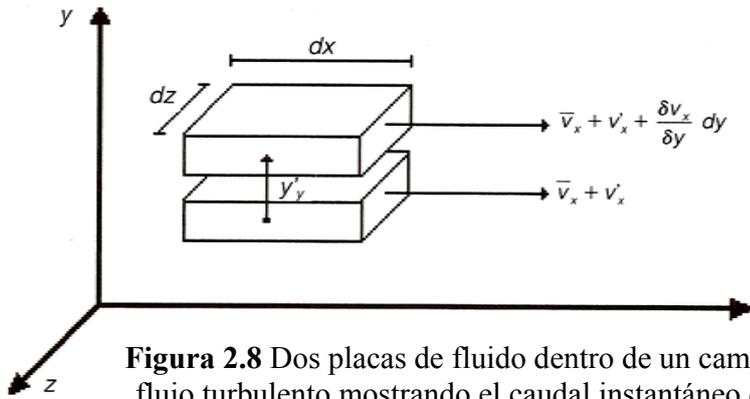
Las conclusiones planteadas muestran que la variación aleatoria de la velocidad en la dirección x puede ser positiva o negativa y que su magnitud puede ser nula o menor o mayor que la velocidad media.

2. En el sentido y(o z), la velocidad de las partículas únicamente está compuesta por la variación aleatoria en la velocidad:

$$V_y = V_y'$$

Es decir, en y no existe velocidad sino una “vibración de paquetes de moléculas” con velocidad instantánea  $V_y'$ . Nuevamente:  $V_y' = 0$ ; sin embargo, esto no se aplica para productos de las variaciones aleatorias de velocidad como  $\overline{V_y'^2}$ ,  $\overline{V_x'^2}$ ,  $\overline{V_x'V_y'}$ , etc.

Teniendo en cuenta esta suposición para la velocidad en y, Reynolds calculo la tasa de flujo de volumen Q que pasa de una capa a otra en un determinado intervalo de tiempo (ver Figura 2.8). Dicho caudal es:



**Figura 2.8** Dos placas de fluido dentro de un campo de flujo turbulento mostrando el caudal instantáneo de la placa inferior a la superior.

Luego la tasa de flujo de masa entre las dos capas es:

Y el *momentum* por unidad de tiempo transmitido por la placa inferior a la superior es:

—

Donde es el *momentum* en la dirección x por la unidad de tiempo, transmitido en un instante ( puede variar con el tiempo).

Al promediar, se obtiene la siguiente expresión:

—

Al expandir el paréntesis anterior se obtiene:

—

Pero

$$\overline{V'_y V'_x} = \overline{V'_y} \overline{V'_x}$$

Y

$$\overline{V'_y} = 0$$

Al tener en cuenta este resultado y que el cambio de *momentum* por unidad de tiempo es igual a la sumatoria de las fuerzas que actúan en esa dirección:

$$(M_x/t) = \rho A \overline{V'_y V'_x} = F_x$$

El resultado es:

$$\frac{F_x}{A} = \tau_{yx_T} = \rho \overline{V'_y V'_x}$$

Y

$$\tau_{yx_T} = \rho \overline{V'_y V'_x} \quad (2.24)$$

Donde

$$\tau_{yx_T} = \text{esfuerzo turbulento de Reynolds}$$

La ecuación 2.24 es superior a la ecuación 2.22; sin embargo, la dificultad de una correcta definición de  $V'_x$  y  $V'_y$  hace que también existan limitaciones en la aplicación de esta forma de determinar el esfuerzo cortante extra causado por la turbulencia del flujo.

### Longitud de Mezcla

Con el fin de evitar los problemas de definición de  $V'_x$  y  $V'_y$ , L. Prandtl (1925) introdujo en el movimiento de fluidos su concepto de longitud de mezcla  $l$ . Por definición esta longitud correspondía a la distancia que tenía que viajar un “paquete” de moléculas típico para perder su *momentum* extra, cuando se movía de una capa de velocidad a

otra con diferente velocidad media. Prandtl supuso que tanto  $V'_x$  como  $V'_y$  eran proporcionales a  $\Delta\bar{V}_x$ , el cambio de  $V_x$  entre las diferentes capas de flujo:

$$V'_x \propto \Delta\bar{V}_x$$

$$V'_y \propto \Delta\bar{V}_x$$

Adicionalmente, supuso que  $\Delta\bar{V}_x$  era proporcional a  $l$ , la longitud de la mezcla, y al gradiente de  $\bar{V}_x$  con respecto a  $y$ :

$$\Delta\bar{V}_x \propto l(\delta\bar{V}_x/\delta y)$$

Teniendo en cuenta la ecuación 2.21, esta se convierte en:

$$\tau_{yx_T} \propto \rho l^2 \left( \frac{\delta\bar{V}_x}{\delta y} \right)^2$$

O, con el fin de tener en cuenta el sentido de  $\tau_{yx_T}$  se convierte en:

$$\tau_{yx_T} \propto \rho l^2 \left| \frac{\delta\bar{V}_x}{\delta y} \right| \left( \frac{\delta\bar{V}_x}{\delta y} \right)$$

Si el factor de proporcionalidad se incluye en  $l$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\tau_{yx_T} = \rho l^2 \left| \frac{\delta\bar{V}_x}{\delta y} \right| \left( \frac{\delta\bar{V}_x}{\delta y} \right) \quad (2.25)$$

Esta última ecuación es más manejable que la ecuación 2.24 adicionalmente, T. Von Karman, alumno de Prandtl, demostró que  $l$  era proporcional a  $\delta\bar{V}_x/\delta y$  e inversamente proporcional a  $\delta(\delta\bar{V}_x/\delta y)/\delta y$ .

$$= k \frac{\delta\bar{V}_x/\delta y}{\delta^2\bar{V}_x/\delta y^2}$$

Donde:

$k = 0.4$  es conocida como la constante universal de Prandtl-Von Karman.

Estudios posteriores han demostrado que la constante  $k$  tiene una variabilidad muy baja; en la mecánica de flujos es la segunda constante de la naturaleza en cuanto a su valor poco variable para experimentos con condiciones muy diferentes.

Luego

$$\tau_{yxT} = \rho K^2 \frac{(\delta \bar{v}_x / \delta y)^4}{(\delta^2 \bar{v}_x / \delta y^2)^2} \quad (2.26)$$

Una vez establecida esta metodología para explicar el aumento de las pérdidas de energía por unidad de longitud cuando el flujo pasaba de laminar a turbulento, Prandtl procedió a determinar la interacción que existía entre la pared del ducto y el flujo, con el fin de entender la distribución de velocidades que se conocía en ese entonces el flujo en tuberías, estas dos teorías (longitud de mezcla e interacción fluido-pared solida) permitirían establecer en forma definitiva una ecuación que explicara el comportamiento de las pérdidas de energía en un ducto y que, por consiguiente, hiciera posible el diseño de sistemas de tuberías en forma rápida y sencilla.

### **Interacción flujo-pared solida**

Siempre que un fluido en movimiento interactúa con una pared sólida, el esfuerzo cortante que se genera afecta principalmente una zona de dicho flujo. Esta zona recibe el nombre de capa límite, la cual puede ser laminar o turbulenta (ver la figura 2.9).

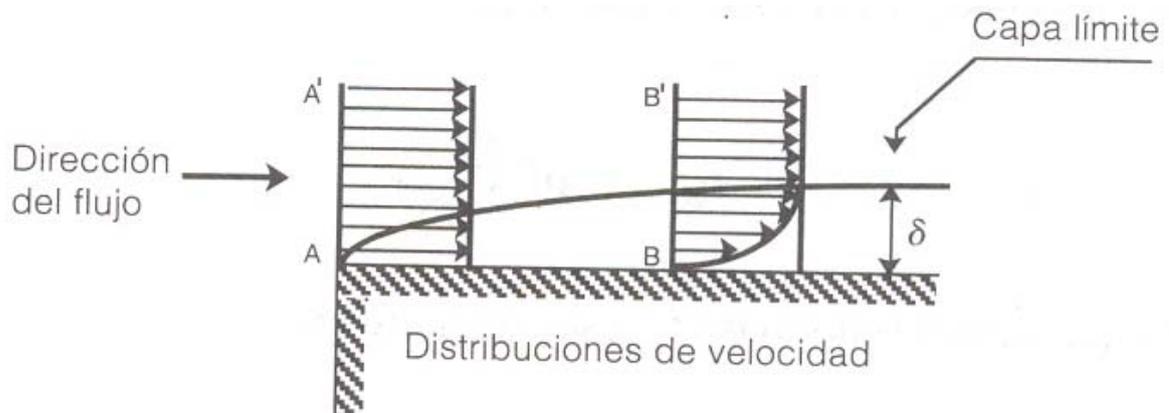


Figura 2.9 Capa límite. La presencia de pared sólida afecta la distribución de velocidades del flujo. La velocidad es cero en la superficie sólida y crece a medida que el flujo se aleja de está.

En el caso de flujo turbulento la superficie sólida impide que cerca de ella ocurran las vibraciones de una forma libre, generándose una zona de flujo laminar. Ésta se conoce con el nombre de subcapa laminar viscosa (figura 2.11) y siempre se presenta en flujo turbulento. Se denomina viscosa porque en ella priman las fuerzas viscosas sobre las fuerzas inerciales.

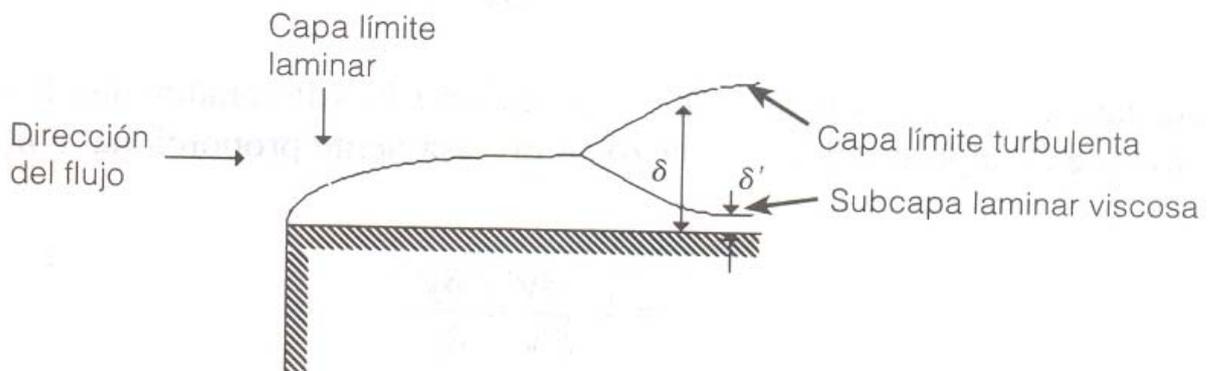


Figura 2.10 Desarrollo de una capa límite turbulenta mostrando la subcapa laminar que se genera cerca de la superficie.

El espesor de la subcapa laminar es mucho menor que el de la capa límite  $\delta' \ll \delta$ . La relación existente entre  $\delta'$  y el tamaño medio de la rugosidad de las paredes establece la diferencia entre los flujos hidráulicamente lisos y los hidráulicamente rugosos (ver la figura 2.11)

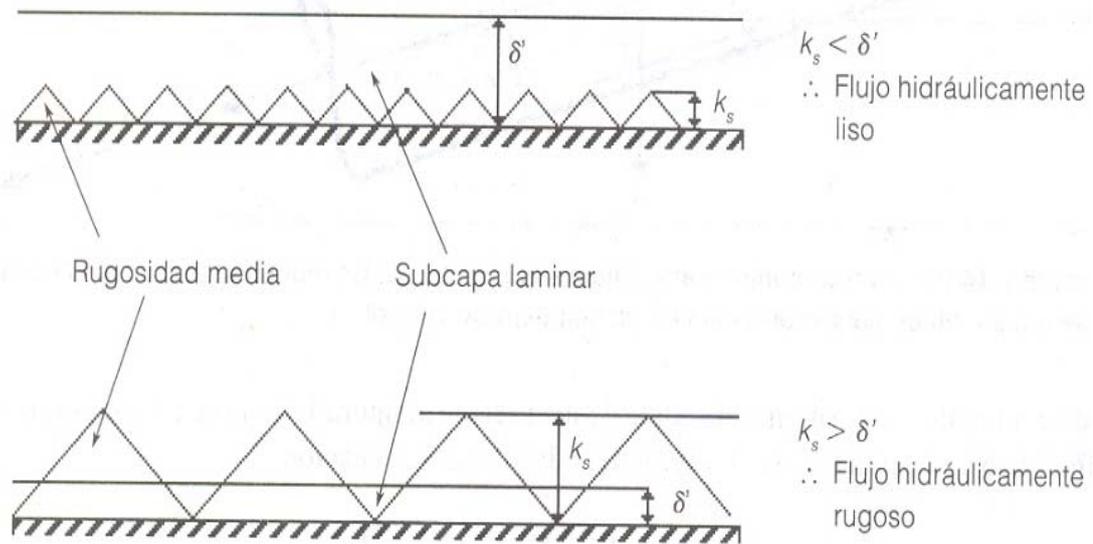


Figura 2.11. Flujos hidráulicamente lisos e hidráulicamente rugosos. El tipo de flujo depende del tamaño relativo entre el espesor de la subcapa laminar viscosa  $\delta'$  y el tamaño de la rugosidad media  $k_s$ .

En la zona de transición los esfuerzos cortantes deben seguir la definición de PRANDT dada anteriormente:

$$\tau_{xy} = \rho \ell^2 \left( \frac{dv}{dy} \right)^2$$

De alguna manera  $\ell$ , La longitud de mezcla, debe ser función de "y", La longitud significativa del problema en la zona de transición.

Luego:

$$\ell = ky$$

Donde k = es la constante universal de Prandtl-Von Karman

Igual a 0.4

Es igual a  $T_0$ ,

Luego

$$\tau_0 = \rho k^2 y^2 \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^2$$

Al dividirse por la densidad  $\rho$  se obtiene:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = k^2 y^2 \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^2 = v_*^2$$

Al reordenarse se llega a:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{k} \frac{dy}{y}$$

Para encontrar la distribución de velocidades se debe integrar la ecuación anterior, proceso luego del cual se obtiene:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{k} \ln y + C_1 \quad (2.27)$$

Para evaluar la constante de integración se supone que en el límite de las zonas laminar y de transición las ecuaciones 2.20 y 2.27 son validas al mismo tiempo; en consecuencia:

$$v_l = \text{velocidad en el limite}$$

Al aplicar la ecuación 2.20:

$$\frac{v_l}{v_*} = \frac{v_* \delta'}{v} = 11.6 \quad (2.28)$$

Y, además, utilizar la ecuación 2.27:

$$\frac{v_l}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \delta' + C_1$$

Y la ecuación 2.21, se llega a:

$$\frac{v_l}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{11.6 v}{v_*} + C_1 \quad (2.29)$$

Luego, al reemplazar la ecuación 2.28 en la ecuación 2.29:

$$11.6 = \frac{1}{k} \ln \frac{11.6 v}{v_*} + C_1 \quad (2.30)$$

Y finalmente, al sustituir la ecuación 2.30 en la ecuación 2.27 se obtiene:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{v_x y}{\nu} + C_2$$

En donde:

$$C_2 = 11.6 - \frac{1}{k} \ln(11.6)$$

Substituyendo  $k=0.4$  en la expresión anterior

$$C_2 = 11.6 - \frac{1}{0.4} \ln(11.6)$$

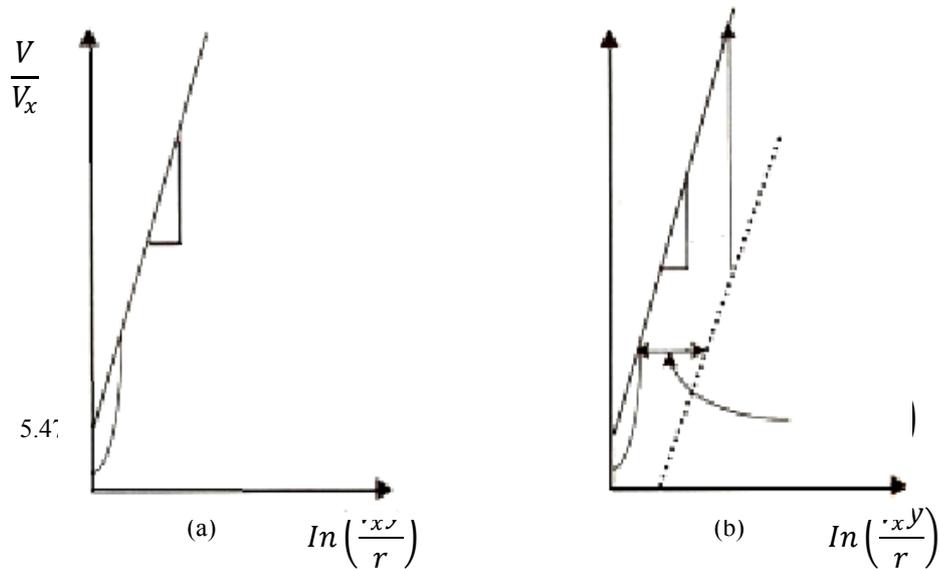
Si se desarrollan los cálculos, se tiene el siguiente valor para la constante  $C_2$ :

$$C_2 = 5.47$$

Por consiguiente, la distribución de velocidades en la zona de transición está definida por la siguiente ecuación:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4} \ln \frac{v_x y}{\nu} + 5.47 \quad (2.31)$$

El anterior es válido si la rugosidad en la superficie no afecta la subcapa laminar viscosa ( $k_s < \delta'$ ); este es el caso de los tubos con flujo hidráulicamente liso. Si se hace una grafica de la ecuación 2.31 en la cual las abscisas representen  $\ln\left(\frac{v_*}{\nu} y\right)$  y las ordenadas  $\frac{v_x}{v_*}$ , se obtiene una línea recta como la mostrada en la siguiente figura:



**Figura 2.12** Efecto de la rugosidad de la pared interna de la tubería en la distribución de velocidades. (a) Flujo turbulento hidráulicamente liso (ecuación 2.17). (b) Flujo turbulento hidráulicamente rugoso comparado con el liso. Nikuradse demostró que el corrimiento hacia la derecha era igual al logaritmo natural de  $(k_s v_* l v)$

Para el caso del flujo hidráulicamente rugoso, J. Nikuradse demostró que aunque la distribución de velocidades seguía siendo logarítmica, dependía de la rugosidad absoluta  $k_s$  de la tubería. Tal como se muestra en la figura 2.12 la relación entre  $\ln \frac{v_* y}{v}$  y  $v_x/v_*$ , se corría hacia la derecha en una cantidad igual a  $\ln \frac{k_s v_*}{v}$ ; este resultado fue igual para todas las tuberías, con sus diferentes rugosidades absolutas, que probó en el laboratorio. El corrimiento hacia la derecha generaba una diferencia vertical entre las líneas lisa y rugosa, la cual se representaba por  $\Delta B$  en la figura 1.12 (b). Nikuradse encontró que:

$$\Delta B = \frac{1}{0.4} \ln \frac{k_s v_*}{v} - 3.01 \quad (2.32)$$

En consecuencia, es claro que el valor de la relación  $v_x/v_*$  para un valor de  $\ln \frac{v_* y}{v}$  en un flujo hidráulicamente rugoso debe ser un  $\Delta B$  menor que el valor de la misma relación en un flujo hidráulicamente liso. Es decir:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4} \ln \frac{v_* y}{\nu} + 5.47 - \Delta B$$

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4} \ln \frac{v_* y}{\nu} + 5.47 - \frac{1}{0.4} \ln \frac{k_s v_*}{\nu} + 3.01$$

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48 \quad (2.33)$$

### Zona turbulenta

Algunos investigadores afirman que la distribución de velocidades en la zona turbulenta es muy similar a la de la zona de transición especialmente en el caso de flujo de tubería. Esto significa que la distribución logarítmica antes encontrada es aplicable a esta nueva zona. Otros autores afirman que dicha distribución es exponencial, regida por la siguiente ecuación:

$$\frac{v_x}{\bar{v}_x} = \left( \frac{y}{r_o} \right)^n$$

Donde

$$\bar{v}_x = \text{velocidad media} = \frac{Q}{A}$$

$r_o$  = radio total de la tubería

Además, se tiene que:

$$n = \frac{1}{7} \text{ se } Re < 100000$$

Si el número de Reynolds ( $Re$ ) aumenta, el exponente  $n$  empieza a disminuir. Esta distribución de velocidades se conoce como la **Ley de potencia 1/7**.

Finalmente, es importante establecer que el perfil lineal de velocidades de la subcapa laminar viscosa solo conforma un 2%, o menos, del perfil total de velocidades en una sección transversal; de ahí que su presencia pueda omitirse en los análisis de flujo en tuberías. Las ecuaciones logarítmicas 2.31 y 2.33 describen muy bien el perfil de velocidades aun en la zona completamente turbulenta, excepto en el caso en que la presión se incremente aguas abajo, como ocurriría de tratarse de un difusor. Por estas dos razones en este trabajo se considerara que la distribución de velocidades es logarítmica para todas las secciones transversales de tuberías circulares con flujo turbulento.

Una vez desarrolladas las anteriores ecuaciones para la distribución de esfuerzos y de velocidades en flujos en tuberías, y conocida la interacción entre el flujo y la pared solida del ducto, es posible establecer las ecuaciones de resistencia fluida que permiten el diseño de sistemas de tuberías. En el siguiente numeral se establecen dichas ecuaciones empezando por ecuaciones empíricas utilizadas para describir los flujos más simples. Igualmente, se hace uso de la técnica de análisis dimensional para deducir la forma de la ecuación que gobierna la caída piezométrica por unidad de longitud para el flujo en tuberías.

### **Perdidas de energía por fricción: experimentos preliminares**

El siguiente paso fue tratar de relacionar el tipo de flujo con las pérdidas de energía que se presentan cuando un fluido se mueve a través de un ducto. Reynolds comprendió que para cuantificarlas su experimento de la tinta no era el más adecuado. Para ese entonces (alrededor del año 1880) se sabía que las pérdidas por la unidad de longitud se comportaban en forma diferente al flujo laminar o al flujo turbulento. En consecuencia, pensó en estudiarlas utilizando el aparato ilustrado en la figura 2.13

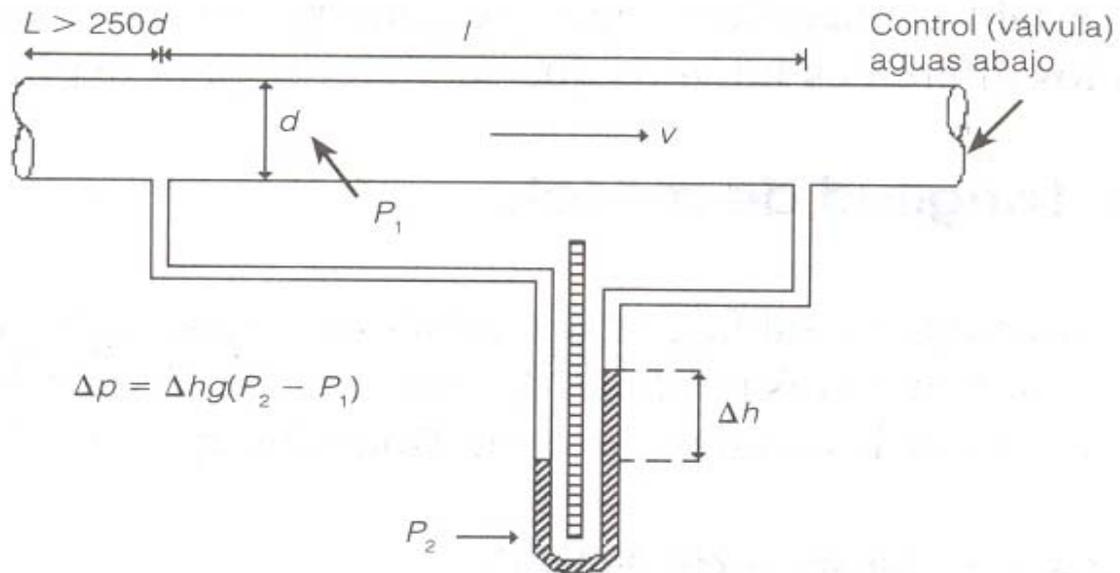
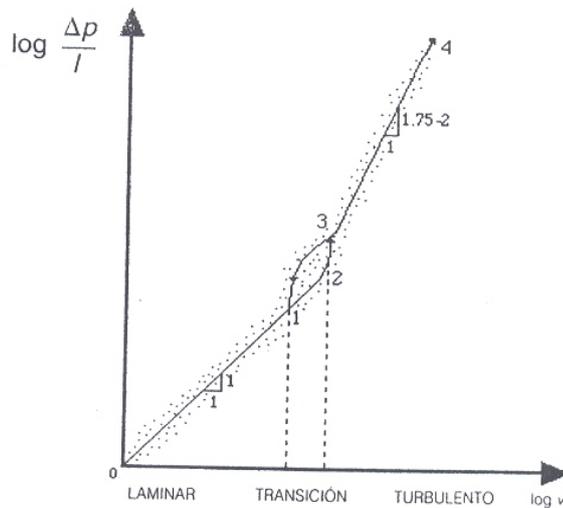


Figura 2.13 Aparato diseñado por Reynolds para estudiar la caída de presión por unidad de longitud a lo largo de la tubería en función del tipo flujo.

Al variar la velocidad media del tubo, el diámetro de éste y el material o rugosidad de las paredes internas, Reynolds obtuvo los siguientes resultados (ver la figura 2.14)

- La línea 0-1 presentaba una pendiente de 1 a 1, lo cual implicaba una variación lineal de las pérdidas de presión por unidad de longitud con respecto a la velocidad. Esto era válido para el flujo laminar.
- Si el experimento se hacía abriendo la válvula, se alcanzaba a tener flujo laminar hasta en el punto 2 ( $Re > 2500 - 4000$ ).
- Si el experimento se hacía cerrando la válvula, el flujo laminar se restablecía en el punto 1 ( $Re = 2200$ )
- En el punto 3 ( $Re = 5000$ ) la variación  $\log(\Delta p/l)$  vs. ( $v$ ) volvía a ser aproximadamente lineal con pendiente desde 1.75, para tubos muy lisos, hasta 2.0 para tubos muy rugosos.
- La zona de transición se obtenía para  $2200 \leq Re \leq 5000$ . En ésta la variación  $\Delta p/l$  vs. ( $v$ ) era muy compleja.



La figura 2.14. Grafica logarítmicamente de los resultados del segundo experimento de Reynolds

El trabajo de Reynolds llegó hasta el punto. Se estableció que los fluidos se “hacían más viscosos” cuando pasaban de flujo laminar a flujo turbulento, invalidando la Ley de la viscosidad de Newton  $[\tau = \mu(\frac{dv}{du})]$ . Luego para poder determinar la energía que se perdía en el flujo a través de un ducto por unidad de longitud de éste fue necesario establecer las ecuaciones que gobernaban este “endurecimiento” de los fluidos.

### 2.2.2 Ecuación De Blassius Para Tuberías Lisos

Para el caso de flujos hidráulicamente lisos se sabía que el factor de fricción  $f$  solo era función del número de Reynolds  $Re$ . P. R. H. Blassius, alumno de Prandtl, en 1911 encontró empíricamente que para números de Reynolds entre 5000 y 100000, el factor de fricción se podía calcular de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$f = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \quad (2.34)$$

A pesar del limitado rango de aplicación de la ecuación de Blassius, sirvió entender los resultados encontrados por Reynolds 30 años antes. Si se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach y se reemplaza en ella la ecuación de Blassius, se llega a:

$$h_f = f \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (2.14)$$

$$h_f = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

De donde:

$$h_f = \frac{0.316v^{0.25}lV^2}{v^{0.25}d^{0.25}d2g}$$

$$h_f = \frac{0.158v^{0.25}lV^{1.75}}{d^{1.25}g}$$

Al dividir por la longitud y multiplicar por el peso específico se obtiene:

$$\frac{\gamma h_f}{l} = \frac{0.158v^{0.25}\rho V^{1.75}}{d^{1.25}}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = 0.158v^{0.25}\rho V^{1.75}d^{-1.25} \quad (2.35)$$

Esta última ecuación indica que la caída de presión por unidad de longitud del flujo en una tubería es proporcional a la potencia 1.75 de la velocidad para flujo hidráulicamente liso. ¡Este resultado es idéntico al encontrado por Reynolds y presentado en la figura 2.14 Si la ecuación se multiplica y divide por el área transversal de la tubería elevada a la potencia 1.75 se obtiene:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{0.158v^{0.25}\rho Q^{1.75}4^{1.75}}{\pi^{1.75}d^{4.75}}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = 0.241v^{0.25}\rho Q^{1.75}d^{-4.75} \quad (2.36)$$

Resulta claro que la forma de reducir las pérdidas de presión por unidad de longitud consiste en aumentar el diámetro de la tubería. Es decir, la potencia requerida por una bomba sería menor si la tubería fuera más grande; sin embargo, una tubería de diámetro mayor sería más costosa. Para un caudal dado, un aumento del 50% en el diámetro reduciría las pérdidas de presión en un factor de 6.86.

### 2.2.3 Diagrama De Nikuradse

Con el fin de estudiar la naturaleza del factor de fricción  $f$ , el ingeniero alemán Johann Nikuradse, en 1933, hizo una serie de experimentos en los cuales utilizó tubos de diferentes diámetros en cuyo interior puso arenas de granulometría uniforme, de tal manera que obtuvo varias relaciones (relación conocida como rugosidad relativa) perfectamente determinadas. En cada uno de los tubos varió el caudal, de modo que cubrió un amplio rango de números de Reynolds, con flujos que cubría el intervalo desde laminar hasta turbulento hidráulicamente rugoso. Sus resultados se esquematizan en la figura 2.15 y se pueden resumir así:

- Cuando el número de Reynolds es menor a 2000, es decir cuando el flujo es laminar, el factor de fricción  $f$  varía en forma lineal con respecto al número de Reynolds; es una función inversa de  $Re$ , independiente de la rugosidad relativa. Esto corroboraba los resultados de Weisbach para flujo laminar.

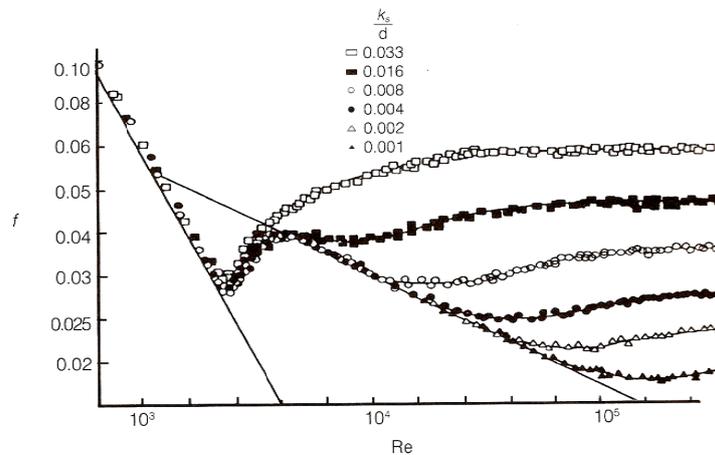


Figura 2.15 Resultados de Nikuradse

- Cuando el flujo es turbulento, el comportamiento de  $f$  se vuelve complejo, mostrando las siguientes características:
  - Cerca al  $Re$  crítico (2200) todas las curvas coinciden. Existe una curva limite desde la cual se separan poco a poco las curvas correspondientes a diferentes valores de  $k_s/d$ .
  - Los tubos con mayor rugosidad relativa se separan más rápidamente de la curva “lisa”, lo cual se debe a que a medida que aumenta el  $Re$ , disminuye el espesor de la subcapa laminar viscosa (ver Interacción flujo-pared solida),16” a 15” pasando así los flujos en forma gradual de hidráulicamente liso a rugosos; esto ocurre más rápido en los tubos de mayor relativa de  $k_s/d$ .
  - Una vez que el flujo se separa de la curva “lisa” el factor de fricción  $f$  empieza a ser una función compleja de  $Re$  y de  $k_s/d$  . en esta zona, el flujo se conoce como flujo transicional.
  - A medida que el  $Re$  sigue aumentando, las curvas individuales correspondientes a cada  $k_s/d$  se devuelven horizontales. Lo cual implica que el factor  $f$  deja de ser función de  $Re$  y pasa a ser la función de  $k_s/d$ .

## 2.2.4 Trabajos De Lewis Moody. Diagrama De Moody

Tal vez el trabajo experimental más importante fue el desarrollado por el ingeniero norteamericano Lewis F. Moody a principios de la década de 1940, cuyos resultados conforman un artículo clásico (Moody, 1944).

Moody se basó en los resultados de Nikuradse y de C. F. Colebrook con el fin de investigar las pérdidas por fricción en tuberías con rugosidades reales y no artificiales. Sus trabajos se pueden resumir en los siguientes puntos:

- En primer lugar, Moody observó que el diagrama de Nikuradse el factor de fricción  $f$  solo era función de la rugosidad relativa ( ) para flujos hidráulicamente rugosos. Esto correspondía a la parte horizontal de las curvas correspondientes a cada una de dichas rugosidades. Al tomar los puntos ( ) del extremo derecho del diagrama de Nikuradse, pudo producir la curva del factor de fricción para flujo hidráulicamente rugoso que aparece en la figura 2.16
- Una vez establecida la curva anterior, tomó tuberías comerciales de diferentes materiales (acero, acero ribeteado, hierro galvanizado, concreto, etc.) y diámetros, las cuales llevó al laboratorio a fin de medir las pérdidas por fricción y calcular su factor de fricción para el flujo hidráulicamente rugoso. Con el factor de fricción calculó la rugosidad relativa utilizando la figura 2.16. Finalmente, con esta rugosidad y con el diámetro de la tubería pudo calcular la rugosidad absoluta .

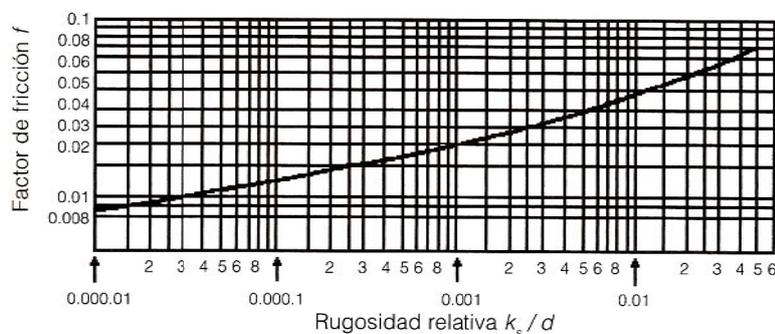
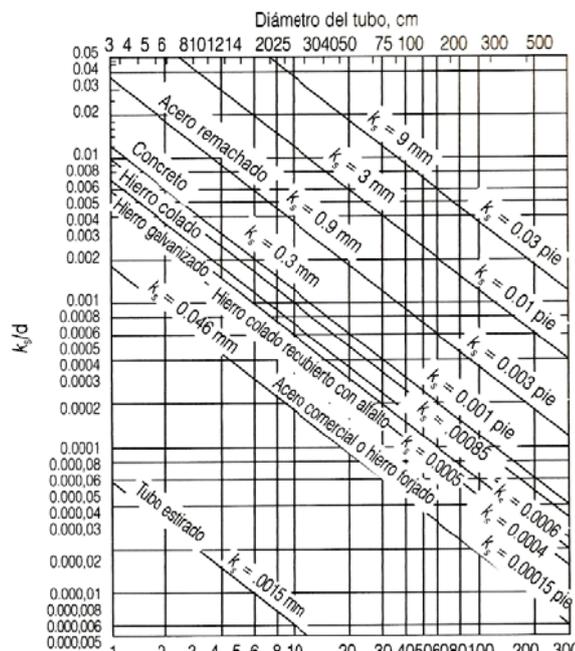


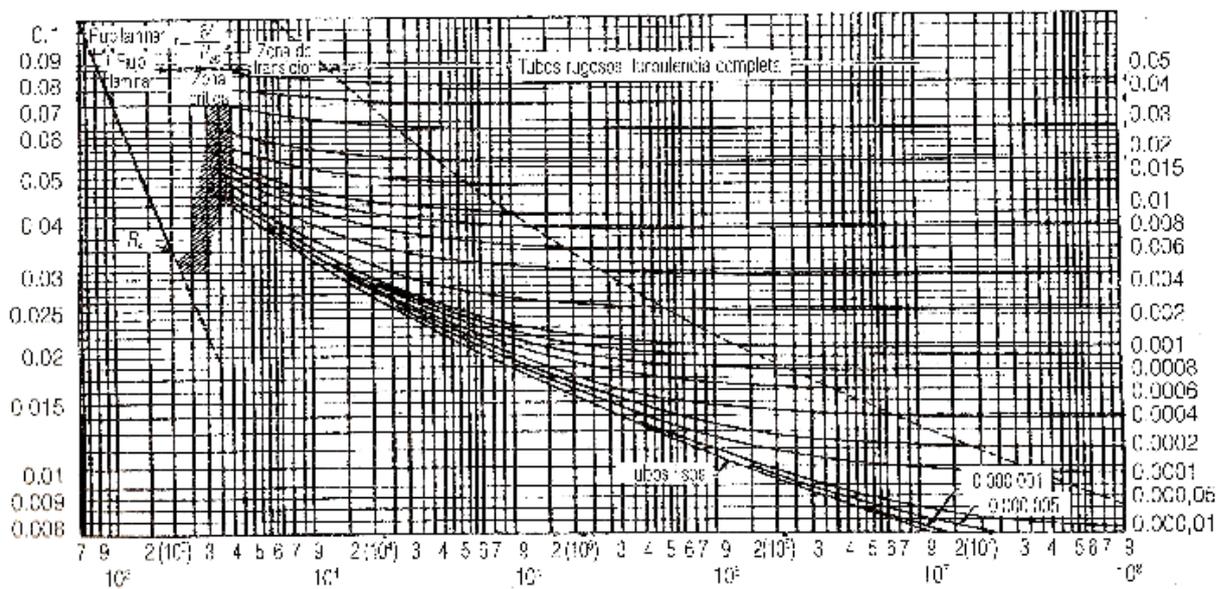
Figura 2.16 Factor de fricción para flujo altamente turbulento.

Moody encontró que a pesar de que la rugosidad real de las tuberías comerciales era muy diferente a la rugosidad obtenida pegando arena en el perímetro interno de tuberías, se podía obtener una rugosidad equivalente a la rugosidad de arena para cada material. Es decir, encontró que independientemente del diámetro, cada material se comportaba siempre como una arena (en cuanto a la rugosidad) de diámetro constante. Por consiguiente, cada material tenía una rugosidad equivalente que establecía su comportamiento hidráulico. Por ejemplo, estableció que el acero comercial se comportaba hidráulicamente como un tubo con arena de 0.045 mm de diámetro y que el hierro dulce equivalía a una arena de 0.26 mm de diámetro. Con estos resultados produjo el diagrama mostrado en la figura 2.17, el cual se conoce hoy en día como el diagrama de Moody modificado o el diagrama de rugosidades relativas. En este, la relación establecida en la figura 2.16 aparece como la correspondiente biunívoca entre las dos escalas verticales. Es importante aclarar que hasta este punto los resultados de Moody solo eran aplicables al caso de flujo hidráulicamente rugoso.



**Figura 2.17** Diagrama de Moody modificado (rugosidades relativas) Ver apéndice 2 para mayor detalle.

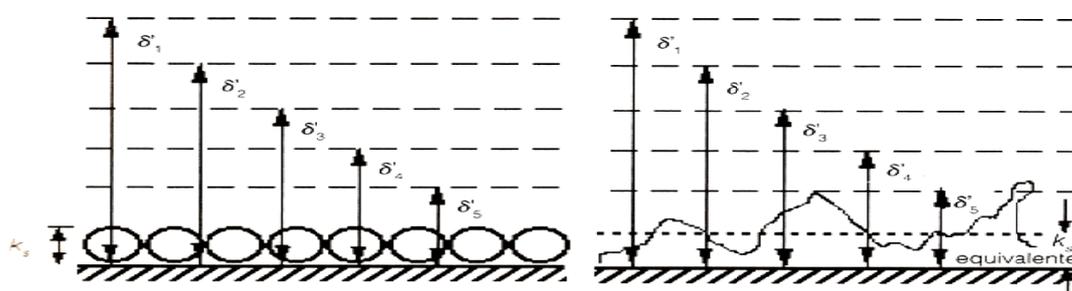
- Utilizando sus resultados y la ecuación de Colebrook-White, Moody pudo producir una nueva grafica en la cual incluía todo el rango de flujo, desde laminar hasta turbulento hidráulicamente rugoso, con el fin de estudiar el comportamiento del factor de fricción  $f$  para tuberías comerciales. Esta grafica (figura 2.18) se conoce como el diagrama de Moody. Durante mucho tiempo fue la única herramienta práctica para el cálculo del factor de fricción que debía utilizarse en conjunto con la ecuación de Darcy-Weisbach, ya que las ecuaciones matemáticamente deducidas resultaron ser tan complejas que requirieron métodos numéricos para su solución. En la época anterior a la masificación del uso de los computadores y calculadoras programables, el tener que utilizar métodos iterativos para el diseño de tuberías resultaba engorroso y poco práctico.



**Figura 2.18** Diagrama de Moody

La semejanza entre los diagramas de Nikuradse y de Moody y salta a la vista. En ambos existen la zona laminar, la curva correspondiente al flujo hidráulicamente liso y las líneas horizontales que describen el flujo hidráulicamente rugoso para cada rugosidad relativa. Así mismo, en ambos existe la zona de flujo transicional, aunque es en esa zona en donde se aprecia una marcada diferencia. En el diagrama de Nikuradse cada curva correspondiente a una rugosidad relativa se separa en forma abrupta de la

curva hidráulicamente lisa. En el diagrama de Moody las curvas correspondientes a cada rugosidad relativa se aproximan en forma asintótica a la curva lisa. Esto sucede porque en los tubos de Nikuradse la rugosidad tiene un tamaño uniforme y, por consiguiente, al aumentar el número de Reynolds y disminuir el espesor de la subcapa laminar viscosa, el efecto de la rugosidad se siente *simultáneamente*. En los tubos reales la rugosidad no es uniforme, lo cual implica que su efecto sobre la hidráulica del fondo es gradual. Este planteamiento se esquematiza en la figura 2.19.



**Figura 2.19** El espesor de la subcapa laminar viscosa (  $\delta'$  ) disminuye a medida que el número de Reynolds y el caudal aumentan. En los tubos de Nikuradse la rugosidad afecta en forma *simultáneamente* la hidráulica del flujo. En los tubos reales, ese efecto es *gradual*, es decir, las mayores prominencias de la rugosidad afectan el flujo antes que las menores.

## 2.2.5 Ecuaciones Generales Para La Fricción En Tuberías Reales

Después de establecer y probar su teoría de longitud de mezcla para explicar los esfuerzos cortantes en flujo turbulento, Prandtl siguió estudiando el problema de la resistencia en el movimiento de fluidos. Conjuntamente con uno de sus alumnos, Theodore Von Karman, entre 1920 y 1930 dedujo las ecuaciones que permiten el cálculo del factor de fricción  $f$  para el flujo turbulento. En este numeral se describe el proceso seguido por estos dos investigadores.

Las ecuaciones usadas por Prandtl y Von Karman, ya deducidas a lo largo de este capítulo, son las siguientes:

- Espesor de la subcapa laminar viscosa:

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{v_*} \quad (2.21)$$

- Distribución de velocidades en flujo turbulento:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{k} \ln y + c_1 \quad (2.27)$$

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4} \ln \frac{v_* y}{\nu} + 5.47 \quad (2.31)$$

- Esfuerzo cortante en la pared de la tubería:

$$\tau_o = \frac{A}{P} \frac{dp^*}{dx} \quad (2.1)$$

O aproximadamente:

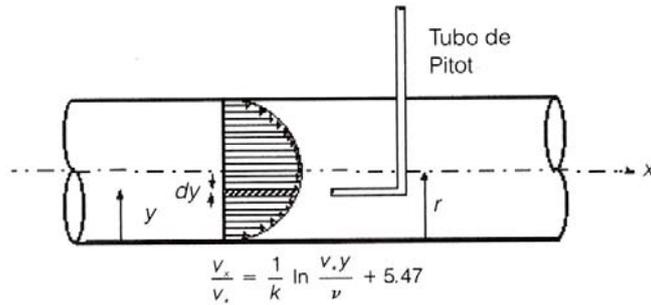
$$\tau_r = \frac{r}{2} \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \quad (2.1)1$$

- Relación entre el factor de fricción y el esfuerzo cortante:

$$f = \frac{8\tau_o}{\rho V_*^2} \quad (2.19)$$

El primer paso fue calcular la velocidad media del flujo mediante la distribución de velocidades representada por la ecuación 2.31. Para esto se toma el diferencial  $dy$  de la figura 2.20 y, teniendo en cuenta que la tubería es circular, se puede establecer el siguiente diferencial de área:

$$dA = 2\pi(r - y)dy$$



**Figura 2.20** Distribución de velocidades para flujo hidráulicamente liso desarrollado por completo en una tubería de sección circular.

Por este diferencial de área pasa el siguiente diferencial de caudal:

Si se integran los diferenciales de caudal se obtiene el caudal total que pasa a través de toda la sección transversal de la tubería. Por consiguiente:

En esta última ecuación  $v$  se reemplaza por la función de  $y$  que la describe, es decir, por la distribución de velocidades para el flujo hidráulicamente liso representada por la ecuación 2.29. Luego:

— —

Al expandir el paréntesis de esta última integral se obtiene:

$$Q = 2\pi \int_0^r \left( \frac{v_* r}{0.4} \ln \frac{v_*}{v} + \frac{v_* r}{0.4} \ln y + 5.47 v_* r - \frac{v_* y}{0.4} \ln \frac{v_*}{v} - \frac{v_* y}{0.4} \ln y - 5.47 v_* y \right) dy$$

Si se lleva a cabo el proceso de integración se obtiene la siguiente expresión:

$$Q = 2\pi \int_0^r \left( \frac{v_* r}{0.4} y \ln \frac{v_*}{v} + \frac{v_* r}{0.4} y \ln y - \frac{v_* r}{0.4} y + 5.47 v_* r y - \frac{v_* y^2}{0.4} \ln \frac{v_*}{v} - \frac{v_* y^2}{0.4} \ln y + \frac{v_* y^2}{0.4} - 5.47 v_* \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^r$$

$$Q = 2\pi \left( \frac{v_*}{0.4} r^2 \ln \frac{v_*}{v} + \frac{v_*}{0.4} r^2 \ln r - \frac{v_*}{0.4} r^2 + 5.47 v_* r^2 - \frac{v_* r^2}{0.4} \ln \frac{v_*}{v} - \frac{v_* r^2}{0.4} \ln r + \frac{v_* r^2}{0.4} - 5.47 v_* \frac{r^2}{2} \right)$$

$$Q = 2\pi \left( \frac{v_*}{0.4} \frac{r^2}{2} \ln \frac{v_*}{v} + \frac{v_*}{0.4} \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{3}{4} \frac{v_*}{0.4} r^2 + 5.47 v_* \frac{r^2}{2} \right)$$

$$Q = \pi r^2 \left( \frac{v_*}{0.4} \ln \frac{v_* r}{v} + 1.720 v_* \right) \quad (2.37)$$

La ecuación 2.37 representa el caudal total que pasa por una tubería circular de radio  $r$  cuando el flujo es hidráulicamente liso. Con este caudal se puede calcular la velocidad media al dividírsele por el área transversal de la tubería.

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$$

$$v = \frac{v_*}{0.4} \ln \frac{v_* r}{v} + 1.720 v_* \quad (2.38)$$

En esta última ecuación se tiene una especie de número Reynolds conocido como  $Re$ :

$$Re_*, \frac{v_* r}{v} \quad (2.39)$$

Por definición se tiene que:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}$$

Y si se despeja de la ecuación 2.19:

$$\tau_o = \frac{\rho \bar{y}^2}{8} f \quad (2.19)$$

Mediante estas dos últimas ecuaciones se obtiene la siguiente expresión para la velocidad de corte en flujo hidráulicamente liso:

$$v_* = \sqrt{\frac{f}{8}} \bar{v} \quad (2.40)$$

Si se reemplaza la ecuación 2.40 en la ecuación 2.39 se llega a:

$$Re_* = \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{r}{\nu} \bar{v}$$

O:

$$Re_* = \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{d}{2} \frac{1}{\nu} \bar{v} \quad (2.41)$$

Finalmente, al reemplazar las ecuaciones 2.40 y 2.41 en la ecuación 2.38 se obtiene:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{f}{8}} \bar{v} \left[ \frac{1}{0.4} \ln \left[ \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{d}{2\nu} \bar{v} + 1.72 \right] \right]$$

Al desarrollar esta última ecuación:

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 2.5 \ln \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{1}{2} Re + 1.72$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88388 \ln \frac{\sqrt{f} Re}{5.6569} + 0.6081$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88388 \ln Re \sqrt{f} + 0.88388 \ln \frac{1}{5.6569} + 0.6081$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88388 \ln Re \sqrt{f} - 0.924 \quad (2.42)$$

La ecuación 2.42 es la forma original de la ecuación de Prandtl-Von Karman para el cálculo del factor de fricción  $f$  en fluidos hidráulicamente lisos. Es importante tener en cuenta que todo el análisis anterior está basado en la teoría de longitud de mezcla de Prandtl, la cual ha probado ser muy exacta. Como último paso estos dos investigadores decidieron cambiar la base del algoritmo de la ecuación 2.29 de base  $e$  a base 10. Al parecer las razones de este cambio obedecieron solo al hecho de que en una época sin calculadoras electrónicas y sin computadores, trabajar con logaritmos en base 10 era más sencillo. Al efectuar el cambio de base la ecuación 2.40 se transforma a:

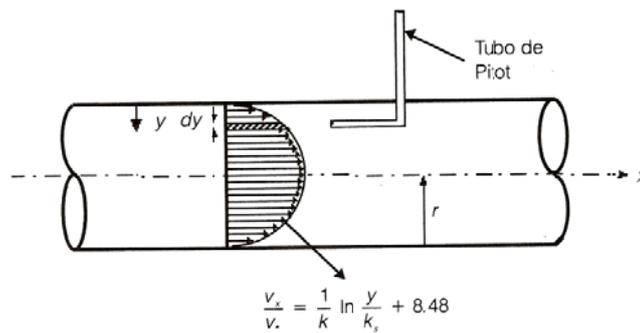
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.035 \log_{10} Re \sqrt{f} - 0.924 \quad (2.43)$$

Después de confrontar su teoría contra datos de laboratorio, Prandtl y Von Karman establecieron la forma final de la ecuación para el cálculo del factor de fricción en flujos hidráulicamente lisos. Esta ecuación *no explícita* para  $f$ , es:

$$= \quad - \quad (2.44)$$

### 2.2.6 Flujo Hidráulicamente Rugoso

De nuevo, el primer paso fue calcular la velocidad media mediante la distribución de velocidades representada por la ecuación 2.44, válida para el caso del flujo hidráulicamente rugoso. Si se toma el diferencial  $dy$  de la figura 2.16 se establece el diferencial de área:



**Figura 2.20** Distribución de velocidades para flujo hidráulicamente rugoso completamente desarrollado en una tubería de sección circular.

Por este diferencial de área fluye el siguiente diferencial de caudal:

— —

Para calcular el caudal total se integran los diferenciales de caudal sobre el área de la sección transversal de la tubería:

$$Q = \int_A dQ = \int_0^r 2\pi \left( \frac{v_*}{k} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48v_* \right) (r - y) dy$$

Al expandir los paréntesis de la anterior ecuación se llega a:

$$Q = 2\pi \left( \frac{v_* r}{k} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48v_* r - \frac{v_* y}{k} \ln \frac{y}{k_s} - 8.48v_* y \right) dy$$

Luego, se lleva a cabo el proceso de integración:

$$Q = 2\pi \left( \frac{v_* r}{k} y \ln y - \frac{v_* r}{k} y - \frac{v_* r}{k} y \ln \frac{1}{k_s} + 8.48v_* r y - \frac{v_* y^2}{k} \ln y + \frac{v_* y^2}{k} + \frac{v_* y^2}{k} \ln \frac{1}{k_s} - 8.48v_* \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^r$$

$$Q = 2\pi \left[ \frac{v_* r^2}{k} \ln r - \frac{3v_*}{4k} r^2 - \frac{v_* r^2}{k} \ln \frac{1}{k_s} - 8.48v_* \frac{r^2}{2} \right]$$

$$Q = \pi r^2 \left[ \frac{v_*}{0.4} \ln \frac{r}{k_s} + 4.73v_* \right]$$

La utilización de esta última ecuación deja claro que la velocidad media es:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$$

Luego:

$$\bar{v} = \frac{v_*}{0.4} \ln \frac{r}{k_s} + 4.73v_* \quad (2.45)$$

Como  $r=d/2$  se obtiene:

$$\bar{v} = \frac{v_*}{0.4} \ln \frac{d}{2k_s} + 4.73v_*$$

$$\bar{v} = v_* \left( \frac{1}{0.4} \ln \frac{d}{2k_s} + 4.73 \right) \quad (2.46)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\bar{v}_* = \sqrt{\frac{f}{8}} v$$

Luego al remplazar la ecuación 2.46 se llega a:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{f}{8}} \bar{v} \left( \frac{1}{0.4} \ln \frac{d}{2k_s} + 4.73 \right)$$

Al despejar el factor de fricción  $f$ .

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88388 \ln \frac{d}{2k_s} + 1.672$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88388 \ln \frac{d}{k_s} + 1.672$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88388 \ln \frac{d}{k_s} + 1.060$$

Nuevamente, Prandtl y Von Karman hicieron el cambio en la base del logarítmico a fin de de obtener la siguiente expresión para el cálculo de la ecuación de fricción  $f$  en flujos hidráulicamente rugosos:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.035 \log_{10} \left( \frac{d}{k_s} \right) + 1.060 \quad (2.47)$$

Por último ajustaron su ecuación a datos experimentales, estableciendo la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \left( \frac{d}{k_s} \right) + 1.14 \quad (2.48)$$

Dicha ecuación es válida para casos el espesor de la subcapa es menor que el tamaño real de la rugosidad absoluta de las paredes internas de la tubería.

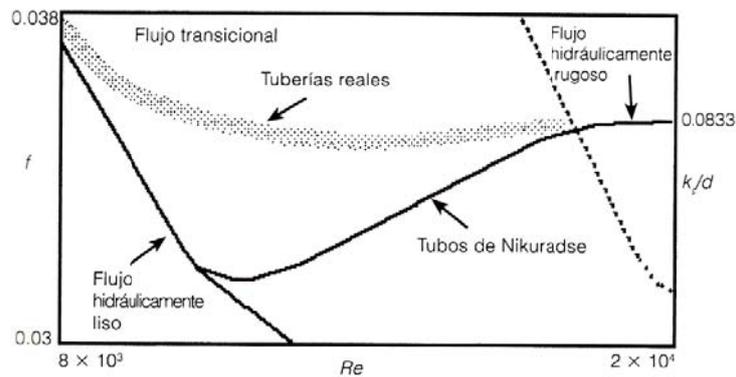
### **2.2.7 Flujos Hidráulicamente En Transacción**

Para los casos en los cuales el flujo estaba en la zona de transacción entre los flujos hidráulicamente liso y rugoso, Prandtl y Von Karman no pudieron deducir una ecuación que describiera el factor de fricción en función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa. Encontraron que  $f$  era una función complicada de  $k_s/d$  y de  $Re$ . El establecimiento de una ecuación definitiva tuvo que esperar los trabajos de los investigadores ingleses Colebrook y White.

### **2.2.8 Clasificación De Las Rugosidades En Tuberías. Trabajos De Colebrook-White**

La gran mayoría de los flujos en tuberías, cuando por ellas fluye agua, se encuentra en la zona de transición de los diagramas de Nikuradse y Moody; por ello no se podía aplicar ninguna de las ecuaciones de diseño de Prandtl y Von Karman. Dos investigadores ingleses, Colebrook y White, hicieron una clasificación de las rugosidades relativas con el fin de entender mejor el flujo transicional. El trabajo de estos dos investigadores se desarrollo en la siguiente forma.

Si en el diagrama de Nikuradse se hubiesen tenido en cuenta tuberías reales, la zona de flujo transicional habría sido diferente. En la siguiente figura se esquematiza una parte de ese diagrama, en el cual se establece la diferencia entre los tubos de Nikuradse y las tuberías comerciales (reales). Es claro que la separación de la curva “lisa” es gradual en este último caso.



**Figura 2.21** Esquema parcial del diagrama de Nikuradse mostrando la diferencia de comportamiento entre las tuberías reales y los tubos de Nikuradse en la zona de flujo transicional. Este trabajo fue utilizado posteriormente por Moody para desarrollar su diagrama de tuberías comerciales.

Una vez establecido el comportamiento anterior, Colebrook y White decidieron, en 1939 estudiar en detalle el flujo en la zona transicional, a fin de establecer una ecuación que permitiera el cálculo del factor de fricción  $f$  para este tipo de flujo. Los pasos seguidos por los dos investigadores fueron:

1. Compararon la rugosidad absoluta con el espesor de la subcapa laminar viscosa:

$$\frac{k}{d} = \frac{2.3 \nu}{v_* \delta} = \frac{2.3 \nu}{v_* \frac{5 \nu}{v_*}} = 0.46 \frac{v_*^2}{\nu}$$

En esta ecuación se puede remplazar el valor del espesor de la subcapa laminar viscosa:

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{v_*} \quad (2.21)$$

Luego, se llega al siguiente resultado:

$$\frac{\delta'}{d} = \frac{11.6\nu}{v_*d} \quad (2.49)$$

Por otro lado se tiene que, por definición:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad (2.50)$$

Y de la ecuación 2.40 se obtiene:

$$v_* = \bar{v} \sqrt{\frac{f}{8}}$$

Y al remplazar este último resultado en la ecuación 2.49 se obtiene:

$$\frac{\delta'}{d} = \frac{11.6\nu\sqrt{8}}{\bar{v}d\sqrt{f}} = \frac{32.81}{Re\sqrt{f}}$$

Finalmente:

$$\frac{k_s}{\delta'} = \frac{k_s}{d} \frac{Re\sqrt{f}}{32.81} \quad (2.51)$$

De donde:

$$\frac{k_s}{d} Re\sqrt{f} = 32.81 \frac{k_s}{\delta^*} \quad (2.52)$$

Colebrook y White comprobaron con esta última ecuación que el término  $(k_s Re\sqrt{f})/d$  definía en forma clara la rugosidad relativa.

2. Tomaron las ecuaciones de Prandtl y Von Karman y las transformaron de la siguiente manera:

- Flujo hidráulicamente rugoso: Al despejar la ecuación 2.48 se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2 \log_{10} \left( \frac{d}{k_s} \right) = 1.14 \quad (2.48)$$

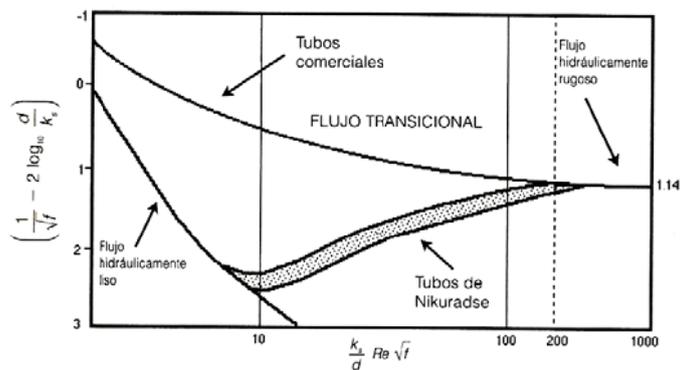
- Flujo hidráulicamente liso:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2 \log_{10} Re\sqrt{f} = 0.8 \quad (2.44)$$

De donde se obtienen, restando  $2 \log_{10}(d/k_s)$  a ambos lados de la anterior ecuación, el siguiente resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2 \log_{10} \frac{d}{k_s} = 2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{d} Re\sqrt{f} \right) - 0.8 \quad (2.53)$$

3. Compararon los términos de la izquierda de las ecuaciones 2.48 y 2.53 con el término  $((k_s Re\sqrt{f})/d)$  y produjeron la grafica que aparece en la figura 2.18, para tubos con rugosidad artificial.



**Figura 2.22** Rugosidad relativa como función del factor de fricción  $f$  y el número de Reynolds en la zona de flujo transicional.

4. A partir de los resultados de la figura 2.22 obtuvieron:

- Flujos hidráulicamente lisos:

— —

- Flujos en la zona de transición:

— —

- Flujos hidráulicamente rugosos:

— —

5. Luego, tomaron la ecuación 2.52 de la cual obtuvieron:

— —

Y al remplazar este resultado en las desigualdades 2.54 a 2.56, llegaron a las siguientes desigualdades:

- Flujos hidráulicamente lisos:

$$\frac{k_s}{\delta'} 32.81 \leq 10$$

$$\frac{k_s}{\delta'} \leq 0.305$$

$$k_s \leq 0.305 \delta' \quad (2.57)$$

Este resultado indica que para que el flujo sea hidráulicamente liso, el tamaño de la rugosidad tiene que ser menor al *30% del espesor de la subcapa laminar viscosa*.

- Flujos hidráulicamente rugosos:

$$\frac{k_s}{\delta'} \geq 6.10$$

$$k_s \geq 6.10 \delta' \quad (2.58)$$

Para que el flujo sea hidráulicamente rugoso, el tamaño de la rugosidad debe ser superior a *6 veces el espesor de la subcapa laminar viscosa*.

- Flujos en la zona de transición:

Con sus resultados, Colebrook y White lograron definir claramente los límites entre los cuales ocurre el flujo en transición:

$$0.305 \delta' < k_s \leq 6.10 \delta' \quad (2.59)$$

6. Este resultado los llevo a razonar en torno a que si la transición debía ser un cambio gradual entre las condiciones lisas y rugosas, la ecuación necesaria para definir el factor de fricción en la zona de transición debería ser una combinación de las ecuaciones para flujo hidráulicamente liso y rugoso. Teniendo en cuenta la anterior conclusión, Colebrook y White establecieron la siguiente ecuación para el factor  $f$  en la zona de transición.

A partir de la ecuación 2.44:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \frac{Re\sqrt{f}}{2.51}$$

Y de la ecuación 2.48 se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \frac{3.7d}{k_s}$$

Después de estudiar el comportamiento de la rugosidad relativa en la zona de transición (figura 2.18), llegaron a la conclusión de que las dos anteriores ecuaciones eran dos casos particulares extremos del flujo turbulento. Estas ecuaciones se podrían reunir en una sola:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \left( \frac{3.7d}{k_s} + \frac{Re\sqrt{f}}{2.51} \right)$$

Era claro que para el caso del flujo hidráulicamente liso, la rugosidad absoluta debía ser mucho menor que el diámetro de la tubería y, por consiguiente, el primer sumando del paréntesis debía ser de un orden de magnitud menor que el segundo, desapareciendo en el límite. Lo contrario sucedía para el flujo hidráulicamente rugoso.

Finalmente, Colebrook y White decidieron invertir los términos del logaritmo a fin de que apareciera la rugosidad relativa y no su inverso. Luego:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (2.60)$$

En donde combinaron los resultados de Von Karman. La ecuación 2.60 probó ser válida para todo tipo de flujo turbulento en tuberías. Sin embargo, tiene el problema de que no es una ecuación explícita para el factor fricción  $f$ , lo cual implica la necesidad de utilizar algún método numérico para calcularlo una vez se conozcan todas las otras variables. Este problema matemático ocasionó la aparición de ecuaciones empíricas más sencillas de utilizar, entre estas, la más famosa es la ecuación de Hazen-Williams

### 2.2.8.1 Diferentes métodos para determinar el factor de fricción en la ecuación de Darcy – Weisbach

1. La ecuación explícita para el factor de Fricción

$$f = \frac{0.25}{\left[ \log \left( \frac{1}{3.7 \left( \frac{D}{k} \right)} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad \text{ó} \quad f = \frac{0.25}{\left[ \log \left( \frac{k/D}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (2.61)$$

2. Ecuación de Colebrook – White

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{Re\sqrt{fa}} \right) \quad (2.60)$$

Donde  $fa$  se determina de la siguiente expresión

$$fa = 0.00551 \left\{ \left[ (20\,000) \left( \frac{k_s}{D} \right) + \frac{10^6}{Re} \right]^{0.333} \right\} \quad (2.61)$$

### 3. Diagrama de Moody

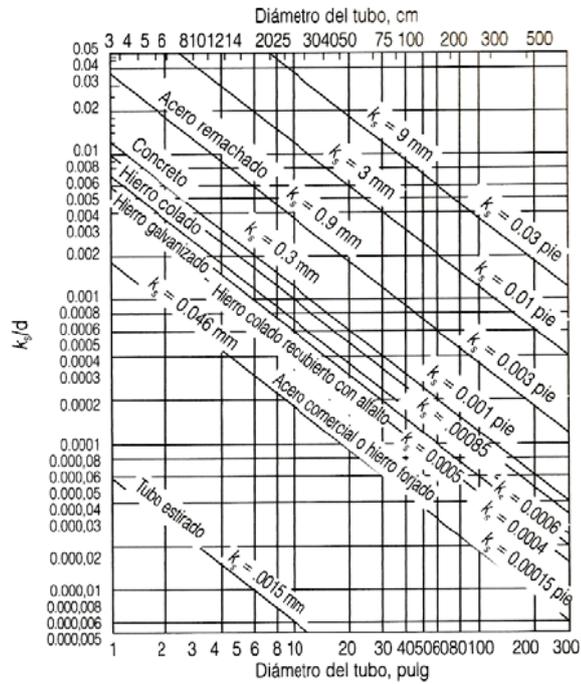


Figura 2.18

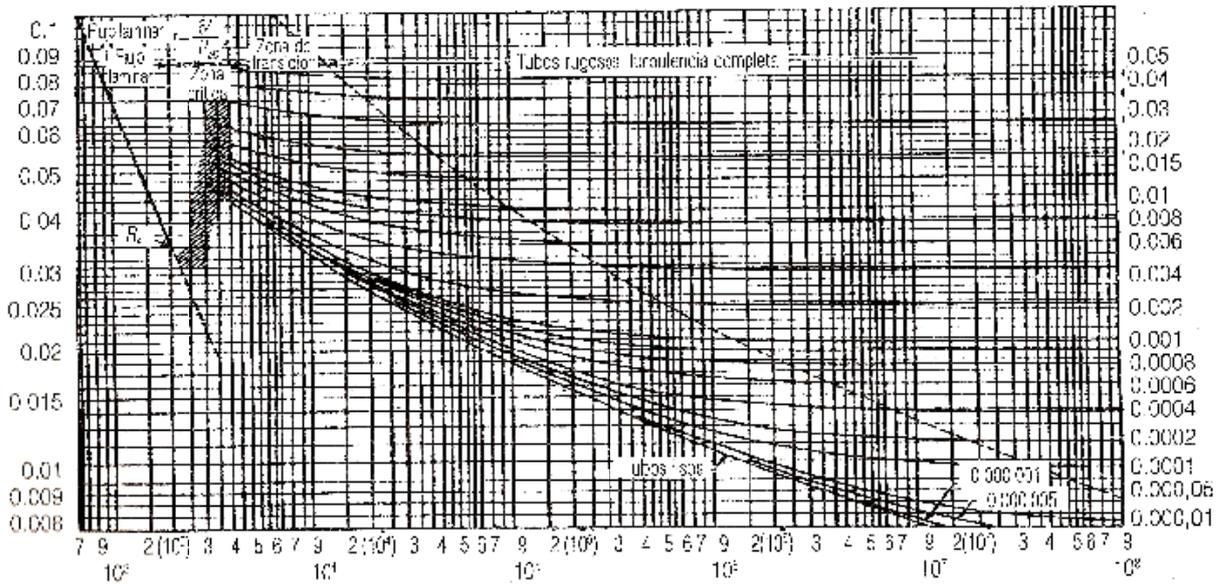


Figura 2.19

4. Utilizando el Método Analítico de la Secante: Este método es válido si  $a < b$ , es decir solo interesa que el signo de la multiplicación se (-).

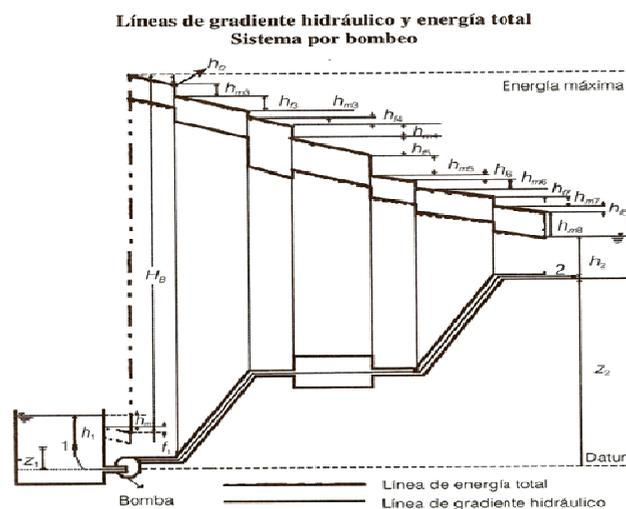
2.62

Donde a y b son límites obtenidos en el Diagrama de Moody

### 2.3 Tipos De Problemas En Hidráulica De Ductos A Presión

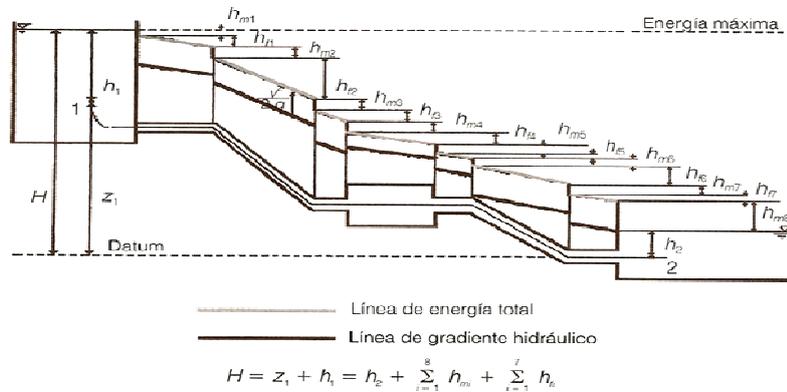
Los problemas en la hidráulica de tuberías se pueden clasificar de acuerdo con la variable desconocida en el problema. Las variables involucradas en problemas de tuberías son las siguientes:

- Variables relacionadas con la tubería en sí: Diámetro de la tubería ( $d$ ), longitud de la tubería ( $L$ ) y rugosidad absoluta de la tubería ( $\epsilon$ ).
- Variables relacionadas con el fluido: Diámetro del fluido ( $d$ ) y viscosidad dinámica del fluido ( $\mu$ ).
- Variables relacionadas con el esquema del sistema: Coeficiente de perdidas menores de todos accesorios necesarios, incluyendo válvulas ( $K$ ) (ver anexo 2).



**Figura 2.23** Líneas de energía total y de gradiente hidráulico (o línea piezométrica) para un sistemas de tuberías a presión conectando dos tanques y utilizando una bomba que produce una cabeza  $H_B$ .

**Líneas de gradiente hidráulico y de energía total  
Sistema por gravedad**



**Figura 2.24** Líneas de energía total y de gradiente hidráulico (o línea piezométrica) para un sistema de tubería a presión que une dos tanques. En este caso, la potencia requerida para mover el fluido es suministrada por la gravedad.

- Variables relacionadas con la energía impulsora del fluido: Cabeza entre el embalse de entrada y la salida ( $H$ ) o potencia de la bomba ( $P$ ).
- Otras variables: Aceleración de la gravedad ( $g$ ) y caudal o velocidad media en la tubería ( $Q$  o  $v$ ).

Las variables que pueden ser desconocidas son el caudal, el diámetro de la tubería o la potencia de la bomba que es necesario instalar para mover un determinado caudal. Teniendo en cuenta la variable desconocida, los tipos de problemas son: Comprobación de diseño, cálculo de potencia requerida y diseño en sí de la tubería. A continuación se describe cada uno de los tipos de problema que surgen durante el trabajo con tuberías simples.

### Comprobación de diseño

En este tipo de problemas la tubería existe, lo cual implica que se conocen su longitud, su diámetro y su rugosidad absoluta (se conoce el material), al igual que todos los accesorios y sus coeficientes de pérdidas menores. Además se conoce la energía impulsora, ya sea una cabeza gravitacional o una bomba y las propiedades del fluido

(densidad y viscosidad dinámica). La incógnita es el caudal que pasa por la tubería, problema típico en el diseño de redes de distribución de agua potable o redes de riego, en las cuales se hace un pre dimensionamiento de los diámetros.

<b>Variables conocidas</b>	<b>Incógnita</b>
$d, k_s, H(o P), \Sigma k_m, \rho, \mu, g, l$	$Q(o v)$

### **Calculo de la potencia requerida**

Para estos problemas se conoce el caudal demandado, la tubería (se conocen tanto la longitud como el diámetro, la rugosidad absoluta, los coeficientes de perdidas menores de los accesorios) y las propiedades del fluido (densidad y viscosidad dinámica). Se tiene que calcular la potencia necesaria (bomba o diferencia de nivel) para mover un cierto caudal demandado y se desea conocer la bomba que debe ser colocada o la diferencia de nivel entre la entrada y la salida de la tubería.

<b>Variables conocidas</b>	<b>Incógnita</b>
$d, k_s, Q(o v), \Sigma k_m, \rho, \mu, g, l$	$H(o P)$

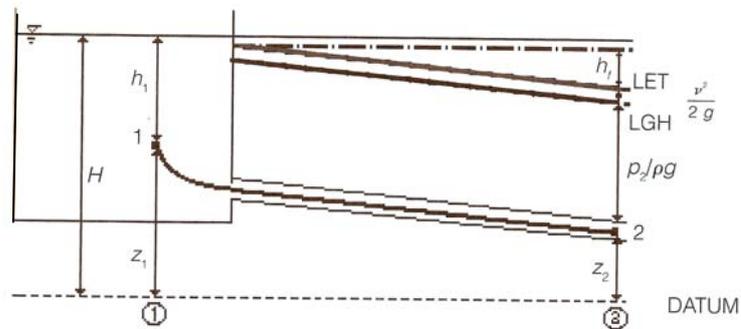
### **Diseño de la tubería**

En este caso se conoce el caudal demandado, la potencia disponible (bomba o diferencia de nivel generada por un embalse o tanque), algunas de las características de la tubería (longitud y accesorios necesarios con sus correspondientes coeficientes de perdidas menores) y las propiedades del fluido (densidad y viscosidad dinámica). Se desconoce el diámetro necesario para permitir el paso del caudal demandado. Por lo general, en cuanto al material de la tubería se tienen dos o tres alternativas, lo cual implica que se conoce la rugosidad absoluta de la tubería pero es necesario hacer tantos diseños como en diferentes materiales se encuentra disponibles en el sitio del proyecto con el fin se escoger la mejor alternativa.

Variables conocidas	Incógnita
$k_s, Q(o v), H(o P), \Sigma k_m, \rho, \mu, g, l$	$d$

### Ecuaciones para el diseño de tuberías simples

Mediante el uso de las ecuaciones de Colebrook-White (ecuación 2.60) conjuntamente con la ecuación de Darcy - Weisbach (ecuación 2.14) se puede desarrollar el siguiente procedimiento:



**Figura 2.25** Esquema representativo de una tubería. El punto 1 se localiza bastante dentro del tanque de tal manera que su velocidad sea aproximadamente 0. El punto 2 se localiza aguas abajo en el flujo dentro de la tubería.

A partir de la figura 2.23, que corresponde a una tubería simple alimentada por un tanque de nivel constante, se puede plantear la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, para llegar a la siguiente ecuación:

$$h_1 + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f + \Sigma h_m$$

Si el punto 2 corresponde a la salida, de la tubería, caso muy común en este tipo de análisis, ocurren tres cosas en la ecuación anterior. En primer lugar, el término de la cabeza de velocidad desaparece, ya que se supone que en la salida el flujo pierde su velocidad. En segundo lugar, y como consecuencia de lo anterior, el término de sumatoria de pérdidas menores debe incluir un término de pérdidas por salida. Por

último, la presión en la salida es igual a la atmosférica (presión manométrica nula); luego:

$$\frac{v_2^2}{2g} = 0; \frac{p_2}{\rho g} = 0$$

Es claro que para el punto 1,  $h_1 + z_1 = H$ , donde H es la altura del nivel de la superficie del tanque con respecto al nivel. Luego:

$$H = z_2 + h_f + \Sigma h_m$$

De esta última expresión se puede obtener la siguiente ecuación, la cual describe las pérdidas por fricción en función de las otras variables:

$$h_f = H - z_2 - \Sigma h_m \frac{v_2^2}{2g} \quad (2.63)$$

Si el punto 2 no corresponde a la salida de la tubería, la ecuación 2.63 tendría que incluir un término de cabeza de velocidad y la sumatoria de las pérdidas menores no debería incluir un término de pérdidas por salida. Mediante la ecuación de Darcy - Weisbach (ecuación 1.36), que también predice estas pérdidas, se puede despejar el factor de fricción  $f$ .

$$f = \frac{h_f d 2g}{l V^2}$$

Lo cual implica que:

$$\sqrt{f} = \frac{\sqrt{2gdh_f}}{\sqrt{l} V}$$

Y que:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{V\sqrt{l}}{\sqrt{2gdh_f}} \quad (2.64)$$

Al remplazar la ecuación 2.64 en la ecuación 2.60 se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (2.60)$$

$$\frac{V\sqrt{l}}{\sqrt{2gdh_f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51V\sqrt{l}}{Re\sqrt{2gdh_f}} \right)$$

El número de Reynolds en esta última ecuación puede remplazar por:

$$Re = \frac{Vd}{\nu}$$

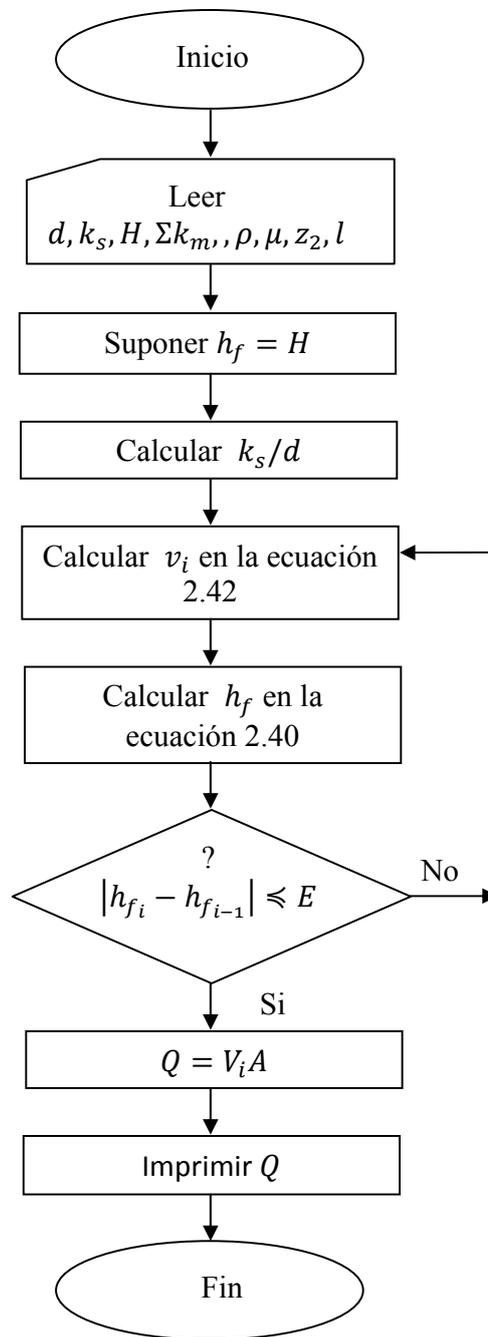
Por consiguiente, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{V\sqrt{l}}{\sqrt{2gdh_f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51\nu V\sqrt{l}}{Vd\sqrt{2gdh_f}} \right)$$

Finalmente, si se despeja la velocidad se encuentra una ecuación explícita para esa variable:

$$V = \frac{-2\sqrt{2gdh_f}}{\sqrt{l}} \log_{10} \left( \frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51\nu\sqrt{l}}{d\sqrt{2gdh_f}} \right) \quad (2.65)$$

Esta última ecuación es la base para la solución de los tres tipos de problemas relacionadas con tuberías simples mencionados anteriormente. En los siguientes numerales se explica en detalle la solución de estos tres grupos de problemas mediante la utilización de las ecuaciones deducidas hasta ahora.



**Diagrama de flujo 1** Comprobación de diseño de tuberías simples.

### Ejemplo 2.1 Comprobación de diseño de tuberías simples

Se desea calcular el caudal de agua que puede ser movido a través de una tubería de PVC, de 12 pulgadas de diámetro nominal y 730 m de longitud, que conecta dos tanques de abastecimiento de agua potable con una diferencia de nivel de 43.5 m. el diámetro real de la tubería es de 293 mm y su rugosidad absoluta es de  $1.5 \times 10^{-6}$  m. todos los accesorios que forman parte del sistema, incluyendo la entrada y la salida, implican un coeficiente global de pérdidas menores  $k_m$  de 11.8. El agua se encuentra a 20° c.

Para el agua a 20° C se tienen las siguientes características:

$$\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 1.1005 \times 10^{-3} \text{ Pa.s} \Rightarrow \nu = 1.007 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Con los datos anteriores se puede conseguir el procedimiento del diagrama de flujo 1; los resultados de las iteraciones se muestran en la siguiente tabla. Este procedimiento es fácilmente programable.

$H$ (m)	$k_s/d$ (-)	$h_{f_i}$ (m)	$\nu$ ( $\frac{m}{s}$ )	$h_{f_{i+1}}$ (m)
43.5	5.119E-06	43.5	5.61002291	24.5716711
43.5	5.119E-06	24.5716711	4.11547447	33.3135507
43.5	5.119E-06	33.3135507	4.85486976	29.324507
43.5	5.119E-06	29.324507	4.53028249	31.156635
43.5	5.119E-06	31.156635	4.68175029	30.3174479
43.5	5.119E-06	30.3174479	4.61289946	30.7023278
43.5	5.119E-06	30.7023278	4.64458506	30.5259118
43.5	5.119E-06	30.5259118	4.63008444	30.6067968

43.5	5.119E-06	30.6067968	4.63673764	30.5697164
43.5	5.119E-06	30.5697164	4.63368861	30.5867162
43.5	5.119E-06	30.5867162	4.63508667	30.5789227
43.5	5.119E-06	30.5789227	4.63444578	30.5824957
43.5	5.119E-06	30.5824957	4.63473961	30.5808576

Los resultados de este ejemplo se pueden resumir así:

$$h_f = 30.58$$

$$h_m = H - h_f = 43.5 \text{ m} - 30.58 \text{ m}$$

$$h_m = 12.92 \text{ m } \zeta$$

$$v = 4.634 \text{ m/s}$$

Finalmente se calcula el caudal que pasa a través de la tubería:

$$Q = vA$$

$$Q = 4.634 \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{\pi}{4} (0.293\text{m})^2$$

$$Q = 0.3124 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = 312.4 \text{ l/s}$$

### Calculo de potencia requerida

En este caso, todas las características de la tubería son conocidas, al igual que las del fluido. Se sabe un caudal demandado y se pregunta por la potencia requerida, ya sea de origen gravitacional o mecánico.

Sin embargo, para poder resolver el problema de la potencia requerida es necesario utilizar un método numérico con el fin de averiguar el valor del factor de fricción  $f$  de Darcy en la ecuación no explícita de Colebrook - White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (2.60)$$

A fin de resolver la anterior ecuación para  $f$  existen métodos numéricos, de los cuales se explican dos a continuación: el primero es muy sencillo pero requiere alrededor de diez iteraciones. El segundo es más complejo pero tiene la ventaja de que converge en dos o tres iteraciones, siendo útil cuando se desea reducir el tiempo de ejecución de un programa.

## **CAPITULO III**

## CAPITULO III ANÁLISIS DE REDES DE TUBERÍAS ABIERTAS

### 3 Análisis De Redes De Tuberías Abiertas

La aplicación de las ecuaciones estudiadas en el tema anterior, al cálculo de tuberías es muy frecuente en ingeniería, como en el cálculo de las redes de suministro urbano de agua y los proyectos de vivienda, conductos de refrigeración y aire acondicionado, así como también en los proyectos de plantas industriales, refinerías, etc.

Un caso muy interesante que se presenta con mucha frecuencia es la selección de una bomba centrífuga en la que el cliente debe especificar al fabricante de equipos rotodinámicos (bombas centrífugas, compresoras centrífugas, tuberías hidráulicas de reacción, etc.) la altura útil que ha de proporcionar el equipo rotodinámico, para lo cual el ingeniero deberá hacer un esfuerzo y análisis de las pérdidas que se tendrán en las instalaciones hidráulicas según la segunda expresión de la altura útil de Euler:

$$H = \frac{P_2 - P_A}{\rho g} + Z_2 - Z_A + H_{r_a} + H_{r_i} + \frac{V_r^2}{2g}$$

Donde:

$P_2 =$  Presión de descarga

$P_A =$  Presión de admisión

$Z_2 =$  Altura o nivel de descarga

$Z_A =$  Altura o nivel de aspiración

$H_{r_a} =$  Pérdida en la aspiración entre el nivel de aspiración y el de entrada

$H_{r_i} =$  Pérdida en la tubería de impulsión o de descarga

$V_t =$  Velocidad final en la tubería de impulsión

Las redes de distribución hidráulica tienen una analogía con las redes de distribución eléctrica. En esta analogía el caudal correspondiente a la intensidad de la

corriente, la pérdida de carga a la caída de tensión y la resistencia hidráulica a la resistencia Óhmica (o la impedancia). En hidráulica una ley semejante a la Ley de Ohm en corriente continúa solo se verifica si el régimen es laminar.

Las formulas que vamos a deducir en este tema y los procesos laboriosos de tanteo se presentan fácilmente a una programación para su resolución por medio de un Simulador y se tomara como Método Mecánico (hidráulico) una red de distribución en donde se estudiara y analizara el problema como Tuberías Ramificadas en donde la tubería principal se bifurca una o varias veces.

### 3.1 Balanceo De Cantidad

El análisis de las redes abiertas se efectuara utilizando el Método de Balance de Cantidad, es decir, considerando al caudal constante a lo largo de toda la red. Como principio se plantea que es cada una de las uniones o nodos de la red se debe cumplir la Ecuación de Continuidad y en cada uno de los embalses o tanques (recipientes) se debe suministrar el caudal demandado. En general, el problema consiste en determinar los diámetros y caudales en cada una de las tuberías de la red para condiciones permanentes de flujo y, a la vez, en verificar que en cada uno de los embales se cumplan las condiciones de demanda de caudal. En la Figura 3.1 se muestra un esquema de este tipo de redes.

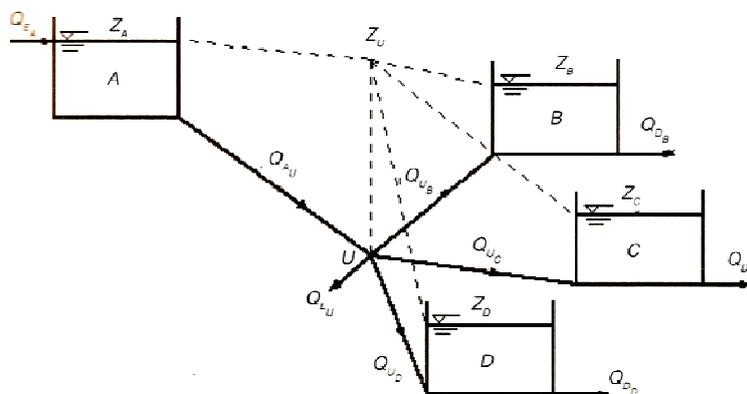


Figura 3.1 Red abierta conectando un tanque de suministro (A), al cual entra el caudal total demandado por el sistema, y tres tanques de almacenamiento (B, C, D) con sus respectivas demandas

La red mostrada en la Figura 3.1 sirve para establecer las ecuaciones utilizadas en el análisis. Tal como muestra la figura, el embalse A envía el agua a los embalses B, C y D a través de la tubería madre AU y luego a través de los ramales UB, UC y UD. Por consiguiente, las ecuaciones que se pueden plantear son:

### 3.2 Ecuación De Pérdidas De Energía En Cada Una De Las Tuberías De La Red

$$|Z_i - Z_u| = |h_i - h_x| = \left( f_{iu} \frac{l_{iu}}{d_{iu}} + \sum m_{iu} \right) \frac{v_{iu}^2}{2g} \quad (i = A, B, C, D) \quad (3.1)$$

Donde:

$h_x = Z_m$  = Cabeza o altura piezometrica en la union

(siempre es una variable desconocida)

$Z_i$  = Cabeza piezometrica en el tanque i

$v_{iu}$  = Velocidad de flujo en la tuberia iu

$d_{iu}$  = Diametro en la tuberia iu

$l_{iu}$  = Longitud de la tuberia iu

$f_{iu}$  = Factor de friccion de Darcy para la tuberia iu

$\sum k_{m_{iu}}$  = Coeficiente global de perdidas menores de la tuberia iu

La ecuación 3.1 se puede transformar así:

$$|Z_i - Z_u| = \left( \frac{f_{iu} l_{iu}}{2 g d} - \frac{\sum k_{m_{iu}}}{2 g} \right) \frac{Q^2}{A^2}$$

$$Z_i - Z_u = k_{iu} Q_{iu}^2 \quad (3.2)$$

Ecuación de conservación de la masa en la unión o nodo U

$$Q_{iu} - Q_{Lu} = 0 \quad (3.3)$$

Donde:

$Q_{i_u}$  = Caudal en la tubería  $i_u$  (se toma como positivo si llega al nodo

o como negativo si se sale del nodo

$n$  = Numero de tuberías que llegan a la unión o nodo  $U$

$Q_{L_u}$  = Caudal consumido en la unión (puede ser cero)

Con el uso de las anteriores ecuaciones y de los métodos y ecuaciones introducidos en los temas anteriores se pueden resolver los tres tipos de problemas mencionados en el tema 2 para el caso de redes abiertas.

## COMPROBACIÓN DE DISEÑO EN REDES ABIERTAS

En este caso se conocen todos los diámetros de cada uno de los tubos matrices o de los ramales, así como el material en que están elaborados. El proceso de comprobación tiene como incógnitas los caudales que llegan a cada uno de los embalses.

El proceso iterativo para la comprobación de diseño se basa en suponer las cabezas en cada una de las uniones y corregirlas progresivamente. Las variables e incógnitas del proceso son:

Variables	Incógnitas
$l(i, j)$	$Q(i, j)$
$k_s(i, j)$	$z_{u1}$
$d(i, j)$	
$\Sigma k_m(i, j)$	
$Z_i$	
$Q_{L_j}$	
$v$	
$\rho$	

En la lista anterior, el subíndice  $i$  representa los embalses (de los cuales existen  $n$  en el sistema) y el subíndice  $j$  representa las uniones (existen  $m$  en el sistema). Dado que las cabezas en las uniones son supuestas en la primera iteración, lo más probable es que en estas no se cumpla la ecuación de continuidad. Por consiguiente:

$$\sum_{i=1}^n Q_{iu} - Q_{Lj} = 0 \quad (3.4)$$

Donde:

$$X_Q = \text{Error de cierre de caudales en la union}$$

### 3.3 El Problema De Los Tres Recipientes

Se presenta en la Fig. 3.2. el problema admite múltiples aplicaciones: así el recipiente 1 puede sustituirse por una bomba que de la misma altura piezométrica  $h_1$ , y B sería, por ejemplo, la entrada en un edificio, 2 y 3 pueden ser dos lavabos situados en diferentes pisos de edificio. Otra aplicación sería que el punto 1 fuera la tubería principal de abastecimiento de agua; y entonces 2 y 3 serían dos puntos en dos barriadas donde debería asegurarse una cierta presión y un cierto caudal. Otra aplicación totalmente distinta, pero que conduciría al mismo esquema y a las mismas soluciones, sería el sistema de alimentación de combustible a los motores de un avión (punto B en la figura) desde tres depósitos situados uno en el fuselaje y dos en las alas.

Datos : Alturas piezométricas  $h_1, h_2$  y  $h_3$

Incognitas: Dirección de la corriente y caudales  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$

Supondremos que los conductos que conectan los recipientes son de igual diámetro.

En la Figura 3.1:

$$h_x = \frac{p_x}{\rho g} \text{ altura piezometrica en el punto B} \quad (3.5)$$

$$h_1, h_2, h_3 \text{ alturas piezometricas en los puntos 1,2,3}$$

Despreciando el efecto de la altura de velocidad creada en los conductos de conexión:

$$H_{r1} = h_1 - h_x$$

$$H_{r2} = h_2 - h_x$$

$$H_{r3} = h_3 - h_x$$

Donde  $H_{r1}, H_{r2}, H_{r3}$  pérdida de carga entre los puntos 1,2,3 y B.

Pueden suceder tres cosas:

Primer Caso:  $h_1 > h_x$ ;  $h_x > h_3$ ;  $h_x > h_2$  Entonces  $Q_1$ , se dirigió de 1 a B y  $Q_2, Q_3$  de B a 2 y 3, por lo tanto tendremos la siguiente ecuación:

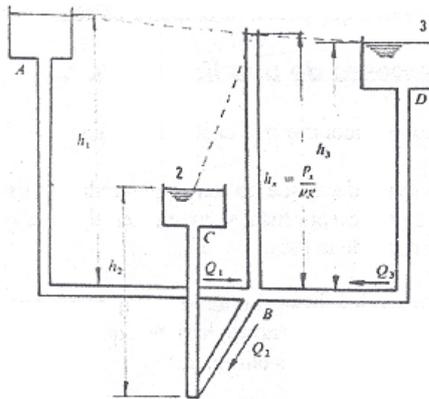
$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (3.6)$$

Segundo Caso:  $h_1 > h_x$ ;  $h_3 > h_x$ ;  $h_x > h_2$  En este caso pasa fluido de 1 y 3 a 2 por lo que se tendrá la siguiente ecuación:

$$Q_2 = Q_1 + Q_3 \quad (3.7)$$

Tercer Caso:  $h_1 > h_x$ ;  $h_2 > h_x$ ;  $h_x > h_3$  Entonces  $Q_3 = 0$ , el liquido pasara de 1 a 2, 3 se quedara sin fluido y su ecuación será;

$$Q_1 = Q_2 \quad (3.8)$$



**Figura 3.2** Tuberías ramificadas. La tubería principal simplemente se bifurca una o varias veces.

## **CAPITULO IV**

## CAPITULO IV MODELADO MATEMÁTICO

### 4.1 Formulación Integral

En el problema de los tres recipientes nos permitirá la formulación para poder cuantificar las variables hidráulicas y poder analizar el comportamiento energético del sistema, en donde:

$$H_{ri} = H_r = k_{ri} \frac{v_i^2}{2g} \quad (4.1)$$

Para cualquier rama  $H_{ri} = H_1 = H_2 = H_3$  (4.2)

Donde  $\zeta_{ri} =$  Coeficiente de pérdida total en la rama.

El caudal en la misma rama será:

$$Q_i = A_i V_i = A_i \sqrt{\frac{2gH_r}{k_{ri}}} \quad (4.3)$$

$$Q_i = \left( A_i \sqrt{\frac{2g}{k_{ri}}} \right) \sqrt{H_r} \text{ Donde } A_i \sqrt{\frac{2g}{k_{ri}}} = \alpha_i$$

Como la Ecuación Fundamental de Pérdidas Secundarias, tiene la misma forma que las pérdidas primarias:

$$k = f \frac{L}{D}$$

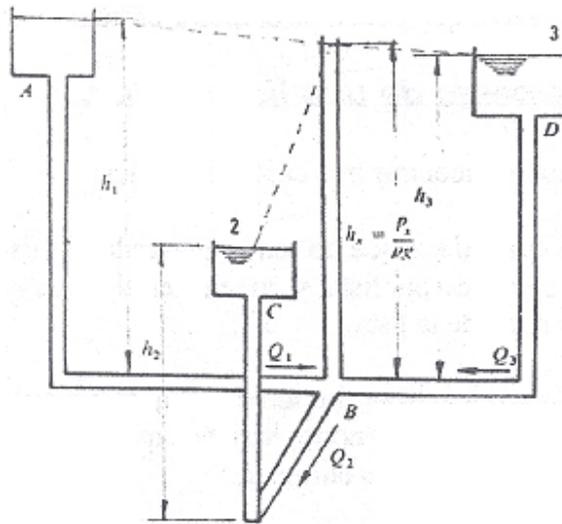
$$Ai \sqrt{\frac{2g}{f \frac{L}{D}}} = \alpha i \quad (4.5)$$

$$Qi = \alpha i \sqrt{Hr} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.6)$$

Para  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$  (4.7)

$$Q = \sum Q = \sqrt{Hr} \sum \alpha i \quad (4.8)$$

## 4.2 Formulación



**Figura 3.2** Tuberías ramificadas. La tubería principal simplemente se bifurca una o varias veces.

Volviendo al problema a analizar (figura 3.2 capítulo III) tenemos lo siguiente;

Datos: Altura piezométrica  $h_1, h_2, h_3$

Incógnitas (Variables hidráulicas):

- Dirección de la corriente y caudales  $Q_1 + Q_2 + Q_3$
- Altura piezométrica (acumulador de energía) en B, el cual es común en la tubería ramificada.

$$h_x = \frac{P_x}{\rho g} \quad \text{Altura piezometrica en el punto B}$$

$$h_1, h_2, h_3 \quad \text{Altura piezometrica en los puntos 1,2,3}$$

$$H_{r1}, H_{r2}, H_{r3} \quad \text{Perdidas de carga entre los puntos 1,2,3 y B}$$

Ahora bien:

$$H_{r1} = h_1 - h_x$$

$$H_{r2} = h_2 - h_x \quad (4.9)$$

$$H_{r3} = h_3 - h_x$$

Elevando al cuadrado la Ec. (4.6) y utilizando las Ecs. (4.9)

$$Q_1^2 = (h_1 - h_x) \alpha_1^2$$

$$Q_2^2 = (h_2 - h_x) \alpha_2^2 \quad (4.10)$$

$$Q_3^2 = (h_3 - h_x) \alpha_3^2$$

Puede suceder la siguiente hipótesis;

Si:  $h_1 > h_x$ ;  $h_x > h_3$  y  $h_x > h_2$  Entonces  $Q_1$  se dirige de 1 a B y  $Q_2, Q_3$  de B a 2 y 3, es decir el líquido de 1 le pasara a 2 y 3. Por lo que se podrá establecer el siguiente modelo matemático.

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (4.11)$$

Obtendremos las siguientes expresiones matemáticas:

$$\begin{aligned}
 Q_1^2 &= (h_x - h_1) \alpha_1^2 \\
 Q_2^2 &= (h_x - h_2) \alpha_2^2 \\
 Q_3^2 &= (h_x - h_3) \alpha_3^2
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Donde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  es una constante de la tubería en función del diámetro y además se propone que los caudales estén en función de la altura piezométrica común del sistema  $h_x$ .

$$Q_1^2 = f(x)$$

$$Q_2^2 + Q_3^2 = f(x)$$

Ahora bien sustituiremos (4.12) en el modelo matemático (4.11)

$$\alpha_1^2 (h_1 - h_x) = \alpha_2^2 (h_x - h_2) - \alpha_3^2 (h_x - h_3) \tag{4.13}$$

Cuya solución será aplicando el Método Tabular y donde se interceptan las curvas de la Ecuación 4.12 este será el punto que satisface a ambas ecuaciones, el cual será el punto óptimo de operación de un sistema de distribución hidráulica, esto aplicado a un sistema de bombeo la curva 1 ( □ ) (Fig. 4.1) hará la curva de operación de una bomba y la curva 2 ( \* ) hará la curva de operación del sistema hidráulico.

Ahora bien plantearemos la solución:  $h_x = [h_A, 0]$

<b>Método Tubular</b>	
$h_x$	$Q_A^2$ $(h_A - h_x) \propto^2$
$h_{A_1}$	0
$h_{A_2}$	$Q_1$
$h_{A_3}$	$Q_2$
$h_{A_4}$	$Q_3$
$\vdots$	$\vdots$
$h_{A_n}$	$Q_n$

$h_x$  es desde  $h_A$  hasta  $h_A = 0$

$$h_x < h_A$$

$$\text{Si } h_x = h_A \therefore Q_A = 0$$

$$h_{A_n} = 0 \therefore Q_M = Q_{\text{Maximo caudal}}$$

Tomando tres valores de la tabla y como es una ecuación de 2° orden y es una parábola su Ecuación general es:

$$h_x = AQ^2 + BQ + C \dots \quad (4.14)$$

$$h_{A_2} = AQ_1^2 + BQ_1 + C \dots$$

$$h_{A_3} = AQ_2^2 + BQ_2 + C \dots$$

$$h_{A_4} = AQ_3^2 + BQ_3 + C \dots$$

Como es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas (A, B, C) por cualquier método matemático (suma, resta, matrices, etc.) se determinaran los coeficientes y estos al sustituirse en la Ecuación general (4.14) obtendremos la curva de operación del sistema de distribución (curva #1 de la Fig. 4.1), esta ecuación es la misma para una bomba centrífuga, por lo que podemos decir que la  $h_x$ (altura piezometrica) es la energía de presión que da o que debe de tener una bomba centrífuga o maquina

rotodinámica para poder mover un fluido. Ahora bien analizando el método tubular tendremos:

$$Q_B + Q_C$$

$h_x$	$Q_B^2$
$h_x$	$\alpha_B^2 (h_x - h_B)$
$h_A$	$Q_B$
$h_{A_1}$	$Q_{B_1}$
$h_{B_2}$	$Q_{B_2}$
$h_{B_3}$	$Q_{B_3}$
$h_{B_n}$	0

+

$h_x$	$Q_C^2$
$h_x$	$\alpha_C (h_x - h_C)$
$h_A$	$Q_C$
$h_{C_1}$	$Q_{C_1}$
$h_{C_2}$	$Q_{C_2}$
$h_{C_3}$	$Q_{C_3}$
$h_{C_n}$	0

$$h_x = h_{B_n} = h_B \rightarrow \text{se tendrá : } Q_B = 0$$

$$h_x = h_{C_n} = h_C \rightarrow \text{se tendrá } Q_C = Q_{final}$$

Sumando los valores obtenidas en la tabulación nos da la curva del sistema hidráulico que es la número 2 (\*) que viene siendo igual a la curva de operación de un sistema hidráulico, finalmente nos queda:

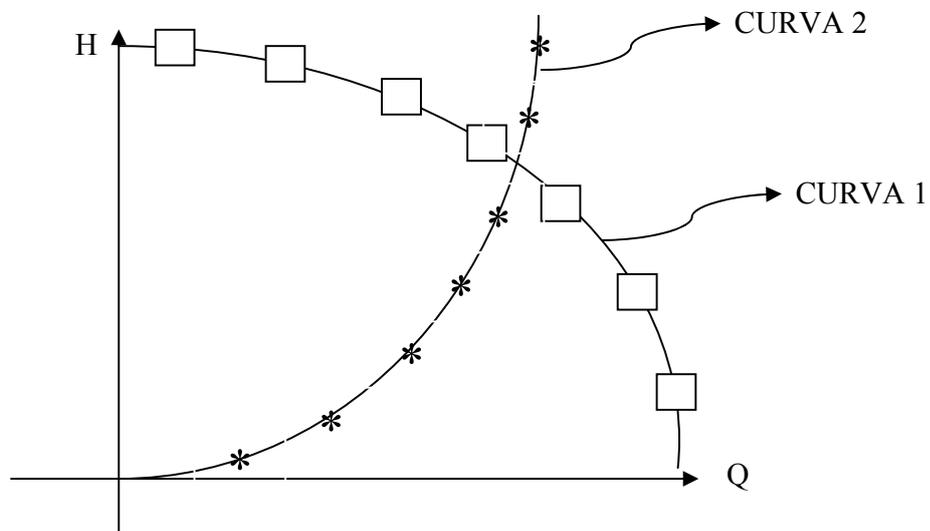
$$Q_B^2 + Q_C^2 = Z + \left[ \sum \lambda \frac{L}{D} + \sum k_n \right] \frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$\sqrt{(h_n - h_B) \alpha_B^2} + \sqrt{(h_x - h_C) \alpha_C^2} = Z + \left[ \sum \lambda \frac{L}{D} + \sum k_n \right] \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Cuya ecuación es la curva de la **Fig. 4.1**.

Este modelo matemático es aplicado para determinar el punto óptimo de operación de un sistema hidráulico, lo observamos gráficamente de la siguiente manera (**Ec. 4.13**).

Donde los valores de Q son los caudales y del eje “y” las alturas.



**Figura 4.1** La curva 1(□) es el comportamiento de operación del sistema de distribución la cual es equivalente a la de una bomba centrífuga.  
La curva 2 (\*) es la del comportamiento del sistema hidráulico, la cual ampara la pérdida por fricción tanto primarias como secundarias.

Podemos decir que el modelo matemático para un sistema de distribución y/o bomba es:

$$H = AQ^2 + BQ + C \quad (4.14)$$

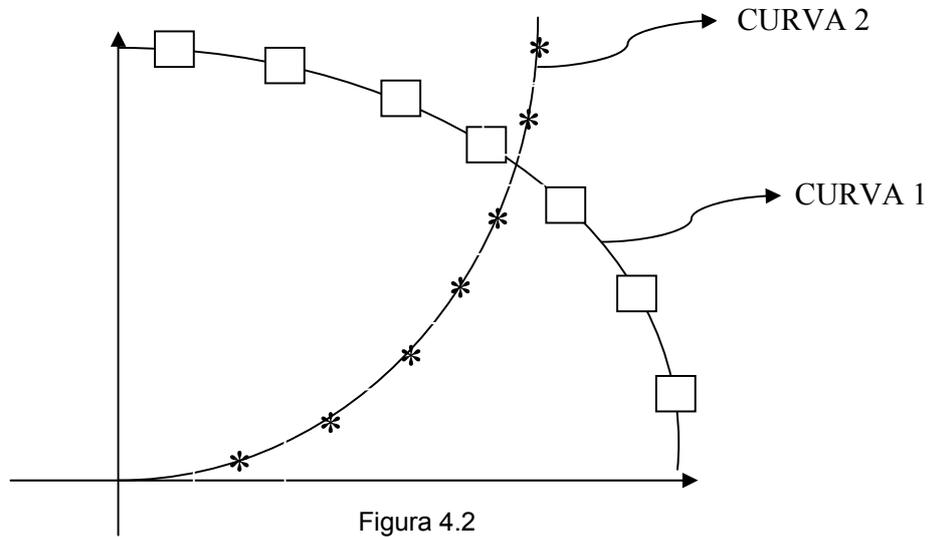
Y así mismo el modelo matemático para un sistema hidráulico:

$$H = \sum \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} + \sum k_n \frac{v^2}{2g} + Z$$

$$H = Z + \left[ \sum \lambda \frac{L}{D} + \sum k_n \right] \frac{v^2}{2g}$$

$$H = Z + \left[ \sum \lambda \frac{L}{D} + \sum k_n \right] \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (4.15)$$

Graficamos las ecuaciones anteriores (4.14) y (4.15)



$$\text{CURVA 1 } H = Aq^2 + BQ + C$$

$$\text{CURVA 2 } H = Z + \left[ \sum \frac{L}{D} + \sum K \right] \frac{Q^2}{2gA^2}$$

## **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

De acuerdo al estudio planteado en este proyecto de investigación se puede decir que dentro del proceso enseñanza - aprendizaje es de vital importancia de tomar en cuenta este tipo de análisis para obtener sus verdaderos costos de operación y desarrollar proyectos de mejora en el uso de la energía.

Uno de los resultados importantes en la evaluación energética es que nos permite ver cómo está distribuida la energía, así como también sus pérdidas hacia en medio ambiente.

Esta herramienta de cálculo permite conocer la energía que se requiere en los sistemas hidráulicos de bombeo, y así nos permitirá disminuir la pérdidas de energía, ya que la simulación nos representara su comportamiento, pudiendo hacer una síntesis al controlar y manipular las variables hidráulicos que intervienen, además de poder evaluar y analizar las curvas energéticas de operación de dicho sistema.

Se recomienda que dentro de los planes de estudio de mecánica de de fluidos y en lo particular en los sistemas hidráulicos y turbomáquinas hidráulicas (bombas), se les oriente a los estudiantes de ingeniería mecánica o carreras afines a que se profundicen en el análisis de la primera ley de la hidrostática y la primera ley de la hidrodinámica, ya que esto tendrá un beneficio en los estudiantes de ingeniería mecánica a nivel nacional y mundial, y esto a su vez permitirá que a las industrias permitan se les efectúe este tipo de evaluaciones a corto plazo.

## **BIBLIOGRAFIA**

## BIBLIOGRAFIA

- ALVARES FERNANDEZ JAVIER, VIEJO ZUBUCARAY MANUEL "BOMBAS"  
TERCERA EDICIÓN, EDITORIAL LIMUSA; MEXICO 1975
- CGOPER PAUL  
TERCERA EDICIÓN, EDITORIAL Mc GRAW HILL USA 2001
- CRANE "FLUKJO DE FLUIDOS EN VALVULAS, ACCESORIOS Y TUBERIAS"  
PRIMERA EDICIÓN, EDITORIAL Mc GRAW HILL; MEXICO 1987
- FINEMORE E. JOHN, FRANZINI JOSE PM B, "MECANICA DE FLUIDOS CON  
APLICACIÓN EN INGENIERIA" NOVENA EDICIÓN EDITORIAL Mc GRAW HILL,  
ESPAÑA 1999.
- FRASER WARREN; KARASSIK IGOR K. KRUTZSCM WILLIMC "MANUAL DE  
BOMBAS" PRIMERA EDICIÓN, EDITORIAL Mc GRAW HILL, MÉXICO 1983.
- MATAIX CLAUDIO, "MECÁNICA DE FLUIDOS Y MAQUINAS HIDRÁULICAS",  
EDITORIAL ALFA OMEGA, MEXICO 2005
- RAMOS PÉREZ NÉSTOR ING. "BOMBAS, VENTILADORES Y COMPRESORES"  
EDITORIAL ISPJAE, CIUDAD DE LA HABANA, 1987
- SALDARRIAGA V. JUAN, "HIDRAULICA DE TUBERIAS" EDITORIAL Mc GRAW HILL  
INTERAMERICANA, COLOMBIA 1998
- VALIENTE BARDERAS ANTONIO, "PROBLEMAS DE FLUJO DE FLUIDO" SEGUNDA  
EDICIÓN, EDITORIAL LUMUSA, MEXICO 1998.

## **ANEXOS**