

# **Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico**

**Subdirección Académica**

**Departamento de Ingeniería Mecánica**

## **TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS**

**Análisis Numérico de Rigidez de Contacto en Función de Geometría de  
Cuerpos**

presentada por

**Ing. Pedro Alberto Oliván Sánchez**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica**

Director de tesis  
**Dr. Eladio Martínez Rayón**

Codirector de tesis  
**Dr. Dariusz Slawomir Szwedowicz Wasik**

**Cuernavaca, Morelos, México. Junio de 2015.**



"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Cuernavaca, Mor., 05/junio/2015

OFICIO No. DIM/154/2015  
Asunto: Aceptación de documento de tesis

C. DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO  
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. Ing. Pedro Alberto Olivan Sánchez, con número de control M13CE024, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Análisis numérico de rigidez de contacto en función de geometría de cuerpos" y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

DR. ELADIO MARTÍNEZ RAYÓN  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica  
8500740

REVISOR 1

DR. JORGE COLÍN OCAMPO  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica  
4694783

REVISOR 2

DR. ARTURO ABUNDEZ PLIEGO  
Doctor En Ciencias en Ing. Mecánica  
6801139

REVISOR 3

M.C. CLAUDIA CORTÉS GARCÍA  
Maestra en Ciencias en Ingeniería Mecánica  
3146405

C.p. (Lic. Guadalupe Garrido Rivera).- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Estudiante  
Expediente

Iniciales AAP/mrsr





"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Cuernavaca, Mor., 08 de junio de 2015  
OFICIO No. SAC/128/2015

**Asunto:** Autorización de impresión de tesis

**ING. PEDRO ALBERTO OLIVAN SÁNCHEZ  
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA MECÁNICA  
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "**Análisis numérico de rigidez de contacto en función de geometría de cuerpos**", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

"CONOCIMIENTO Y TECNOLOGIA AL SERVICIO DE MEXICO"

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



CENTRO NACIONAL DE  
INVESTIGACIÓN Y  
DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Expediente

GVGR/mcr

---

## ***DEDICATORIA***

*A **Dios**, por darme salud y fortaleza sobre todo en los momentos más difíciles, permitiéndome continuar mi camino hasta alcanzar mis anheladas metas.*

*A mis amados padres: **Pedro Oliván Sánchez y Bertha Sánchez Sánchez**, por ser personas admirables que me motivan e inspiran a salir adelante, porque además de haberme dado la vida, la han llenado de amor, confianza, paciencia y comprensión en todo momento, pero sobre todo, porque no hay en mí, orgullo más grande que ser su hijo.*

---

---

---

## AGRADECIMIENTOS

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de maestría.*

*Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por darme la oportunidad de formar parte de él y por todo el apoyo y la formación académica recibida a través del personal docente.*

*Al Dr. Eladio Martínez Rayón por haber sido la primer persona que me dio la oportunidad de formar parte del CENIDET, por todo el apoyo y confianza brindados y porque entre lo más valioso que me llevo de esta etapa de mi vida se encuentra su amistad.*

*Al Dr. Dariusz Szwedowicz Wasik por su asesoramiento y grandes contribuciones en el desarrollo de esta tesis y mi formación profesional.*

*A los miembros del comité revisor, Dra. Claudia Cortés García, Dr. Jorge Colín Ocampo y Dr. Arturo Abúndez Pliego por sus valiosas observaciones en la revisión de este trabajo.*

*Al M.C. Luis Fernando Castro López por su gran apoyo en la realización de esta tesis, por toda su paciencia, profesionalismo, sus valiosos consejos y sobre todo por sus muestras de amistad y confianza hacia mí.*

*A todos los profesores-investigadores del área de diseño mecánico del CENIDET, que de una u otra forma contribuyeron en mi formación profesional.*

*A todo el personal administrativo y de servicios del CENIDET por su apoyo, en especial a Nadia López Salazar, por su disponibilidad y apoyo en el área de biblioteca, además de brindarme su confianza y amistad.*

*A Magali por ser una mujer admirable, un ejemplo de superación a seguir, por todo su apoyo y porque con sus muestras de cariño y ternura fue capaz de ablandar un corazón tan duro como el mío, ganándose un lugar muy especial en él.*

*Al resto de mis compañeros de generación: Mauricio, Fredy, Manuel, Francisco, Ángel y Rubisel por los momentos agradables que tuve el gusto de pasar con ellos.*

---

---

---

---

## RESUMEN

La rigidez de contacto de una unión mecánica influye en el estado de los fenómenos que se llevan a cabo en su interfaz, por ejemplo, un cambio en dicha rigidez conlleva una modificación en la magnitud y distribución de la presión de contacto y los esfuerzos de cizallamiento de la interfaz, lo cual puede repercutir en posibles fallas por desgaste o fatiga en la unión.

El objetivo de esta tesis es analizar cómo influye la geometría de los cuerpos de una unión mecánica en su rigidez de contacto. El estudio de dicha rigidez permite obtener información que posibilita evaluar el desempeño de un sistema cuando se encuentra sometido a fuerzas normales y tangenciales. Para llegar a esta resolución, se hizo una revisión de trabajos sobre el estudio del contacto mecánico, la rigidez interfacial y la influencia de la geometría de los cuerpos en contacto, además se hizo un compendio sobre fundamentos teóricos que permiten la mejor comprensión del contacto mecánico, la rigidez interfacial y el estado de esfuerzos y desplazamientos en la zona de contacto.

En este trabajo se lleva a cabo un análisis por simulación en elemento finito, en el cual se realizaron modificaciones en la geometría de uno de los cuerpos de una unión, los efectos obtenidos se compararon y con ello se observó que un pequeño cambio en la geometría efectivamente modifica la rigidez de contacto y genera cambios notorios en los esfuerzos de cizallamiento y presión de contacto. Además se obtuvo una justificación, para afirmar que la influencia de la rigidez de contacto no se limita únicamente a la línea o borde que representa el ancho de contacto, sino que abarca un cierto espesor a partir del borde de contacto y hasta cierta distancia al interior de los cuerpos en contacto.

---

---

---

---

## ABSTRACT

The contact stiffness of a mechanical union influences the state of the phenomena that occur in the contact zone, for example, a change in contact stiffness entails a change in the magnitude and distribution of contact pressure and shear stresses at the interface, this may affect possible failures due to wear or fatigue in the union.

The aim of this thesis is to analyze how it influences the bodies geometry of a mechanical its in its contact stiffness. The study of such stiffness is very important, as it provides information that allows assessing the performance of a system when it is subjected to normal and tangential forces. In reaching this resolution, it was made a review of works about the study of the mechanical contact, the interfacial stiffness and influence of the bodies geometry in contact, also it became a compendium of theoretical foundations that allow a better understanding of the mechanical contact, interfacial stiffness and the state of stress and displacements in the contact zone.

This paper carried out an analysis by finite element simulation, in which changes in the geometry of one of the bodies of a union is made, the effects were compared and it was found that a small change in the geometry effectively modifies the contact stiffness contact stiffness and generate changes on the shear stress and contact pressure. Besides, justification was obtained to assert that the influence of the contact stiffness is not limited to the line or edge that representing the width of contact, but it comprises a certain thickness from the contact edge to some distance inside the contact bodies.

---

---

---

---

# CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS .....	III
LISTA DE TABLAS .....	IX
NOMENCLATURA .....	X

## CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción.....	1
1.2 Trabajos relacionados (antecedentes) .....	2
1.2.1 Contacto.....	2
1.2.2 Rigidez de contacto .....	5
1.2.3 Geometría de los cuerpos en contacto y desgaste en régimen de deslizamiento parcial .....	12
1.2.4 Conclusión .....	17
1.3 Objetivo .....	17
1.3.1 Alcances .....	17
1.3.2 Limitaciones .....	17
1.4 Justificación.....	18
1.5 Estructura de la tesis .....	19

## CAPÍTULO 2: FUNDAMENTOS SOBRE RIGIDEZ DE CONTACTO

2.1 Introducción.....	20
2.2 Contacto mecánico.....	20
2.3 Teoría de contacto elástico de Hertz.....	21
2.3.1 Esfuerzos cortantes en contacto hertziano .....	25
2.4 Fricción .....	26
2.5 Teoría de contacto elástico tangencial.....	27
2.5.1 Comportamiento fuerza - desplazamiento tangencial .....	31
2.6 Modelo de contacto de resorte lineal .....	32
2.7 Régimen de deslizamiento parcial .....	33

## CAPÍTULO 3: MODELO DISCRETO

3.1 Introducción.....	35
3.2 Tipo de contacto seleccionado como objeto de estudio .....	36
3.3 Descripción del modelo discreto .....	37

3.4 Calibración del modelo discreto.....	40
3.5 Zona de influencia de la rigidez de contacto.....	43
3.6 Definición de zona para cálculo de rigidez de contacto .....	47

## CAPÍTULO 4: RESULTADOS

4.1 Introducción.....	50
4.2 Estado de deslizamiento parcial en el área de contacto .....	50
4.3 Rigidez de contacto.....	53
4.3.1 Rigidez de contacto normal .....	53
4.3.2 Rigidez de contacto tangencial .....	55
4.4 Distribución de presión de contacto y esfuerzos de cizallamiento por fricción en la interfaz.....	57

## CAPÍTULO 5: DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1 Introducción.....	60
5.2 Discusión de resultados.....	60
5.2.1 Estado de deslizamiento parcial en el área de contacto.....	60
5.2.2 Rigidez de contacto normal .....	63
5.2.3 Rigidez de contacto tangencial .....	63
5.2.4 Presión de contacto y esfuerzos de cizallamiento.....	65
5.2.5 Rigidez de contacto tangencial y esfuerzos interfaciales en función de $L/B$ para distintos $\mu$ .....	66
5.2.6 Diferencias porcentuales entre los efectos generados en la interfaz en función de la relación $L/B$ .....	68

## CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Introducción.....	71
6.2 Conclusiones .....	71
6.3 Recomendaciones .....	75
APÉNDICE A.....	76
APÉNDICE B.....	80
APÉNDICE C.....	85
REFERENCIAS.....	88

---



---

# LISTA DE FIGURAS

Figura	Descripción	Página
1.1	Esferas en contacto sometidas a fuerzas normal y tangencial ( <i>Vu-Quoc &amp; Zhang, 1999</i> ) .....	2
1.2	Esquema de la distribución de esfuerzos de cizallamiento para: (a) Deslizamiento parcial, (b) Deslizamiento total ( <i>Duffaut, 2010</i> ).....	3
1.3	Desarrollo de los esfuerzos de Von Mises en función de $F_t$ ( <i>Wu, 2012</i> )..	5
1.4	Rigidez de contacto obtenida a partir de datos experimentales y por medio de la mecánica de contacto elástico ( <i>Fillipi, et. al., 2004</i> ) .....	6
1.5	Curva de histéresis para a) deslizamiento total y b) deslizamiento parcial ( <i>Cigeroglu &amp; Özgüven, 2006</i> ).....	7
1.6	(a) Curva de histéresis con dos pendientes; (b) Comparación de los modelos de histéresis para deslizamiento parcial y de histéresis con dos pendientes ( <i>Cigeroglu &amp; Özgüven, 2006</i> ) .....	7
1.7	Modelos de: (a) contacto entre cuerpos elípticos parabólicos; (b) macrocontacto entre cilindros ( <i>Shi, 2014</i> ).....	11
1.8	Esquema de la zona de contacto ( <i>Vallellano, 2004</i> ).....	12
1.9	a) Desgaste en contacto esfera-plano; b) Diagrama $F_T - \delta$ del primer semiciclo de una prueba de fretting ( <i>Ödfalk y Vingsbo, 1992</i> ) .....	14
1.10	Variación del coeficiente normalizado unificado de energía de desgaste en función de la geometría de contacto ( <i>Warmuth, 2013</i> ) .....	16
2.1	Esquema del contacto hertziano esfera-plano ( <i>Miranda, 2003</i> ) .....	21
2.2	Distribución de presión de contacto ( <i>Dwyer-Joyce, 1997</i> ) .....	22
2.3	Esquema de contacto cilíndrico hertziano ( <i>Sneddon, 1965</i> ) .....	24

<b>2.4</b>	Esquema de los puntos críticos producidos por los esfuerzos cortantes para el contacto elástico de Hertz ( <i>Radzimovsky, 2007</i> ).....	25
<b>2.5</b>	Ubicación de los esfuerzos cortantes ( <i>Cook, 1999</i> ).....	25
<b>2.6</b>	Esquema de contacto del modelo básico de fricción de Coulomb ( <i>Abaqus Analysis User's Manual, Versión 6.9</i> ).....	26
<b>2.7</b>	Modelo de fricción basado en el modelo de fricción de Coulomb ideal ( <i>Wang, 2005</i> ) .....	26
<b>2.8</b>	División del área de contacto al aplicar la carga tangencial en zonas con deslizamiento y sin deslizamiento ( <i>Hojjati, 2013</i> ).....	27
<b>2.9</b>	Zona de contacto esférico para deslizamiento parcial ( <i>Navarro, 1999</i> ) ..	28
<b>2.10</b>	Zona de contacto cilíndrico para deslizamiento parcial ( <i>Navarro, 1999</i> )	29
<b>2.11</b>	Área de contacto en función de $F_t$ para contacto cilindro-plano, (a) Sin deslizamiento, (b) Deslizamiento parcial, (c) Deslizamiento total.....	29
<b>2.12</b>	Regiones de contacto normal y tangencial ( <i>Navarro, 1999</i> ) .....	30
<b>2.13</b>	Comportamiento de los cuerpos en estado de deslizamiento parcial y deslizamiento total en la región de contacto ( <i>Johnson, 1985</i> ).....	30
<b>2.14</b>	Diagrama de respuesta fuerza-desplazamiento tangencial para el contacto entre dos cuerpos sometidos a una fuerza normal $F_n$ constante y $F_t$ variable ( <i>Yaqoob, 2013</i> ).....	32
<b>2.15</b>	Interpretación de rigidez de contacto normal y tangencial mediante resortes.....	33
<b>2.16</b>	Diagrama fuerza vs desplazamiento del modelo de contacto de resorte ( <i>Cundall, 1979</i> ) .....	33
<b>2.17</b>	Comportamiento de deslizamiento parcial y parte inicial de un ciclo de histéresis ( <i>Contreras, 2009</i> ).....	34
<b>3.1</b>	Problemas de contacto y su simplificación: (a) Contacto plano - cilindro; (b) Contacto plano - plano ( <i>Hojjati-Talemi, 2013</i> ).....	35
<b>3.2</b>	Configuración dimensional del modelo de contacto empleado .....	36

<b>3.3</b>	Modelo discreto 2D (componentes de la unión mecánica mallados): a) Step 1, b) Step 2 .....	37
<b>3.4</b>	Distribución de presión de contacto sobre el semiancho de contacto obtenida por los métodos teórico y de simulación .....	41
<b>3.5</b>	Magnitud y ubicación de esfuerzos cortantes máximos (simulación).....	41
<b>3.6</b>	Comparación de longitud de región de deslizamiento en función de $F_t$ , cuando la unión se encuentra en estado de deslizamiento parcial.....	42
<b>3.7</b>	Nodos distribuidos sobre la longitud ( $L$ ) del cuerpo superior.....	43
<b>3.8</b>	Desplazamiento de nodos en: (a) dirección $X$ y (b) dirección $Y$ .....	44
<b>3.9</b>	Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre $L$ ( $L/B=0.5$ )	45
<b>3.10</b>	Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre $L$ en la región de influencia de la rigidez de contacto ( $L/B=0.5$ ).....	47
<b>3.11</b>	Definición de región para monitoreo de desplazamientos interfaciales .	48
<b>3.12</b>	Nodos que se monitorean en la región próxima al área de contacto .....	49
<b>4.1</b>	Variación de la longitud de área de contacto en función de la relación de aspecto para $F_n = 5$ N.....	51
<b>4.2</b>	Variación de longitud de zona sin deslizamiento en función de $F_t$ .....	52
<b>4.3</b>	Variación de longitud de zona con deslizamiento en función de $F_t$ .....	52
<b>4.4</b>	Rigidez de contacto normal en función de $F_t$ , para variación ( $L/B$ ) en el cuerpo superior .....	54
<b>4.5</b>	Variación de la rigidez de contacto normal en función de la relación de aspecto ( $B/L$ ) .....	54
<b>4.6</b>	Comportamiento fuerza tangencial vs desplazamiento tangencial de cada variación en la geometría del cuerpo superior, $F_t$ varía desde 0.5 N hasta 3.5 N y mantiene en estado de deslizamiento parcial .....	55
<b>4.7</b>	Rigidez de contacto tangencial en función de $F_t$ ( $F_t$ con un rango de 0.5 N hasta 3.5 N) .....	56

<b>4.8</b>	Distribución de presión de contacto de cada variante de $L/B$ .....	57
<b>4.9</b>	Distribución esfuerzos de cizallamiento por fricción para $L/B=0.5$ .....	58
<b>4.10</b>	Distribución esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada geometría para $F_t = 0.5$ N.....	58
<b>4.11</b>	Distribución esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada geometría para $F_t = 3.5$ N.....	59
<b>4.12</b>	Distribución esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada geometría para $F_t = 4.0$ N.....	59
<b>5.1</b>	Relación entre $L/B$ , $F_t$ y longitud de zona sin deslizamiento.....	61
<b>5.2</b>	Relación entre $L/B$ , $F_t$ y longitud de zona con deslizamiento.....	62
<b>5.3</b>	Gráfica de superficie de la relación entre $L/B$ , $F_t$ y $k_t$ .....	64
<b>5.4</b>	Presión de contacto en función de $L/B$ y $F_t$ .....	65
<b>5.5</b>	Esfuerzo de cizallamiento máximo en función de $L/B$ y $F_t$ .....	66
<b>5.6</b>	$k_t$ en función de $L/B$ y $\mu$ para una $F_t = 0.5$ N .....	67
<b>5.7</b>	Presión de contacto en función de $L/B$ y $\mu$ para una $F_t = 0.5$ N.....	68
<b>5.8</b>	Esfuerzo máximo de cizallamiento en función de $L/B$ y $\mu$ para una $F_t = 0.5$ N.....	68
<b>5.9</b>	(a) Diferencia porcentual en la rigidez de contacto normal en función de la relación $L/B$ ; (b) Diferencia porcentual en la rigidez de contacto tangencial en función de la relación $L/B$ .....	69
<b>5.10</b>	(a) Diferencia porcentual en la presión máxima de contacto en función de la relación $L/B$ ; (b) Diferencia porcentual en los esfuerzos máximos de cizallamiento en función de $L/B$ .....	70
<b>A.1</b>	Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre $L$ ( $L/B = 0.2$ ).....	76
<b>A.2</b>	Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre $L$ en la región de influencia de la rigidez de contacto ( $L/B=0.2$ ).....	76

<b>A.3</b>	Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre $L$ ( $L/B = 0.3$ ).....	77
<b>A.4</b>	Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre $L$ en la región de influencia de la rigidez de contacto ( $L/B=0.3$ ).....	77
<b>A.5</b>	Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre $L$ ( $L/B = 0.4$ ).....	78
<b>A.6</b>	Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre $L$ en la región de influencia de la rigidez de contacto ( $L/B=0.4$ ).....	78
<b>A.7</b>	Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre $L$ ( $L/B = 0.6$ ).....	79
<b>A.8</b>	Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre $L$ en la región de influencia de la rigidez de contacto ( $L/B=0.6$ ).....	79
<b>B.1</b>	Distribución de presión de contacto para $L/B=0.2$ .....	80
<b>B.2</b>	Distribución de presión de contacto para $L/B=0.3$ .....	80
<b>B.3</b>	Distribución de presión de contacto para $L/B=0.4$ .....	80
<b>B.4</b>	Distribución de presión de contacto para $L/B=0.5$ .....	81
<b>B.5</b>	Distribución de presión de contacto para $L/B=0.6$ .....	81
<b>B.6</b>	Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción para $L/B=0.2$ ..	81
<b>B.7</b>	Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción para $L/B=0.3$ ..	82
<b>B.8</b>	Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción para $L/B=0.4$ ..	82
<b>B.9</b>	Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción para $L/B=0.6$ ..	82
<b>B.10</b>	Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada $L/B$ para $F_t = 1.0$ N .....	83
<b>B.11</b>	Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada $L/B$ para $F_t = 1.5$ N .....	83
<b>B.12</b>	Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada $L/B$ para $F_t = 2.0$ N .....	83

---

<b>B.13</b>	Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada $L/B$ para $F_t = 2.5$ N .....	84
<b>B.14</b>	Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada $L/B$ para $F_t = 3.0$ N .....	84
<b>B.15</b>	Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción en cada variación de $L/B$ cuando la unión se encuentra en estado de deslizamiento total ( $F_t = 4, 4.5$ y $5$ N). .....	84
<b>C.1</b>	Rigidez de contacto normal para $\mu = 0.15, 0.5$ y $0.7$ .....	85
<b>C.2</b>	Comportamiento fuerza - desplazamiento tangencial para $\mu = 0.15$ y $F_t = 0.5$ N hasta $0.7$ N .....	86
<b>C.3</b>	Comportamiento fuerza vs desplazamiento tangencial para $\mu = 0.5$ y $F_t = 0.5$ N hasta $2.5$ N .....	86
<b>C.4</b>	Rigidez de contacto tangencial en función de $F_t$ para $\mu = 0.15$ .....	87
<b>C.5</b>	Rigidez de contacto tangencial en función de $F_t$ para $\mu = 0.5$ .....	87

---

---

# LISTA DE TABLAS

Tabla	Descripción	Página
2.1	Ecuaciones de la teoría de Hertz para contacto cilindro-plano ( <i>Sneddon, 1965</i> ).....	24
3.1	Variación geométrica del cuerpo superior de la unión .....	36
3.2	Propiedades mecánicas del acero 1018 ( <i>Timoshenko, 1975</i> ).....	38
3.3	Presión máxima y semiancho de contacto obtenidos por los métodos teórico y de simulación .....	40
3.4	Magnitud y ubicación de esfuerzos cortantes máximos por los métodos teórico y de simulación .....	41
6.1	Efectos generados en la interfaz de contacto en función del incremento en alguno de los parámetros variables en la unión.....	74

---

---

# NOMENCLATURA

$a$	Semiancho de contacto para contacto hertziano [ $m$ ]
$B$	Ancho de la geometría de contacto [ $m$ ]
$c$	Semiancho de la zona sin deslizamiento [ $m$ ]
$E$	Módulo elástico [ $Pa$ ]
$E_1, E_2$	Módulo elástico de los cuerpos 1 y 2 [ $Pa$ ]
$E_i$	Módulo elástico del contacto del cuerpo considerado [ $Pa$ ]
$E^*$	Modulo elástico efectivo [ $Pa$ ]
$e$	Espesor asignado a los cuerpos de la unión [ $m$ ]
$F_f$	Fuerza de fricción [ $N$ ]
$F_n$	Fuerza normal [ $N$ ]
$F_t$	Fuerza tangencial [ $N$ ]
$F_L$	Carga por unidad de longitud [ $N$ ]
$f_n$	Esfuerzo principal [ $Pa$ ]
$f_t$	Esfuerzo de corte [ $Pa$ ]
$h$	Distancia entre superficies sin deformar a una distancia $r$ del eje $y$ [ $m$ ]
$k$	Rigidez de contacto [ $N/m$ ]
$k_n$	Rigidez de contacto normal [ $N/m$ ]
$k_{n1}, k_{n2}$	Rigidez de contacto normal de los cuerpos 1 y 2 [ $N/m$ ]
$k_t$	Rigidez de contacto tangencial [ $N/m$ ]
$k_{t1}, k_{t2}$	Rigidez de contacto tangencial de los cuerpos 1 y 2 [ $N/m$ ]
$l$	Longitud media del cilindro en contacto [ $m$ ]
$L/B$	Relación de aspecto
$L$	Largo del cuerpo superior de la unión [ $m$ ]
$p_m$	Presión media en la superficie de contacto [ $Pa$ ]
$p_{max}$	Presión máxima de contacto [ $Pa$ ]
$p(r)$	Distribución de presión de contacto esférico [ $Pa$ ]

---



---

$p(x)$	Distribución de presión de contacto para contacto cilíndrico [ $Pa$ ]
$p_c$	Presión de contacto [ $Pa$ ]
$q(r)$	Distribución de presión tangencial para contacto esférico [ $Pa$ ]
$q(x)$	Distribución de presión tangencial para contacto cilíndrico [ $Pa$ ]
$r$	Distancia entre el centro del área de contacto y el borde de contacto esférico [ $Pa$ ]
$R_1, R_2$	Radio de los cuerpos 1 y 2 [ $m$ ]
$R^*$	Radio de contacto efectivo [ $m$ ]
$S$	Superficie de contacto [ $m^2$ ]
$u_z$	Desplazamiento normal [ $m$ ]
$u_{z1}, u_{z2}$	Desplazamiento de la superficie de contacto de los cuerpos 1 y 2 respecto su posición inicial [ $m$ ]
$u_{zi}$	Desplazamiento de la superficie del contacto del cuerpo $i$ [ $m$ ]
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\nu_1, \nu_2$	Coefficiente de Poisson de los cuerpos 1 y 2
$\nu_i$	Coefficiente de Poisson del cuerpo considerado
$x$	Distancia entre el centro del área de contacto y el borde de contacto cilíndrico [ $m$ ]
$x_{n1}, x_{n2}$	Desplazamiento en dirección normal en la zona de contacto de los cuerpos 1 y 2 [ $m$ ]
$x_{t1}, x_{t2}$	Desplazamiento en dirección tangencial en la zona de contacto de los cuerpos 1 y 2 [ $m$ ]
$\delta$	Desplazamiento del centro de la esfera [ $m$ ]
$\mu$	Coefficiente de fricción estática
$\tau$	Esfuerzo de cizallamiento [ $Pa$ ]

---

---

# CAPÍTULO 1:

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 INTRODUCCIÓN

El estudio de la zona de contacto de una unión mecánica es muy importancia, ya que esto permite obtener información que posibilita evaluar el desempeño del sistema cuando este se encuentra sometido a fuerzas normales y tangenciales. Particularmente interesante resulta analizar el cambio de rigidez de contacto en la unión mecánica, ya que esta influye en la magnitud y distribución de la presión de contacto y los esfuerzos de cizallamiento al grado de ser suficientemente elevados para generar procesos irreversibles, como deformación permanente o formación de grietas a cargas relativamente bajas, provocando así la falla de la unión mecánica.

Un sin número de componentes mecánicos transfieren carga por medio del contacto, el estudio de los efectos generados por la variación de la rigidez en la zona de contacto es de suma importancia en el diseño mecánico, ya que un gran porcentaje de las fallas en un mecanismo comienzan en sus uniones. En una unión mecánica, la rigidez de contacto también se encuentra entre las características clave para la predicción del comportamiento estático o dinámico de un sistema.

Los modelos idealizados por la mecánica de contacto asumen que el área de contacto se halla confinada en una región que depende de la geometría de los cuerpos, las propiedades de sus materiales y las condiciones de las cargas aplicadas. El objetivo de esta tesis es analizar la influencia que la geometría de los cuerpos que forman una unión mecánica ejerce sobre su rigidez de contacto, ya que es una variable sobre la cual no se ha realizado algún tipo de análisis específicamente relacionado con la rigidez de contacto.

## 1.2 TRABAJOS RELACIONADOS (ANTECEDENTES)

En este apartado se presenta la revisión de una serie de trabajos que se consideraron de mayor relevancia en relación al tema de estudio de esta tesis, dichos trabajos se agruparon en subtemas interrelacionados como: (a) contacto normal y tangencial, (b) rigidez de contacto y (c) desgaste y fatiga por contacto.

### 1.2.1 CONTACTO

*Cattaneo (1938)* y luego *Mindlin (1949)* estudiaron de forma independiente el contacto elástico entre esferas bajo carga normal y tangencial, como se ejemplifica en el modelo de la figura 1.1, propuesto por *Vu-Quoc & Zhang (1999)*. Ambos autores asumen que el área de contacto se compone de un área central sin deslizamiento, rodeada por un área de forma anular en estado de deslizamiento, cuya longitud aumenta al incrementar la carga tangencial; la región sin deslizamiento disminuye de forma gradual y finalmente desaparece, en este momento el deslizamiento total comienza, dicho comportamiento está acorde a lo que establece la ley de fricción de Coulomb, en la cual, la carga tangencial es igual al producto de la carga normal y el coeficiente de fricción estática predefinido.

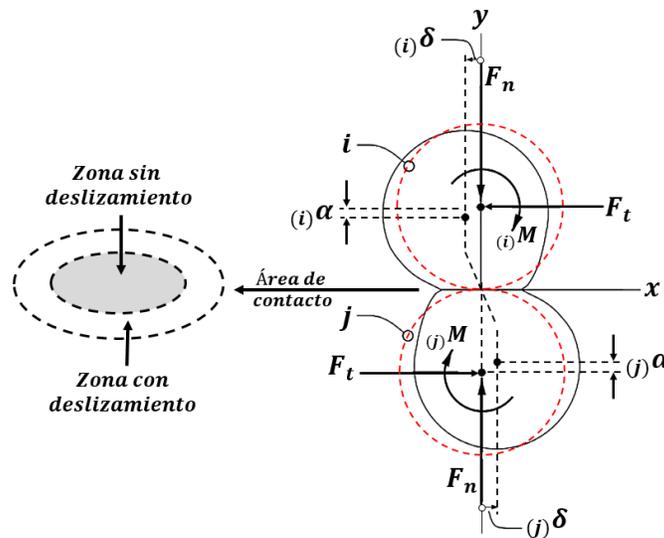


Figura 1.1: Esferas en contacto sometidas a fuerzas normal y tangencial (*Vu-Quoc & Zhang, 1999*).

*Mindlin (1952, 1953)* amplió sus primeros estudios, desarrollando las primeras soluciones analíticas para el problema de la carga tangencial oscilante, para esto se basó en el trabajo de *Cattaneo (1938)*, calculando la distribución de esfuerzos de cizallamiento en la interfaz instantánea de contacto, así como de los límites del área de deslizamiento parcial debido al incremento de la fuerza tangencial, ambas distribuciones se ejemplifican en la figura 1.2 (*Duffaut, 2010*). *Mindlin* obtuvo diagramas fuerza-desplazamiento tangencial, es decir, ciclos de histéresis, asociándolos con la disipación de energía debido al deslizamiento friccional parcial entre las superficies en contacto durante un ciclo de carga. Además, *Mindlin* observó que en el área de contacto se presenta el efecto stick-slip y éste es relevante para el daño por fretting observado comúnmente en rodamientos, juntas de traslape remachadas e incluso en las articulaciones de cadera artificiales. En juntas de solape remachadas, el fretting demuestra ser una causa primaria de iniciación de grietas.

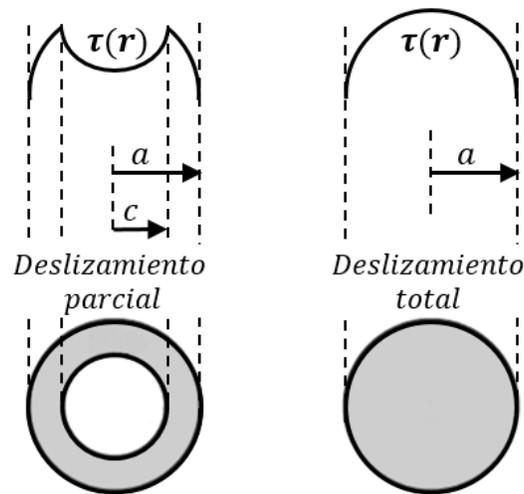


Figura 1.2: Esquema de la distribución de esfuerzos de cizallamiento para: (a) Deslizamiento parcial, (b) Deslizamiento total (*Duffaut, 2010*).

*Bowden y Tabor (1954)* establecieron un enfoque diferente al problema de contacto bajo cargas normal y tangencial, según el cual, el deslizamiento total y la fricción estática se describen como fenómenos relacionados con las propiedades del material. *Bowden y Tabor* presentaron un modelo simple en el que el coeficiente de fricción estática no se conoce a priori, de forma diferente al enfoque de *Cattaneo (1938)* y *Mindlin (1949)*. De acuerdo con el trabajo de *Bowden y Tabor* la carga tangencial al inicio de deslizamiento es equivalente al producto del área real de contacto por la resistencia a cortante del

material; mientras que la carga normal es equivalente al producto del área real de contacto y la dureza del material. Bajo estos supuestos, los esfuerzos máximos cortantes en el área de contacto están completamente desacoplados de los esfuerzos normales. El coeficiente de fricción estática equivale al cociente de la resistencia a cortante del material entre la dureza de éste y es independiente de la carga normal, acorde a las leyes de fricción clásicas.

*Johnson (1955)* estudió la interacción entre cuerpos con desplazamiento tangencial; experimentalmente investigó el deslizamiento parcial entre un plano y bolas de acero de diferentes diámetros en condiciones secas. Una fuerza tangencial menor que la fuerza de fricción límite se aplicó para estudiar el comportamiento de desplazamiento en el micro contacto. Demostró que para las pequeñas fuerzas tangenciales, el desplazamiento sigue la teoría elástica. Johnson además publicó el primer estudio experimental para mostrar histéresis entre la fuerza de fricción y desplazamiento relativo durante el pre-deslizamiento, para ello consideró el desplazamiento parcial bajo la acción de una carga tangencial constante y cíclica. Sus resultados experimentales para la relación fuerza de fricción - desplazamiento y para la pérdida de energía en un ciclo de carga, mostraron concordancia con el modelo teórico de *Mindlin (1952, 1953)*.

*Ciavarella (1998)* analizó el problema de deslizamiento parcial de *Cattaneo (1938)*, donde una carga tangencial uniformemente creciente a partir de cero se aplica a los cuerpos en contacto y la carga normal se mantiene fija; para ello redujo el problema de deslizamiento parcial, demostrando que la distribución de esfuerzos de cizallamiento en la zona sin deslizamiento está dada por una superposición de problemas de contacto normal sin fricción, para cargas bajas. Esto da un método general de solución de casos particulares.

*Wu (2012)* desarrolló un modelo de elementos finitos para contacto esférico cargado oblicuamente, utilizando el criterio de esfuerzo de cizallamiento friccional máximo para la generación de deslizamiento. *Wu* encontró que en la condición de precarga normal, elásticamente el fallo se inicia directamente en la superficie de contacto. En la condición de precarga normal, elastoplásticamente el fallo se origina bajo la superficie y se extiende a la superficie de contacto con el aumento de la carga tangencial, como se aprecia en la figura 1.3 (*Wu, 2012*). Además, el modelo sin deslizamiento en toda la zona de contacto

exhibió un crecimiento del área de contacto, más rápido en el caso de precarga normal elástica y un crecimiento más lento del área de contacto en el caso de precarga normal elastoplástica comparado con el modelo propuesto por *Wu*.

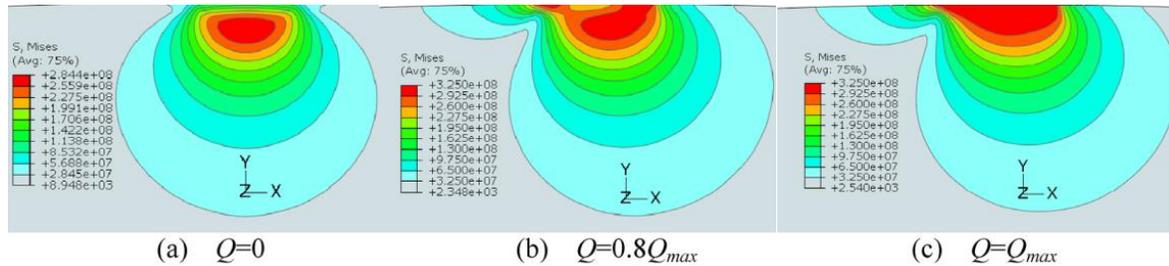


Figura 1.3: Desarrollo de los esfuerzos de Von Mises en función de  $F_t$  (*Wu, 2012*).

## 1.2.2 RIGIDEZ DE CONTACTO

*Krolikowski y Szczepek (1993)* realizaron un análisis basado en la teoría de Hertz – Mindlin y en el modelo de *Greenwood-Williamson (1966)* para deformación elástica de múltiples puntos de contacto. Propusieron un modelo de contacto entre dos superficies elásticas, una de ellas idealmente lisa y plana, y la otra nominalmente plana pero, cubierto por muchas asperezas de forma esférica, semejante al modelo de *Greenwood-Williamson*, observaron que la relación entre la rigidez de contacto normal y tangencial es independiente de la función de distribución de altura de la superficie. Además concluyeron que debido a la relación proporcional entre la rigidez de contacto normal y la tangencial, es posible utilizar la cizalladura, así como las ondas ultrasónicas longitudinales en el estudio de contacto mecánico.

*Berthoud y Ba Umberger (1998)* trabajaron experimentalmente con la respuesta lineal elástica generada por una fuerza cortante con valor menor al de la fuerza de fricción sobre una interfaz multicontacto; midieron la rigidez tangencial de la interfaz entre diferentes pares de materiales. A partir de ello, observaron que la rigidez medida fue aproximadamente proporcional a la carga normal aplicada, y que no muestra una fuerte dependencia del Módulo de Young de los materiales de contacto.

*Fillipi, et al. (2004)* midieron las fuerzas de contacto tangenciales y desplazamientos entre dos superficies para un amplio rango de amplitudes de desplazamiento y cargas normales. Utilizaron diferentes pares de materiales para realizar las pruebas. Para cada par de contacto, los ciclos de histéresis fueron medidos para diferentes cargas normales y amplitudes de desplazamiento. La rigidez tangencial de contacto es calculada a partir de ciclos de histéresis y presentan la variación de los mismos con respecto a la carga normal como se observa en la figura 1.4. Los valores de rigidez de contacto equivalente son calculados para cada ciclo de histéresis y son presentados como una función de amplitud de desplazamiento relativo. Este sistema permite medir los ciclos de histéresis en régimen de deslizamiento parcial y deslizamiento total; los resultados obtenidos les permiten la determinación de parámetros de interés para el diseño de amortiguadores de álabes de turbina, el coeficiente de fricción y la rigidez de contacto tangencial.

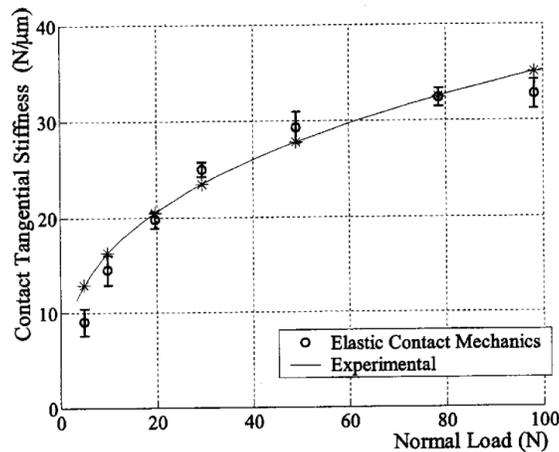


Figura 1.4: Rigidez de contacto calculada a partir de datos experimentales y por medio de la mecánica de contacto elástico (*Fillipi, et. al., 2004*).

*Cigeroglu y Özgüven (2006)* propusieron un modelo de fricción de dos pendientes. El deslizamiento total (ver figura 1.5 a), es un enfoque ampliamente utilizado en el cual toda la superficie de contacto se asume para tener deslizamiento o adherencia; su extensivo uso se debe a su simplicidad matemática y exactitud para predecir la respuesta a pequeñas cargas normales. En el enfoque de deslizamiento parcial (ver figura 1.5 b), es llevado a cabo un análisis detallado de la distribución de esfuerzos en la interfaz de fricción, por lo tanto, el modelo de deslizamiento parcial puede proporcionar resultados más precisos, sin embargo, este requiere un esfuerzo computacional más alto.

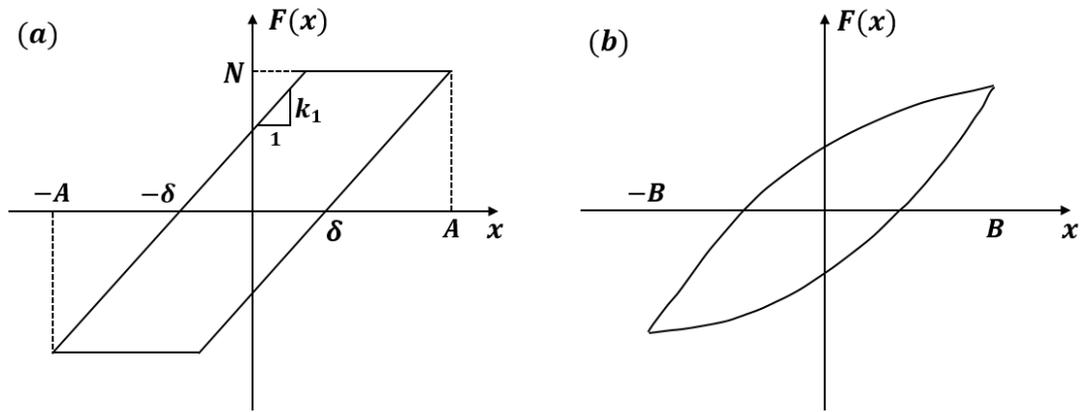


Figura 1.5: Curva de histéresis para a) deslizamiento total y b) deslizamiento parcial (Cigeroğlu & Özgüven, 2006).

El modelo de histéresis que presentan Cigeroğlu y Özgüven (2006) puede ser considerado como una extensión del modelo de deslizamiento total, pero también se puede representar como una aproximación al comportamiento de deslizamiento parcial. La curva de histéresis tiene dos pendientes en lugar de una, sin embargo, dos pendientes (ver figuras 1.6 (a) y (b.)) hacen posible representar una aproximación de las características de deslizamiento parcial.

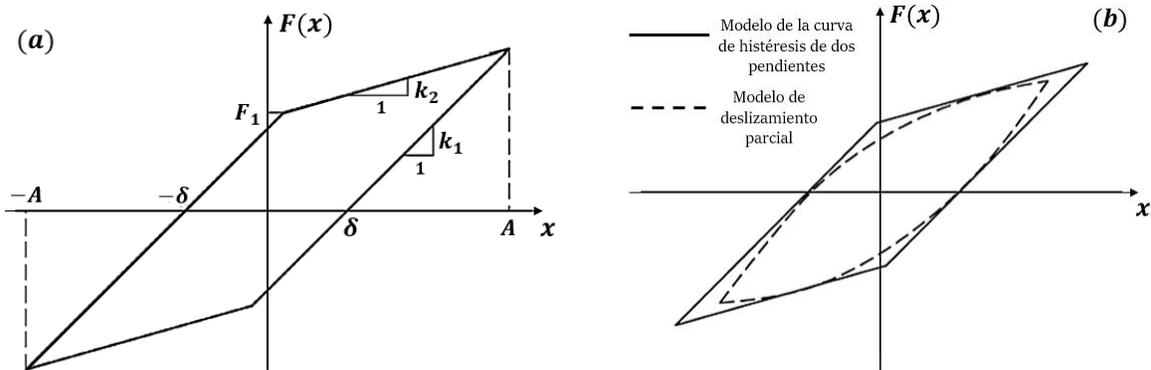


Figura 1.6: (a) Curva de histéresis con dos pendientes; (b) Comparación de los modelos de histéresis para deslizamiento parcial y de histéresis con dos pendientes (Cigeroğlu & Özgüven, 2006).

Es posible calcular el modelo de deslizamiento total describiendo funciones analíticamente, forzándola a una combinación de funciones lineales. Sin embargo, el modelo de deslizamiento parcial es expresado en términos de funciones más complicadas, para las cuales no pueden ser evaluadas analíticamente. Por lo tanto el orden para obtener las funciones discretizadas requiere el empleo de técnicas de integración numéricas, las

cuales incrementan el tiempo de cómputo considerablemente. Por otro lado, las curvas de histéresis de dos pendientes propuestas son una combinación de funciones lineales y por lo tanto es posible obtener expresiones analíticas para la función planteada.

*Cohen et al. (2008)* desarrollaron un modelo de contacto elastoplástico entre superficies rugosas bajo cargas normal y tangencial y con condición de contacto completo. Con dicho modelo, se analizó por medio de elemento finito la generación de deslizamiento en la superficie de contacto. Para ello, incluyeron el efecto del crecimiento de la unión y trataron la generación del deslizamiento como un mecanismo con falla, caracterizado por pérdida de rigidez tangencial. Además encontraron fuertes efectos de la carga normal, área nominal de contacto, propiedades mecánicas y rugosidad de superficie, sobre el coeficiente de fricción estática, en contra de las leyes de la fricción clásicas.

*Contreras (2009)* experimentó mediante una viga en cantiléver; en su extremo libre se le adicionaron elementos de contacto superficial, lineal y puntual con fricción seca. En función de la frecuencia de excitación de la viga, obtuvo ciclos de histéresis a partir de los cuales determinó la rigidez de contacto tangencial para cada tipo de contacto y materiales como acero, bronce y aluminio. *Contreras* observó que esta rigidez aumenta con la disminución de la energía disipada por el sistema montado en cada ciclo. Además, a medida que se aumenta la frecuencia de excitación la forma de las curvas de histéresis tienden a tener una forma elíptica.

*Grudzinski (2009)* desarrolló un modelo de contacto entre un rodillo y una guía en una máquina herramienta, con influencia de la rugosidad de las superficies en contacto. Para ello desarrolló dos modelos, uno con superficies lisas, y otro con superficies rugosas. El primero fue analizado por el método de Lagrange puro, y sin tomar en cuenta la penetración mutua de las superficies rugosas ni la rigidez de contacto. El segundo toma en cuenta ambos parámetros mediante el método de Lagrange Aumentado. En este método hay coeficientes de rigidez de contacto en dirección normal y tangencial. Demostró que mediante el método del elemento finito y ANSYS, y tomando en cuenta la rigidez de contacto de las superficies rugosas, es posible obtener resultados acordes con datos obtenidos experimentalmente.

*Konowalski (2009)* mediante un banco de pruebas, determinó la rigidez de contacto normal en uniones con superficie de contacto planas hechas de acero. Encontró que en el rango de pequeñas presiones de contacto la dependencia de las deformaciones de contacto es no lineal. Cuando la variable de rigidez de contacto se introduce al modelo, coincide con la corrida del desplazamiento de contacto obtenida experimentalmente. Sin embargo, el modelo de contacto no lineal no es completamente equivalente hasta donde llegan las velocidades de las deformaciones de contacto. Asumir un valor constante de rigidez de contacto dinámico en los cálculos da como resultado deflexiones significantes en las corridas de deformación de contacto y en la velocidad en comparación con los resultados obtenidos en los experimentos.

*Ompusunggu, et al. (2010)* analizaron la rigidez de contacto de un acoplamiento de embrague en su fase de post bloqueo, y demostraron que a medida que la degradación del material progresa, ambas rigideces de contacto, normal y tangencial se desvían de los valores iniciales. La rigidez de contacto normal muestra una tendencia creciente; en contraste, la rigidez de contacto tangencial muestra una tendencia decreciente. Dichas tendencias permiten desarrollar una condición estratégica de monitoreo en embragues húmedos. Esto se puede hacer por medio del control de la rigidez de contacto, basado en comportamientos dinámicos.

*Kartal, et al. (2011)* investigaron el efecto del área de contacto y la presión normal sobre la rigidez de contacto tangencial, para ello emplearon el método de elementos finitos y métodos experimentales, en los cuales llevaron a cabo pruebas para dos áreas de contacto nominal diferentes y cuatro diferentes presiones normales. Los resultados muestran que la rigidez de contacto tangencial es altamente dependiente de la presión normal y el área de contacto nominal. Los experimentos indican que la rigidez de contacto tangencial aumenta aproximadamente en proporción a la presión normal. Una observación final del trabajo fue que durante las pruebas de fretting a bajas presiones normales, la rigidez de contacto tangencial parece permanecer constante, mientras que a presiones normales altas la rigidez de contacto aumenta con el número de ciclos de prueba.

*Piscan, et al. (2012)* estudiaron la rigidez de contacto tangencial entre dos cuerpos elásticos con superficies nominalmente planas con diferentes combinaciones de materiales. La rigidez de contacto tangencial entre estos dos cuerpos elásticos fue calculada con base en la teoría de contacto Greenwood-Williamson-McCool (1966). Experimentalmente determinaron la rigidez de contacto tangencial mediante un tribómetro bajo el efecto de diferentes valores de carga normal y amplitud de desplazamiento tangencial, los resultados obtenidos mostraron una buena concordancia con los resultados teóricos. Las rigideces de contacto tangencial obtenida por simulación y las obtenidas experimentalmente para los tres pares de materiales muestran tendencias consistentes, en las cuales la rigidez de contacto incrementa con la carga, por otro lado, la rigidez de contacto disminuye con la amplitud de desplazamiento.

*Lee, et al. (2013)* estudiaron el efecto de la superficie de contacto sobre los fenómenos *stick-slip* de materiales de fricción de freno, usando materiales de fricción con diferentes condiciones de superficiales. Los resultados obtenidos mostraron que la amplitud y frecuencia *stick-slip* producida durante el frenado, a velocidades bajas se vieron fuertemente afectados por la rigidez tangencial de contacto ( $k_t$ ) y la velocidad de deslizamiento. Además, los materiales de fricción con superficies lisas mostraron mayores valores  $k_t$  y una mayor propensión de oscilación *stick-slip*.

*Liu, et al. (2013)* obtuvieron la rigidez de contacto normal acorde a la ley de Hooke mediante un modelo de contacto entre dos sólidos elásticos, que emulan el contacto entre dos asperezas con forma elipsoide, simulado por el método de elemento finito. Observaron que la rigidez de contacto normal crece con el aumento de los principales radios de curvatura de los cuerpos en contacto.

*Bazrafshan, et al. (2014)* investigaron la interacción entre los mecanismos de contacto en direcciones normal y tangencial de una interfaz de contacto con fricción. Para ello consideraron el estudio de un caso experimental que consiste en una viga anclada y con un soporte sometido a contacto friccional en su extremo libre; a partir de este banco experimental obtuvieron la respuesta estructural de la viga a una sola frecuencia de excitación armónica y en diferentes niveles de amplitud de respuesta, para caracterizar el

comportamiento de la interfaz de contactos en las direcciones normal y tangencial. Bazrafshan encontró que la interacción en la dirección normal afecta el comportamiento en dirección tangencial a través del cambio en el tamaño del área de contacto. Además, el nivel de vibración en dirección normal es inversamente proporcional a la rigidez de contacto en la dirección tangencial y la fuerza de fricción.

*Shi, et al.* (2014) desarrollaron un modelo de microanálisis para determinar la rigidez de contacto tangencial entre asperezas con superficie de contacto elíptica parabólica (ver figura 1.7 a). La rigidez de contacto tangencial es determinada para contacto macroscópicamente cilíndrico (ver figura 1.7 b) con base en la teoría fractal. Los resultados numéricos mostraron que la rigidez de contacto tangencial entre asperezas está determinada por varios factores, como las propiedades del material, las cargas aplicadas, dimensión fractal y forma de la superficie. Además, la rigidez de contacto tangencial disminuyó a medida que aumentó la carga tangencial en una relación no lineal cuando  $0 < F_t < \mu F_n$ . A su vez, dicha rigidez incrementó de forma no lineal con el aumento de  $F_n$ .

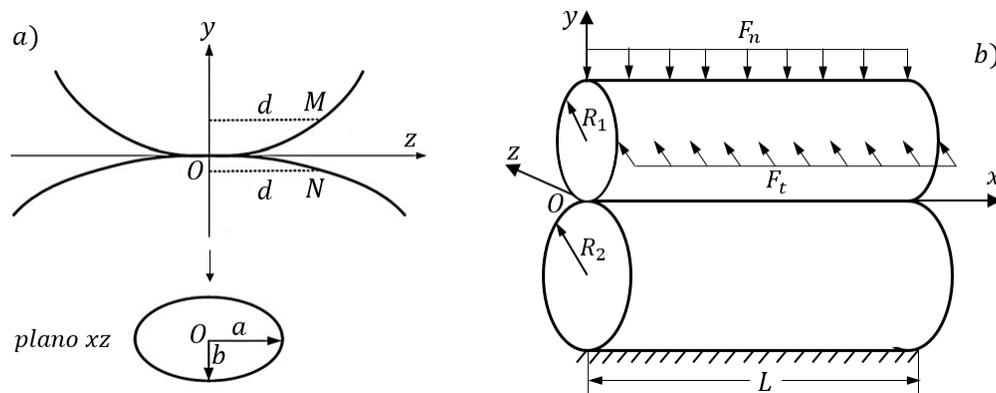


Figura 1.7: Modelos de: (a) contacto entre cuerpos elípticos (b) macrocontacto entre cilindros (*Shi, 2014*).

*Yang* (2014) empleó un modelo para determinar la rigidez de contacto normal en uniones mecánicas, basado en la teoría de geometría fractal y la mecánica de contacto. Mediante este modelo analizó la relación entre la carga aplicada en dirección normal de la unión y la rigidez de contacto normal para diferentes materiales y dimensiones fractales. El resultado mostró que la rigidez de contacto normal de la unión aumenta uniformemente con el incremento de la carga en dirección normal; en el rango plástico de deformación esta relación es fuertemente no lineal.

### 1.2.3 GEOMETRÍA DE LOS CUERPOS EN CONTACTO Y DESGASTE EN RÉGIMEN DE DESLIZAMIENTO PARCIAL

*Nishioka e Hiraoka (1968)* realizaron estudios sobre el fretting, en ellos describen una serie de experimentos realizados con contacto cilíndrico entre elementos de acero y establecen que aunque el frotamiento favorece la iniciación de grietas, pueden aparecer grietas no propagantes bajo algunas condiciones de carga. También estudiaron el efecto del deslizamiento relativo entre las superficies en contacto, concluyendo que a medida que aumenta el deslizamiento disminuye la resistencia a la fatiga, aunque a partir de cierto momento la resistencia a la fatiga vuelve a aumentar, debido a que probablemente el desgaste producido haga desaparecer las grietas iniciadas. Además observaron que en el régimen de deslizamiento parcial, éste se genera en ambos extremos de la zona de contacto y su longitud va en aumento a medida que se incrementa la fuerza tangencial a la que se encuentra sometida la unión.

*Taylor y Waterhouse (1972)* realizaron un trabajo sobre tratamientos superficiales, estos encontraron que el origen de las grietas producidas por fretting estaba en el límite entre las regiones con deslizamiento y sin deslizamiento dentro de la zona de contacto, como se ejemplifica en el esquema de la figura 1.8 propuesto por *Vallellano (2004)*. Aunque referente a la zona de iniciación de grietas, existen estudios experimentales contradictorios y aun hoy en día es un aspecto que se discute.

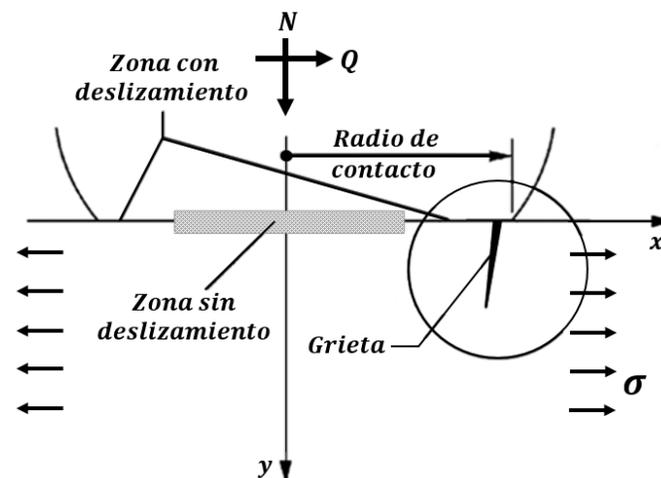


Figura 1.8: Esquema de la zona de contacto (*Vallellano, 2004*).

*Bryggman y Söderberg (1986)* observaron la influencia de la amplitud de desplazamiento, la carga normal y la frecuencia de oscilación en condiciones de *fretting* por contacto mediante el análisis de las mediciones de fuerza tangenciales dinámicas. En función del aumento de amplitud de desplazamiento encontraron tres regímenes de *fretting*.

Dos regímenes de baja amplitud se caracterizan por una condición de deslizamiento parcial en la interfaz, la diferencia entre estos dos regímenes es que en uno el deslizamiento parcial producido está dado por un comportamiento predominantemente elástico del material, mientras que en el otro se presenta comportamiento plástico.

En el tercer régimen, que es de alta amplitud, tiene lugar el deslizamiento total sobre toda el área de contacto. Las características generales de las condiciones de *fretting* por contacto sugieren que la fatiga acelerada debido a éste se genera principalmente a bajas amplitudes de deslizamiento produciendo condiciones de deslizamiento parcial. En contraste el daño por *fretting* desgaste se debe a amplitudes de desplazamiento por encima del valor crítico de deslizamiento total incipiente.

*Ödfalk y Vingsbo (1992)* estudiaron el desgaste por *fretting* debido al deslizamiento parcial dentro de la zona de contacto (ver figura 1.9 a), propusieron un modelo elastoplástico de *fretting* basado en la teoría *Cattaneo-Mindlin (1938, 1949)*. La parte plástica del modelo fue desarrollado con base en las propiedades de los materiales tales como coeficiente de fluencia por *fretting* y endurecimiento por *fretting*. El estudio indicó que la deformación plástica puede tener un efecto significativo en el comportamiento de deslizamiento parcial y subsiguientemente la cantidad de desgaste por *fretting*.

*Ödfalk y Vingsbo (1992)* también estudiaron experimentalmente el desgaste por *fretting* entre cuerpos esféricos y basados en la teoría de deslizamiento parcial de *Mindlin y Deresiewicz (1953)*, a partir de las mediciones obtenidas en las pruebas experimentales encontraron que las diferencias entre los pre-deslizamientos aumentaron con el incremento en la fuerza tangencial como se muestra en la figura 1.9 b. Esto se explica por las suposiciones elásticas en la teoría de deslizamiento parcial, mientras que la naturaleza de la interacción implica la deformación plástica.

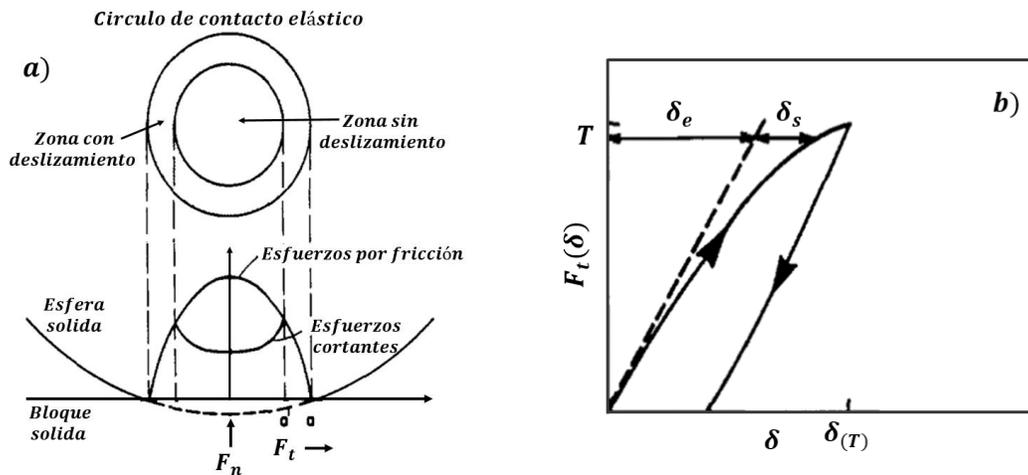


Figura 1.9: a) Desgaste en contacto esfera-plano; b) Diagrama  $F_T - \delta$  del primer semiciclo de una prueba de fretting (Ödfalk y Vingsbo, 1992).

Ding (2004) realizó un estudio numérico del desgaste por fretting usando una configuración de contacto entre un cilindro y un plano para condiciones de deslizamiento total y parcial. Predijo la evolución de la geometría de contacto, las variables de superficie de contacto, la presión de contacto y el deslizamiento relativo, además demostró que el desgaste por fretting tiene un efecto significativo en la distribución de esfuerzos de cizallamiento sobre la superficie de contacto, los cuales afectan la iniciación de grietas de fatiga por fretting para ambos regímenes de deslizamiento, con significativas diferencias entre los casos de deslizamiento parcial y deslizamiento total.

En régimen de deslizamiento total, la alta tasa de desgaste conduce a los bordes de contacto a moverse rápidamente hacia el exterior, dejando el material previamente en los bordes de contacto en un estado permanente de compresión que impide la iniciación de fisuras por fretting fatiga. Esto sugiere que el desgaste es la característica predominante en el caso de deslizamiento total.

Para el régimen de deslizamiento parcial, aunque comparativamente más pequeño, aumenta la máxima tensión normal a la tracción y cambia su ubicación en los bordes de contacto a los límites entre las zonas sin deslizamiento y con deslizamiento. El riesgo a nucleación de grietas por lo tanto, es mayor en los bordes de contacto para un pequeño número de ciclos y en los límites de stick-slip para gran número de ciclos, aumentando con el incremento en la tensión de cizallamiento en dichos límites.

*Farrahi, et al. (2005)* estudiaron el efecto de la geometría de contacto en la vida a fatiga por fretting mediante prácticas experimentales y simulación numérica con cojinetes planos y cilíndricos, obteniendo las siguientes conclusiones: (a) la vida a fatiga por fretting para el modelo de contacto cilíndrico fue menor que para el modelo plano, bajo las mismas fuerzas normal y tangencial; (b) en las primeras etapas de fretting fatiga, la tasa de crecimiento de la grieta fue mayor para el modelo de contacto cilíndrico y después permaneció casi igual para ambos modelos; (c) el coeficiente de fricción y por consiguiente el valor de la fuerza de fricción fue mayor para cojinetes planos después del crecimiento inicial de la grieta por 1 mm; (d) Los resultados numéricos mostraron que los esfuerzos de Von Mises así como la resistencia a la tracción y la tensión de cizallamiento máximas que se cree que son el origen para la iniciación y el crecimiento de una grieta, se producen en el borde posterior de la superficie de contacto de los cojinetes planos y cilíndricos.

*Hojjati Talemi (2011)* investigó por medio de simulación numérica el efecto de la geometría de almohadillas planas y cilíndricas en el comportamiento de propagación de grietas, estando dichas almohadillas en contacto con un plano. Hojjati Talemi observó que el esfuerzo máximo se crea en la zona de contacto y los valores de los esfuerzos son mayores cerca del borde afilado de contacto, que era la zona de interés en la que se esperaba la falla; además, los esfuerzos equivalentes de Von Mises aumentaron con el incremento del ancho de ambos tipos de almohadillas considerados en esta investigación, sin embargo, para el caso de contacto cilindro – plano, los esfuerzos equivalentes de Von Mises son significativamente mayores que en el caso de contacto plano – plano.

*Juoksukangas (2013)* analizó el efecto de la geometría del borde de contacto en el comportamiento de fatiga por fretting, para esto empleó un modelo en 2D de contacto elastoplástico con la configuración de contacto entre una superficie plana y almohadillas cuadradas con terminado afilado (contacto completo) y redondeado (contacto casi completo) en sus esquinas. Los cálculos mostraron que el borde de contacto redondeado tiene un riesgo de agrietamiento ligeramente más alto que el borde de contacto afilado.

*Warmuth, et al. (2013)* investigaron el efecto que tiene la geometría de contacto sobre las tasas y mecanismos de desgaste por fretting para contactos no conformes. Para ello

realizaron pruebas en el régimen de deslizamiento total bajo una carga normal constante, empleando una configuración de contacto cilindro-plano con un acero de alta resistencia para una gama de radios de cilindro. *Warmuth* también observó que la geometría de contacto es un factor importante en los experimentos de desgaste por fretting, ya que tiene la capacidad de cambiar el mecanismo de desgaste dominante, es decir, de un daño que ocurre principalmente por la eliminación de material a granel a uno que crea un daño a través de deformación subsuperficial.

El primer mecanismo predomina mientras menos conforme sea el contacto, el segundo mecanismo es más dominante mientras más conforme es el contacto. También observaron que el coeficiente de fricción es independiente de la geometría de contacto en toda la gama de amplitudes de desplazamiento por fretting examinados, y que los cambios en la amplitud de desplazamiento por fretting (dentro del régimen de deslizamiento total) generan cambios en el grado de daño (asociado con la energía disipada en el contacto). Por último, *Warmuth* demostró que el coeficiente de desgaste está en función de la geometría de contacto como se observa en la figura 1.10 y por lo tanto, los modelos que utilizan dicho coeficiente para predecir la evolución del daño, deben ser modificados de tal forma que incluyan su dependencia de la geometría de contacto.

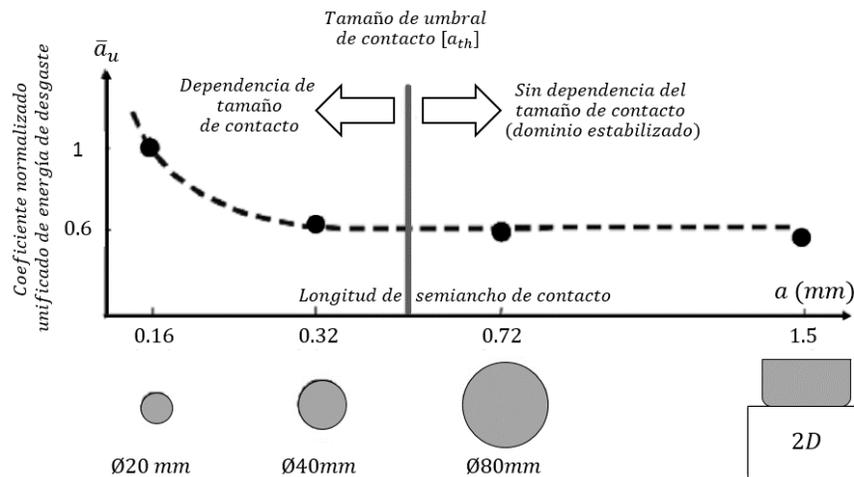


Figura 1.10: Variación del coeficiente normalizado unificado de energía de desgaste en función de la geometría de contacto (*Warmuth*, 2013).

## 1.2.4 CONCLUSIÓN

El análisis de los fenómenos que se llevan a cabo en la zona de contacto de una unión mecánica es de mucha importancia ya que esto permite realizar mejoras en el diseño mecánico. La rigidez interfacial es un aspecto importante a analizar en una unión mecánica, ya que ésta define el estado de deslizamiento ya sea parcial o total, modificando además, la magnitud y distribución tanto de los esfuerzos cortantes como de la presión por contacto. Se sabe que la rigidez interfacial en una unión, varía en función de la magnitud de las cargas a que se encuentra sometida, pero no se sabe el efecto que produce sobre dicha rigidez, la alteración de la geometría de los cuerpos que forman la unión, ya que en la revisión de trabajos del apartado anterior, no se encontró estudio alguno sobre la influencia que ejerce el cambio de la geometría de los cuerpos de una unión sobre su rigidez de contacto y por ende en su estado de esfuerzos.

## 1.3 OBJETIVO

Analizar mediante un modelo discreto de elementos finitos, la influencia que la geometría de los cuerpos de una unión ejerce sobre su rigidez de contacto normal y tangencial.

### 1.3.1 ALCANCES

- Se obtiene la profundidad de los cuerpos hasta la cual influye la rigidez de contacto.
- Se determina la influencia que ejerce la variación en la geometría de los cuerpos de una unión sobre su rigidez interfacial y a su vez el efecto que esto produce sobre los esfuerzos generados en el área de contacto.

### 1.3.2 LIMITACIONES

- El análisis es puramente numérico del contacto convexo-plano (no conforme).
- En el análisis paramétrico las variantes son las cargas aplicadas y la geometría de los componentes de la unión, siendo estas del mismo material.
- El análisis se mantiene en el rango elástico.

## 1.4 JUSTIFICACIÓN

Entre las propiedades que describen el contacto mecánico, la rigidez de contacto ha sido considerada un factor importante que influye en la integridad de un sistema. El manejo de éste parámetro contribuye a evitar el desequilibrio en las condiciones idóneas para el buen funcionamiento de un mecanismo.

Cuando una unión mecánica está sometida a fuerzas cortantes, éstas pueden generar movimientos relativos entre los componentes de dicha unión, lo cual en muchos casos conduce a la generación de fallas. Cuando los deslizamientos relativos se generan a pequeña escala, es decir, en el régimen de deslizamiento parcial, entre las superficies en contacto se generan esfuerzos normales y tangenciales, que inducen daños dando lugar a la formación de grietas y su posterior propagación.

La rigidez de contacto influye en el estado de deslizamiento, ya sea parcial o total que presenta una unión que es sometida a fuerzas cortantes. Ya que mientras más rígida sea la unión menos propensa será a presentar el daño que causan los deslizamientos relativos en su interfaz. Se sabe que la rigidez interfacial está influenciada por las cargas a que se encuentra sometida la unión, pero no se sabe a ciencia cierta que tanto puede alterar a dicha rigidez, una modificación en la geometría de los cuerpos que se encuentran en contacto y si esto permite hacer una mejora en el comportamiento de la unión.

Con base en la problemática que representan los desplazamientos relativos en una unión, se realiza esta tesis, la cual servirá como precedente para futuros trabajos que involucren el estudio de la rigidez de contacto y su efecto en el comportamiento estático y/o dinámico de un sistema mecánico.

## 1.5 ESTRUCTURA DE LA TESIS

El presente documento se encuentra dividido en seis capítulos. El primero tuvo carácter introductorio, en él se presentó una revisión de trabajos ligados al estudio del contacto mecánico, la rigidez interfacial y efectos relacionados con la geometría de los cuerpos en contacto. También se indicó el objetivo general, los alcances y la justificación del estudio que realiza en esta tesis. En el segundo capítulo se presentan los fundamentos que permiten la comprensión del concepto de rigidez de contacto, con lo cual se facilita la asimilación del problema que se aborda en este trabajo; para ello se analizan las teorías de contacto elástico normal y tangencial, además de temas como fricción, y estado de deslizamiento parcial, todos estos relacionados con la rigidez interfacial.

El tercer capítulo muestra la descripción del modelo discreto empleado para análisis por simulación mediante elemento finito en el programa Abaqus. A partir de dicho modelo, se obtiene la rigidez de contacto en función de la variación en la geometría del cuerpo superior de una unión de tipo no conforme (convexo-plano), para ello se obtiene la región de influencia de la rigidez interfacial, la cual no se limita únicamente al borde de contacto. El cuarto capítulo muestra los resultados del análisis por elemento finito en el software de simulación Abaqus, así como la comparación entre estos, incluyendo la rigidez de contacto normal y tangencial, la variación de las zonas con deslizamiento y sin deslizamiento, así como la distribución de presión de contacto y esfuerzos de cizallamiento dentro de la zona de contacto en función de la geometría de contacto.

En el quinto capítulo se presentan la discusión sobre los resultados obtenidos en el capítulo 4, dando paso al sexto y último capítulo, en el cual se muestran las conclusiones finales y recomendaciones para trabajos futuros. El apéndice A, muestra las gráficas de desplazamiento resultante de los nodos distribuidos sobre L en cada una de las variantes en la relación de aspecto. En el apéndice B se pueden observar la presión de contacto y esfuerzos de cizallamiento que se genera en función del valor de la fuerza tangencial y la relación de aspecto. Por último, en el apéndice C se presentan los comportamientos fuerza vs desplazamiento tangencial y la rigidez de contacto en función de la fuerza tangencial, obtenidas para casos en que el coeficiente de fricción considerado es más bajo, en este caso 0.15 y 0.5.

---

---

# CAPÍTULO 2:

## *FUNDAMENTOS SOBRE RIGIDEZ DE CONTACTO*

---

---

### 2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describen los fundamentos que permiten la comprensión de la rigidez de contacto, para ello se aborda la teoría de contacto elástico normal y tangencial, la distribución de esfuerzos en la zona de contacto y fenómenos que se llevan a cabo en ella, como el deslizamiento parcial y fallas por fretting. Todos los conceptos que se presentan en este capítulo son indispensables para asimilar el estudio que se plantea en esta tesis.

### 2.2 CONTACTO MECÁNICO

Los problemas de contacto son uno de los problemas más difíciles de la mecánica de sólidos, ya que el contacto es el principal método para aplicación de cargas a un cuerpo deformable, lo que resulta en la concentración de esfuerzos en las zonas de contacto. Mayor complejidad aparece en el problema de contacto cuando se tienen en cuenta las leyes de fricción, lo cual conduce a un comportamiento no lineal de los cuerpos en contacto. Esta compleja situación puede conducir a problemas con la unicidad de solución y a la falta de convergencia de los algoritmos numéricos. Observando las aplicaciones prácticas de ingeniería en el campo de mecánica de sólidos, se nota que la gran mayoría de los componentes están conectados entre sí y son sometidos a concentración de esfuerzos, por lo tanto, son sitios potenciales para la falla mecánica (*Hojjati-Talemi, 2013*).

### 2.3 TEORÍA DE CONTACTO ELÁSTICO DE HERTZ

Hertz propuso un análisis elástico de los esfuerzos de contacto bajo una carga normal y estableció las siguientes suposiciones (Norden, 1973):

- Las superficies de contacto son perfectamente lisas para poder describir la forma real por una ecuación de segundo grado.
- Los límites elásticos de los materiales no se exceden durante el contacto (se mantiene la validez de la ley de Hooke).
- Los dos cuerpos en contacto deben ser isotrópicos.
- Solamente se consideran las cargas estáticas que actúan normales a las superficies del contacto. Esto significa que no se asumen fuerzas de fricción trabajando dentro del área del contacto (no existen fuerzas tangenciales).
- El área de contacto es muy pequeña en comparación con el radio de curvatura de los cuerpos. De este modo, se puede considerar que la superficie de contacto es plana y que las deformaciones son muy pequeñas y exclusivamente elásticas.

Si no se cumple con alguna de las suposiciones anteriores, no se considera contacto de Hertz, ya que no se cumple con las consideraciones hechas en el desarrollo matemático. A continuación se presenta el estudio del contacto elástico entre un sólido plano ( $R_1 = \infty$ ), de módulo elástico  $E_1$  y coeficiente de Poisson  $\nu_1$ , y otro esférico de radio  $R_2$ , y constantes elásticas  $E_2$  y  $\nu_2$ , sobre el que se aplica una fuerza  $F_n$ , como se muestra en la figura 2.1.

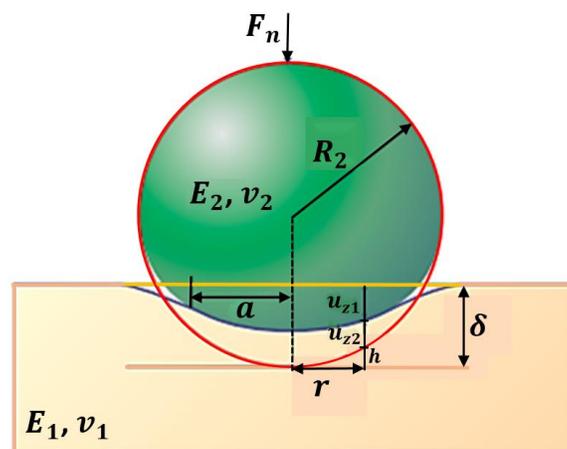


Figura 2.1: Esquema del contacto hertziano esfera-plano (Miranda, 2003).

El análisis que se presenta a continuación, también válido para el contacto entre dos superficies de revolución de radios de curvatura  $R_1$  y  $R_2$ , en cuyo caso el parámetro  $R^*$  es un radio de contacto efectivo (Johnson, 1985), dado por:

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.1)$$

La condición de contorno para los desplazamientos se obtiene a partir de la configuración geométrica ilustrada en la figura 2.1.

$$u_{z1} + u_{z2} = \delta - h \quad (2.2)$$

Donde  $u_{z1}$  y  $u_{z2}$  son los desplazamientos, respecto a las superficies sin deformar de puntos de la superficie plana y esférica, respectivamente, que se encuentran en contacto a una distancia  $r$  del eje de carga. El desplazamiento del centro de la esfera se denota por  $\delta$ , mientras que  $h$  es la distancia entre las superficies sin deformar a la distancia  $r$  del eje al inicio del contacto. Puede comprobarse que  $h = r^2/2R^*$  y por tanto se obtiene:

$$u_{z1} + u_{z2} = \delta - \frac{r^2}{2R^*} \quad (2.3)$$

Hertz comprobó que una distribución de presiones elíptica genera desplazamientos compatibles con la ecuación (2.3) (Johnson, 1985 & Timoshenko, 1975). Esta distribución de presión (ver figura 2.2) puede expresarse matemáticamente de la forma:

$$p(r) = \begin{cases} p_{max} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{a^2}\right)}, & r \leq a \\ 0; & r > a \end{cases} \quad (2.4)$$

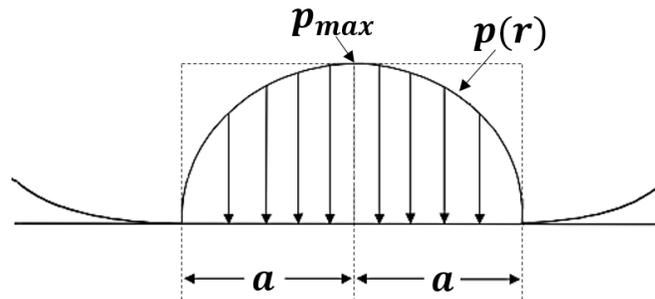


Figura 2.2: Distribución de presión de contacto (Dwyer-Joyce, 1997).

Donde  $p_{max}$  es la presión máxima localizada en el eje de carga, y  $a$  es el radio del contacto. Conviene resaltar que cualquier otra distribución de presiones no satisface la ecuación (2.3) y por lo tanto, la distribución de presiones de Hertz es solución única del problema. Conocida la distribución de presiones, los desplazamientos normales se calculan a partir de la expresión (Johnson, 1985):

$$u_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_S p \, dS \quad (2.5)$$

que se obtiene utilizando la solución de Boussinesq correspondiente a un semiespacio sometido a una carga puntual (Sneddon, 1965) y el principio de superposición. La integral se extiende a toda la superficie de contacto  $S$ . A partir de esta expresión se obtienen los desplazamientos  $u_{z1}$  y  $u_{z2}$  en la forma:

$$u_{zi} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} \cdot \frac{\pi p_{max}}{4a} (2a^2 - r^2) \quad (2.6)$$

Para  $r \leq a$ , y siendo  $E_i$  el módulo de Young y  $\nu_i$  el coeficiente de Poisson del cuerpo considerado. Sustituyendo los desplazamientos  $u_{z1}$  y  $u_{z2}$  calculados de esta forma en la ecuación (2.3) se obtiene:

$$\frac{\pi p_{max}}{4aE^*} (2a^2 - r^2) = \delta - \frac{r^2}{2R^*} \quad (2.7)$$

donde se ha definido el modulo efectivo  $E^*$  como:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (2.8)$$

Puesto que (2.7) tiene que verificarse par a cualquier  $r$ , igualando términos se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\pi R^*}{2E^*} p_{max} \\ \delta &= \frac{\pi a}{2E^*} p_{max} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Teniendo en cuenta además que:

$$P = \int_0^a p(r) 2\pi r \, dr = \frac{2}{3} p_{max} \pi a^2 \quad (2.10)$$

Se obtienen finalmente las expresiones del radio de contacto  $a$ , y el desplazamiento  $\delta$ , en función de la carga aplicada:

$$\left. \begin{aligned} a &= \left( \frac{3F_n R^*}{4E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \delta &= \frac{a^2}{R^*} = \left( \frac{9F_n^2}{16R^* E^{*2}} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Por otro lado, la presión media en la superficie de contacto  $p_m$ , está dada por la ecuación:

$$p_m = \frac{F_n}{\pi a^2} = \frac{2}{3} p_{max} = \left( \frac{16F_n E^{*2}}{9\pi^3 R^{*2}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.12)$$

De la ecuación (2.12) se deduce que la presión máxima en el área de contacto es:

$$p_{max} = \frac{3F_n}{2\pi a^2} \quad (2.13)$$

Las ecuaciones correspondientes al contacto cilíndrico se muestran en la tabla 2.1, se puede observar que estas son semejantes al caso de contacto esférico. El radio del cilindro 2 mostrado en la figura 2.3 se asume que es muy grande en comparación el radio del cilindro 1, por lo tanto se considera como un semiespacio plano con radio  $R_2$  infinito.

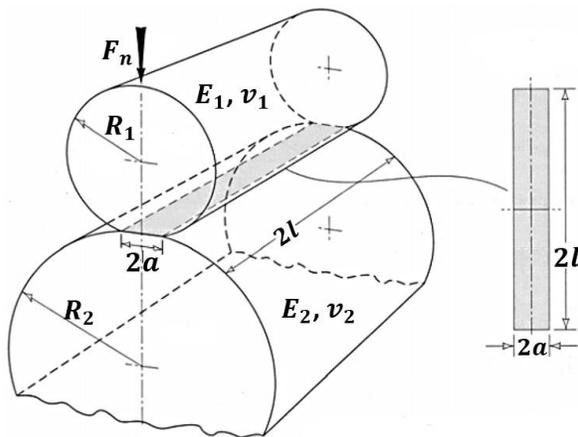


Figura 2.3: Esquema de contacto cilíndrico hertziano (Sneddon, 1965).

Tabla 2.1: Ecuaciones de la teoría de Hertz para contacto cilindro-plano (Sneddon, 1965).

Parámetro	Ecuación
Carga por unidad de longitud	$F_L = F_n/l$
Semiancho de contacto	$a = \left( \frac{4F_L R}{\pi E^*} \right)^{\frac{1}{2}}$
Radio de curvatura efectivo	$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
Módulo efectivo	$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$
Distribución de presión de contacto	$p(x) = p_{max} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}$
Presión máxima de contacto	$p_{max} = \left( \frac{F_L E^*}{\pi R^*} \right)^{\frac{1}{2}}$

### 2.3.1 ESFUERZOS CORTANTES EN CONTACTO HERTZIANO

Determinar la ubicación y el valor de los esfuerzos cortantes máximos, proporciona indicios de un posible fallo, ya que el material de los cuerpos en contacto presenta una menor resistencia a estos tipos de esfuerzos, los cuales pueden generar deformaciones plásticas. Dichos parámetros están dados por los puntos de Bielajev y Palmgren-Lundberg mostrados en la figura 2.4 (Radzimovsky, 2007).

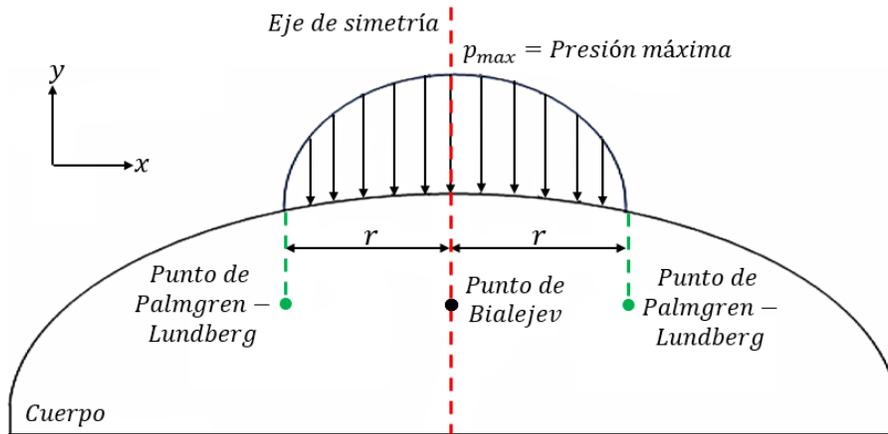


Figura 2.4. Esquema de los puntos críticos producidos por los esfuerzos cortantes para el contacto elástico de Hertz (Radzimovsky, 2007).

El punto de Bielajev está ubicado sobre el eje de simetría y entre los puntos de Palmgren-Lundberg, los cuales están a una distancia equidistante de eje de simetría. Los esfuerzos cortantes se localizan en las esquinas del área de contacto a cierta profundidad (ver figura 2.5), su magnitud es (Cook, 1999):

$$\tau_{max} = 0.3p_{max} \tag{2.14}$$

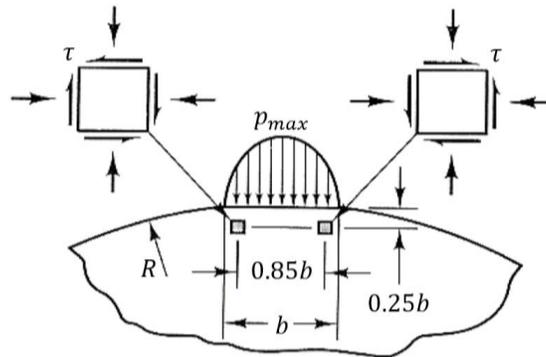


Figura 2.5: Ubicación de los esfuerzos cortantes (Cook, 1999).

## 2.4 FRICCIÓN

La fricción se refiere a la omnipresente resistencia al movimiento que se presenta cuando dos cuerpos están en contacto y se caracteriza como fuerza de fricción (Wilson, 2003). El modelo de fricción más común es el de la ley de fricción de Coulomb (ver figura 2.6), que establece que la fuerza de cizallamiento máxima que puede ser ejercida por un contacto es proporcional a la carga normal aplicada a través del contacto y está dada por:

$$F_t \leq \mu F_n \quad (2.15)$$

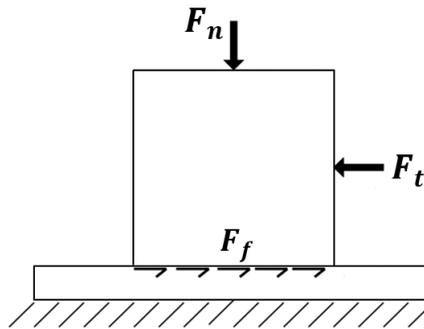


Figura 2.6: Esquema de contacto del modelo básico de fricción de Coulomb (Abaqus Analysis User's Manual, Versión 6.9).

La figura 2.7 muestra un modelo de fricción basado en la teoría de fricción de Coulomb ideal, en éste se considera que cuando  $F_t \leq \mu F_n$ , en la interfaz se presenta un estado de deslizamiento parcial; cuando  $F_t > \mu F_n$ , la zona de contacto cambia a un estado de deslizamiento total (Wang, 2005).

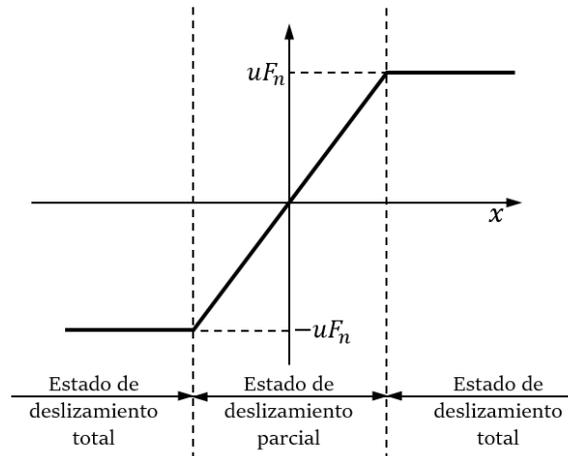


Figura 2.7: Modelo de fricción basado en el modelo de fricción de Coulomb ideal (Wang, 2005).

La fuerza de fricción es independiente de la velocidad de movimiento. Además, también es independiente del tamaño del área de contacto. Por ende, un bloque con diferentes dimensiones, experimentará la misma fuerza de fricción si se le aplica la misma fuerza normal y las superficies tienen acabados similares.

## 2.5 TEORÍA DE CONTACTO ELÁSTICO TANGENCIAL

*Cattaneo (1938)* y *Mindlin y Deresiewicz (1953)* de forma independiente extendieron la teoría de contacto elástico de Hertz para el caso de aplicación de carga tangencial en presencia de la fricción en la interfaz. Bajo esta condición, el contacto estará dividido en zonas en estado de deslizamiento y sin deslizamiento como se muestra en la Figura 2.8. El modelo de fricción de Coulomb es empleado como:

$$F_t(x) \leq \mu F_n(x) \quad (2.16)$$

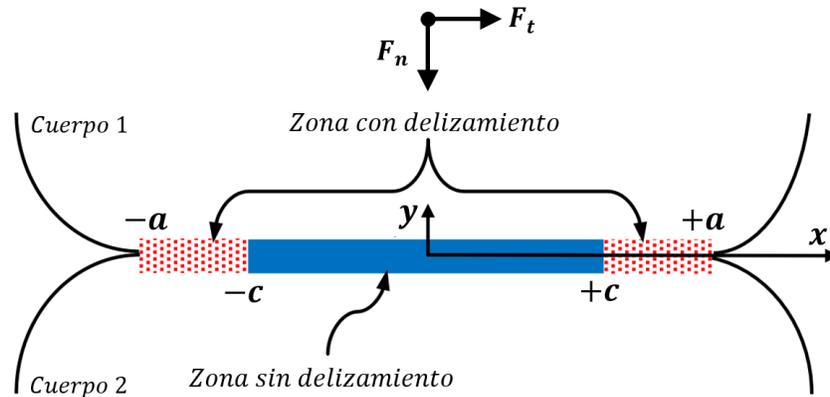


Figura 2.8: División del área de contacto al aplicar la carga tangencial en zonas con deslizamiento y sin deslizamiento (*Hojjati, 2013*).

Donde  $F_t(x)$  es la fuerza en dirección tangencial en un punto  $x$  y  $\mu$  es el coeficiente de fricción. Si  $F_t < \mu F_n$  no se produce el deslizamiento total. Debido a la carga tangencial la distribución de área de contacto y la presión ya no es simétrica, sin embargo, estos efectos generalmente son pequeños, especialmente si el coeficiente de fricción es pequeño, entonces para casos prácticos se puede suponer que las tensiones y deformaciones debidas

a cargas normales y tangenciales son independientes uno de otro y pueden superponer para encontrar valores resultantes (Navarro, 1999). Si  $F_t$  es menor que  $\mu F_n$ , una zona sin deslizamiento de semiancho  $c$  se puede desarrollar junto a una zona con deslizamiento que ocurre en el borde  $c \leq |x| \leq a$ .

La distribución de presión normal para el contacto entre una esfera de radio  $R$  y un semiespacio plano (ver figura 2.9) se determina con la teoría de contacto de Hertz. Debido a la carga tangencial  $F_t$ , aparecen dos regiones circulares en la zona de contacto: la zona central sin deslizamiento en  $|r| < c$ , y otra con deslizamiento en  $c \leq |r| < a$ . El radio  $c$  de la zona sin deslizamiento, viene dado por:

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \frac{F_t}{\mu F_n}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.17)$$

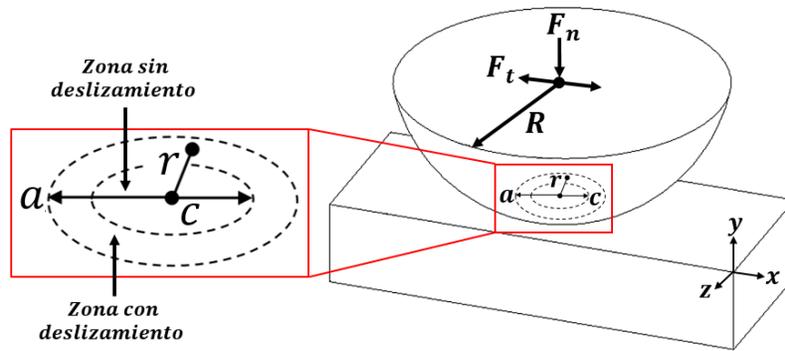


Figura 2.9: Zona de contacto esférico para deslizamiento parcial (Navarro, 1999).

La distribución de presión tangencial en la zona con deslizamiento es:

$$q(r) = \mu p_{max} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad c \leq r \leq a \quad (2.18)$$

Mientras que para la zona sin deslizamiento se tiene que:

$$q(r) = \mu p_{max} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} - \frac{c}{a} \mu p_{max} \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2}} \quad 0 \leq |r| \leq c \quad (2.19)$$

Para contacto entre un elemento cilíndrico de radio  $R$  y un semiespacio plano (figura 2.10), el radio  $a$  debido a una fuerza normal  $P$  se obtiene mediante la teoría de Hertz.

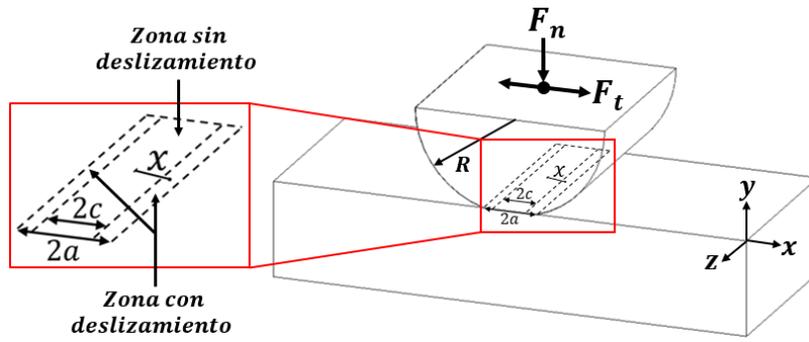


Figura 2.10: Zona de contacto cilíndrico para deslizamiento parcial (Navarro, 1999).

La tensión tangencial en la superficie se asume paralela a la dirección de  $F_t$ . La relación entre el semiancho de la zonas sin deslizamiento y con deslizamiento es:

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \frac{F_t}{\mu F_n}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.20}$$

La tensión tangencial en la zona con deslizamiento es:

$$q(x) = \mu p_{max} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad c \leq |x| \leq a \tag{2.21}$$

La distribución de tensión tangencial dentro de la zona sin deslizamiento es:

$$q(x) = \mu p_{max} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{c}{a} \mu p_{max} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} \quad c \leq |x| \leq c \tag{2.22}$$

En la figura 2.11 se presentan tres distintos comportamientos de la zona de contacto, los cuales están en función del valor de  $F_t$ .

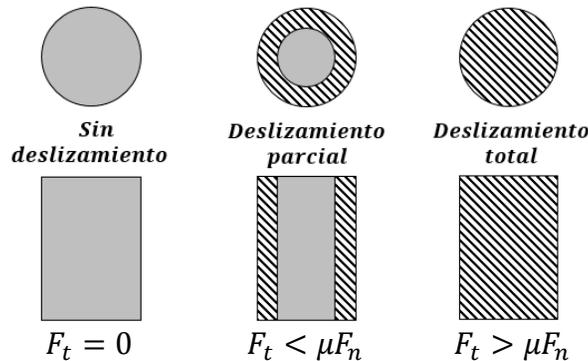


Figura 2.11: Área de contacto en función de  $F_t$  para contacto cilindro-plano, (a) Sin deslizamiento, (b) Deslizamiento parcial, (c) Deslizamiento total.

La figura 2.12 se muestra una aproximación de la distribución de presión debido a  $F_n$  y  $F_t$ , además de su relación con las zonas sin deslizamiento y con deslizamiento.

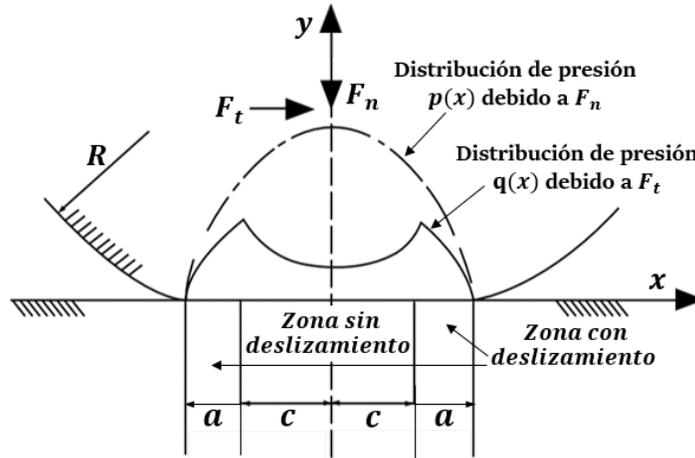


Figura 2.12: Regiones de contacto normal y tangencial (Navarro, 1999).

En la región  $0 \leq |x| \leq c$ , los puntos de contacto coincidentes que se desplazan juntos en la interfaz representan la región sin deslizamiento como se muestra en la figura 2.13 por el punto "A" (Mindlin, 1949; Johnson, 1985). Mientras que para la región  $c \leq |x| \leq a$  los puntos de contacto en los dos cuerpos tienen un movimiento relativo tangencial que representa la región de deslizamiento como se muestra en la figura 2.13 por los puntos "B" y "C" (Mindlin, 1949; Johnson, 1985).

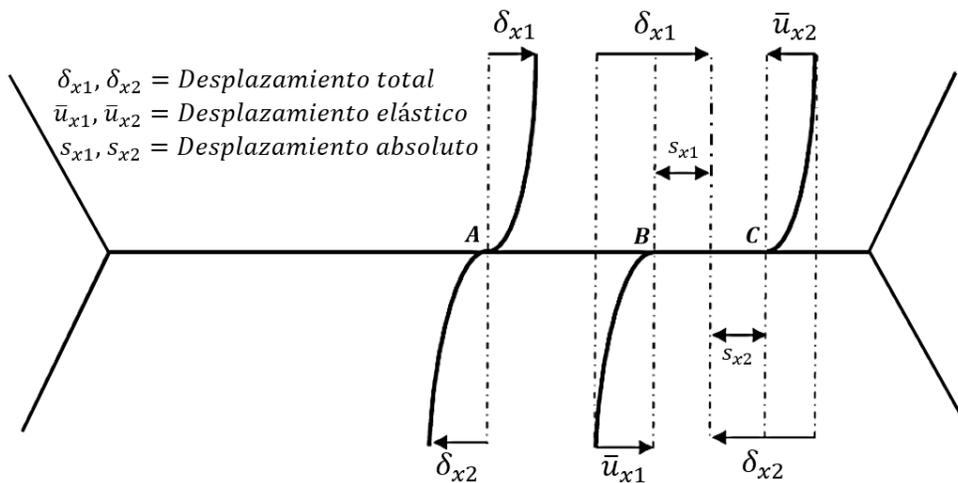


Figura 2.13: Comportamiento de los cuerpos en estado de deslizamiento parcial y deslizamiento total en la región de contacto (Johnson, 1985).

### 2.5.1 COMPORTAMIENTO FUERZA-DESPLAZAMIENTO TANGENCIAL

El modelo de contacto elástico tangencial entre dos esferas, desarrollado inicialmente por Cattaneo (1938) y posteriormente por Mindlin y Deresiewicz (1953) aplica las siguientes suposiciones (Yaqoob, 2013):

- La presión normal  $p(x)$  actuando entre los cuerpos en contacto está dada por la teoría de Hertz. Es decir, la aplicación de una fuerza tangencial no genera cambios en el tamaño del área de contacto ni la presión normal que actúa sobre él. Además, el desplazamiento normal de las esferas también está dado por la teoría de Hertz, y es independiente de la fuerza tangencial.
- El desplazamiento comienza en el borde del área de contacto, y progresa con el aumento de  $F_t$  hacia el centro de la zona de contacto. Para contacto esférico el área de deslizamiento resultante tiene una forma circular concéntrica; en el caso de contacto cilíndrico es una franja en cada extremo de la zona sin deslizamiento.
- En la región de deslizamiento parcial, la tracción tangencial está dada por el límite de fricción de Coulomb  $F_t = \mu F_n$ , donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción.
- La dirección del deslizamiento parcial es paralelo a la dirección de la carga tangencial  $F_t$  aplicada. Si bien existen componentes de deslizamiento en direcciones que no son paralelos a  $F_t$ , el efecto de estos componentes se desprecia.

En la figura 2.14 se muestra el diagrama correspondiente al comportamiento fuerza-desplazamiento tangencial para el contacto entre dos cuerpos sometidos a una fuerza normal  $F_n$  constante y  $F_t$  variable.  $F_t$  aumenta desde  $O$  hasta  $A$ , donde  $F_t^*$  es la fuerza tangencial máxima cuando se produce el deslizamiento total, es decir,  $F_t^* = \mu F_n$ .

En la interfaz de contacto se presenta deslizamiento parcial desde  $O$  hasta  $A$  superando ese valor se genera deslizamiento total. El desplazamiento tangencial generado desde  $O$  hasta  $A$  se define como desplazamiento preliminar ( $x^*$ ). Durante el incremento de la carga tangencial, la zona sin deslizamiento entre los dos cuerpos disminuye y la zona de deslizamiento parcial aumenta hasta que se presenta deslizamiento total en el punto  $A$ .

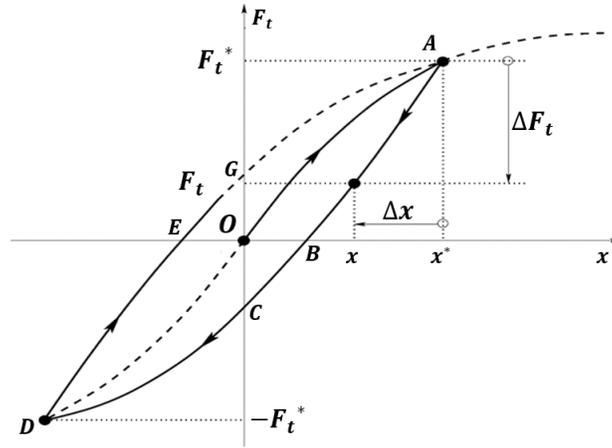


Figura 2.14: Diagrama de respuesta fuerza-desplazamiento tangencial para el contacto entre dos cuerpos sometidos a una fuerza normal  $F_n$  constante y  $F_t$  variable (Yaqoob, 2013).

La disminución de la carga tangencial de  $F_t$  hasta  $-F_t$  disminuye el desplazamiento tangencial parcial como se observa a lo largo de la línea  $ABCD$ , en el punto  $D$  se produce deslizamiento total. Del mismo modo, cuando la carga tangencial aumenta de  $-F_t$  a  $F_t$ , como indica la línea  $DEGA$ , el desplazamiento tangencial aumenta.

## 2.6 MODELO DE CONTACTO DE RESORTE LINEAL

La rigidez interfacial se genera cuando una presión es aplicada sobre un par de superficies en contacto, es la razón del incremento de la presión de contacto nominal a la disminución en la separación superficial. El modelo de contacto de resorte lineal (ver figura 2.15) cuyo diagrama fuerza-desplazamiento se muestra en la figura 2.16 (Cundall, 1979), establece que la fuerza de contacto normal se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$F_n = k_n \cdot x_n \quad (2.23)$$

donde  $x_n$  es el desplazamiento en dirección normal entre las superficies en contacto y  $k_n$  es la rigidez de contacto normal, la cual se puede calcular mediante la ecuación:

$$k_n = \frac{k_{n1} \cdot k_{n2}}{k_{n1} + k_{n2}} \quad (2.24)$$

donde  $k_{n1}$  y  $k_{n2}$  son la rigideces normales respectivas de los cuerpos en contacto.

La fuerza tangencial en este modelo se calcula mediante la ecuación:

$$F_t = k_t \cdot x_t \quad (2.25)$$

donde  $x_t$  es el incremento del desplazamiento tangencial entre las superficies en contacto y  $k_t$  es la rigidez de contacto tangencial que puede ser calculada como:

$$k_t = \frac{k_{t1} \cdot k_{t2}}{k_{t1} + k_{t2}} \quad (2.26)$$

donde  $k_{t1}$  y  $k_{t2}$  son la rigideces tangenciales respectivas de los cuerpos en contacto.

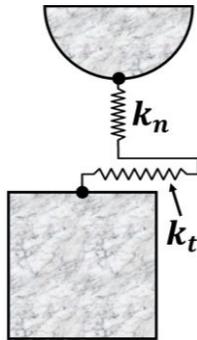


Figura 2.15: Interpretación de la rigidez de contacto normal y tangencial mediante resortes.

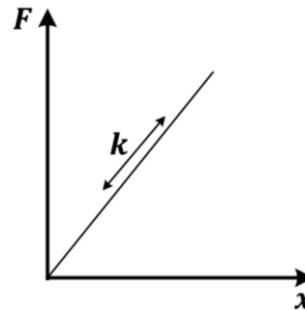


Figura 2.16: Diagrama fuerza vs desplazamiento del modelo de contacto de resorte (Cundall, 1979).

## 2.7 RÉGIMEN DE DESLIZAMIENTO PARCIAL

Las leyes de fricción clásicas sólo consideran cuerpos con deslizamiento relativo a otro, pero las deformaciones y deslizamiento locales se producen en la interfaz de contacto antes de que el deslizamiento total pueda ser observado (Hagman, 1997). Este fenómeno, llamado *deslizamiento parcial*, es causado por la deformación elástica de las superficies de los cuerpos en contacto.

La interfaz de contacto se divide en dos zonas, en la primera los cuerpos se encuentran adheridos y en la segunda las superficies en contacto se encuentran en estado de deslizamiento parcial. El incremento de la carga tangencial aumenta la cantidad de deslizamiento parcial producido en la zona de contacto, hasta que se genera un deslizamiento total en el cual toda la interfaz de contacto de los cuerpos se desliza.

La figura 2.17 muestra un comportamiento de deslizamiento parcial, como se observa, éste es la parte de un ciclo de histéresis entre adherencia y deslizamiento, donde el desplazamiento relativo queda en función de la fuerza tangencial. Durante el régimen de deslizamiento parcial, éste toma lugar solamente en la superficie de contacto, mientras las otras partes no están sometidas a algún movimiento relativo.

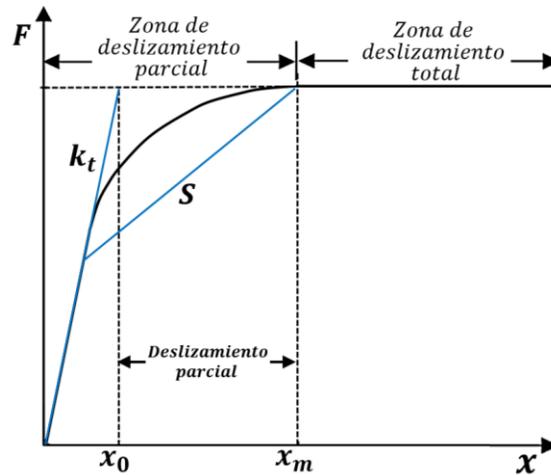


Figura 2.17: Comportamiento de deslizamiento parcial y parte inicial de un ciclo de histéresis (Contreras, 2009).

La rigidez de contacto tangencial es la pendiente inicial del ciclo de histéresis antes de un cambio de movimiento. El deslizamiento total, se refiere a la parte del ciclo donde el deslizamiento toma lugar entre todos los puntos de la superficie de contacto e idealmente la fuerza tangencial es independiente del desplazamiento relativo (Contreras, 2009).

Para calcular el deslizamiento parcial a partir de la figura 2.17, se prolonga la pendiente de la rigidez de contacto tangencial ( $k_t$ ) hasta que se intersecta con la parte horizontal de la curva de histéresis, que da como resultado el punto de inicio ( $x_0$ ) del deslizamiento parcial. Después se traza la secante ( $s$ ) de la curva en la zona de deslizamiento parcial que provee el siguiente punto de medición del deslizamiento parcial ( $x_m$ ). La  $k_t$  se determina a partir de la pendiente de las curvas de histéresis como la mostrada en la figura 2.17.

Para estimar rigidez tangencial de contacto efectiva ( $k_t$ ), se divide el promedio de la fuerza  $F_t$  con el promedio del desplazamiento  $x_t$ :

$$k_t = \frac{F_t}{x_t} \quad (2.27)$$

---

---

# CAPÍTULO 3:

## MODELO DISCRETO

---

---

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Reducir un problema mecánico a su más sencilla representación, permite facilitar su comprensión y solución, pero se debe cuidar que la simplificación resulte suficiente para el fenómeno específico que desea observar. Un ejemplo de lo anterior se presenta en la figura 3.1, la cual muestra los casos fretting fatiga para contacto: (a) entre dos placas y un remache simplificado al contacto cilindro-plano y (b) entre dos placas y un perno simplificado al contacto plano-plano. Además se muestran las zonas susceptibles a presentar grietas debido a las fuerzas a las que se encuentra sujeta la unión.

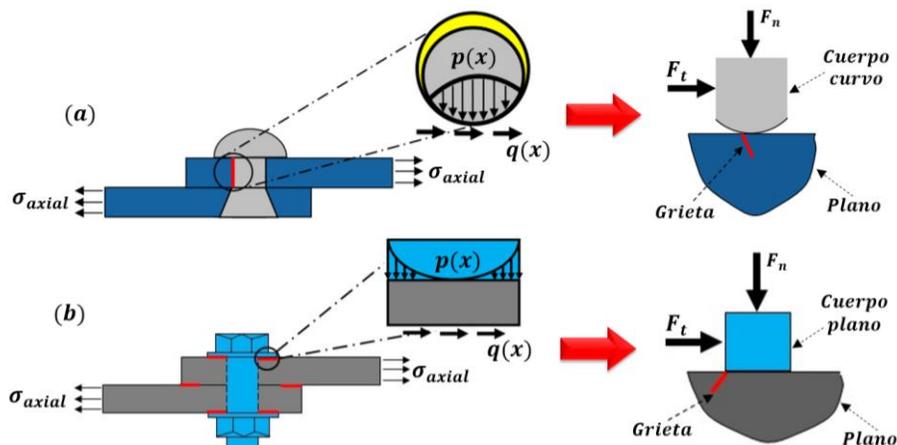


Figura 3.1: Problemas de contacto y su simplificación: (a) Contacto plano - cilindro; (b) Contacto plano - plano (Hojjati-Talemi, 2013).

En este capítulo se presenta el modelo discreto empleado en el programa de análisis por simulación en elemento finito Abaqus, su verificación, las variantes realizadas en sus parámetros y la metodología empleada para determinar la profundidad hasta la que ejerce influencia la rigidez de contacto y con base en ello determinar dicha rigidez.

### 3.2 TIPO DE CONTACTO SELECCIONADO COMO OBJETO DE ESTUDIO

En el apartado anterior se mostró un ejemplo de simplificación de un problema de contacto, en el caso del estudio de la rigidez de contacto en función de la geometría de los cuerpos en contacto, basta con emplear un modelo como el que se presenta en la figura 3.2, la cual muestra el esquema general de contacto convexo-plano, que consta de un cuerpo inferior plano, cuya forma geométrica se mantiene constante y un cuerpo superior con superficie de contacto redonda y variable. Se requiere analizar la influencia que ejerce la variación de la geometría de los cuerpos en contacto sobre su rigidez interfacial, para ello se siguieron las modificaciones mostradas por la tabla 3.1.

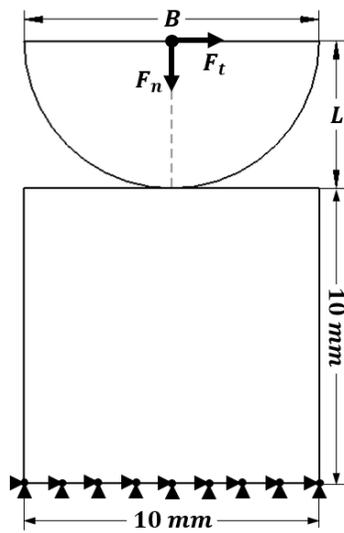


Figura 3.2: Configuración dimensional del modelo de contacto empleado.

Tabla 3.1: Variación geométrica del cuerpo superior de la unión.

Cuerpo superior de la unión	B (mm)	L (mm)	e (mm)	Relación (L/B)
	10	2	1	0.2
	10	3	1	0.3
	10	4	1	0.4
	10	5	1	0.5
	10	6	1	0.6

Mantener constantes los parámetros  $B$  y  $e$ , resulto una forma viable para hacer comparables los resultados obtenidos por cada geometría, ya que esto asegura que todas estén sometidas a la misma presión resultante de las fuerzas aplicadas, es por ello que se

decidió usar como variable para ir modificando la geometría del cuerpo superior de la unión, al parámetro  $L$ . Se tomó como base a  $L/B=0.5$ , que corresponde al semicírculo, posteriormente el valor de relación se incrementó a 0.6, con esto el semicírculo cambia con tendencia a semielipse vertical; si el valor de  $L/B$  disminuye a 0.4, la forma que adopta el cuerpo tiende a una semielipse horizontal. Además de las tres variantes anteriores, se agregaron dos variaciones más para  $L/B$ , es decir, 0.2 y 0.3 para observar mejor que tendencia es la que presentan los resultados obtenidos.

### 3.3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO DISCRETO

Las figuras 3.3 (a) y (b) muestran las condiciones del modelo discreto empleado; éste consta de tres partes: el cuerpo deformable inferior, el cual es plano; el deformable superior cuya geometría varía en función del valor de  $L$  (ver tabla 3.1) y es redondo. El tercer cuerpo es un rígido, al cual se encuentra pegado el cuerpo superior, en su extremo plano. El modelo es en 2D debido a su menor costo computacional en comparación con un análisis en 3D; está formado por elementos CPS4R, es decir, elementos sólidos (C), en estado de esfuerzo plano (PS), de primer orden (4 nodos) e integración reducida (R).

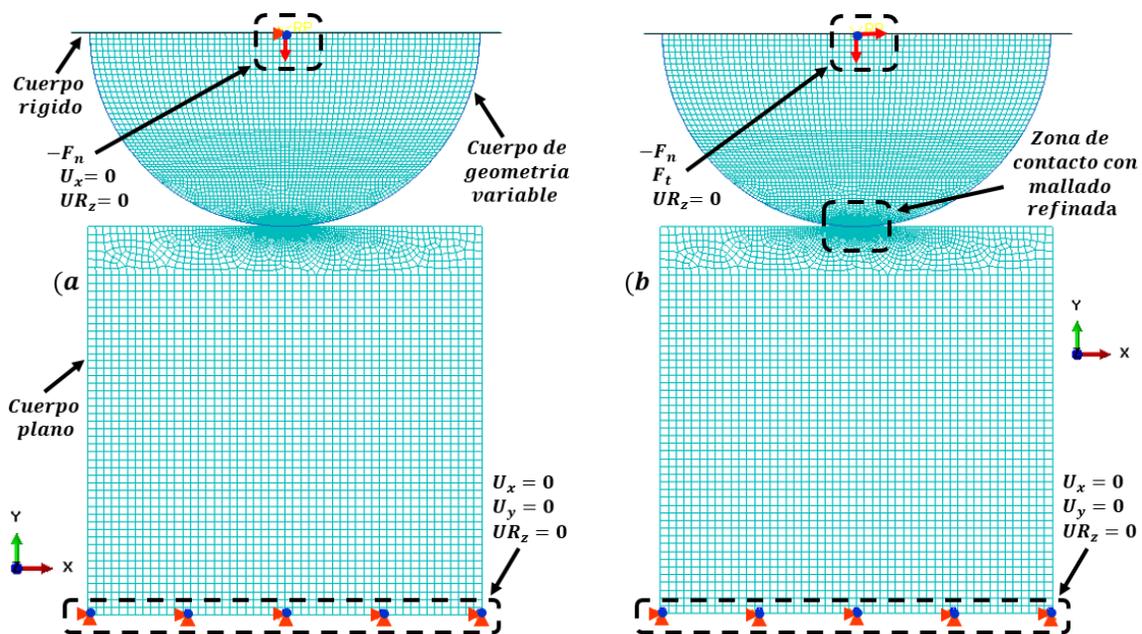


Figura 3.3: Modelo discreto 2D (componentes de la unión mecánica mallados): a) Step 1, b) Step 2.

El espesor ( $e$ ) especificado en la tabla 3.1, es el que se asigna en un modelo 2D cuando se realiza un análisis en estado de deformación plana o de esfuerzo plano. El modelo discreto de la figura 3.3, se encuentra en estado de esfuerzo plano, ya que  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$  y el estado tensorial queda especificado por  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ .

Se emplearon elementos lineales (4 nodos), ya que al usar elementos cuadráticos (8 nodos) se presentaron problemas de convergencia en la simulación de contacto. El uso de elementos con *integración reducida* al implicar un menor número de puntos de integración reduce de manera significativa el tiempo de cómputo requerido, además los esfuerzos y deformaciones son calculados en los lugares que proveen una mayor precisión.

Entre el cuerpo rígido y el cuerpo redondo se estableció la restricción *tie*, la cual permite que dos superficies (maestra y esclava) puedan estar unidas; para ello, los nodos de ambas superficies tendrán los mismos valores en sus grados de libertad. Las superficies de contacto están definidas como tipo *maestro-esclavo*, con esto se regula la relación de interacción de contacto, ya que se conserva la regla básica de que las superficies esclavas no pueden penetrar en las superficies de tipo maestro. Además se emplea la formulación de *deslizamiento finito* con el método de discretización *superficie a superficie*.

En la interacción normal se usó el comportamiento de contacto duro, el cual minimiza la penetración de la superficie esclava en la superficie maestra; en la tangencial se estableció la formulación de fricción de penalización y se empleó el modelo presentado en la figura 2.7 con  $\mu = 0.74$  (Tegolaand, 2012). En el caso del material empleado para los componentes de la unión, se eligió un material comúnmente empleado en el diseño de piezas mecánicas, es decir, el acero 1018, cuyas propiedades mecánicas se muestran en la tabla 3.2.

Tabla 3.2: Propiedades mecánicas del acero 1018 (Timoshenko, S., 1975).

Propiedades mecánicas del acero 1018	
Densidad ( $\rho$ )	7870 kg/m <sup>3</sup>
Esfuerzo ultimo a la tensión ( $\sigma_u$ )	440 MPa
Esfuerzo de fluencia a la tensión ( $\sigma_y$ )	370 MPa
Modulo de elasticidad (E)	200 GPa
Módulo elasticidad de volumen (K)	140 GPa
Razón de Poisson ( $\nu$ )	0.29
Módulo de elasticidad cortante (G)	80 GPa

El análisis es cuasiestático considerando que las cargas aplicadas producen un movimiento tan lento que no presenta efectos de fuerzas inerciales en la unión, permitiendo así un mejor control sobre diversos fenómenos que pueden llevarse a cabo en la unión, por ejemplo las deformaciones plásticas, con las cuales un análisis dinámico se hace más complejo de controlar los fenómenos que se generan por contacto mecánico.

El proceso de simulación que se lleva a cabo con el modelo discreto antes explicado, se encuentra dividido en los siguientes pasos:

- *Paso 1:* El cuerpo inferior está empotrado en su base, el cuerpo rígido tiene la condición de libre desplazamiento en  $Y$ , así como desplazamiento en  $X$  y rotación en  $Z$  restringidos, además de una fuerza aplicada en dirección normal (eje  $Y$ ).

La aplicación de la fuerza normal es importante, ya que es esta la que en primera instancia genera la rigidez de contacto en la unión y en función de dicha fuerza es que estará el valor del rango de fuerza tangencial que se aplica en el segundo paso del análisis. La fuerza tangencial tiene una magnitud tal que mantiene el estado de deformación de los componentes de la unión en el rango de comportamiento elástico del material de que están hechos.

- *Paso 2:* El cuerpo inferior se mantiene empotrado en su base; el cuerpo rígido mantiene el efecto de la fuerza normal previamente aplicada y se le agrega una fuerza en dirección tangencial para lo cual, se elimina la restricción de desplazamiento en  $Y$ , pero se mantiene la restricción de rotación en  $Z$ .

El propósito de la aplicación de una fuerza tangencial, es emular las cargas cortantes a que una unión mecánica suele estar sometida, las cuales son las encargadas de propiciar cambios en los estados de deslizamiento y esfuerzos en la interfaz. Para observar cómo es que evolucionan y la tendencia que presentan dichos estados, la fuerza tangencial presenta incrementos, sin que lleguen a ser lo suficientemente grandes como para producir el cambio de régimen de deslizamiento parcial a total en la interfaz.

### 3.4 CALIBRACIÓN DEL MODELO DISCRETO

La confiabilidad en los resultados que se obtienen de un modelo discreto, está en función de la correcta asignación de propiedades de material y mallado, así como las condiciones de frontera. El mallado es muy importante ya que los resultados pueden variar mucho en función de este. Para tener mayor certeza de que el mallado empleado es el correcto, se realizaron varias pruebas en las cuales a partir de 20  $\mu\text{m}$  se fue disminuyendo el tamaño de elemento de malla aledaña al área de contacto, que es la zona de interés.

Por cada decremento de tamaño de malla, se obtuvo el valor de la presión máxima y el semiancho de contacto y estos resultados se compararon los que se obtienen mediante la teoría de contacto elástico de Hertz (*Johnson, 1985*) de la sección 2.3. La carga normal aplicada es de magnitud tal, que no generara esfuerzos superiores al límite de fluencia y los efectos generados por esta se mantuvieran en el régimen elástico, manteniendo así, la validez de la teoría de Hertz para el análisis. El valor de  $F_n$  empleado fue de 5 N.

El tamaño de elemento de malla que resultó ser el ideal fue de 1  $\mu\text{m}$ , ya que con este tamaño la diferencia porcentual obtenida entre los resultados numéricos y analíticos, presentó un valor considerablemente bajo y aceptable como se observa en la tabla 3.3. Tamaños más pequeños de malla ya no generaron una disminución significativa de la diferencia porcentual, pero si implicaron un incremento en el costo computacional.

Tabla 3.3: Presión máxima y semiancho de contacto obtenidos por los métodos teórico y de simulación.

Parámetro	Método Teórico (Hertz)	Método de simulación (Abaqus)	Diferencia porcentual
Semiancho de contacto (mm)	$17.074 \times 10^{-3}$	$17.000 \times 10^{-3}$	0.437 %
Presión máxima (MPa)	186.424	187.600	0.631 %

Como complemento a lo anterior, también se comparó la distribución de presión sobre el semiancho de contacto, obtenida mediante la teoría de Hertz y por simulación mediante elemento finito, la gráfica comparativa es la que se muestra en la figura 3.4. La magnitud y ubicación de los esfuerzos cortantes para contacto hertziano, obtenida a partir de la simulación se muestra en la figura 3.5.

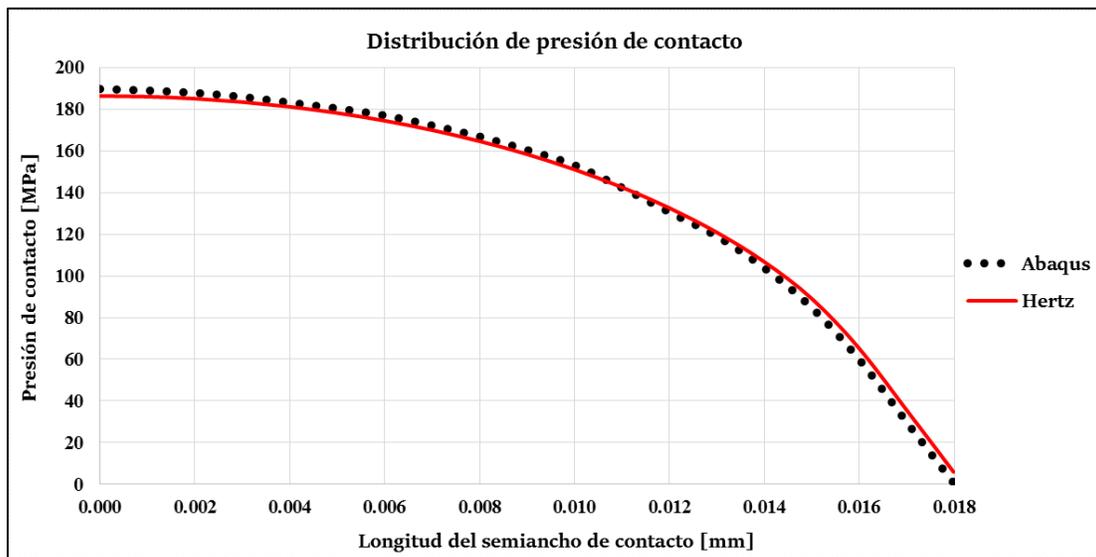


Figura 3.4: Distribución de presión de contacto sobre el semiancho de contacto obtenida por los métodos teórico y de simulación.

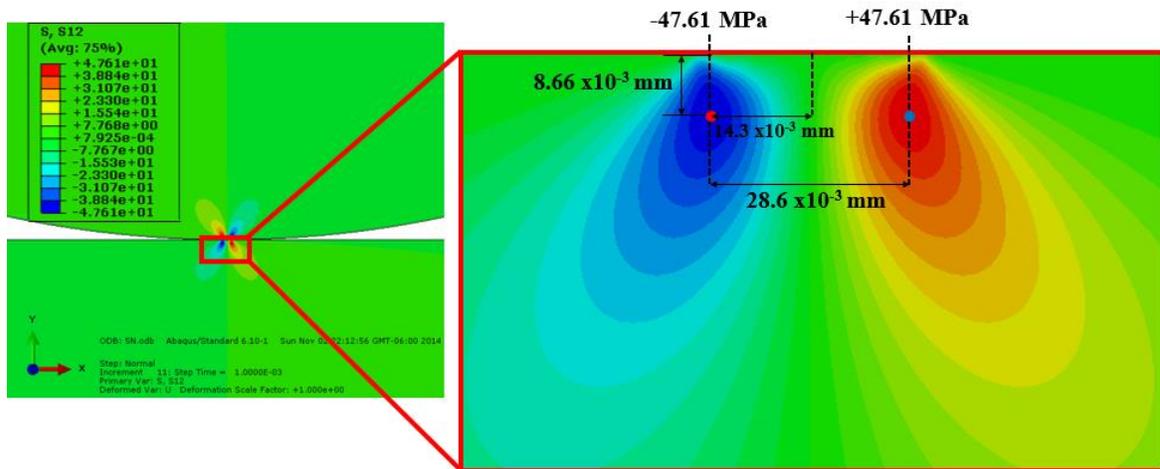


Figura 3.5: Magnitud y ubicación de esfuerzos cortantes máximos (simulación).

La tabla 3.4 muestra la comparación de los resultados mostrados en la figura 3.5, con los que se obtienen mediante la teoría de Bielajev y Palmgren-Lundberg del apartado 2.3.1.

Tabla 3.4: Magnitud y ubicación de esfuerzos cortantes máximos por los métodos teórico y de simulación.

Parámetro	Método teórico	Método de simulación	Diferencia %
Esfuerzo cortante máximo (MPa)	47.61	48.47	1.775 %
Punto de Bielajev (mm)	$8.5372 \times 10^{-3}$	$8.6600 \times 10^{-3}$	1.438 %
Puntos de Palmgren-Lundberg (mm)	$29.0267 \times 10^{-3}$	$28.6000 \times 10^{-3}$	1.470 %

El modelo discreto se encuentra en presencia de fricción estática y cada incremento en la fuerza tangencial que le es aplicada en el segundo paso del análisis, modifica la longitud de la zona con deslizamiento en el área de contacto, dicho parámetro obtenido mediante la situación por elemento finito, se comparó con los valores que se obtienen mediante la teoría establecida por *Mindlin (1953)* en su modelo de contacto tangencial del apartado 2.5. En la figura 3.6 se muestra dicha comparación.

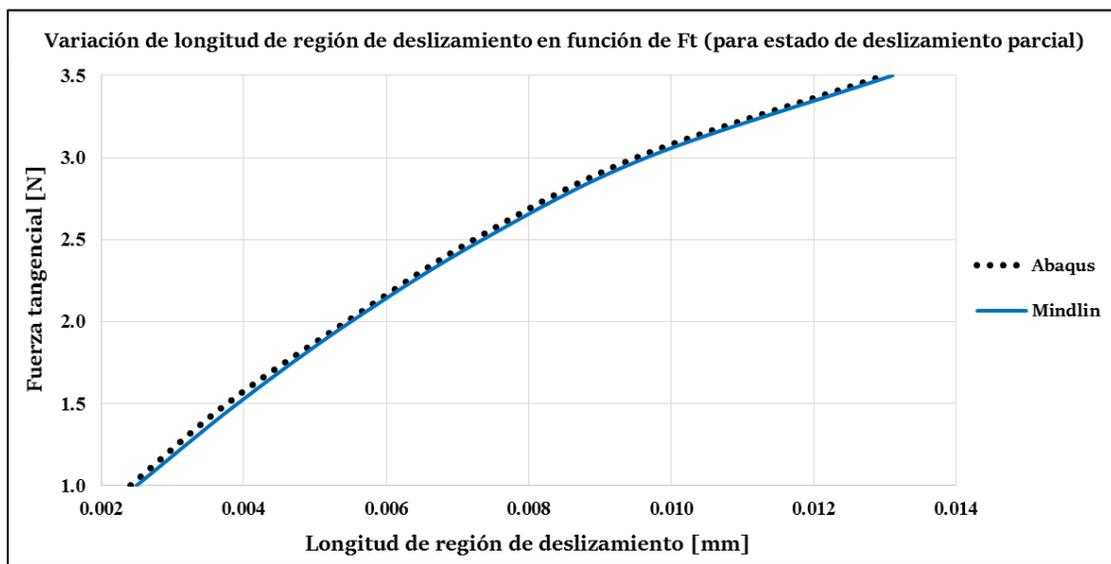


Figura 3.6: Comparación de longitud de región de deslizamiento en función de  $F_t$ , cuando la unión se encuentra en estado de deslizamiento parcial

En este apartado se realizó una comparación entre los resultados obtenidos mediante simulación por elemento finito y los obtenidos mediante la teoría, el propósito de dicha comparación es tener la mayor certeza posible de que los resultados que se obtienen mediante simulación son fiables a pesar de que se presente una diferencia porcentual. Es muy común que se presente una diferencia entre los resultados obtenidos por dos métodos distintos. En el caso de método de simulación por elemento finito, partiendo del hecho de que las condiciones de la frontera y propiedades del material son las correctas, solo resta verificar que el mallado sea el más idóneo para ajustar los resultados numéricos a los teóricos. Como se mencionó en este apartado, el tamaño del mallado puede cambiar mucho el resultado obtenido, pero existe un punto en el cual aunque se continúe refinando la malla, ya no se generaran disminuciones significativas en la diferencia porcentual entre ambos métodos, considerando de esta manera que el modelo discreto es correcto.

### 3.5 ZONA DE INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ DE CONTACTO

Los cuerpos que forman una unión sufren deformaciones elásticas y/o plásticas debido a las fuerzas externas a que se encuentra sometidos; la magnitud, dirección y sentido de dichas deformaciones está influenciada por las restricciones de movimiento, zonas de aplicación de las fuerzas y la rigidez propia del cuerpo, ésta última dada por las propiedades del material y la geometría que presenta el cuerpo.

En la interfaz se presenta la rigidez de contacto, la cual altera el comportamiento de las deformaciones en la cercanía de ésta. En este apartado se realiza un análisis para saber si la influencia de esta rigidez se limita únicamente al borde de contacto o va más allá de éste y se extiende hacia el interior de los cuerpos que forman la unión.

A causa de lo anterior, en este apartado se realiza un análisis que permite hacer una distinción de hasta qué sección del cuerpo superior de la unión es que ejerce influencia la rigidez propia del cuerpo y en qué punto comienza a ejercer influencia la rigidez de contacto. Para ello, se examina el comportamiento del cuerpo superior de la unión presentada en el modelo discreto de la figura 3.3.

La figura 3.7 muestra el cuerpo superior que corresponde a una relación de aspecto  $L/B = 0.5$ , además se encuentran indicados los nodos distribuidos sobre  $L$ , los cuales se ubican en el eje de simetría y son monitoreados para obtener sus desplazamientos en dirección  $X$  y  $Y$  cuando la unión se somete a  $F_n$  y  $F_t$ .

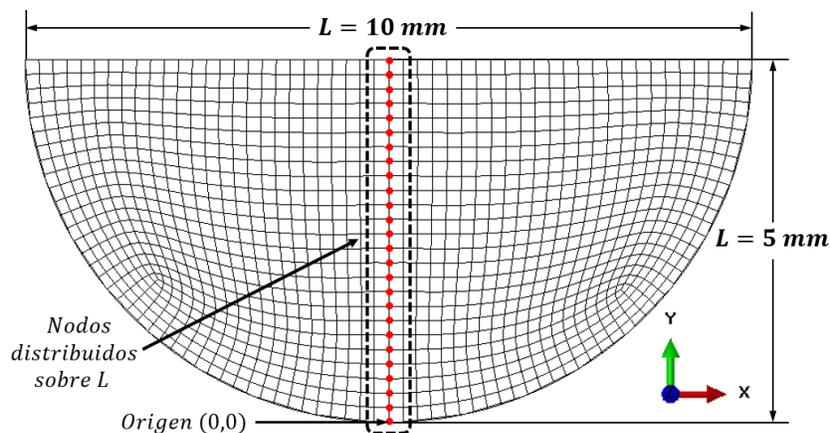


Figura 3.7: Nodos distribuidos sobre la longitud ( $L$ ) del cuerpo superior.

En la figura 3.8 (a) muestra los desplazamientos que cada nodo distribuido a lo largo de  $L$  presenta en dirección  $X$ , es decir, dicha gráfica solo representa el vector de desplazamiento en la dirección  $X$ . En la figura 3.8 (b) se presenta el desplazamiento de los mismos nodos pero en dirección  $Y$ . Como origen  $(0,0)$  para ubicar los desplazamientos en el sistema de coordenadas  $(x,y)$ , se eligió el nodo que se encuentra ubicado justo en el borde de contacto (ver figura 3.7).

Ambas gráficas muestran la posición inicial de los nodos cuando no están sometidas a fuerzas externas, presentando desplazamiento con magnitud igual a 0, posteriormente cuando se aplican las cargas normal y tangencial, los cuerpos que forman la unión presentan deformaciones, las cuales están representadas por las gráficas mencionadas.

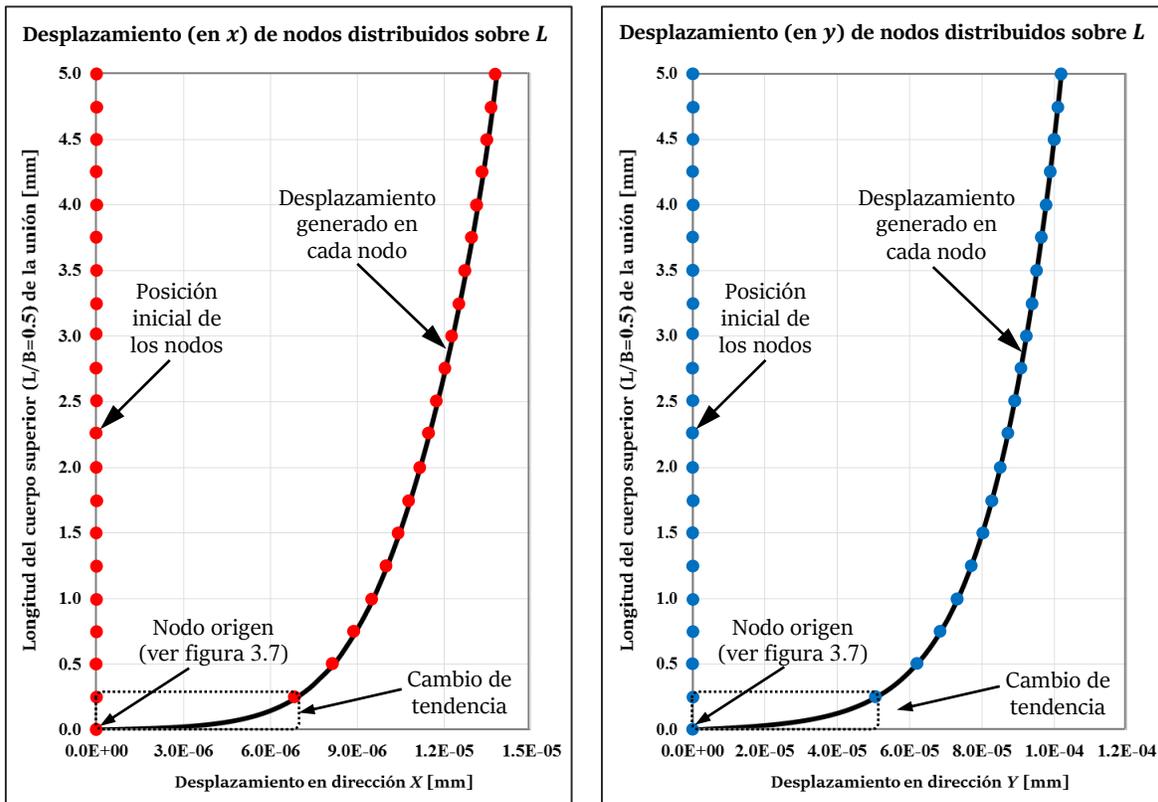


Figura 3.8: Desplazamiento de nodos en: (a) dirección  $X$  y (b) dirección  $Y$ .

Como se indica en las dos gráficas anteriores, el desplazamiento que presentan los nodos cercanos a la interfaz es tal, que generan un cambio en la tendencia que siguen los nodos alejados de la zona de contacto.

La figura 3.9 muestra una gráfica (línea punteada) que resulta de la combinación de los desplazamientos en  $x$  y  $y$ , mostrados individualmente en la figura 3.8, es decir, la gráfica representa el vector de desplazamiento resultante de la línea de nodos distribuidos en  $L$ .

Estando la unión sometida a fuerzas externas, además de la rigidez del cuerpo, la rigidez de contacto ejerce influencia en la deformación de los cuerpos, ésta última se puede interpretar como un desplazamiento de los nodos que integran cada uno de los elementos que forman el modelo discreto.

En la gráfica con línea punteada de la figura 3.9, se observa el comportamiento que presenta el desplazamiento de los nodos distribuidos sobre  $L$  ubicada el eje de simetría del cuerpo superior de la unión. Dicho comportamiento considera la influencia de la rigidez del cuerpo y de la rigidez de contacto.

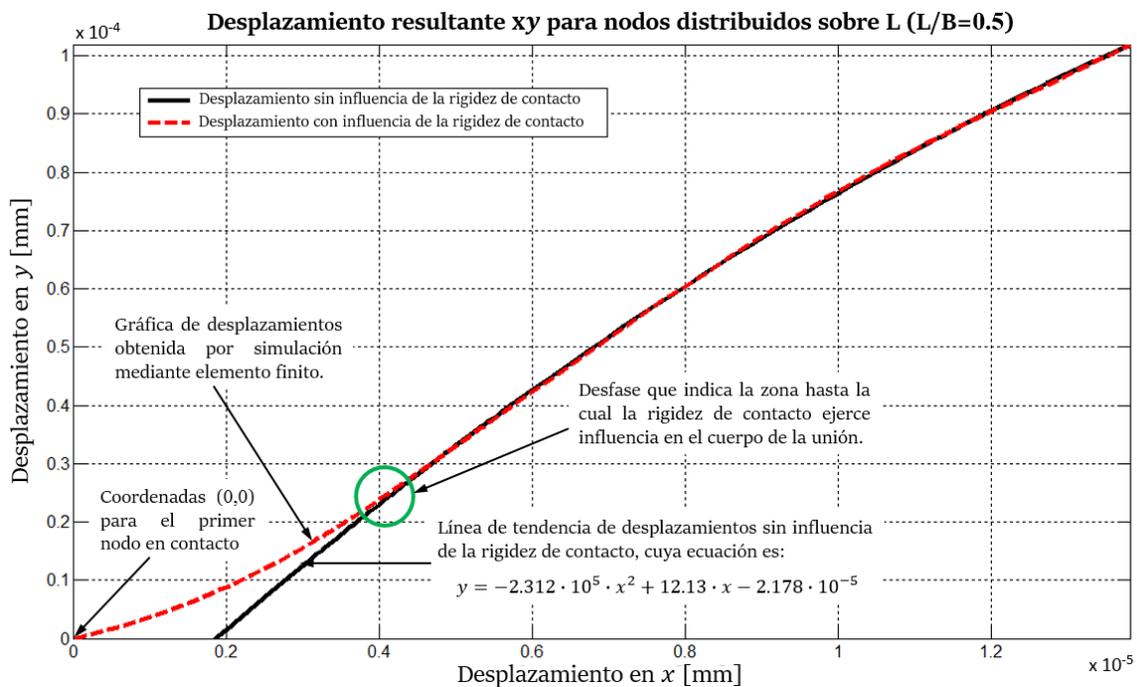


Figura 3.9: Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre  $L$  ( $L/B=0.5$ )

La línea punteada de la figura anterior, es la obtenida mediante simulación por elemento finito y está compuesta por una serie de pares de coordenadas  $(x, y)$ , que representan el desplazamiento resultante de cada nodo. La tendencia que presenta dicha serie se puede expresar mediante una ecuación, el método empleado para lograr que ésta se ajuste lo

más posible a dicho comportamiento es la de los mínimos cuadrados polinomial. Se realizaron varias pruebas hasta lograr la ecuación polinomial que mejor representa el comportamiento de desplazamiento de nodos. En la figura 3.9, se muestra la ecuación de segundo grado que mejor se ajustó, así como la gráfica (línea continua) que la representa.

Para tener certeza sobre el procedimiento empleado, se determinó el coeficiente de correlación ( $R^2$ ), el cual indica el grado de ajuste entre el gráfico de desplazamientos (línea punteada de la figura 3.9) obtenido por simulación y el gráfico de tendencia (línea continua de la figura 3.9) obtenido mediante el método de los mínimos cuadrados. Se asumió que la gráfica de tendencia obtenida por regresión polinomial tiene un grado ideal de correlación con el gráfico de desplazamientos, cuando  $R^2=0.9999$ .

Como se observa, hay una sección en que ambas gráficas presentan paridad, pero cerca de la región de contacto, se presenta un punto de desfase, donde los comportamientos cambian y cuyas coordenadas ( $x, y$ ) de vector de desplazamiento resultante corresponden a un nodo ubicado a una distancia de 0.04 mm, medida a partir del borde de contacto.

Dicho punto se considera el de transición entre la influencia de la rigidez del cuerpo y la rigidez de contacto. Con ello se observa que la región de influencia de la rigidez de contacto, no se limita únicamente al borde de contacto, sino que a partir de éste, se extiende hasta determinada profundidad, es decir, al interior del cuerpo.

Las figuras A.1, A.3, A.5 y A.7 del apéndice A, presentan las gráficas de desplazamientos correspondientes a las relaciones de aspecto ( $L/B$ ) iguales a 0.2, 0.3, 0.4 y 0.6, en las cuales también se aplicó el procedimiento anterior. Como se puede observar, el comportamiento mostrado por cada una de estas relaciones es semejante al obtenido para la relación de aspecto  $L/B = 0.5$  (figura 3.9), la línea de desplazamientos sin influencia del contacto, está dada por una ecuación de segundo grado.

Un dato importante a resaltar, es que todas las relaciones de aspecto coinciden en que 0.04 mm es la profundidad del cuerpo en la ocurre el desfase entre las gráficas de desplazamiento con influencia de la rigidez de contacto y sin influencia de ésta. Siendo hasta dicha profundidad que se considera que influye la rigidez interfacial.

La figura 3.10 se deriva de la figura 3.9 y muestra el desplazamiento de los nodos distribuidos en la sección de  $L$ , correspondiente a la profundidad del cuerpo (0.04 mm) hasta la cual ejerce influencia la rigidez de contacto. Mediante regresión polinomial se obtiene que la ecuación que representa dicho comportamiento, es de segundo grado.

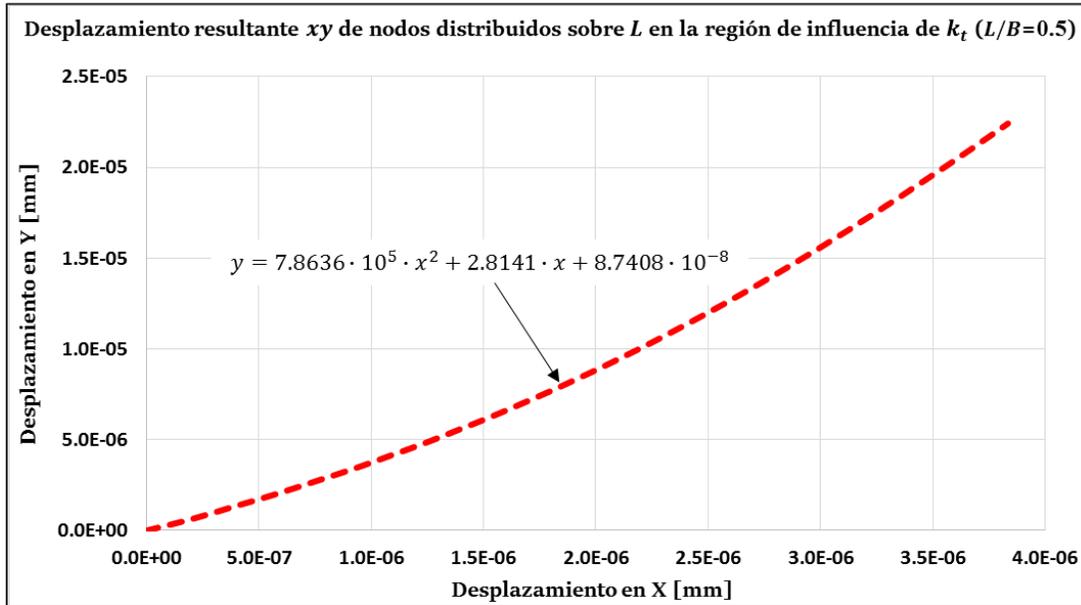


Figura 3.10: Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre  $L$  en la región de influencia de la rigidez de contacto ( $L/B=0.5$ ).

En la figuras A.2, A.4, A.6 y A.8 del apéndice A, se muestran comportamientos homólogos al presentado en la figura 3.10, correspondientes a relaciones de aspecto ( $L/B$ ) iguales a 0.2, 0.3, 0.4 y 0.6. Como puede observarse el comportamiento que describe cada gráfica es el mismo, difiriendo en la magnitud del desplazamiento en función del valor de  $L/B$ .

### 3.6 DEFINICIÓN DE ZONA PARA CÁLCULO DE RIGIDEZ DE CONTACTO

Los datos obtenidos en las gráficas del apartado anterior, permitieron observar que en las proximidades de la zona de contacto hay una región dentro de la cual, el gradiente de deformación se comporta de forma distinta al que presenta el resto del cuerpo. Dicha región queda definida por la longitud de área de contacto y la profundidad de influencia de la rigidez de contacto. La consideración de ésta región es necesaria, ya que de otra

forma los resultados obtenidos serán parcialmente correctos. En la figura 3.11 se puede observar de forma cualitativa la definición del área antes mencionada, la cual servirá para obtener los desplazamientos interfaciales generados en función de las cargas aplicadas ( $F_n$  y  $F_t$ ) y el valor de la relación de aspecto ( $L/B$ ) del cuerpo superior de la unión.

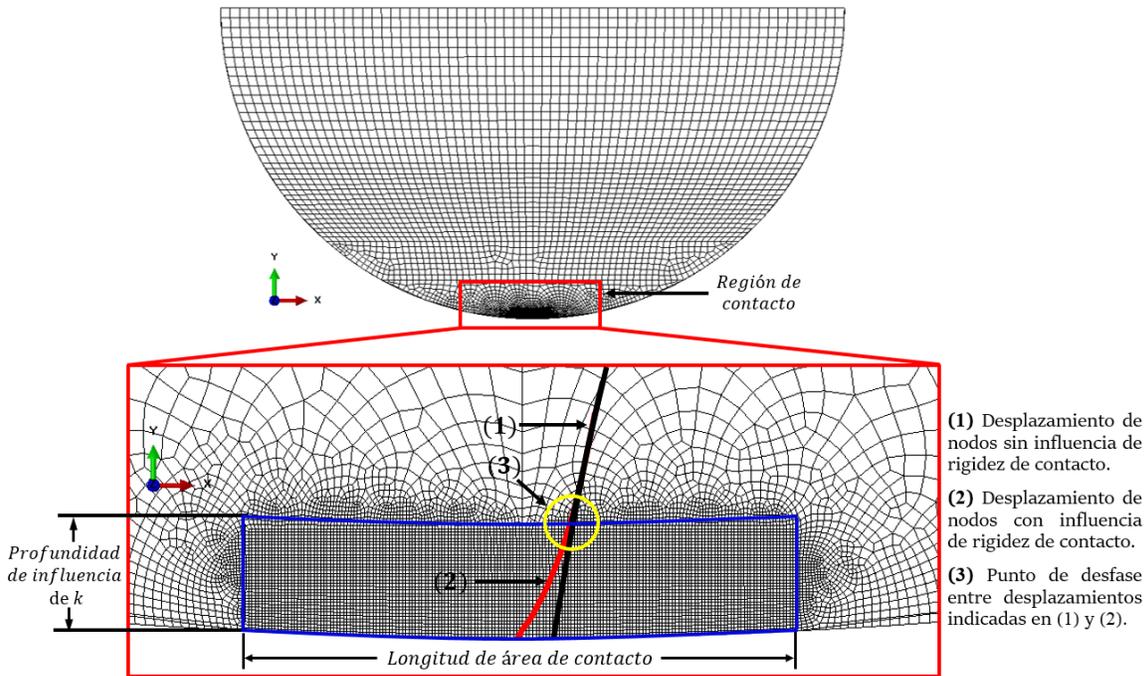


Figura 3.11: Definición de región para monitoreo de desplazamientos interfaciales.

Como se ha mencionado anteriormente, la zona de análisis de la rigidez de contacto no se limita únicamente al borde de contacto; para obtener la rigidez de contacto se toma en cuenta la profundidad hasta la cual ejerce influencia dicha rigidez en los cuerpos en contacto. Es por ello que se considera una región de monitoreo cuyo largo corresponde a la longitud del área de contacto y el ancho corresponde a una profundidad de influencia de  $k$ , la cual se obtiene como se mostró en el apartado 3.5.

Para determinar la rigidez de contacto normal ( $k_n$ ) y tangencial ( $k_t$ ), se emplea el modelo de contacto de resorte lineal (Cundall, 1979) del apartado 2.6, la teoría planteada en éste indica que se obtienen dos rigideces de contacto normal y tangencial parciales, es decir, una para cada cuerpo de la unión (plano inferior y redondo superior), que posteriormente se emplean para obtener una rigidez de contacto total en cada dirección. Conociendo las fuerzas externas  $F_n$  y  $F_t$ , las cuales son variables controlables, es necesario determinar los

desplazamientos interfaciales promedio, tanto en dirección normal ( $x_n$ ) como tangencial ( $x_t$ ) de cada uno de los cuerpos que forma la unión.

Teniendo definida la región para monitoreo de desplazamiento de nodos (ver figura 3.11), se procede a realizar el proceso de análisis por simulación para obtener dichos desplazamientos en  $x$  y  $y$ , para basta únicamente con monitorear los nodos medios y los que se encuentran en la periferia del área de interés, como se muestra en la figura 3.12.

Por cada nodo se obtendrá un desplazamiento, pero se obtiene un promedio de estos en la dirección normal y otro en la tangencial, sin olvidar que esto se aplica individualmente en cada cuerpo de la unión, obteniendo así los parámetros  $x_{n1}$ ,  $x_{n2}$ ,  $x_{t1}$  y  $x_{t2}$ .

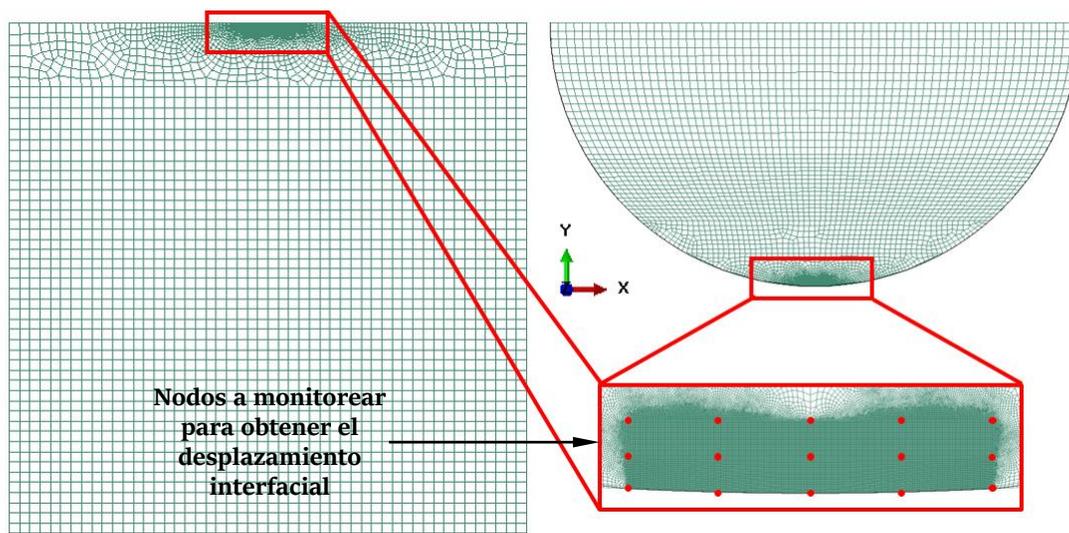


Figura 3.12 Nodos que se monitorean en la región próxima al área de contacto.

El siguiente paso es determinar los parámetros  $k_{n1}$ ,  $k_{n2}$ ,  $k_{t1}$  y  $k_{t2}$ , correspondientes a los cuerpos de la unión mediante las ecuaciones 2.23 y 2.25 del apartado 2, para finalmente obtener las rigideces de contacto normal ( $k_n$ ) y tangencial ( $k_t$ ) totales.

Todo el procedimiento presentado a partir del apartado 3.5, se aplica en cada variación en la relación de aspecto ( $L/B$ ) del cuerpo superior de la unión, para la posterior comparación de los resultados obtenidos en cada una, como se muestra en el capítulo 4.

---

---

# CAPÍTULO 4:

## RESULTADOS

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se obtuvo la zona de influencia de la rigidez de contacto, se mostró la metodología para obtener dicha rigidez en dirección normal y tangencial mediante la teoría presentada en el apartado 2.6 y además se presentaron las características del modelo discreto empleado. En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de un estudio paramétrico, que incluye variaciones en la geometría del cuerpo superior de la unión mecánica (ver tabla 3.1) y en la fuerza tangencial aplicada.

Con el propósito de determinar la influencia que ejerce la geometría de los cuerpos de la unión mecánica sobre su rigidez de contacto, se comparan parámetros como: el tamaño de la zona de contacto y su subdivisión en zonas sin deslizamiento y con deslizamiento, la distribución de presión de contacto y esfuerzos de cizallamiento por fricción, así como la rigidez de contacto en dirección normal y tangencial.

### 4.2 ESTADO DE DESLIZAMIENTO PARCIAL EN EL ÁREA DE CONTACTO

La gráfica de la figura 4.1 muestra la variación de la longitud de área de contacto en función de la relación de aspecto ( $L/B$ ), obtenida para  $F_n$  constante con valor de 5 N (ver apartado 3.4). La longitud de interfaz generada por cada variación geométrica del cuerpo superior de la unión, se mantiene constante en cada incremento de la fuerza tangencial

( $F_t$ ). El incremento de la longitud de área de contacto en función del decremento de la relación  $L/B$ , está dada por una ecuación de segundo grado, lo cual representa la no linealidad en el cambio de un parámetro en función de otro, siendo el incremento en la longitud de  $2a$  mayor que el inmediato anterior por cada decremento en  $L/B$ .

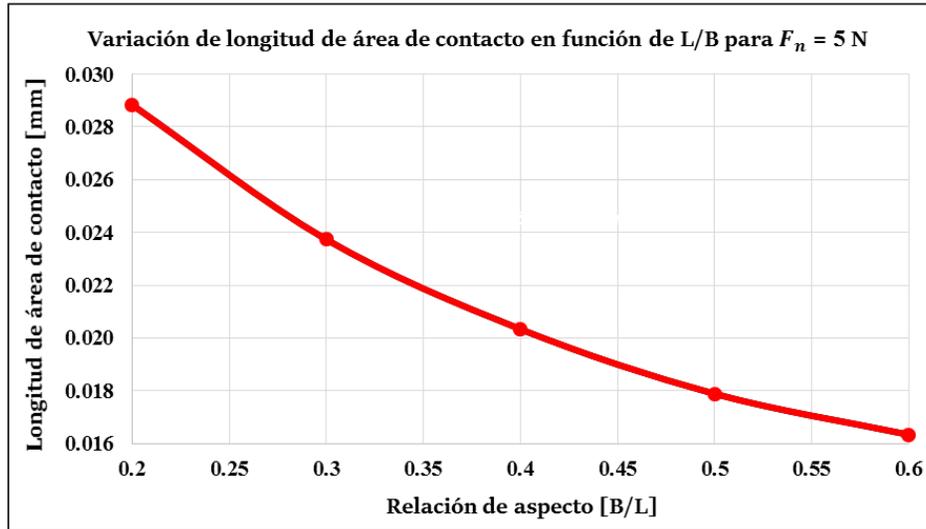


Figura 4.1: Variación de la longitud de área de contacto en función de la relación de aspecto para  $F_n = 5$  N.

La unión con la que se trabaja está sometida a una fuerza normal ( $F_n$ ) constante, si además de ésta, le es aplicada una fuerza tangencial ( $F_t$ ), en el área de contacto se generan dos zonas, una central en la que no se presenta deslizamiento y otra en ambos extremos de la primera, que se encuentra en deslizamiento, dando así lugar al estado de deslizamiento parcial en el área de contacto.

En la figura 4.2 se presenta la variación de longitud de la zona sin deslizamiento en función de  $F_t$ , cuyo rango de valores está entre 0.5 N y 5 N. Como puede observarse, la longitud de la zona sin deslizamiento es mayor mientras más pequeña sea la fuerza tangencial. Si el valor de la fuerza de fricción ( $F_t$ ) supera al de la fuerza de fricción ( $\mu F_n$ ), en la interfaz se generará un estado de deslizamiento total, desapareciendo por completo la zona sin deslizamiento entre las superficies en contacto.

La variación que se observa entre las longitudes de zona sin deslizamiento, correspondiente a cada relación de aspecto, está dada por el radio de contacto que genera el cambio en el valor de  $L$  y el valor de la fuerza normal aplicada.

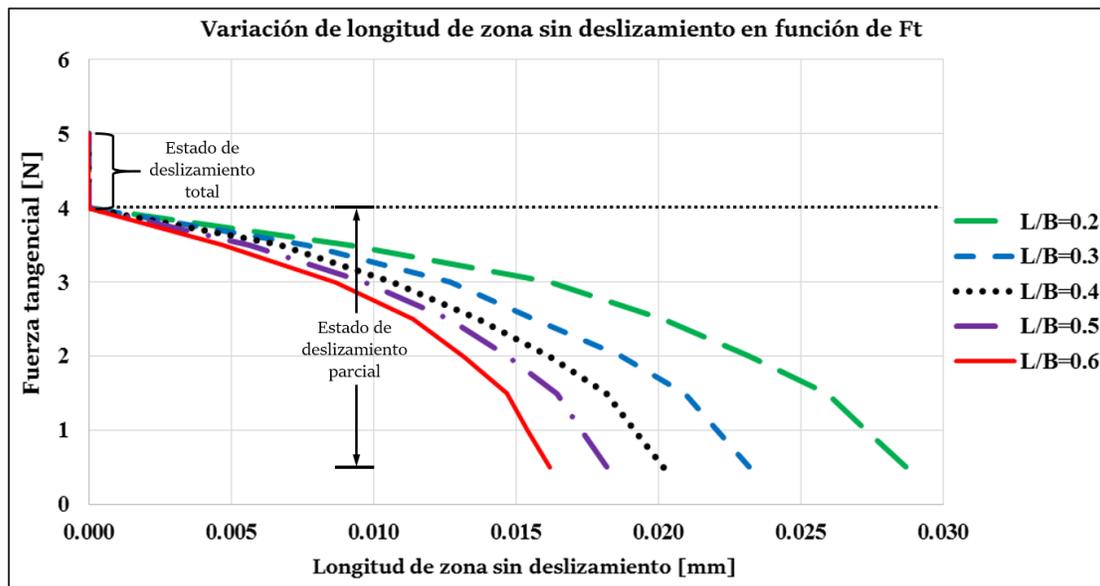


Figura 4.2: Variación de longitud de zona sin deslizamiento en función de  $F_t$ .

La figura 4.3 muestra la variación de la longitud de zona de deslizamiento parcial en función del valor de la fuerza tangencial, obtenida para cada variación en la geometría del cuerpo superior. La relación entre las zonas con y sin deslizamiento consiste en que mientras la longitud de la zona sin deslizamiento disminuye por el incremento de la fuerza tangencial, la longitud de la zona con deslizamiento aumenta hasta que se genera el estado de deslizamiento total en la interfaz de la unión y ambas zonas desaparecen.

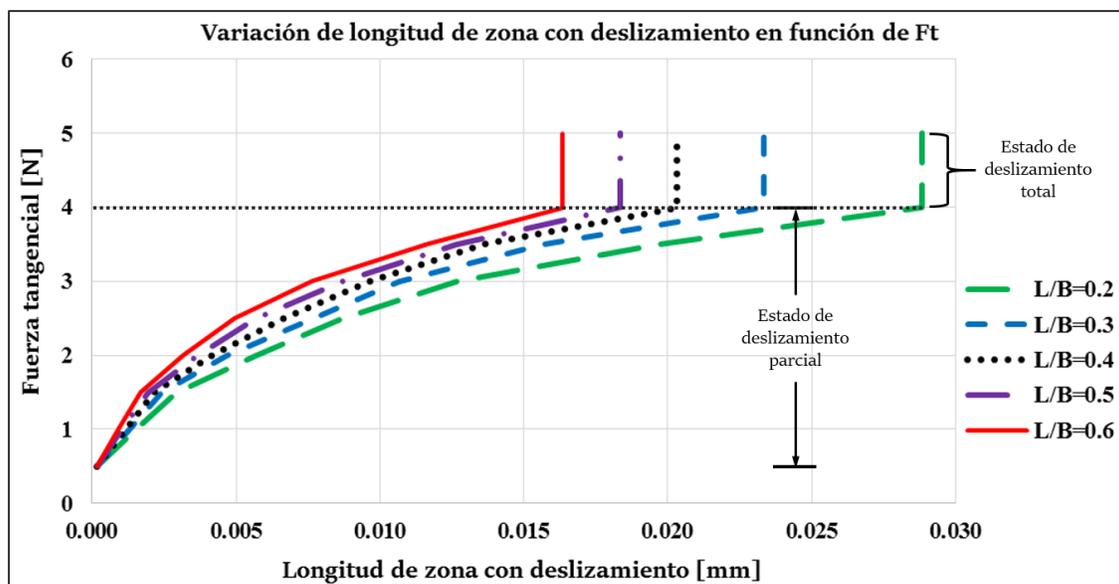


Figura 4.3: Variación de longitud de zona con deslizamiento en función de  $F_t$ .

### 4.3 RIGIDEZ DE CONTACTO

En el capítulo 3 se explicó cómo obtener el desplazamiento producido en la zona de contacto para determinar los parámetros  $k_{n1}$ ,  $k_{n2}$ ,  $k_{t1}$  y  $k_{t2}$  del modelo de contacto de resorte lineal (ver apartado 2.6), para posteriormente obtener la rigidez de contacto normal y tangencial en cada variante de la geometría del cuerpo superior de la unión mecánica, para lo cual se hace uso de las ecuaciones 2.24 y 2.26.

Las pruebas para obtener la rigidez de contacto se llevaron a cabo manteniendo  $F_n$  con un valor fijo en 5 N; para elegir dicho valor se realizaron varias pruebas variando la fuerza normal y se compararon los esfuerzos obtenidos. Se concluyó que 5 N genera grandes esfuerzos en la unión, pero inferiores al límite de fluencia, evitando así la deformación plástica y en consecuencia un comportamiento no lineal en los resultados de las simulaciones realizadas. El valor de  $F_t$  se varió de 0.5 N a 3.5 N con incrementos de 0.5 N.

#### 4.3.1 RIGIDEZ DE CONTACTO NORMAL

La figura 4.4 muestra la rigidez de contacto normal obtenida para las cinco relaciones de aspecto, al compararlas se observa una variación en dicha rigidez, pero individualmente mantienen constante su valor durante cada variación de  $F_t$ .

Como  $F_n$  se mantiene constante, el desplazamiento relativo en  $Y$  entre las superficies en contacto se mantiene fijo y la rigidez de contacto normal resulta constante, además, ésta no es influenciada por  $F_t$ . Lo anterior se ve reflejado en las gráficas de la figura 4.4 mediante una recta para cada variación en la geometría del cuerpo superior de la unión.

No se consideró necesario graficar la rigidez de contacto normal en función del valor de la fuerza normal ( $F_n$ ), ya que al ser ambas junto al desplazamiento relativo interfacial normal constantes solo se obtendría un punto como gráfica y eso no proporciona información relevante para su análisis.

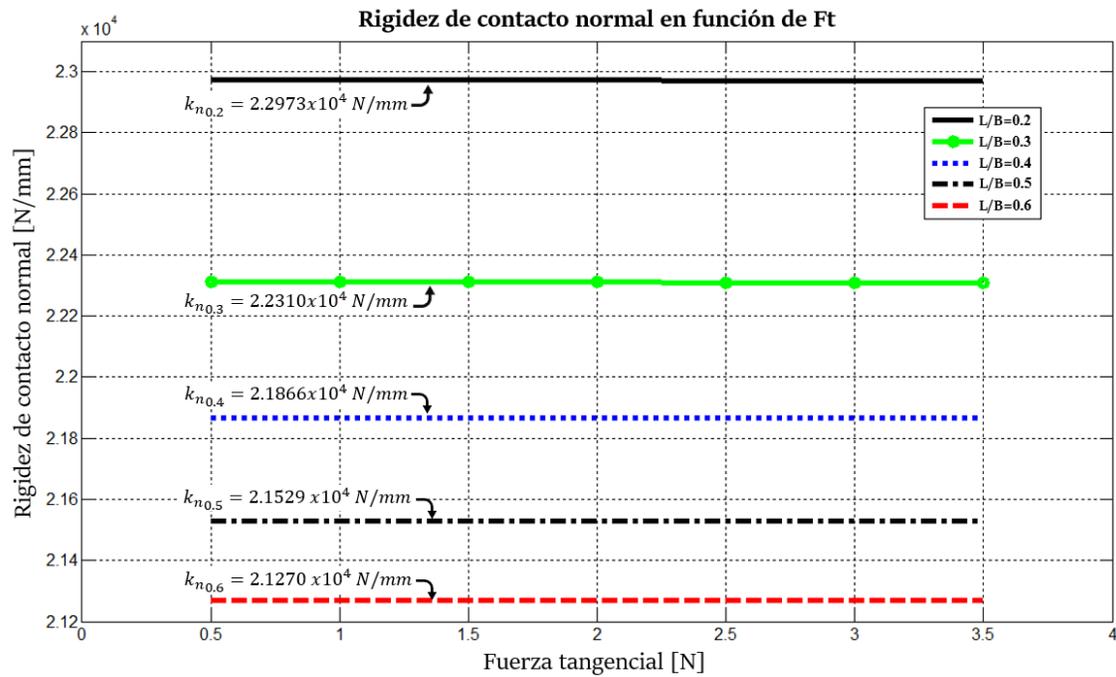


Figura 4.4: Rigidez de contacto normal en función de  $F_t$ , para variación ( $L/B$ ) en el cuerpo superior.

En la figura 4.5 se muestra la tendencia no lineal, que presenta el cambio de rigidez de contacto normal en función de la relación de aspecto  $L/B$ . Se observa que la relación de aspecto de menor valor y que presenta un área de contacto mayor, es la que presenta mayor rigidez de contacto normal.

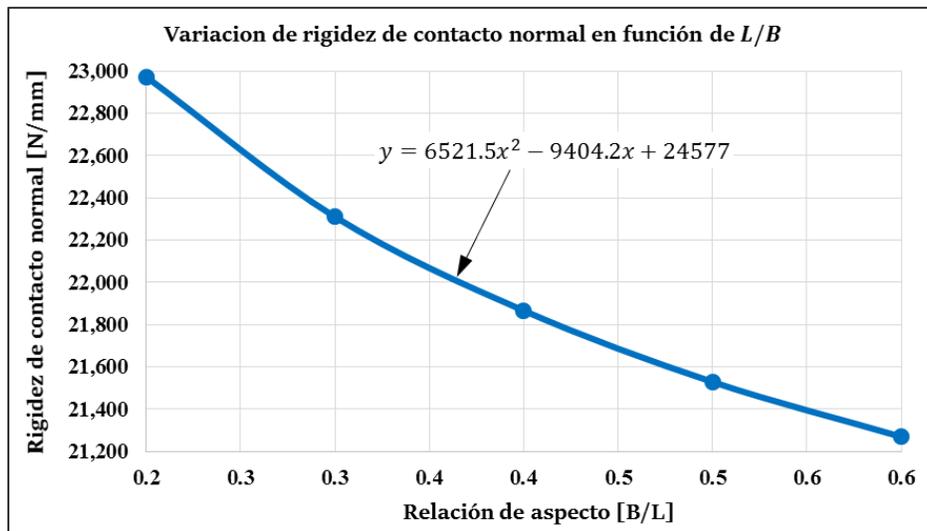


Figura 4.5: Variación de la rigidez de contacto normal en función de la relación de aspecto ( $B/L$ ).

### 4.3.2 RIGIDEZ DE CONTACTO TANGENCIAL

La figura 4.6 muestra el comportamiento fuerza tangencial ( $F_t$ ) vs desplazamiento tangencial ( $x_t$ ) interfacial. El rango de  $F_t$  es desde 0.5 N hasta 3.5 N con incrementos de 0.5 N; el valor máximo de 3.5 N, es cercano al valor de la relación  $\mu F_n$ , la cual corresponde al valor de la fuerza de fricción y cuyo efecto es la oposición al desplazamiento.

La gráfica muestra una variación en la inclinación de la pendiente correspondiente a cada modificación ( $L/B$ ) en la geometría del cuerpo superior de la unión, esto indica que el desplazamiento tangencial generado en la superficie de contacto es distinto en cada variante de  $L/B$  cuando es sometida a la misma fuerza tangencial.

La proporcionalidad en el aumento del desplazamiento tangencial en función del incremento de  $F_t$  no es el mismo en cada variación de  $L/B$ , obteniéndose un ángulo de inclinación distinto en cada una de las pendientes, como se ve en el acercamiento al inicio y al final de estas. Es importante recordar que el comportamiento observado en las gráficas se encuentra en el régimen de deslizamiento parcial dentro del área de contacto.

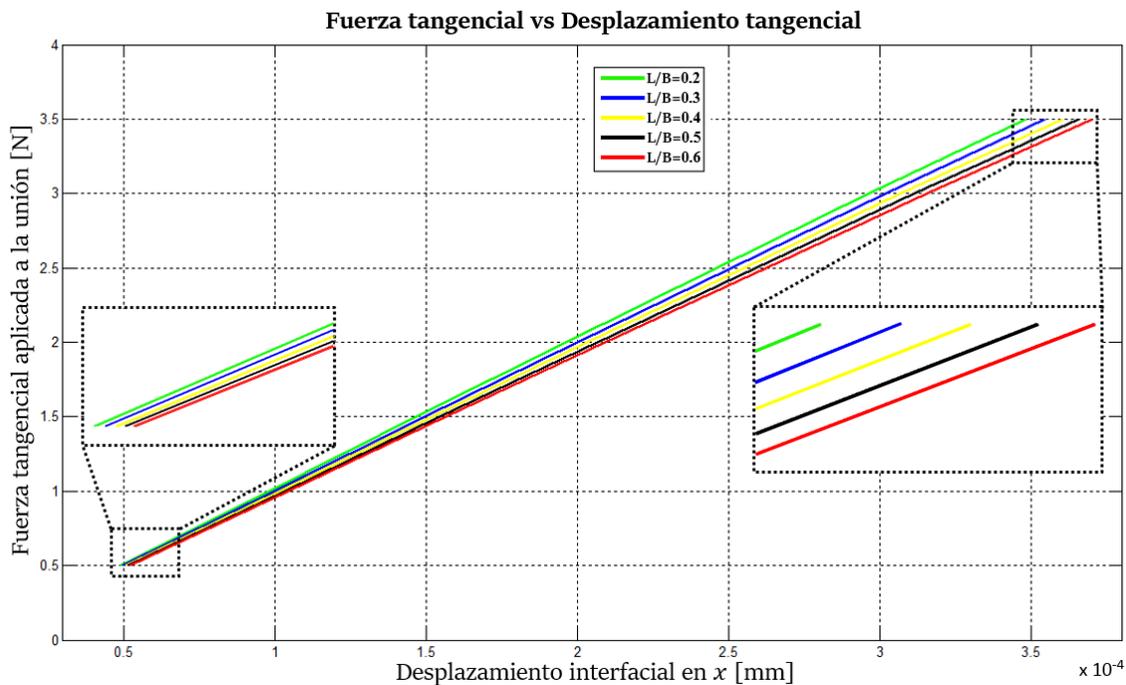


Figura 4.6: Comportamiento fuerza vs desplazamiento tangencial de cada variación en la geometría del cuerpo superior,  $F_t$  varía desde 0.5 N hasta 3.5 N y mantiene en estado de deslizamiento parcial.

Cuando el valor de la fuerza tangencial sobrepasa el valor de la fuerza de fricción dada por la relación  $\mu F_n$ , el área de contacto pasa de un estado de deslizamiento parcial a deslizamiento total. En ese punto deja de haber una pendiente como las mostradas en la figura 4.6 y el comportamiento cambia a una recta horizontal, que indica que valores de fuerza tangencial ( $F_t$ ) superiores a la fuerza de fricción ( $\mu F_n$ ) generarán un deslizamiento total permanente entre los cuerpos de la unión.

En la figura 4.7 se presenta la rigidez de contacto tangencial en función de  $F_t$ , obtenida a partir de los datos presentados en la figura 4.6 para cada variante en la geometría de contacto; el rango de  $F_t$  es desde 0.5 N hasta 3.5 N. Se observa que la rigidez tangencial disminuye a medida que se incrementa la fuerza tangencial aplicada, es decir, un incremento en  $F_t$  genera un mayor desplazamiento tangencial en la zona de contacto, lo cual genera una disminución en la rigidez tangencial.

La rigidez de contacto tangencial no varía de forma proporcional al incremento de la fuerza tangencial, este comportamiento se ve reflejado mediante la curva descrita por la gráfica correspondiente a cada variante en la geometría de contacto. El incremento en  $k_t$  tampoco es proporcional a la disminución del valor de la relación  $L/B$ .

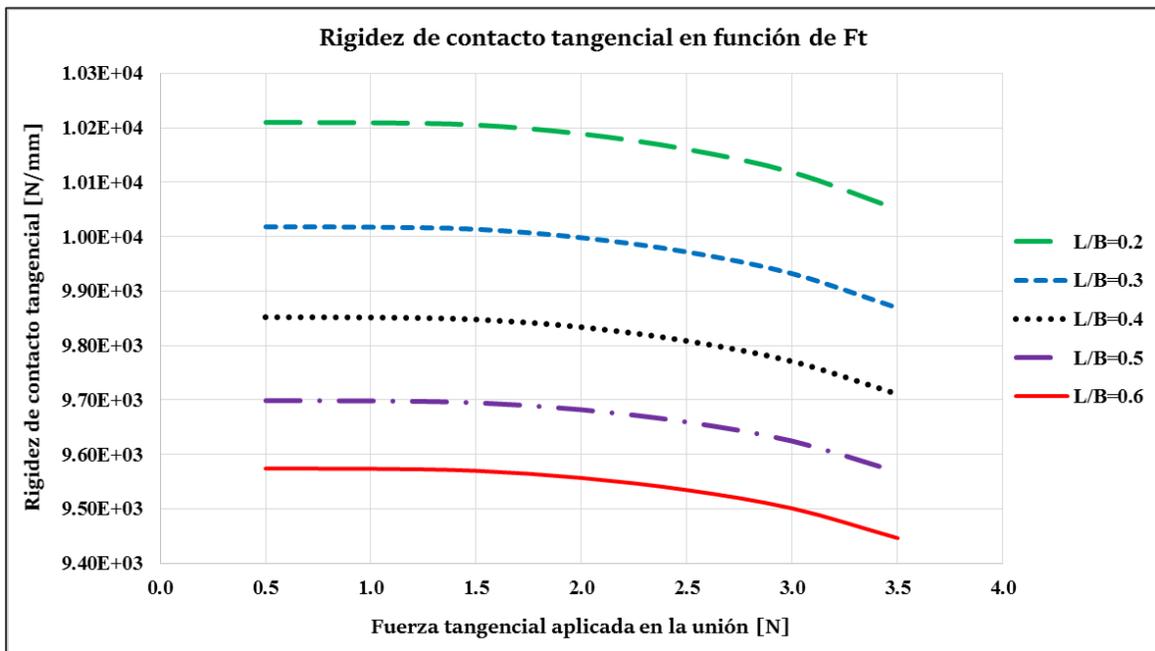


Figura 4.7: Rigidez de contacto tangencial en función de  $F_t$  ( $F_t$  con un rango de 0.5 N hasta 3.5 N).

#### 4.4 DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN DE CONTACTO Y ESFUERZOS DE CIZALLAMIENTO POR FRICCIÓN EN LA INTERFAZ

Las figuras B.1 hasta B.5 muestran la distribución de presión de contacto que se genera en la unión para las relaciones de aspecto 0.2 hasta 0.5. Como es de esperarse, para una  $F_n$  constante, la presión de contacto se mantiene constante independientemente del valor de  $F_t$  y sin importar si la unión se mantiene en estado de deslizamiento parcial cuando  $F_t \leq \mu F_n$  o deslizamiento total si  $F_t > \mu F_n$ . Para el caso de las pruebas realizadas en éste trabajo, en el rango de 0.5 N a 3.5 N se tiene deslizamiento parcial y de 4 N a 5 N la unión presenta deslizamiento total.

En la figura 4.8 Se muestra el comparativo de distribución de presión de contacto en función del de relación de aspecto que presenta la geometría del cuerpo superior de la unión. Como se había mencionado anteriormente, la presión de contacto no varía en función del valor de  $F_t$ , pero si presenta notables variaciones en función del valor de  $L/B$ .

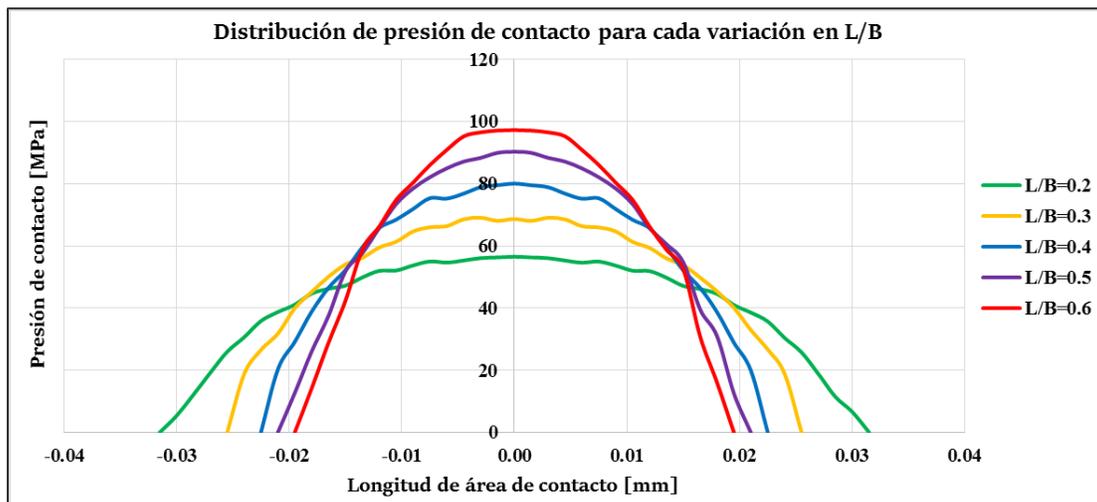


Figura 4.8: Distribución de presión de contacto de cada variante de  $L/B$ .

La figura 4.9 muestran la distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción (esfuerzos cortantes) en función del valor de la fuerza tangencial aplicada a la unión, la relación de aspecto que se muestra es  $L/B = 0.5$ . Como se observa en la figura anterior, la fuerza tangencial genera variaciones en los esfuerzos de cizallamiento por fricción, cambiando la magnitud de la distribución de dichos esfuerzos en cada incremento de  $F_t$ .

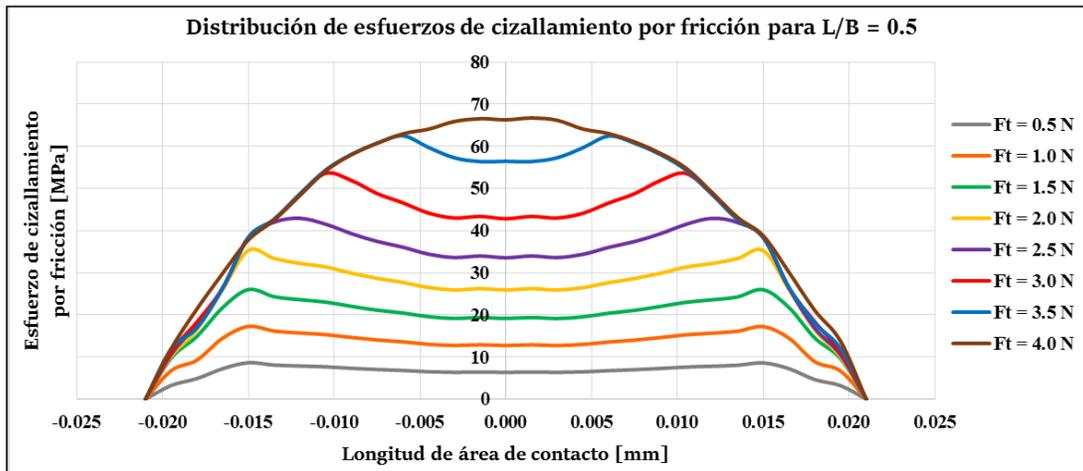


Figura 4.9: Distribución esfuerzos de cizallamiento por fricción ( $\mu = 0.74$ ) para  $L/B=0.5$ .

La distribución de estos esfuerzos correspondiente a las relaciones de aspecto con valor 0.2, 0.3, 0.4 y 0.6 se presentan en la figuras B.6 a B.9 respectivamente. La figura 4.10 muestra la de distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción obtenida en cada variación de la relación de aspecto ( $L/B$ ) al aplicar una fuerza tangencial  $F_t = 0.5$  N. Las zonas donde el esfuerzo de cizallamiento es más elevado, corresponden a la zona de transición entre la zona con deslizamiento y la zona sin deslizamiento.

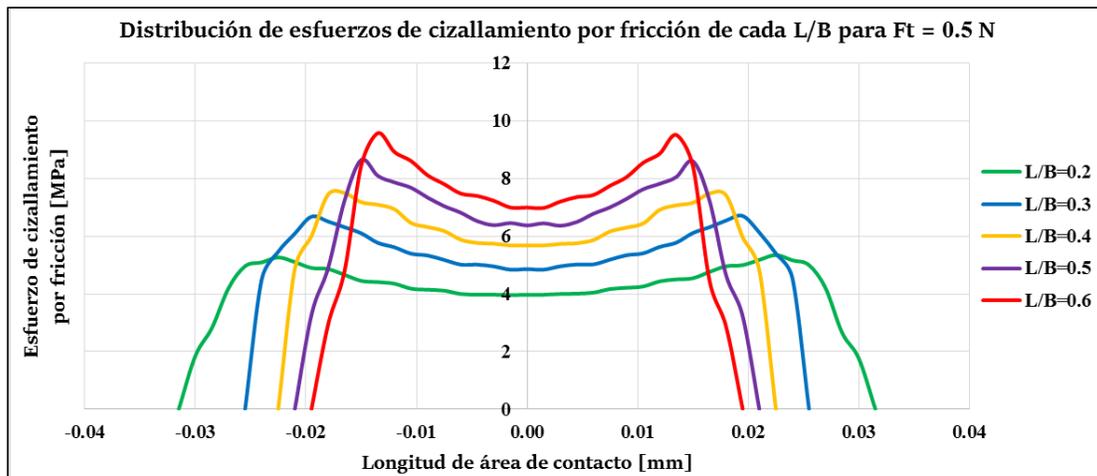


Figura 4.10: Distribución esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada geometría para  $F_t = 0.5$  N.

Las figuras B. 10 a B. 14 muestran la distribución de esfuerzos de cizallamiento en función de la relación de aspecto para valores de  $F_t$  entre 1 N y 3 N; se puede observar cómo va evolucionando la magnitud y distribución de los esfuerzos, mostrando que estos se elevan en función del incremento en el valor de  $L/B$  y  $F_t$ . A medida que  $F_t$  va incrementando, la

región correspondiente a los esfuerzos de cizallamiento que se encuentra distribuida en la zona sin deslizamiento tiende a cerrarse, coincidiendo esto con la disminución de la longitud de dicha zona. Si se compara la distribución de la figura 4.10 correspondiente a  $F_t = 0.5$  N y la de la figura 4.11 correspondiente a  $F_t = 3.5$  N (valor cercano al de  $\mu F_n$ ), observándose un elevado cambio generado en las distribuciones.

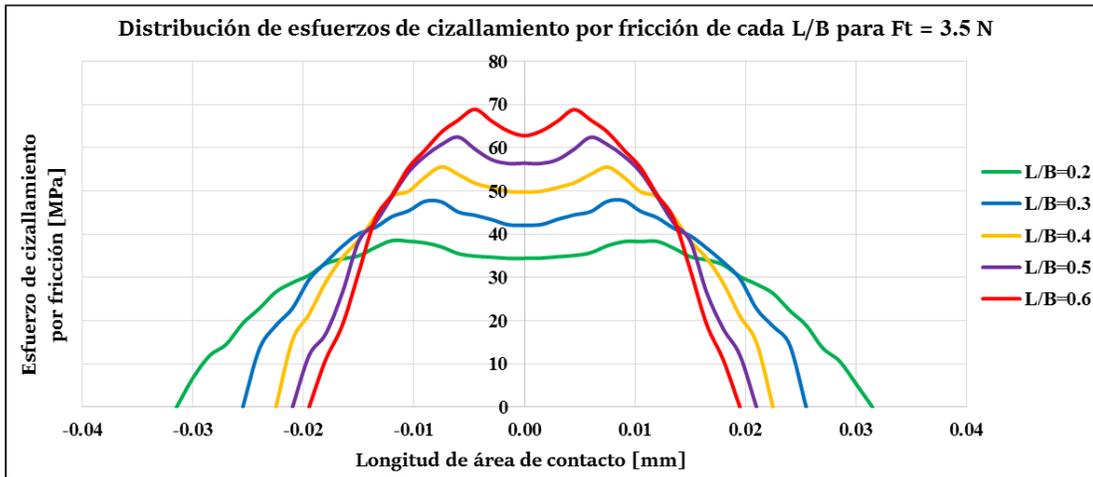


Figura 4.11: Distribución esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada geometría para  $F_t = 3.5$  N.

Observando las figuras 4.12, 9.B a 13.B y 4.13 se observa cómo mientras  $F_t$  se acerca más al valor de  $\mu F_n$ , la distribución de esfuerzos tiende a volverse uniforme. En el momento en que  $F_t$  supera la fuerza de fricción el estado de deslizamiento parcial cambia a deslizamiento total, las figuras 4.12 y B.15 muestran que la distribución de esfuerzos sobre el ancho del área de contacto, es uniforme y constante cuando  $F_t > \mu F_n$ .

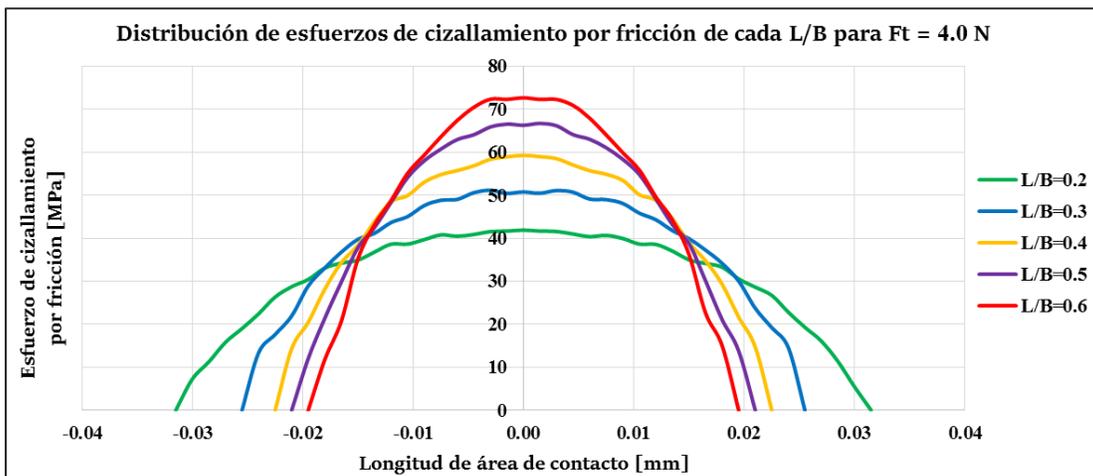


Figura 4.12: Distribución esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada geometría para  $F_t = 4.0$  N.

---

---

# CAPÍTULO 5:

## *DISCUSIÓN DE RESULTADOS*

---

---

### 5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta una discusión sobre los resultados mostrados en el capítulo 4, esto es el precedente para las posteriores conclusiones y recomendaciones que podrán ser útiles para trabajos futuros sobre el tema mismo tratado en esta tesis o afines.

### 5.2 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

- **5.2.1 Estado de deslizamiento parcial en el área de contacto:** la figura 4.1 muestra la variación de la longitud de área de contacto en función del valor de  $L/B$ , correspondiente a la geometría de contacto superior de la unión. Cuando es aplicada  $F_t$ , en dicha área de contacto se produce un estado de deslizamiento parcial ya que en ella se generan dos zonas, una sin deslizamiento y otra con deslizamiento en los extremos de la primera, la variación de ambas zonas en función de la  $F_t$ , se muestra en las figuras 5.1 y 5.2 respectivamente.

En el apartado 3.4 se realizó la verificación de la longitud de la zona de deslizamiento parcial para la geometría de contacto  $L/B = 0.5$ ; para ello, se compararon los resultados numéricos obtenidos en Abaqus, con los resultados analíticos obtenidos mediante la relación establecida por *Mindlin* y *Deresiewicz (1953)* en su modelo de contacto tangencial, obteniéndose una diferencia porcentual baja y asumiendo los resultados como aceptables para su análisis.

Teniendo verificado el valor de las longitudes del ancho de contacto y de la zona de deslizamiento parcial, no hubo necesidad de verificar la longitud de la zona de sin deslizamiento, asumiendo que su valor es correcto, ya que equivale a la diferencia del ancho de contacto menos dos veces el ancho de la zona de deslizamiento parcial.

Si bien la relación establecida por Mindlin y Cattaneo solo aplica para contacto cilíndrico, es decir, solo para  $L/B = 0.5$ , los resultados numéricos del resto de las relaciones de aspecto son confiables, ya que las condiciones empleadas son las mismas que las usadas para la unión con  $L/B = 0.5$  en el cuerpo superior de la unión.

Las dos siguientes gráficas 3D presentan la relación de  $L/B$  y  $F_t$  con la longitud de zona sin deslizamiento (figura 5.1) y la longitud de zona con deslizamiento (figura 5.2). La figura 5.1 muestra que a medida que la fuerza tangencial incrementa, la longitud de la zona sin deslizamiento tiende a reducirse a cero, desapareciendo por completo en el momento en que  $F_t$  supera el valor de la fuerza fricción, dada por la relación  $\mu F_n$ , cuando esto sucede se genera el deslizamiento total entre los cuerpos de la unión, tal y como se indicó en la figura 4.2.

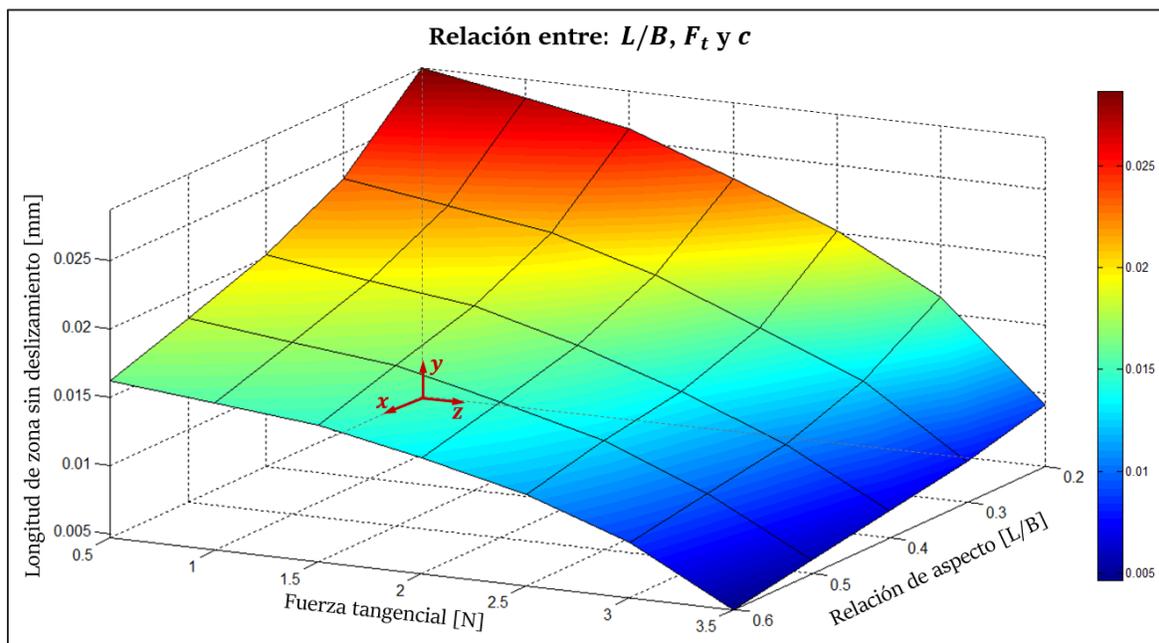


Figura 5.1: Relación entre  $L/B$ ,  $F_t$  y longitud de zona sin deslizamiento.

En el caso de la zona con deslizamiento, como se aprecia en la figura 5.2, el comportamiento es inverso al de la zona sin deslizamiento, ya que su longitud aumenta con el incremento de  $F_t$  hasta desaparecer debido al cambio de estado de deslizamiento parcial al de deslizamiento total cuando  $F_t > \mu F_n$ , como se observó en la figura 4.3. La longitud de la zona sin deslizamiento disminuye y la de la zona con deslizamiento aumenta, ambas en función del incremento de  $F_t$ .

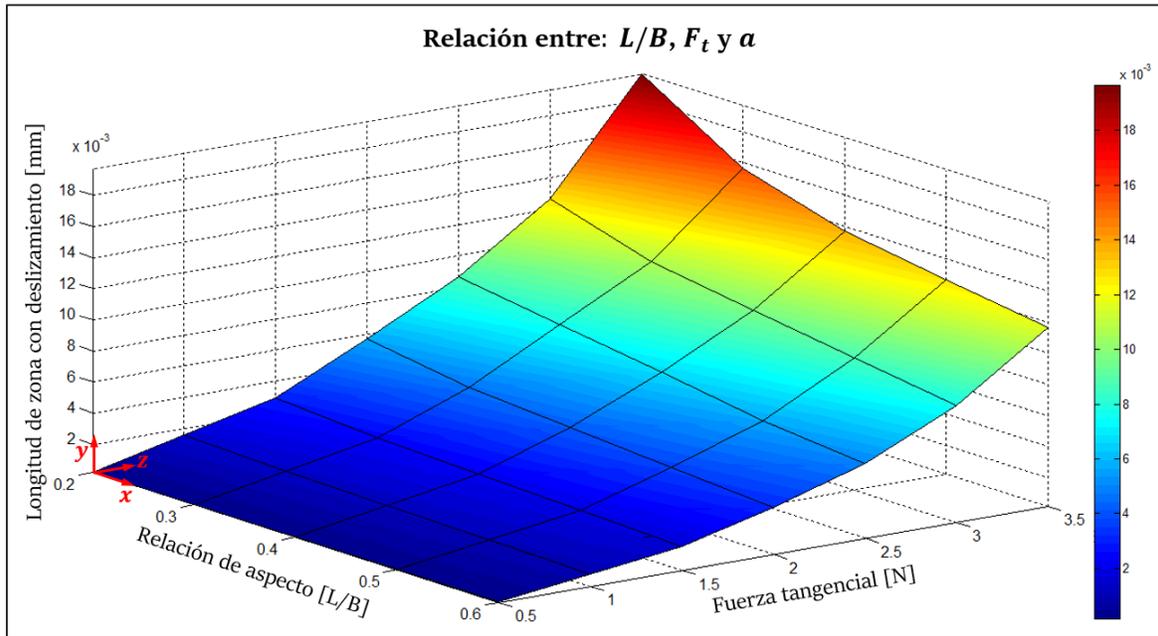


Figura 5.2: Relación entre  $L/B$ ,  $F_t$  y longitud de zona con deslizamiento.

La subdivisión en zonas sin deslizamiento y con deslizamiento se presenta en el área de contacto mientras  $F_t$  no supere el valor de fuerza de fricción, ya que esto no permite la transición al estado de deslizamiento total entre los cuerpos en contacto. El decremento en la rigidez de contacto tangencial, coincide con la disminución en la longitud de la zona sin deslizamiento e incremento en la zona con deslizamiento. Mientras mayor sea la rigidez de contacto tangencial, menor es la longitud en la zona con deslizamiento en la interfaz y más lejos se está de generarse deslizamiento total.

Conocer la distribución de las zonas con y sin deslizamiento en régimen de deslizamiento parcial, permite ubicar las posibles zonas susceptibles a presentar fallas como lo son las fisuras, así como el estado de esfuerzos en dichas zonas.

- **5.2.2 Rigidez de contacto normal:** a partir del análisis que condujo a la obtención de las gráficas de desplazamientos resultantes 3.10 y A.1 hasta A.4, se observó que mientras mayor sea el valor del parámetro  $L$  de la relación de aspecto  $L/B$ , mayor será el desplazamiento interfacial en las direcciones  $x$  y  $y$ .

Con base en la afirmación anterior y considerando la ecuación (2.23), empleada para determinar la rigidez contacto normal, la tendencia en los resultados mostrados en la figura 4.5 para cada variación en la geometría de contacto, son los esperados. El valor de la rigidez de contacto normal se mantiene constante, ya que  $F_n$  se mantiene constante y  $F_t$  no ejerce influencia sobre dicho valor, como se muestra en la figura 4.4; por lo tanto, el incremento o disminución de  $k_n$  está en función de  $F_n$  y la rigidez propia de la geometría del cuerpo, cuya variación está en función del valor de  $L/B$ .

- **5.2.3 Rigidez de contacto tangencial:** Mediante un diagrama de ciclo de histéresis es posible determinar la rigidez de contacto tangencial en la interfaz de una unión mecánica; esta rigidez está dada por la pendiente inicial de dichos ciclos (ver figura 2.17); el análisis cuasiestático realizado en esta tesis, permitió obtener esa pendiente sin necesidad de hacer una análisis dinámico para obtener  $k_t$  a partir de ciclos de histéresis. La figura 4.6 muestra las pendientes resultantes como respuesta al comportamiento fuerza vs desplazamiento tangencial, cada una de éstas corresponde a cada variación en el valor de  $L/B$  de la geometría superior de la unión, el rango de la fuerza tangencial ( $F_t$ ) aplicada es tal que la zona de contacto de la unión se encuentra en estado de deslizamiento parcial.

Mientras mayor sea el valor de  $L/B$ , mayor será el desplazamiento en dirección  $x$  (tangencial) generado por  $F_t$ , esto coincide con que a mayor valor de  $L$  en la relación de aspecto, menor rigidez presenta el cuerpo, con lo cual presenta mayor deflexión en dirección  $x$ . Con base en ello se asume que el comportamiento del desplazamiento interfacial sobre  $x$  en función  $L/B$ , mostrado en la figura 4.6, es correcto.

Mindlin y Deresiewicz, (1953), establecieron una relación que permite determinar  $k_t$  únicamente para el contacto entre dos esferas. Sin embargo, ésta permite obtener el comportamiento que tiene dicha rigidez en función de  $F_t$  aplicada, observando que a medida que se incrementa  $F_t$ ,  $k_t$  disminuye haciéndolo de forma no proporcional. Esta tendencia es mostrada mediante una curva cuando es graficada; dicho comportamiento es el mismo que se obtiene en la gráfica de la figura 4.7, la cual muestra el valor de la rigidez tangencial en función de  $F_t$  obtenida para cada relación de aspecto ( $L/B$ ). Al igual que con  $k_n$ , la rigidez de contacto tangencial es mayor cuando el cuerpo superior de la unión tiene mayor rigidez como consecuencia del valor de relación de aspecto  $L/B$  que presenta. A medida que el valor de dicha relación disminuye el incremento de rigidez tangencial es mayor al inmediato anterior, esto se debe al cambio no proporcional en la rigidez propia del cuerpo.

Todo lo comentado sobre la rigidez de contacto tangencial, se encuentra resumido en la gráfica 3D de la figura 5.3, la cual permite visualizar de forma más clara la influencia que un parámetro ejerce sobre otro, observándose que si  $F_t$  es constante, a menor valor de relación  $L/B$  del cuerpo en contacto, mayor  $k_t$  presentara la unión, pero ésta irá en decremento si la fuerza tangencial aumenta.

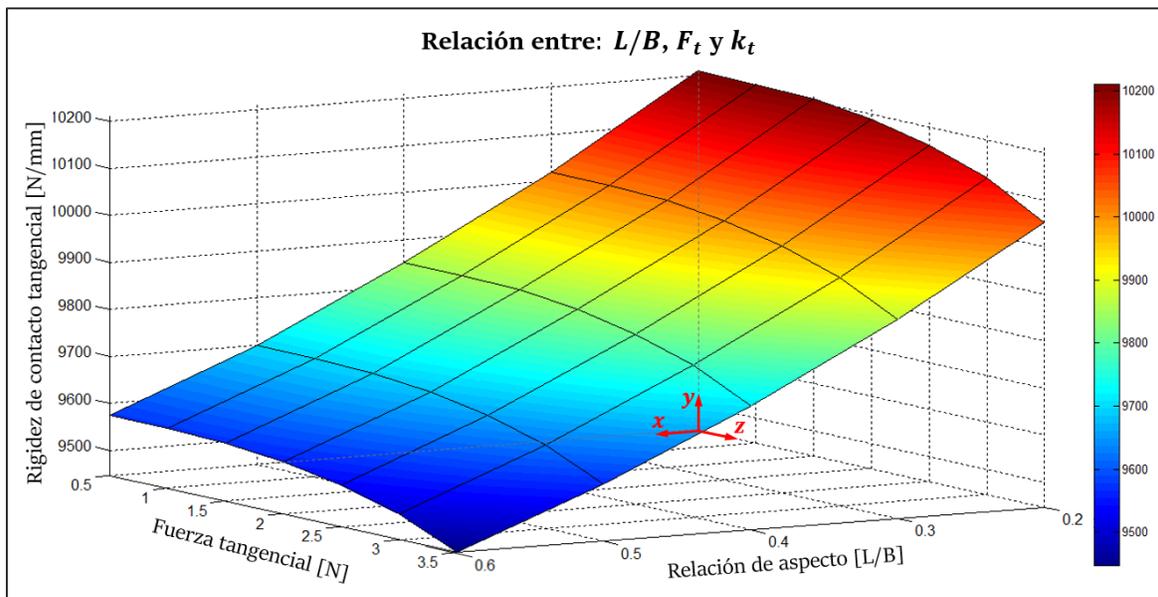


Figura 5.3: Gráfica de superficie de la relación entre  $L/B$ ,  $F_t$  y  $k_t$ .

- 5.2.4 Presión de contacto y esfuerzos de cizallamiento:** La figura 5.4 muestra el valor de la presión de contacto ( $\rho_c$ ) en función de la relación de aspecto ( $L/B$ ) y la fuerza tangencial ( $F_t$ ), considerando que  $F_n$  es constante, la tendencia obtenida es la esperada, ya que la presión de contacto aumenta en función del incremento en el valor de la relación de aspecto  $L/B$  y además, el incremento en la fuerza tangencial no ejerce influencia sobre ésta, como se observa en las figuras B1 a B.5. Por lo tanto, la presión de contacto varía únicamente en función de la variación en la fuerza aplicada en dirección normal ( $F_n$ ) y la relación de aspecto, la cual al cambiar el tamaño de la zona de contacto, cambia la magnitud de concentración de esfuerzos.

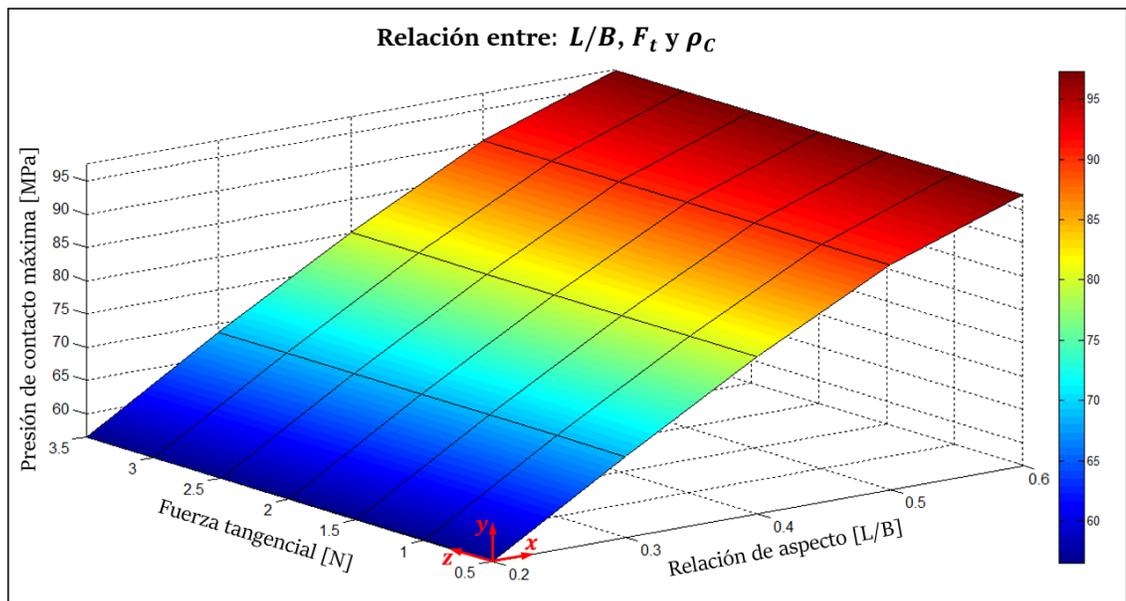


Figura 5.4: Presión de contacto en función de  $L/B$  y  $F_t$ .

La figura 5.5 muestra el valor de los esfuerzos máximos de cizallamiento ( $\tau$ ) de las distribuciones sobre el área de contacto comparadas en las figuras 4.11 y B.5 a B.8. El valor de los esfuerzos de cizallamiento se muestra en función de  $L/B$  y  $F_t$ . Se observa que mientras mayor sea el valor de la relación de aspecto, mayor es el esfuerzo de cizallamiento generado, este se debe que se presenta una menor área de contacto y por lo tanto, mayor concentración de esfuerzos generando una mayor deformación lateral en la zona de contacto, así mismo, el incremento en la fuerza tangencial genera un incremento en dichos esfuerzos, ya que mientras mayor sea  $F_t$ , mayor será la fuerza interna que se desarrolle en la zona de contacto de la unión como respuesta.

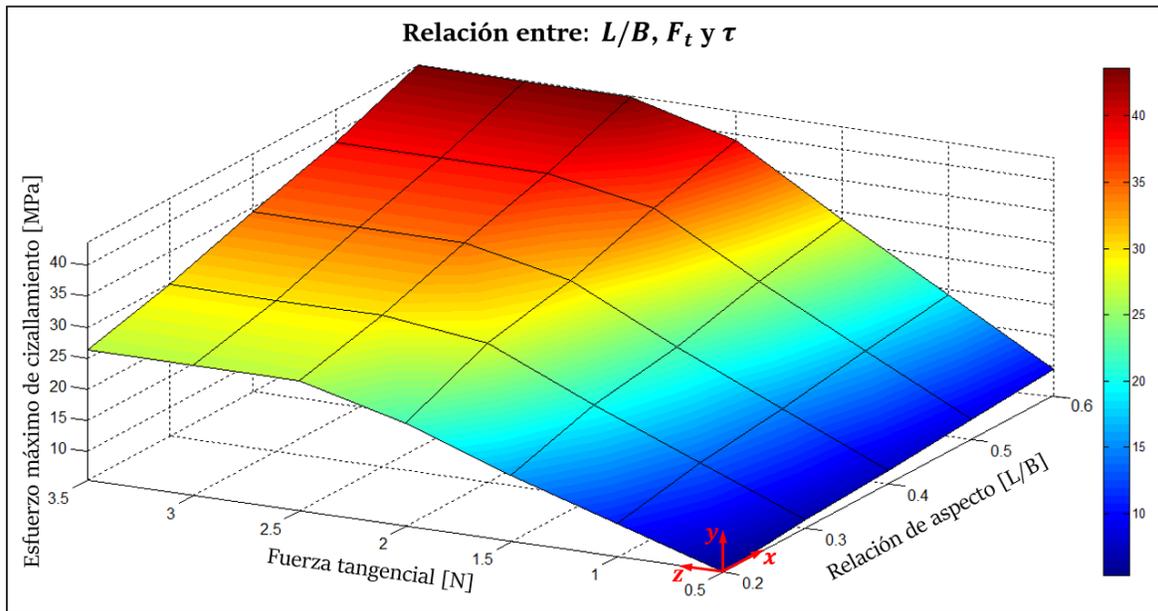


Figura 5.5: Esfuerzo de cizallamiento máximo en función de  $L/B$  y  $F_t$ .

- 5.2.5 Rigidez de contacto tangencial y esfuerzos interfaciales en función de  $L/B$  para distintos  $\mu$ :** En el capítulo 4 se presentó la rigidez de contacto en dirección normal y tangencial, así como la distribución de presión de contacto y esfuerzos de cizallamiento para cada variación de  $L/B$  en la unión y el incremento en  $F_t$ , todo esto obtenido para un coeficiente de fricción igual a 0.74; ya que el coeficiente de fricción puede variar, también se realizó un análisis paramétrico de la unión para coeficientes de fricción iguales a 0.15 y 0.5, los resultados se muestran en el apéndice C.

Si a la misma relación de aspecto de la unión se le modifica  $\mu$ , la rigidez de contacto normal mantiene el mismo valor, con esto se intuye que  $\mu$  no influye en el comportamiento en dirección normal. Caso contrario es la dirección tangencial, ya que la misma  $L/B$  presenta un decremento en el valor de la rigidez de contacto tangencial si  $\mu$  tiene un menor valor. Esta variación se debe a que mientras menor sea el valor de  $\mu$ , menor será la oposición que la interfaz de la unión ofrezca al desplazamiento relativo en dirección  $x$  entre los cuerpos en contacto. En la figura 5.6 se presenta la rigidez de contacto tangencial y la influencia que ejercen sobre ésta, tanto  $\mu$  como el

valor de la relación de aspecto ( $L/B$ ) del cuerpo superior de la unión para un valor de  $F_t = 0.5$  N, que es en el cual coinciden los incrementos aplicados en las pruebas con distinto coeficiente de fricción.

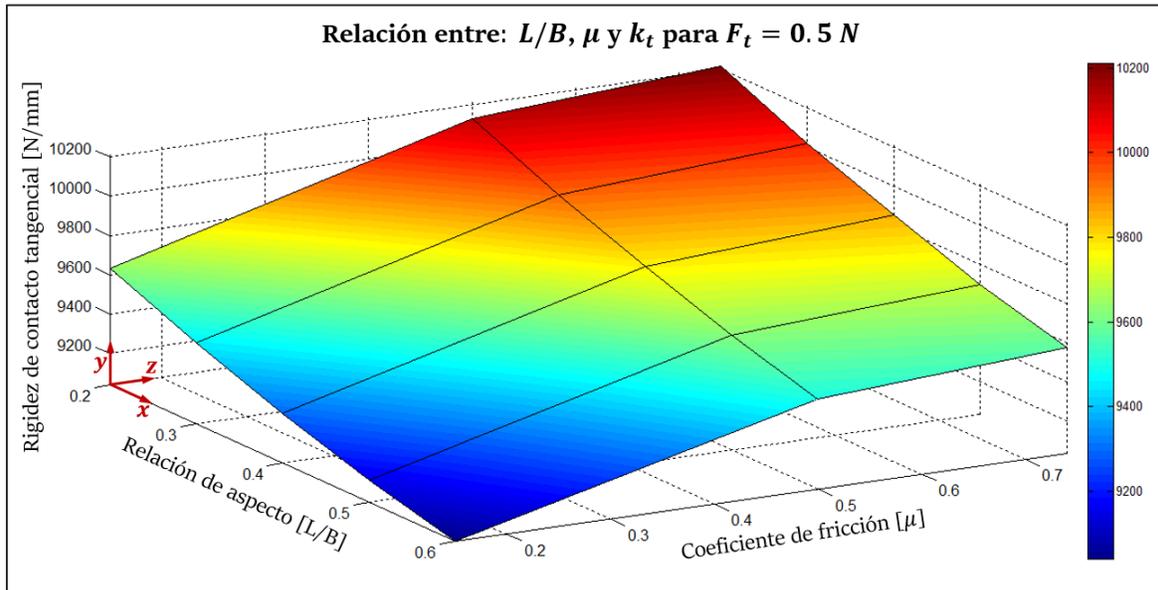


Figura 5.6:  $k_t$  en función de  $L/B$  y  $\mu$  para una  $F_t = 0.5$  N.

En la figura 5.7 se muestra el valor de la presión de contacto en función del coeficiente de fricción y el valor de la relación  $L/B$  correspondientes a una  $F_t = 0.5$  N. La tendencia en el incremento de  $p_c$  en función de la relación de aspecto  $L/B$  es la misma que la mostrada en la figura 5.4, el coeficiente de fricción no ejerce influencia en el valor de dicha presión ya que se mantiene constante.

El comportamiento mostrado por la presión de contacto se debe a que ésta actúa en forma perpendicular a las superficies en contacto, es decir, en dirección normal, por lo tanto, solo recibe influencia de la geometría de contacto y de la  $F_n$  entonces, tanto  $\mu$  como la  $F_t$ , actúan de forma significativa solo en los efectos tangenciales de la unión.

A diferencia de la presión de contacto, en la figura 5.8, se observa que un menor coeficiente de fricción propicia una disminución del esfuerzo máximo de cizallamiento, ya que el decremento en  $\mu$  genera una menor oposición al desplazamiento tangencial y por lo tanto la reacción ( $\tau$ ) generada en la interfaz será menor.

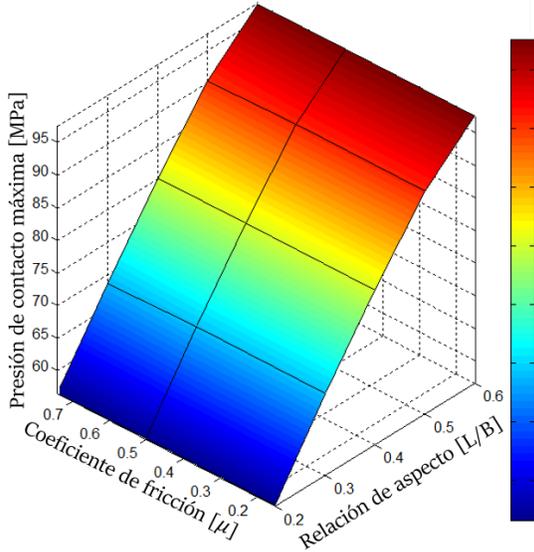
Relación entre:  $L/B$ ,  $\mu$  y  $\tau$  para  $F_t = 0.5 \text{ N}$ 

Figura 5.7: Presión de contacto en función de  $L/B$  y  $\mu$  para una  $F_t = 0.5 \text{ N}$ .

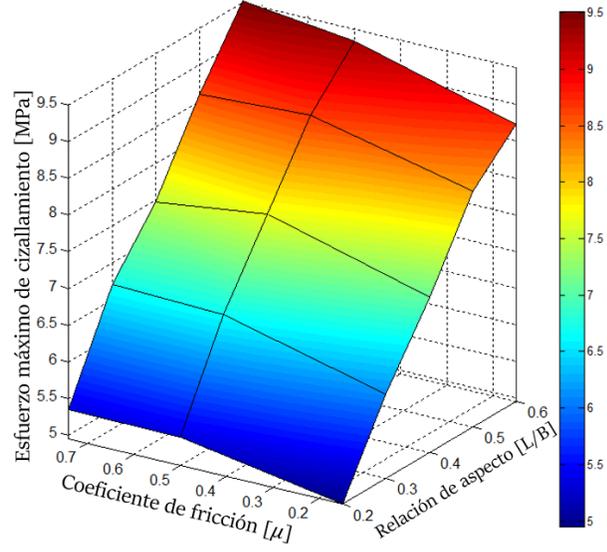
Relación entre:  $L/B$ ,  $\mu$  y  $\rho_c$  para  $F_t = 0.5 \text{ N}$ 

Figura 5.8: Esfuerzo máximo de cizallamiento en función de  $L/B$  y  $\mu$  para una  $F_t = 0.5 \text{ N}$ .

- 5.2.6 Diferencias porcentuales en los efectos generados en la interfaz en función de la relación  $L/B$ :** Como se ha observado a lo largo del capítulo 4 y en los puntos anteriores de este capítulo, la variación en la relación de aspecto del cuerpo superior de la unión, genera variaciones en la rigidez de contacto en direcciones normal y tangencial, así como en los esfuerzos generados en la interfaz de contacto. Con el fin de mostrar de otra forma más clara las diferencias que se presentan en dichos parámetros, cuando es modificada la relación de aspecto del cuerpo superior de la unión, a continuación se presentan gráficas que denotan la diferencia porcentual de los efectos interfaciales por cada incremento en el valor de  $L/B$ .

En la figura 5.9 (a) se muestra la diferencia porcentual en la rigidez de contacto normal obtenida en función de la relación  $L/B$ , en esta gráfica se visualiza la tendencia presentada con anterioridad, en la cual la rigidez de contacto tangencial disminuye de forma no proporcional al incremento en el valor de la relación de aspecto, esto se observa en el distinto valor que presentan los porcentajes respecto a la relación de aspecto inmediata, la máxima diferencia porcentual entre las relaciones de aspecto ( $L/B$ ) menor y mayor es del 7.4172 %.

En la figura 5.9 (b) se muestra la diferencia porcentual en la rigidez de contacto tangencial obtenida en función de la relación  $L/B$  para  $F_t = 0.5$  N, la tendencia en la variación de  $k_t$  presenta la misma tendencia que presenta  $k_n$  (figura 5.9), es decir, muestran una disminución no proporcional en función del incremento en  $L/B$ ; la máxima diferencia porcentual entre las  $L/B$  menor y mayor es del 6.2264 %.

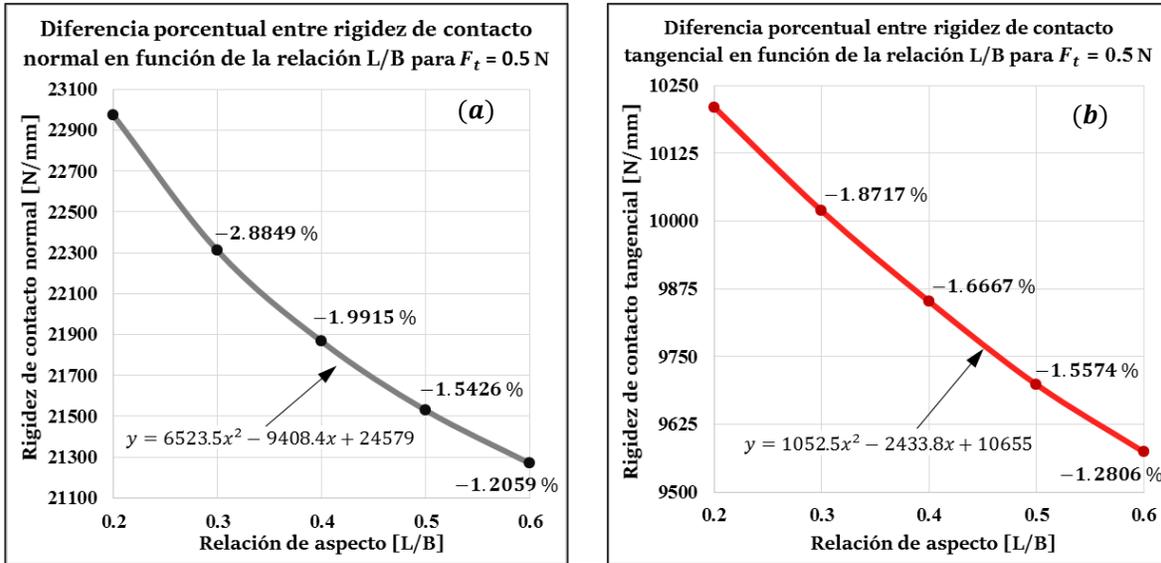


Figura 5.9: (a) Diferencia porcentual en la rigidez de contacto normal en función de la relación  $L/B$ ; (b) Diferencia porcentual en la rigidez de contacto tangencial en función de la relación  $L/B$ .

La disminución no proporcional mostrada en las dos gráficas de la figura 5.9, está en función de la variación no proporcional que genera la variación de  $L/B$  en la rigidez propia del cuerpo superior de la unión.

La variación en la relación de aspecto  $L/B$  como se ha observado, no solo afecta el valor de la rigidez de contacto normal y tangencial, también influye en los esfuerzos generados en la interfaz de la unión, dichos efectos son la presión de contacto y los esfuerzos de cizallamiento, mostrados en las figuras 5.10 (a) y (b) respectivamente. La tendencia indica que ambos parámetros aumentan con el incremento en  $L/B$ , lo cual es inverso a lo mostrado por los parámetros vistos en la figura 5.9.

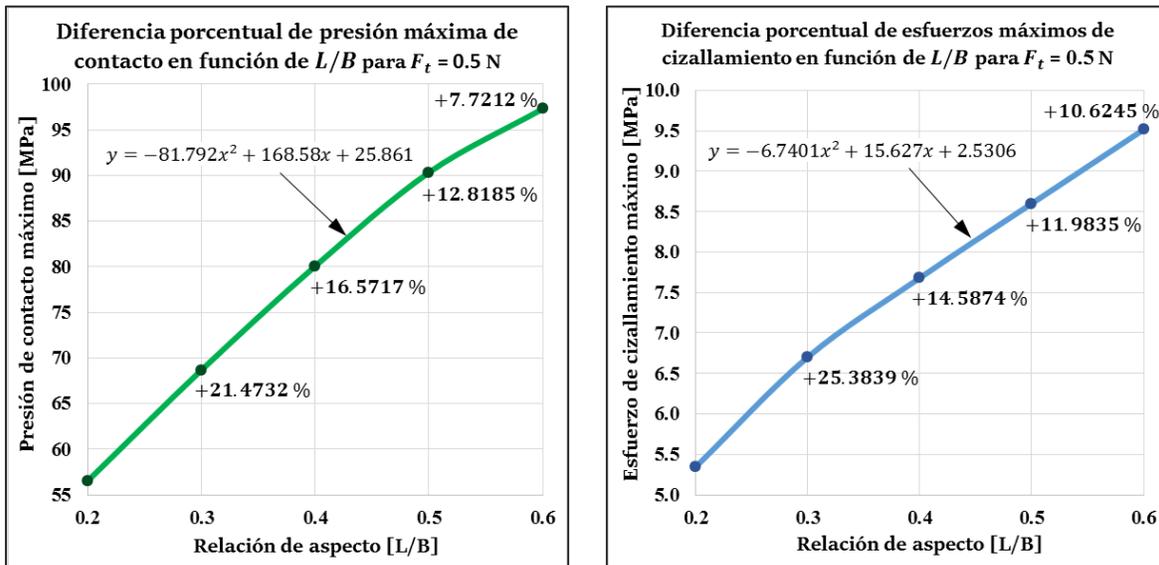


Figura 5.10: (a) Diferencia porcentual en la presión máxima de contacto en función de la relación  $L/B$ ; (b) Diferencia porcentual en los esfuerzos máximos de cizallamiento en función de  $L/B$ .

En las gráficas (a) y (b) de la figura 5.9, se observó que la diferencia porcentual de rigidez de contacto tangencial presentada, entre determinada relación de aspecto y su inmediata superior o inferior es relativamente pequeña, pero de magnitud suficiente como para modificar el estado de deslizamiento en la interfaz.

Cuando se compran la relación de aspecto menor y la mayor, se presentan diferencias porcentuales más elevadas en el caso de los esfuerzos generados en la interfaz, llegando a valores de 72.0897 % para la presión máxima de contacto y de 77.9852 % para el esfuerzo de cizallamiento.

---

---

# CAPÍTULO 6:

## *CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES*

---

---

### 6.1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se analizó el efecto de la variación de la geometría de los cuerpos de una unión sobre la rigidez de contacto generada y por ende, en los esfuerzos generados en la interfaz, para ello se realizaron variaciones en la relación de aspecto de una unión cuyo contacto es de tipo convexo - plano, considerando solo el rango de comportamiento elástico del material, es decir, antes de llegar al límite de fluencia; además, también se analizó el efecto del coeficiente de fricción entre los cuerpos en contacto y las fuerzas normal ( $F_n$ ) y tangencial ( $F_t$ ) a que se aplican a la unión.

### 6.2 CONCLUSIONES

A partir de la presentación y discusión de resultados en los capítulos 4 y 5 respectivamente, a continuación se emiten las siguientes conclusiones:

1. Existe teoría sobre contacto de tipo cilíndrico, que es útil para el análisis realizado en este trabajo; por ejemplo, en la determinación de la longitud de interfaz en contacto hertziano, la longitud de las zonas con y sin deslizamiento para contacto tangencial, el esfuerzo máximo y la distribución de presión sobre el área de contacto. Sin embargo, no se cuenta con ecuaciones que permitan determinar la rigidez de contacto normal y tangencial para este tipo de contacto.

2. La teoría existente solo aplica para la relación de aspecto con valor de 0.5, el resto de las geometrías de contacto son irregulares y requerirían de métodos analíticos complejos para obtener los resultados necesarios, debido a ello se optó por el método de análisis por simulación mediante el método de elemento finito.
3. Se dedujo que para el proceso empleando en la determinación de rigidez de contacto, no puede considerarse solo el borde o línea de contacto de los cuerpos de la unión, ya que existe una sección del cuerpo cuyo comportamiento solo es influenciado por la rigidez propia del cuerpo y otra sección cuyo comportamiento cambia debido a la influencia de la rigidez de contacto. Para el caso del modelo empleado en este trabajo, todas sus variaciones coincidieron en que la influencia de la rigidez de contacto se extiende a partir del borde de contacto un espesor de aproximadamente 0.04 mm hacia el interior del cuerpo en contacto.
4. Se determinó la influencia de la geometría de contacto de una unión de tipo convexo - plano, en la rigidez interfacial normal y tangencial, así como en los esfuerzos generados en la zona de contacto, obteniéndose gráficas que muestran el comportamiento cualitativo y cuantitativo de dichos parámetros en función de a relación  $L/B$  elegida para realizar la variación del parámetro geométrico.
5. Si se desea saber el comportamiento que ofrecería una relación de aspecto ajena al rango empleado en este trabajo, se tendrían que cambiar algunas condiciones ya que: (a) si el valor de  $L/B$  se disminuye a 0.1 o menor, la forma geométrica del cuerpo en contacto tiende a ser solo una línea; (b) si  $L/B$  se incrementa poco más de 0.6, la  $F_n$  empleada en este trabajo (5 N), generará deformaciones plásticas y por lo tanto, comportamiento no lineal de los parámetros analizados.
6. A medida que aumenta el deslizamiento parcial en la interfaz de la unión, debido a un decremento en  $k_t$ , los esfuerzos de cizallamiento aumentan, elevando así, el riesgo a sufrir la generación de grietas en la zona de transición entre la zona sin deslizamiento y la zona con deslizamiento, cuando  $0 < F_t < \mu F_n$ .

7. Cuando  $F_t > \mu F_n$ , el estado de deslizamiento en la interfaz cambia, ya que en ese momento se genera el deslizamiento total;  $F_t$  generará una mayor amplitud de deslizamiento, mientras menor masa presente la geometría de contacto, como es el caso de  $L/B = 0.2$ , siendo ésta propensa a presentar mayor desgaste.
8. La  $k_n$  no es influenciada significativamente por  $\mu$  o  $F_t$ , ya que el campo de acción significativo de ambos parámetros, es la dirección tangencial de la interfaz en la unión. Por lo tanto  $k_n$  solo es afectada por la geometría del cuerpo y  $F_n$ . Mientras  $F_n$  sea constante,  $k_n$  cambiará solo en función de la relación de aspecto ( $L/B$ ).
9. La rigidez de contacto tangencial es afectada por  $F_n$ ,  $F_t$ ,  $L/B$  y  $\mu$ ; en las figuras 5.3 y 5.6 se mostró la influencia que los últimos 3 parámetros ejercen sobre dicha rigidez; además, un incremento en la fuerza normal generará un aumento en la rigidez tangencial ( $k_t$ ), ya que se generará una mayor oposición al desplazamiento tangencial de acuerdo a la relación entre  $F_t$  y  $\mu F_n$ .
10. La variación de  $k_n$  y  $k_t$  en función de la relación de aspecto  $L/B$  empleada es relativamente baja, no así, cuando el efecto de éstas se traduce en presión de contacto y esfuerzos de cizallamiento, presentando incrementos de 72.0897% y 77.9852% respectivamente, entre relaciones de aspecto menor y mayor.
11. Los esfuerzos de cizallamiento crecen como una reacción al incremento de  $F_t$  aplicada, es decir, debido a un decremento en  $k_t$ ; en el régimen de deslizamiento parcial dichos esfuerzos son causa de la aparición de grietas en la interfaz de una unión, pero al ser muy elevados también pueden ser los causantes de deformaciones plásticas en las superficies de los cuerpos en contacto.
12. La geometría de contacto influye en el valor de los esfuerzos de cizallamiento generados en la interfaz, siendo más elevados mientras: (a) mayor sea la magnitud de  $F_t$  aplicada ya que, implicará una mayor reacción interna a deformación tangencial; (b) mayor sea la relación  $L/B$ , ya que presentará menor área de contacto y la concentración de esfuerzos generada por  $F_t$  en la interfaz será mayor.

13. La presión de contacto al igual que  $k_n$  solo resultan afectadas por la geometría del cuerpo en contacto, así como la fuerza tangencial ( $F_t$ ) y se mantienen constantes tanto en el régimen de deslizamiento parcial como de deslizamiento bruto, independientemente del valor de la  $F_t$  o  $\mu$ .
14. La presión de contacto es más elevada mientras mayor sea el valor de  $k_n$  o el de la relación de aspecto  $L/B$  (figura 5.11), esto hace a la unión más propensa a sufrir deformaciones plásticas, desgaste o desprendimiento de material.

En la tabla 6.1 se presenta un resumen del efecto que genera un incremento en los parámetros cuya magnitud es independiente ( $F_n$ ,  $F_t$ ,  $L/B$  y  $\mu$ ), sobre aquellos parámetros ( $c$ ,  $a$ ,  $k_n$ ,  $k_t$ ,  $\rho_c$  y  $\tau$ ) cuya magnitud es dependiente, mostrado si aumentan, disminuyen o se mantienen constantes.

Tabla 6.1: Efectos generados en la interfaz de contacto en función del incremento en alguno de los parámetros variables en la unión.

		Parámetro en incremento			
		Fuerza normal ( $F_n$ )	Fuerza tangencial ( $F_t$ )	Relación de aspecto ( $L/B$ )	Coefficiente de fricción ( $\mu$ )
Efecto en la interfaz	Longitud de zona sin deslizamiento ( $c$ )	+	-	-	+
	Longitud de zona con deslizamiento ( $a$ )	-	+	-	-
	Rigidez de contacto normal ( $k_n$ )	+	=	-	=
	Rigidez de contacto tangencial ( $k_t$ )	+	-	-	+
	Presión máxima de contacto ( $\rho_c$ )	+	=	+	=
	Esfuerzo máximo de cizallamiento ( $\tau$ )	-	+	+	-

+ → Incremento  
 - → Decremento  
 = → Constante

### 6.3 RECOMENDACIONES

Como recomendaciones para trabajos futuros se propone lo siguiente:

1. Hacer el mismo tipo de estudio que el realizado este trabajo, pero con materiales distintos al usado (acero 1018), además, llevar a cabo pruebas en que ambos componentes de la unión sean de distinto material
2. Realizar un análisis paramétrico análogo al presentado en este trabajo, empleando relaciones de aspecto semejantes para contacto de tipo: convexo-convexo, convexo-cóncavo y plano-plano. Posteriormente, llevar a cabo una comparación de los efectos obtenidos en función de los tipos de contacto mencionados y el que se estudió en esta tesis.

# APÉNDICE A

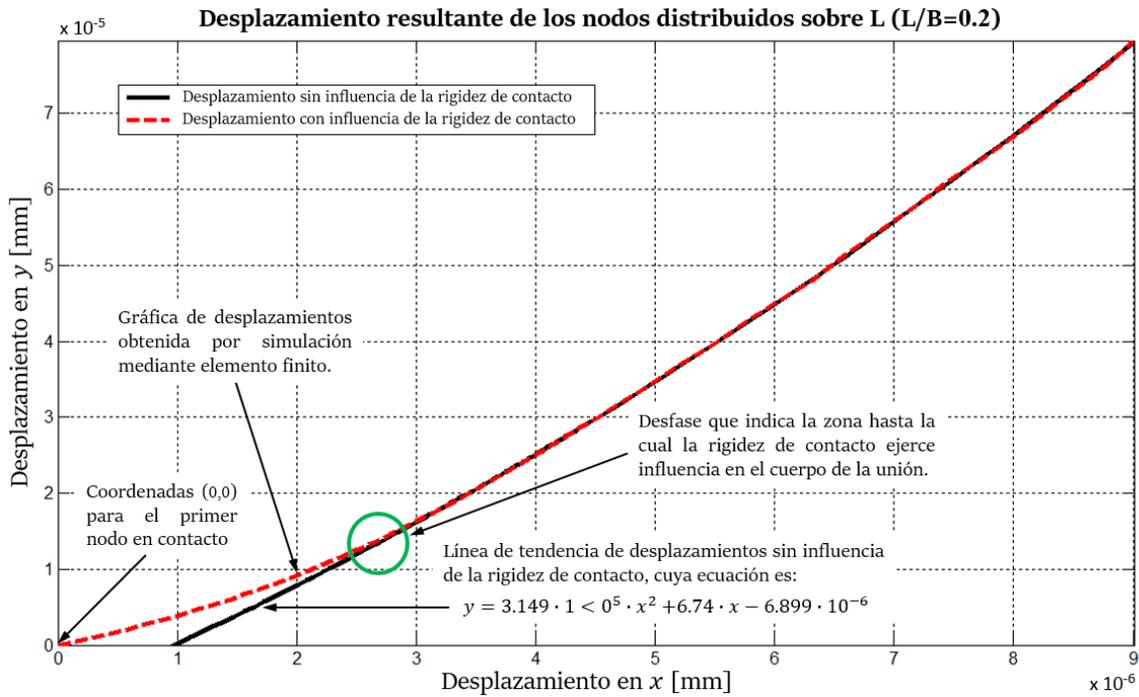


Figura A.1: Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre L (L/B=0.2).

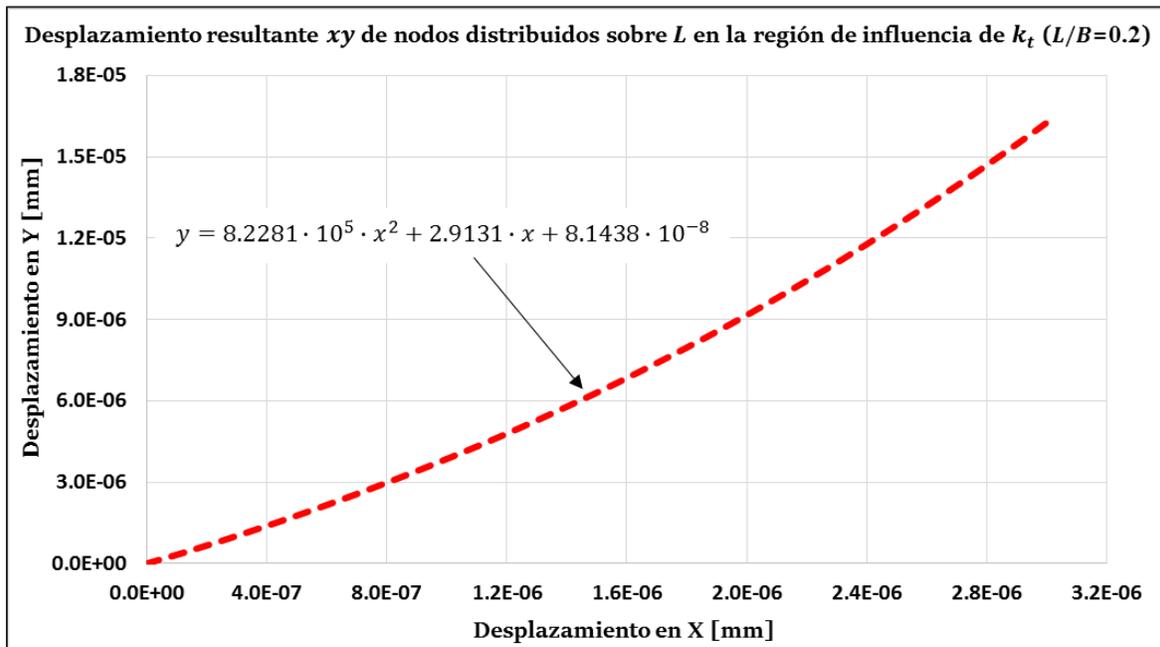


Figura A.2: Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre L en la región de influencia de la rigidez de contacto (L/B=0.2).

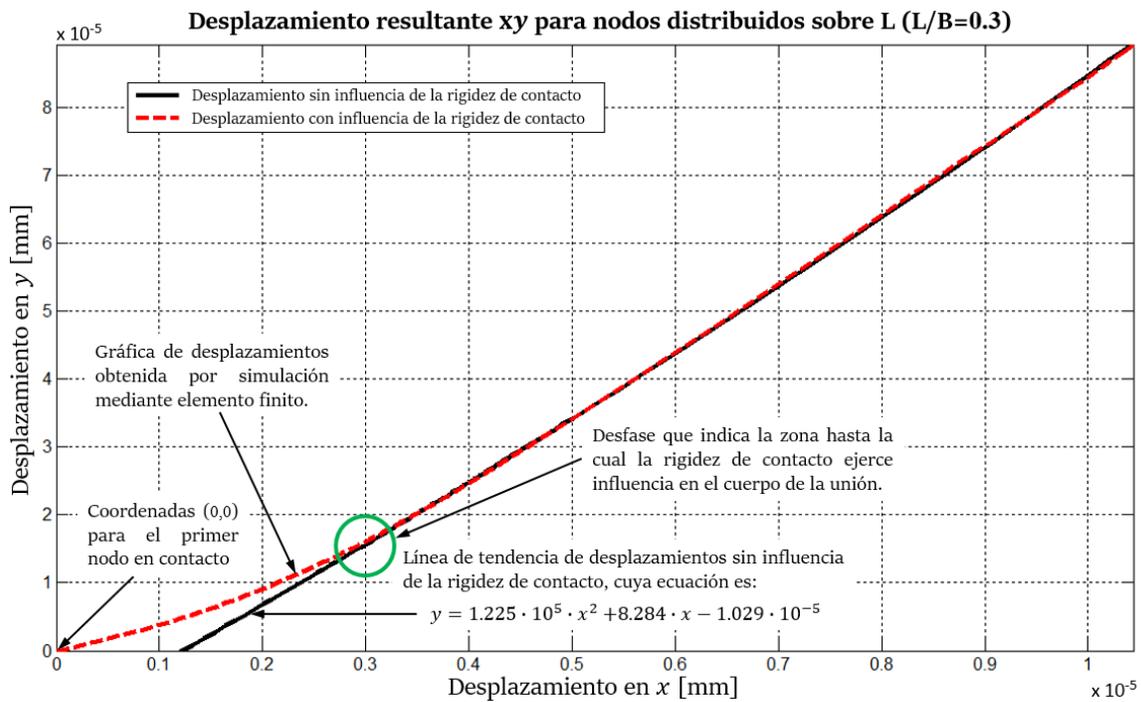


Figura A.3: Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre L ( $L/B=0.3$ ).

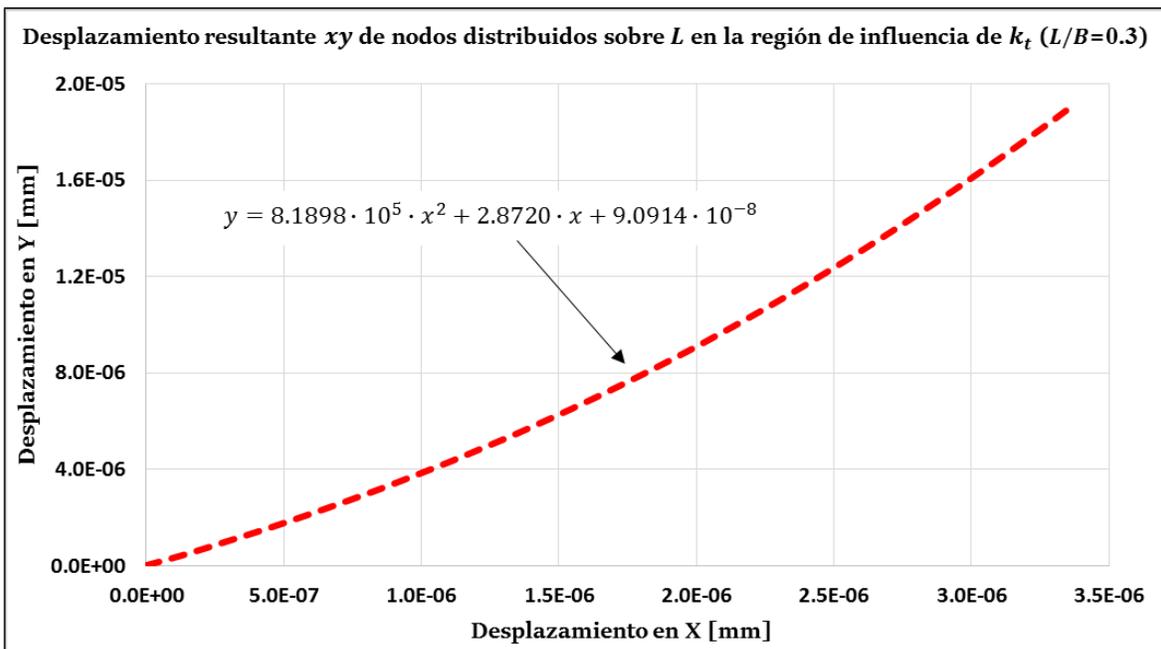


Figura A.4: Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre L en la región de influencia de la rigidez de contacto ( $L/B=0.3$ ).

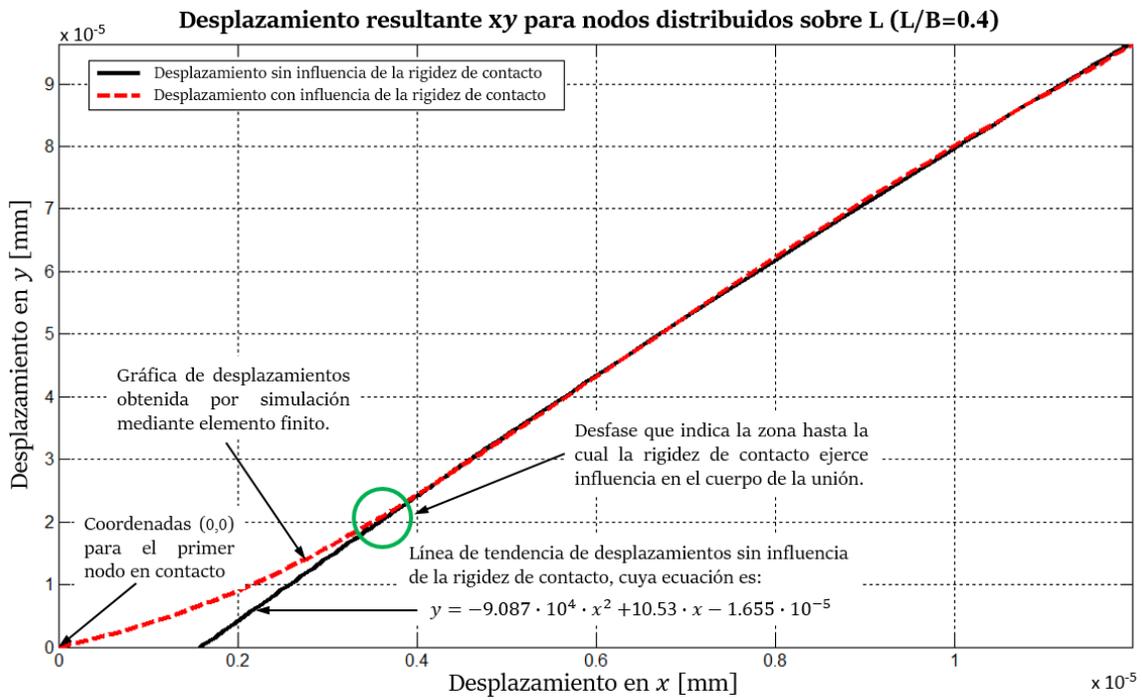


Figura A.5: Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre L (L/B=0.4).

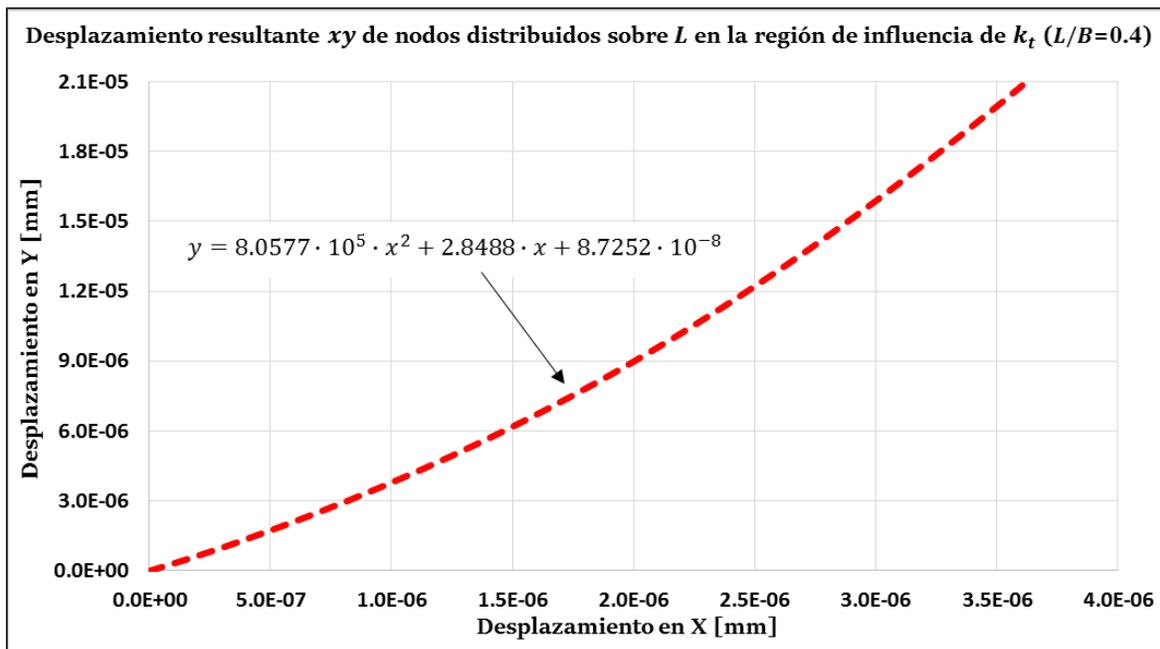


Figura A.6: Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre L en la región de influencia de la rigidez de contacto (L/B=0.4).

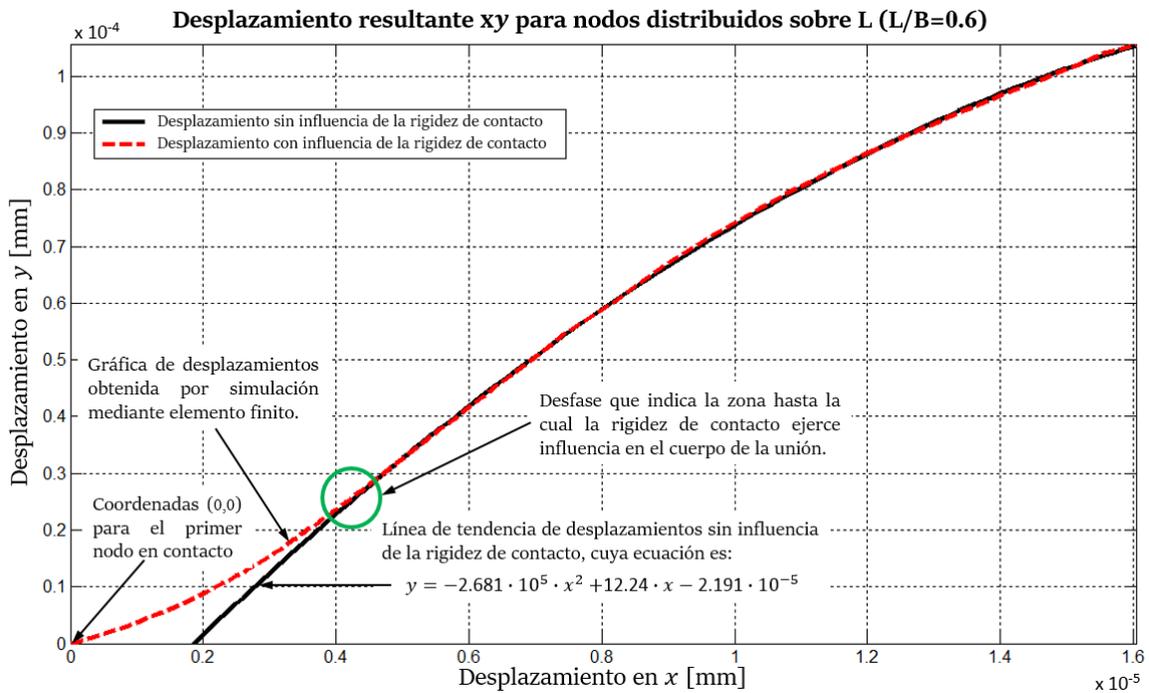


Figura A.7: Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre L ( $L/B=0.6$ ).

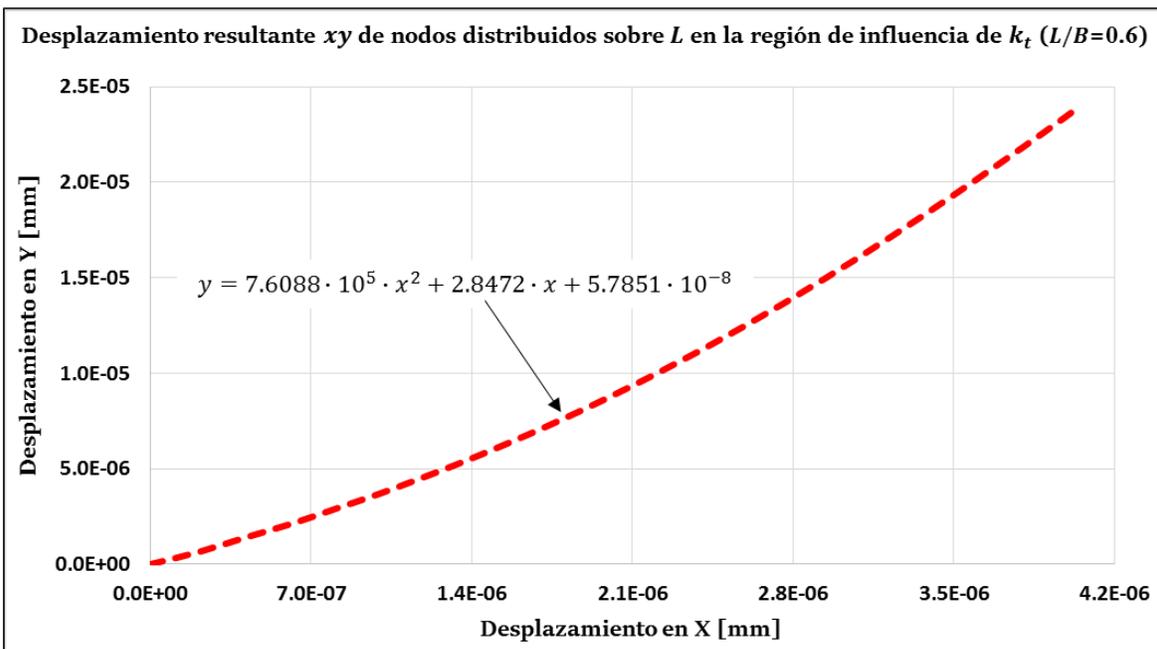


Figura A.8: Desplazamiento resultante para nodos distribuidos sobre L en la región de influencia de la rigidez de contacto ( $L/B=0.6$ ).

# APÉNDICE B

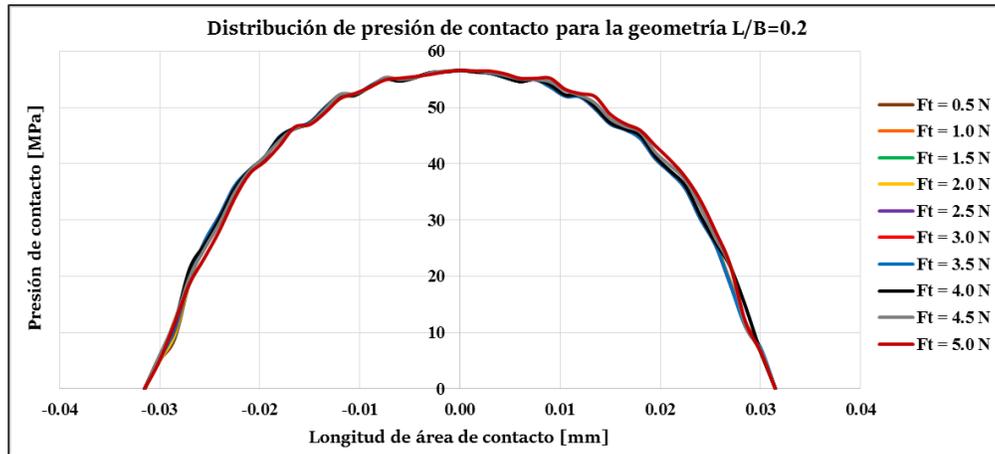


Figura B.1: Distribución de presión de contacto para la geometría con  $L/B = 0.2$ .

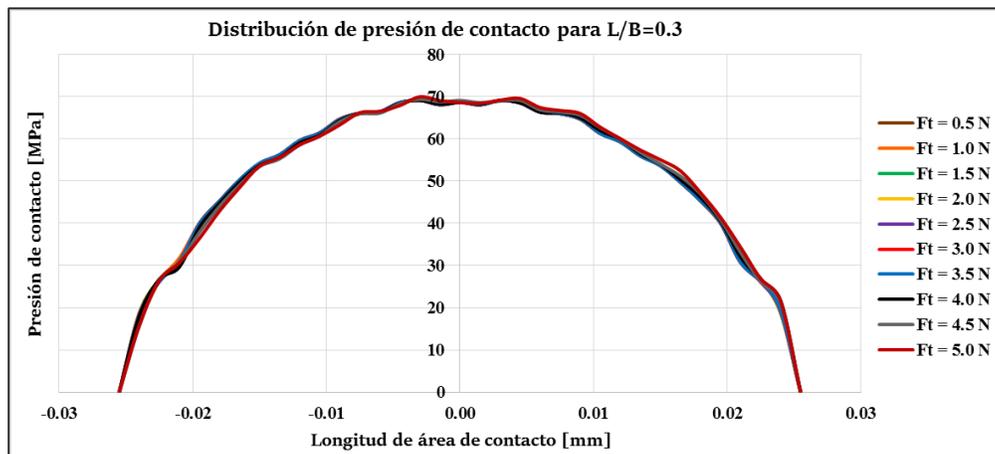


Figura B.2: Distribución de presión de contacto para la geometría con  $L/B=0.3$ .

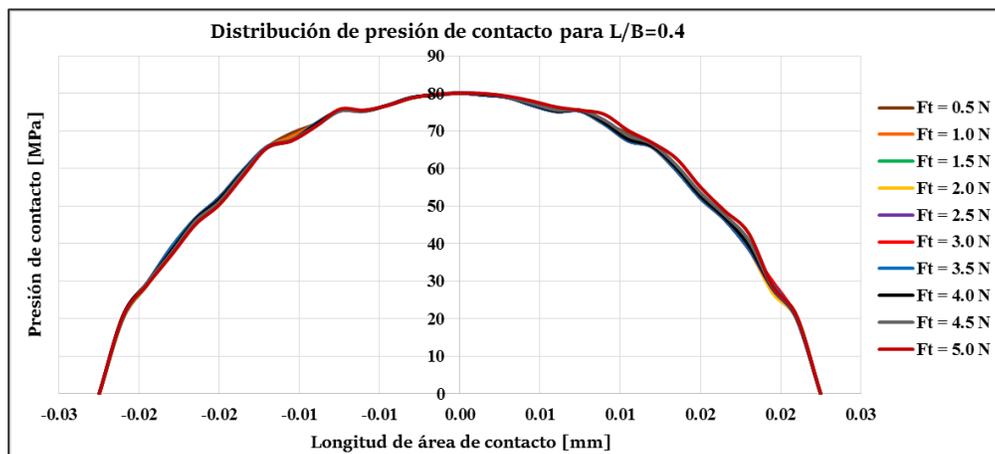


Figura B.3: Distribución de presión de contacto para la geometría con  $L/B=0.4$ .

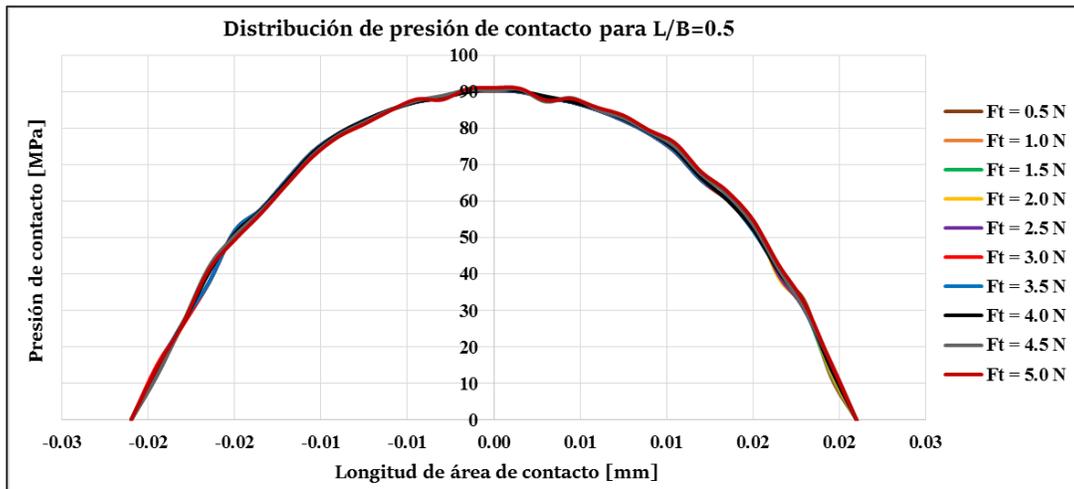


Figura B.4: Distribución de presión de contacto para  $L/B=0.5$ .

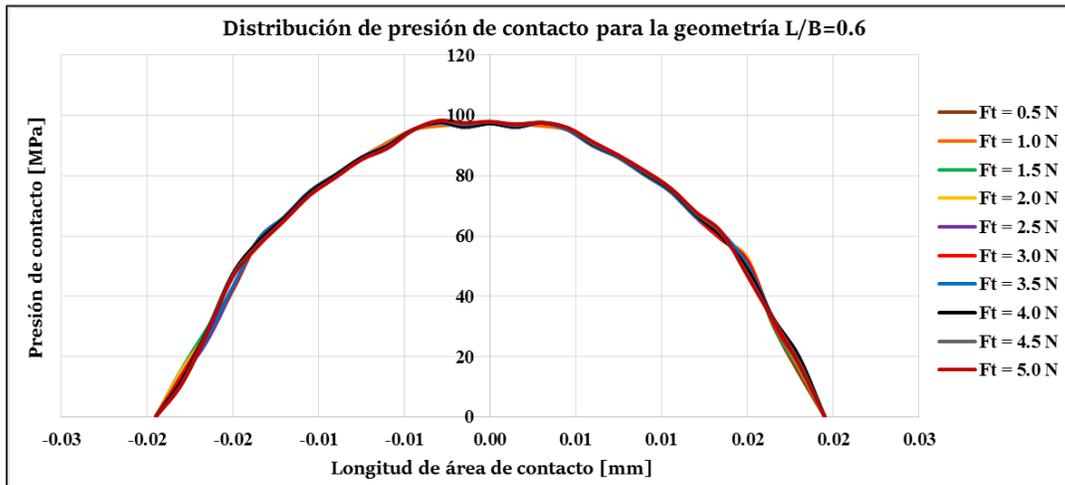


Figura B.5: Distribución de presión de contacto para  $L/B=0.6$ .

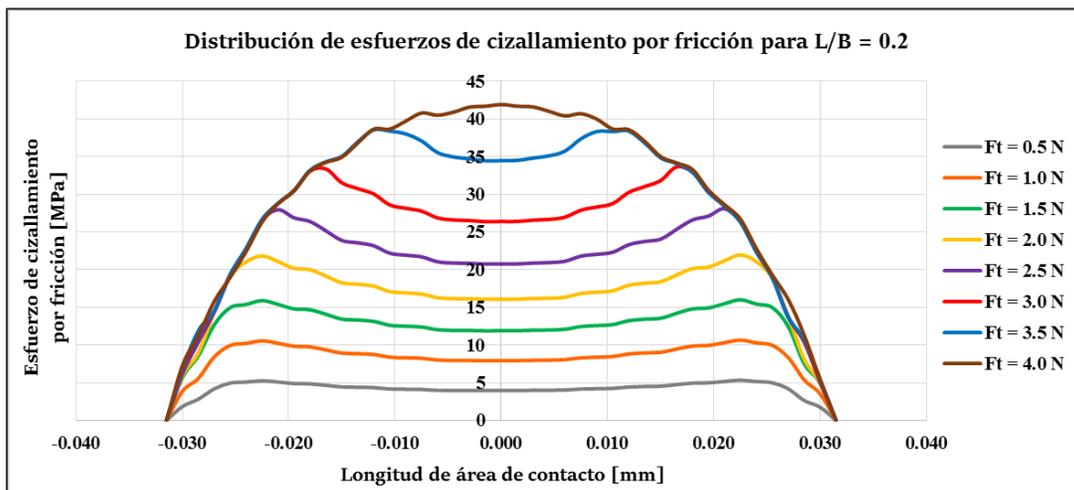


Figura B.6: Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción para  $L/B=0.2$ .

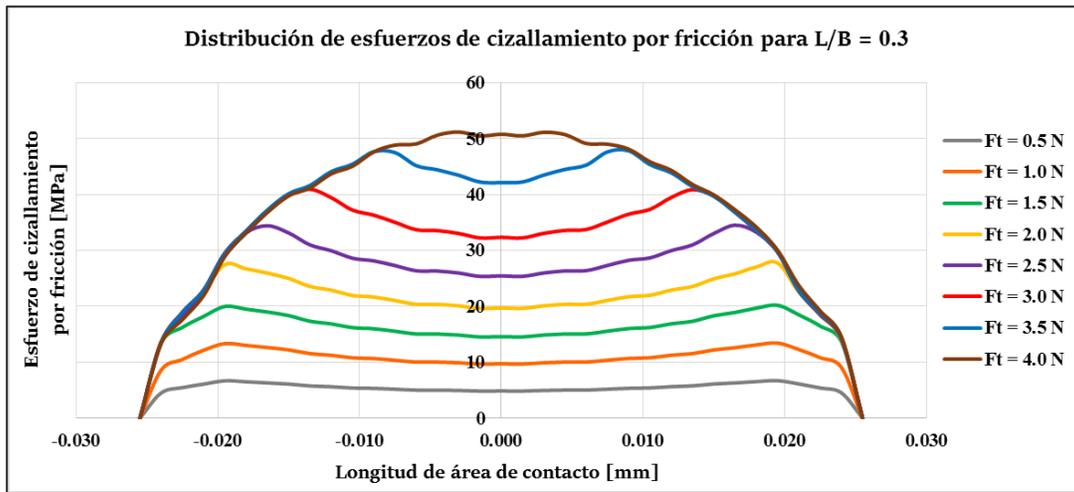


Figura B.7: Distribución de esfuerzos de cisallamiento por fricción para  $L/B=0.3$ .

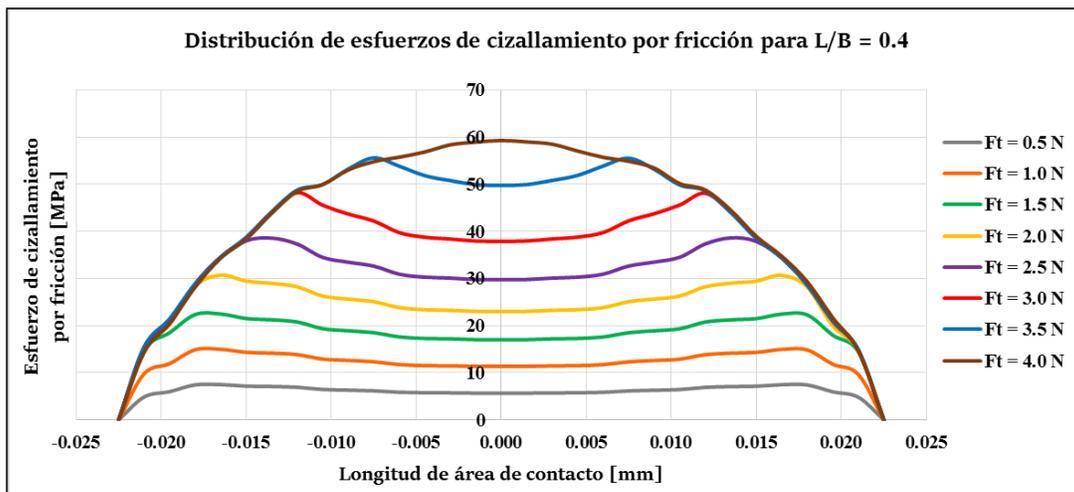


Figura B.8: Distribución de esfuerzos de cisallamiento por fricción para  $L/B=0.4$ .

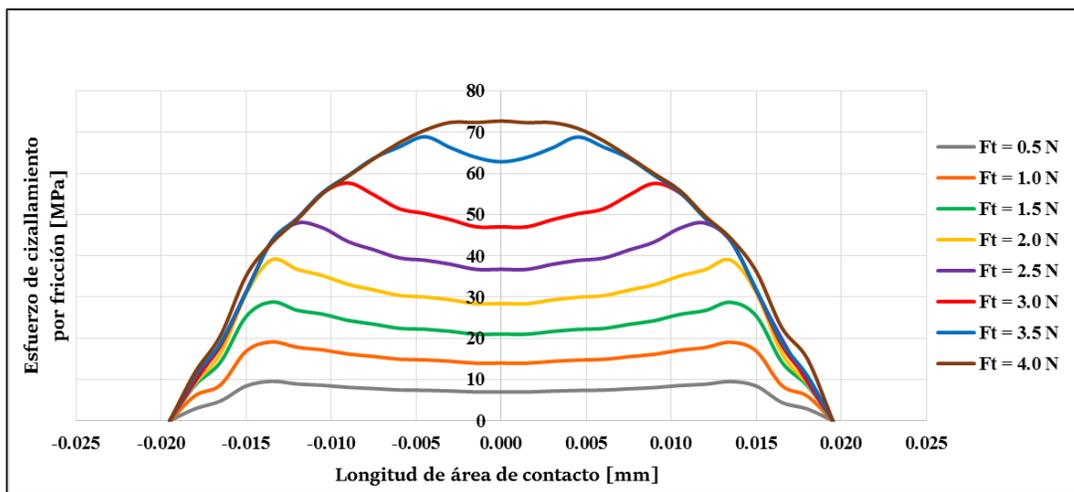


Figura B.9: Distribución de esfuerzos de cisallamiento por fricción para  $L/B=0.6$ .

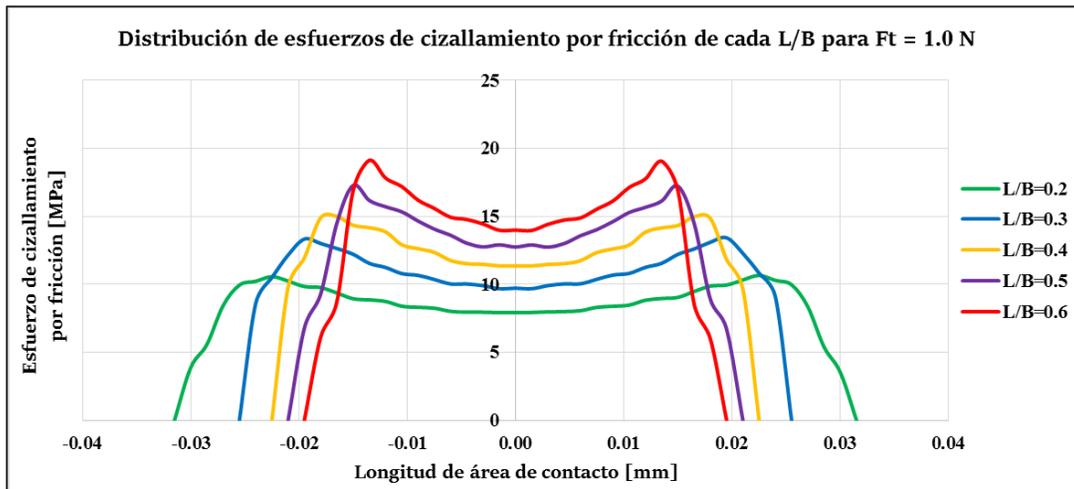


Figura B.10: Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada  $L/B$  para  $F_t=1.0$  N.

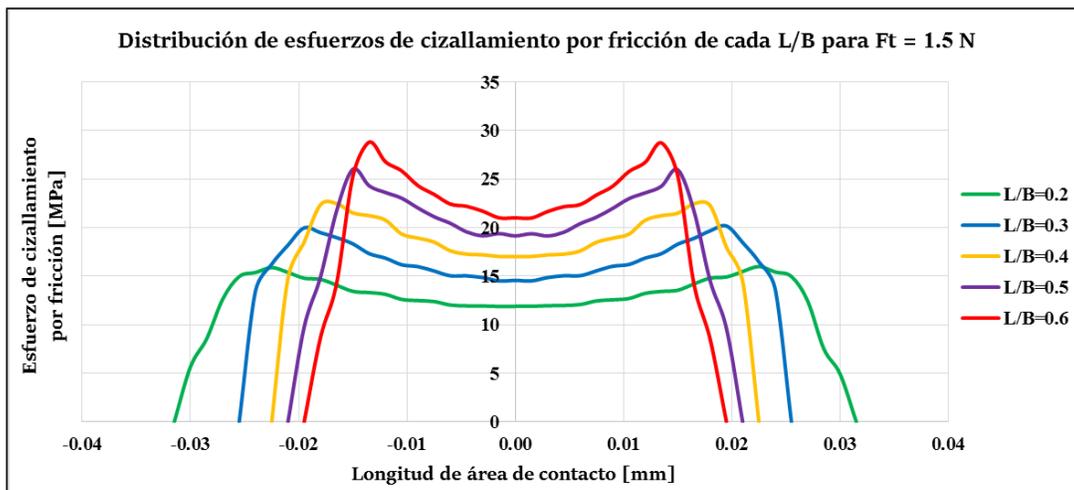


Figura B.11: Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada  $L/B$  para  $F_t=1.5$  N.

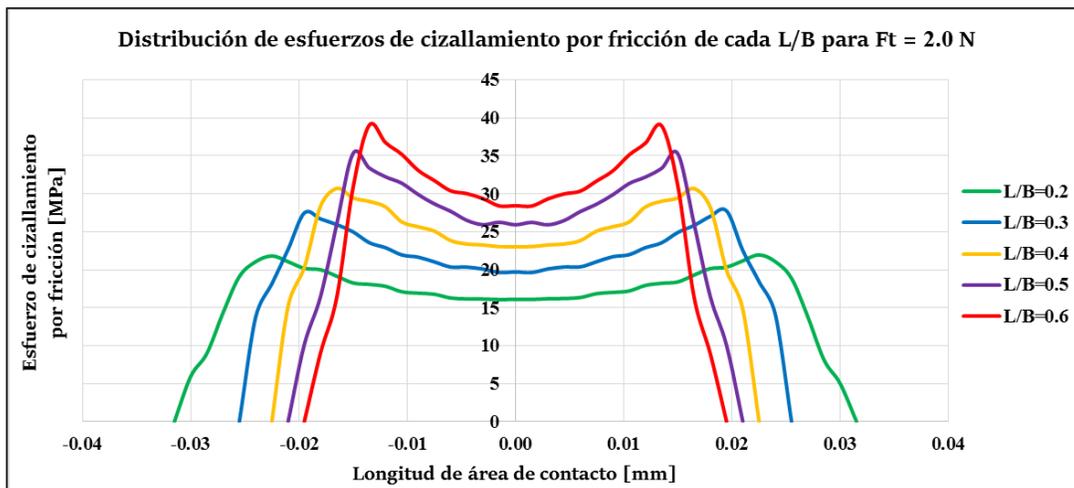


Figura B.12: Distribución de esfuerzos de cizallamiento por fricción de cada  $L/B$  para  $F_t=2.0$  N.

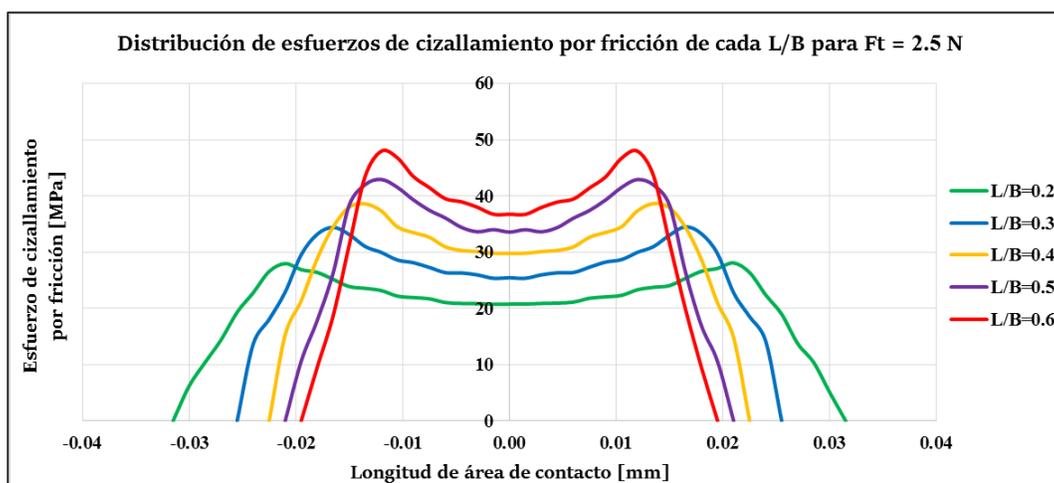


Figura B.13: Distribución de esfuerzos de cisallamiento por fricción de cada  $L/B$  para  $F_t=2.5$  N.

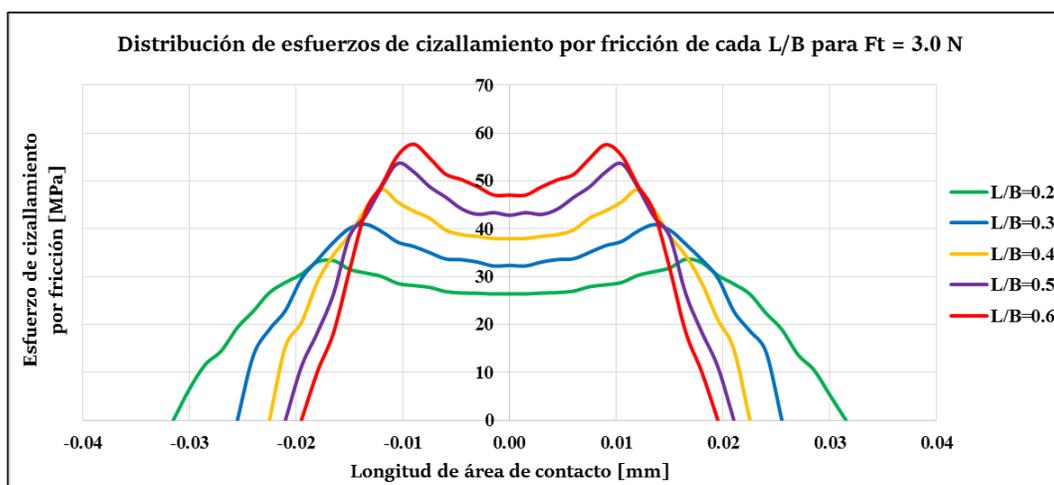


Figura B.14: Distribución de esfuerzos de cisallamiento por fricción de cada  $L/B$  para  $F_t=3.0$  N.

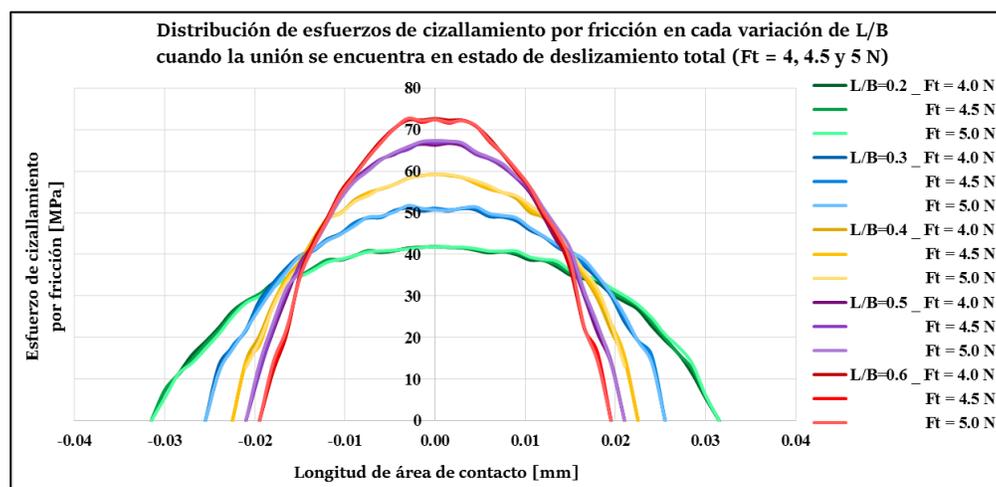


Figura B.15: Distribución de esfuerzos de cisallamiento por fricción en cada variación de  $L/B$  cuando la unión se encuentra en estado de deslizamiento total ( $F_t = 4, 4.5$  y  $5$  N).

# APÉNDICE C

En este apéndice se presentan los comportamientos fuerza vs desplazamiento tangencial, así como  $k_n$  y  $k_t$  resultantes de la modificación de  $\mu$  a 0.15 y 0.5. El comportamiento obtenido es semejante al mostrado en el capítulo 4 para  $\mu = 0.7$ .

## A.1 RIGIDEZ DE CONTACTO NORMAL

Como se mostró en la figura 4.32, la rigidez de contacto normal varía en función de la relación  $L/B$ ;  $F_n$  tiene un valor fijo y tanto  $F_t$  como  $\mu$ , no ejercen influencia sobre el valor de  $k_n$  o el desplazamiento interfacial en dirección  $y$ .

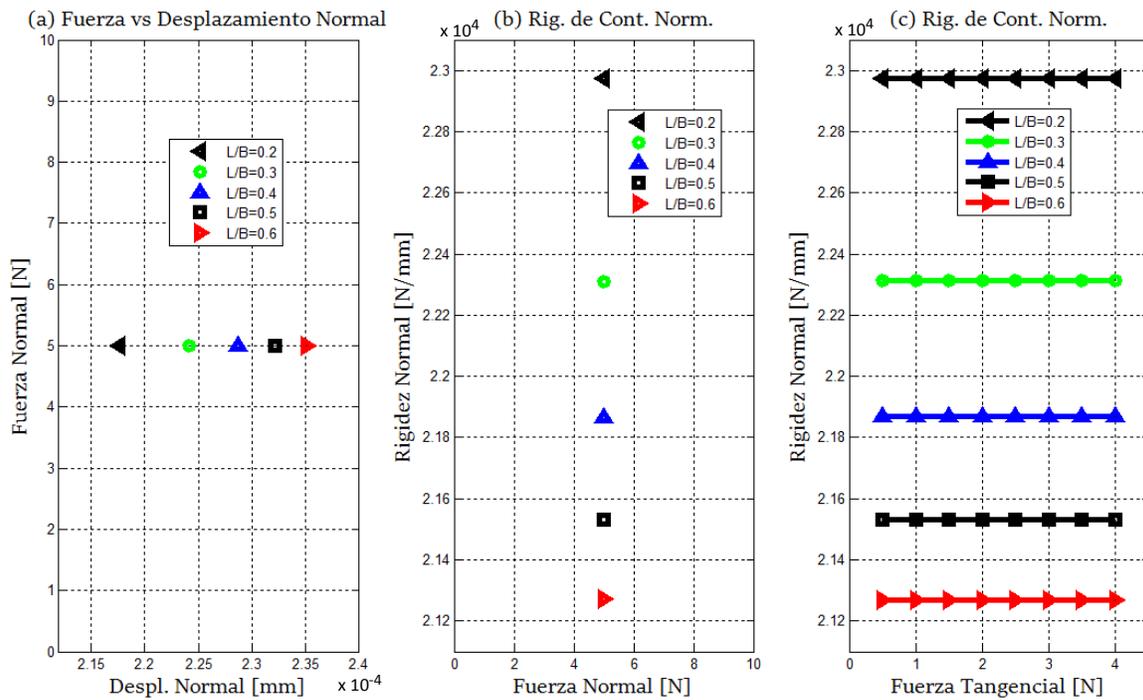


Figura C.1: Rigidez de contacto normal para  $\mu = 0.15, 0.5$  y  $0.74$ .

En la figura anterior, las gráficas de fuerza normal vs desplazamiento normal (a) y  $F_n$  vs  $k_n$  (b) muestran solo puntos, esto se debe a que por ser  $F_n$  constante y no recibir influencia de  $F_t$  (figura c), tanto  $x_n$  como  $k_n$  también son constantes.

**A.2 COMPORTAMIENTO  $F_t$  vs  $x_t$  CUANDO  $F_t < \mu F_n$**

Las figuras A.2 y A.3 muestran el comportamiento fuerza vs desplazamiento tangencial para  $\mu = 0.15$  y  $0.5$  y valor máximo de  $F_t$  inferior a la relación  $\mu F_n$ .

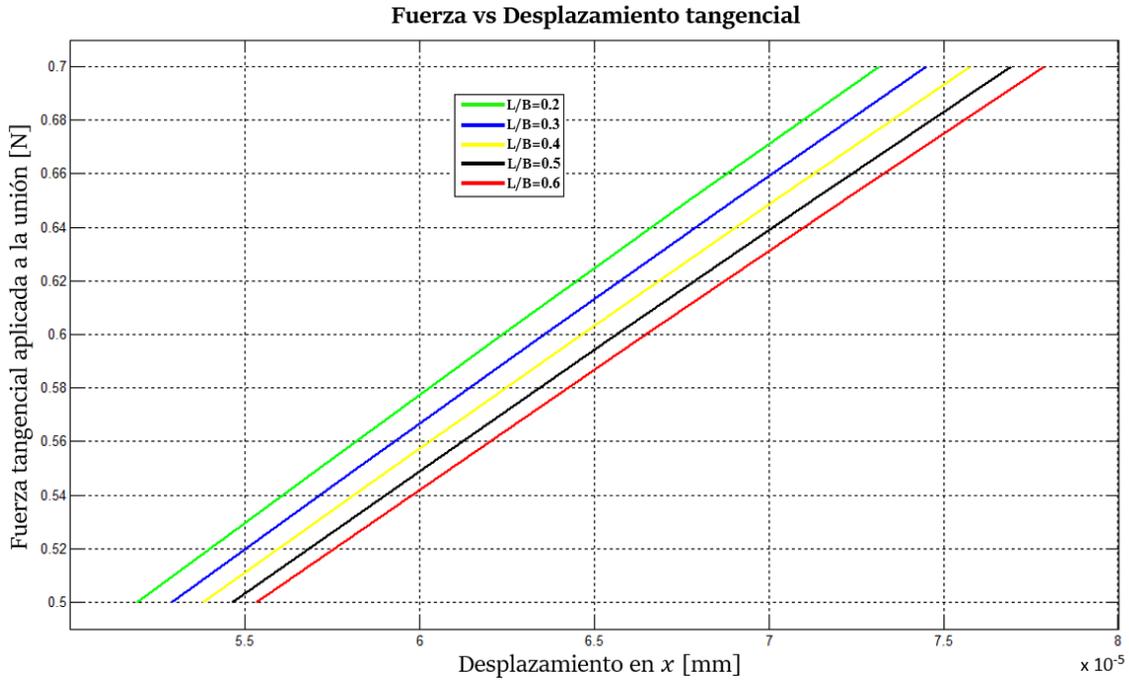


Figura C.2: Comportamiento fuerza - desplazamiento tangencial para  $\mu = 0.15$  y  $F_t = 0.5 N$  hasta  $0.7 N$ .

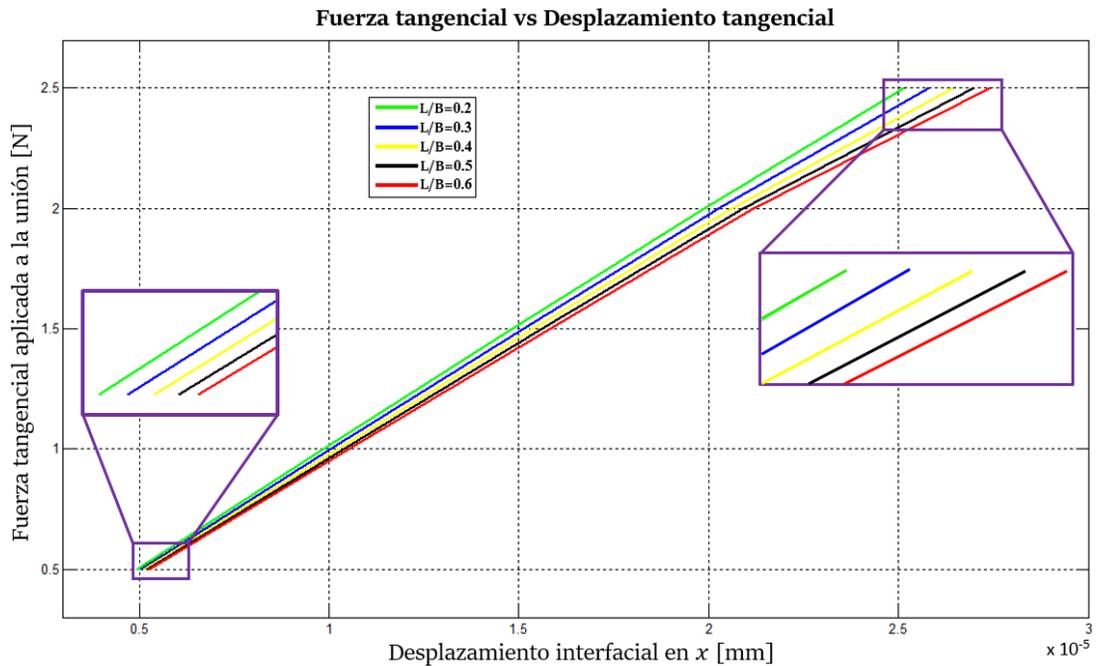


Figura C.3: Comportamiento fuerza vs desplazamiento tangencial para  $\mu = 0.5$  y  $F_t = 0.5 N$  hasta  $2.5 N$ .

### A.4 RIGIDEZ DE CONTACTO TANGENCIAL

Las figuras A.6 y A.7 muestran la rigidez de contacto tangencial en función de la fuerza tangencial, para cada variación de relación de aspecto ( $L/B$ ) en la geometría de contacto, ambas muestran un comportamiento semejante, presentando decrementos no proporcionales descritos mediante una curva.

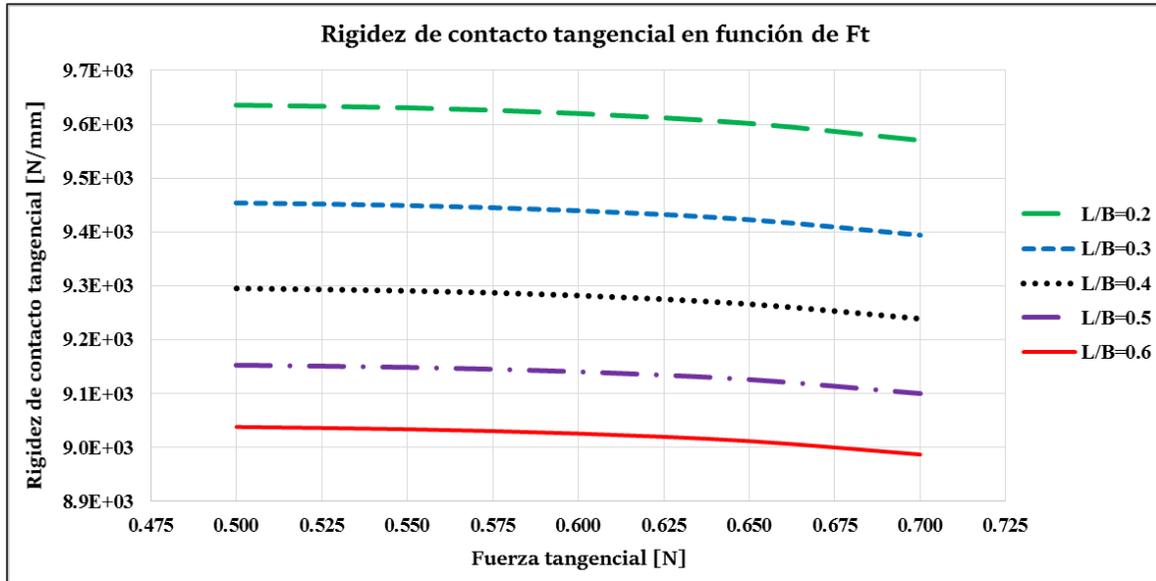


Figura C.4: Rigidez de contacto tangencial en función de  $F_t$  para  $\mu = 0.15$

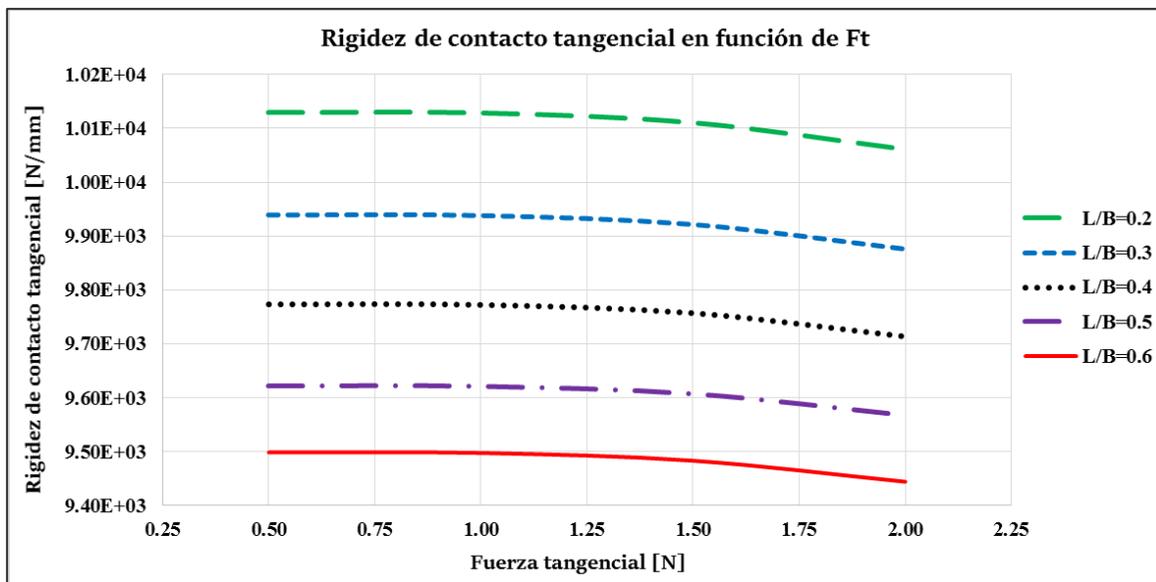


Figura C.5: Rigidez de contacto tangencial en función de  $F_t$  para  $\mu = 0.5$ .

---

---

# REFERENCIAS

**Abaqus Analysis User's Manual.** Dassault Systemes, Simulia Corp. ABAQUS Version 6.9. Providence, Rhode Island, USA. 2010.

**Bazrafshan, M., Ahmadian, H., Jalali, H.** (2014). Modeling the interaction between contact mechanisms in normal and tangential directions. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 58 111–119.

**Beléndez, T., Neipp, C., Beléndez, A.** (2002). *Estudio de la Flexión de una Viga de Material Elástico no Lineal*. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 24, no. 4..

**Berthoud, P., Baumberger, T.** (1998). *Shear stiffness of a solid–solid multicontact interface*. *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.* 454, 1615–1634.

**Bowden F.P., Tabor D.** (1954). *The Friction and Lubrication of Solids*, Clarendon, Oxford.

**Bryggman, U. & Söderberg, S.** (1986). *Contact Conditions in Fretting*. Department of Mechanical Engineering, University of Houston, Houston, TX. *Wear*, Vol. 10, pp6-17.

**Cattaneo, C.** (1938). *Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi*, *Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei* 27, Ser. 6 342–348, 434–436, 474–478.

**Chen, Y. K.** (2003). *Fretting wear in self-piercing riveted aluminium alloy sheet*.

**Ciavarella, M.** (1998). *The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I–theory*. *Int. J. Solids Struct.* 35(18), 2349–2362.

**Cigeroğlu E., and Özgüven H. N.** (2006). “Nonlinear Vibration Analysis of Blade Disks With Dry Friction Dampers”, *Journal of Sound and Vibration*, 295, pp 1028-1043.

**Cohen, D., et al.** (2008), *A model for contact and static friction of nominally flat rough surfaces under full stick contact condition*. *Journal of Tribology*. 130: p. 031401 (1-9).

**Contreras, C.E.** (2009). *Análisis Experimental de la Fricción Seca en una Viga en Cantiliver*. Tesis de maestría. CENIDET.

- Cook, R. D, Young, W. C.** (1999). "Advanced mechanics of materials". Prentice-Hall. Second edition.
- Cundall P. A. and Strack O. D. L.** (1979). "A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies," *Géotechnique*, vol. 29, pp. 47-65.
- Ding, J., Leen, S.B. & McColl, I.R.** (2004). The effect of slip regime on fretting wear-induced stress evolution. *International Journal of Fatigue* 26 521–531
- Dubourg, M.C., Chateauminois A., Villechaise, B.** (2003). *In situ analysis and modeling of crack initiation and propagation within model fretting contacts using polymer materials.* *Tribology International* 36 (2003) 109–119.
- Dwyer-Joyce, R. S.** (1997). *Tribological Design Data - Part 3: Contact Mechanics* (1ra. ed.). The Institution of Mechanical Engineers, 1 Birdcage Walk, London.
- Estrada, D.** (1993). *Estudio de problemas de contacto elastostático, utilizando elemento finito y fotoelasticidad.* Tesis de maestría. CENIDET.
- Farrahi, G. H., Majzoubi, G. H. & Chinekes, H.** (2005). *Effect of contact geometry on fretting fatigue life of aluminium alloy 2024-T3.* *Indian Journal of Engineering & Materials Sciences* Vol. 12, pp. 331-336.
- Feeny B. F., Guran A., Hinrichs N., and Popp K.** (1998). "A Historical Review of Dry Friction and Stick-Slip Phenomena", *Applied Mechanics Reviews*, 51(5) pp. 321-341.
- Fillipi S., Gola M, and Akay A.** (2004). "Measurement of Tangential Contact Hysteresis During Microslip", *Atti AIAS 2003, Salerno, Art*, 111.
- Fouvry, S., Kapsa, P., and Vincent, L.** (2003). *A global methodology to quantify fretting damages.* *ASTM special technical publication*, 1425:17–32.
- Greenwood, J. A. and Williamson, J. B. P.** (1966). *Contact of Nominally Flat Surfaces.* *Proc. R. Soc. London A* 295, 300.
- Hagman L.A.** (1997). *Measurement and modeling of microslip for engineering surfaces in contact*, Doctoral thesis, Dept. of Machine Design, KTH, Stockholm.
- Hannel, S., Fouvry, S., Kapsa, Ph., Vincent, L.** (2001). *The fretting sliding transition as a criterion for electrical contact performance.* LTDS, Ecole Centrale de Lyon, France.

- 
- Hojjati-Talemi, R.** (2013). *Numerical Modelling Techniques for Fretting Fatigue Crack Initiation and Propagation*. Universiteit Gent.
- Hojjati Talemi, R., Abdel Wahab, M., De Baets, P.** (2011). *Numerical modelling of fretting fatigue*. Journal of Physics: Conference Series 305 012061.
- Johnson, K. L.** (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Londres, UK.
- Johnson, K.L.** (1955). *Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces*. Proc. R. Soc. Lond. A Mater. 230, 531–548.
- Juoksukangas, J., Lehtovaara, A., Mäntylä, A.** (2013). *The effect of contact edge geometry on fretting fatigue behavior in complete contacts*. Wear 308 206–212.
- Kartal, M.E., Mulvihill, D.M., Nowell, D., Hills, D.A.** (2011). *Measurements of pressure and area dependent tangential contact stiffness between rough surfaces using digital image correlation*. Tribology International 44 1188–1198.
- Krolikowski, J., Szczepek, J.** (1993). *Assessment of tangential and normal stiffness of contact between rough surfaces using ultrasonic methods*. Wear 160, 253–258.
- Lee, S.M., Shin, M.W., Lee, W.K. & Jang, H.** (2013). *The correlation between contact stiffness and stick-slip of brake friction materials*. Wear 302 (2013) 1414–1420.
- Liu, Z., Shi, J., Wang, F., Yue, Z.** (2013). *Normal contact stiffness of the elliptic area between two asperities*. Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 28, No. 1.
- Madge, J. J.** (2008). *Numerical Modelling of the Effect of Fretting Wear on Fretting Fatigue*. PhD thesis in science. University of Nottingham, UK. 197 p.
- McCarthy, O.** (2009). *A Study of Microstructure-Sensitive Crack Nucleation and Wear in Fretting*. B.E., National University of Ireland, Galway.
- Mecapedia** – Departamento de Ingeniería Mecánica y Construcción - *Enciclopedia Virtual de Ingeniería Mecánica Área de Ingeniería Mecánica*. [Fecha de consulta: 15 de febrero de 2014]. Disponible en: <http://www.mecapedia.uji.es/seguidor.htm>.
- Mindlin R. D. and Deresiewicz H.** (1953). *"Elastic Spheres in Contact under Varying Oblique Forces,"* Journal of Applied Mechanics, vol. 20, pp. 327-344.

- Mindlin R.D., Mason W.P., Osmer J.F., Deresiewicz, H.** (1952). *Effects of an oscillating tangential force on the contact surfaces of elastic spheres*, in: Proceedings of the 1st US National Congress of Applied Mechanics-1951, ASME, New York, pp. 203–208.
- Mindlin, R.D.** (1949). *Compliance of elastic bodies in contact*, J. Appl. Mech. Trans. ASME 16 259–268.
- Miranda, G. P.** (2003). *Diseño de materiales multicapa resistentes al daño por contacto*. (Disertación doctoral). Universidad de Extremadura. Badajoz.
- Navarro, C., Domínguez, J.** (1999). *Anales de mecánica de la fractura vol. 16* Dpto. de Ingeniería Mecánica y de los Materiales. E.S.I de Sevilla.
- Nishioka, K. & Hirakawa, K.** (1972). *Fundamental Investigations of Fretting Fatigue (part 5)*, Bull JSME, Vol. 12(52), pp 408-414.
- Nishioka, K. & Hirakawa, K.** (1968). *Fundamental Investigation of Fretting Fatigue (parte 1)*, Bull JSME, Vol. 11(45), pp 437-445.
- Norden, N.** (1973). "On the Compression of a Cylinder Contact with a Plane Surface," National Bureau of Standards, Washington, D. C., E.U.A.
- Nowell, D., Dini, D., Hills, D.A.** (2004). *Recent developments in the understanding of fretting fatigue*.
- Ödfalk, M. and Vingsbo, O.** (1992). *An elastic-plastic model for fretting contact*. Wear 157(2): 435-444.
- Ompusunggu, A. P., Janssens, T., Al-Bender, F., Sas, P., Van Brussel, H.** (2010). *Contact Stiffness Characteristics of a Paper-Based Wet Clutch at Different Degradation Levels*. Technische Akademie Esslingen.
- Piscan, I., Ompusunggu, A. P., Janssens, T. & Predincea, N.** (2012). *Theoretical and Experimental Contact Stiffness Characterisation of Nominally Flat Surfaces*. Applied Mechanics and Materials Vol. 186 (2012) pp 107-113.
- Radzimovsky, E.** (2007). "Stress Distribution and Strength Condition of two Rolling Cylinders Pressed Together". University of Illinois at Urbana-Champaign Library. USA.
- Shafer, S.J. and Glaeser, W.A.** (1997). ASM Handbook, Vol. 19: *Fatigue and Fracture*, ASM International.

- Shi, J., Cao, X., Zhu, H.** (2014). *Tangential Contact Stiffness of Rough Cylindrical Faying Surfaces Based on the Fractal Theory*. Journal of Tribology. Vol. 136 / 041401-1.
- Sneddon, I. N.** (1965). *The relation between load and penetration in the axisymmetric boussineq problem for a punch of arbitrary profile*. Int. J. Engineering. Sci., 3:47–57.
- Taylor, D.E. & Waterhouse, R.B.** (1972). *Sprayed molybdenum coatings as a protection against fretting fatigue*. Wear 20(3), 401–407.
- Tegolaand, A., Mera, W.** (2010). *Influence of friction on the constrains with degrees of freedom on the seismic behavior of steel strucutres. Behaviour of Steel Structures in Seismic Areas*. ISBN: 978-0-203-11941-9. Pages 153–156.
- Timoshenko S. y Goodier J.N.** (1975). *Teoría De La Elasticidad*. Urmo, Bilbao, España, 2da. edición.
- Vallellano, C., Dominguez, J., Navarro, A.** (2004). *Predicting the fretting fatigue limit for spherical contact*. Engineering Failure Analysis 11 727–736.
- Vu-Quoc, L., Lesburg, L., Zhang, X.** (2004). *An accurate tangential force–displacement model for granular-flow simulations: Contacting spheres with plastic deformation, force-driven formulation*. Journal of Computational Physics 196 298–326.
- Wang, H., Zheng, Y., Rong Y.** (2005). *Contact Stiffness Study: Modelling and Identification. Finite Element Analysis - From Biomedical Applications to Industrial Developments*, Dr. David Moratal (Ed.), ISBN: 978-953-51-0474-2, InTech.
- Warmuth, A.R., Pearson, S.R., Shipway, P.H.** (2013). *The effect of contact geometry on fretting wear rates and mechanisms for a high strength Steel*. Wear 301 491–500.
- Wu A., Shi X., Polycarpou A. A.** (2012). *An Elastic-Plastic Spherical Contact Model Under Combined Normal and Tangential Loading*. Vol. 79 / 051001-1.
- Yaqoob, M. A., et. al.** (2013). *Pre-sliding Behaviour of Single Asperity Contact*. Springer. Tribol Lett (2013) 49:553–562
- Yang, H.** (2014). *Modeling and Analysis of Normal Contact Stiffness of Machined Joint Surfaces*. International Journal of Control and Automation Vol.7, No.6, pp.21-32.