

# **Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico**

**Subdirección Académica**

**Departamento de Ingeniería Electrónica**

## **TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS**

**Modelado y Construcción de un Sistema de Orden Conmutado de un  
Actuador Mecánico Rotacional para Arreglos de Alambres Musculares**

presentada por

**Ing. Ricardo Valdivia Arreola**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica**

Director de tesis  
**Dr. Juan Reyes Reyes**





**Director de Tesis**

Dr. Juan Reyes Reyes

**Revisores de Tesis**

Dr. Luis Gerardo Vela Valdés

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza

**Fecha de Titulación**

22 ene 2016

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Cuernavaca, Mor., 12 de enero de 2016

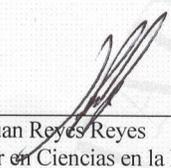
OFICIO No. DIE/09/2016  
Asunto: Aceptación de documento de tesis

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**  
**PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Ricardo Valdivia Arreola** con número de control **M13CE087** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "**MODELADO Y CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE ORDEN CONMUTADO DE UN ACTUADOR MECÁNICO ROTACIONAL PARA ARREGLOS DE ALAMBRES MUSCULARES**" y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

CODIRECTOR DE TESIS



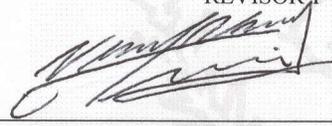
---

Dr. Juan Reyes Reyes  
Doctor en Ciencias en la Especialidad de Control Automático  
Cédula profesional **4214833**

---

REVISOR 1

REVISOR 2



---

Dr. Luis Gerardo Vela Valdés  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional **7980044**



---

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza  
Doctor en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional **5505019**

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Estudiante  
Expediente

CMAZ/Irr



SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Cuernavaca, Mor., 12 de enero de 2016  
OFICIO No. SAC/004/2016

**Asunto:** Autorización de impresión de tesis

**ING. RICARDO VALDIVIA ARREOLA**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA**  
**PRESENTE**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“Modelado y Construcción de un Sistema de Orden Conmutado de un Actuador Mecánico Rotacional para Arreglos de Alambres Musculares”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

“CONOCIMIENTO Y TECNOLOGIA AL SERVICIO DE MEXICO”

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**

CENTRO NACIONAL DE  
INVESTIGACIÓN Y  
DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Expediente

GVGR/mcr



# Agradecimientos

Agradezco a mis abuelitos, mis padres, mis tíos y mis hermanos Diego, Micky, Xime, Wiss y Pelón, por su amor, sustento, hospitalidad, fortaleza, confianza y alegría.

Agradezco a Anita por su compañía, cariño, apoyo, motivación y amor.

Agradezco al resto de mi familia por los consejos, ánimos y buenos momentos que hemos compartido.

Agradezco a mi asesor, el Dr. Juan Reyes Reyes por sus enseñanzas, consejos y apoyo en mi trabajo de tesis.

A mis revisores, el Dr. Luis Gerardo Vela Valdés y el Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza por sus observaciones y apoyo para alcanzar el grado de maestría.

Agradezco a mis amigos de la infancia y juventud que siempre están al pendiente de mis logros y por estar en su memoria.

Agradezco a mis amigos del tec que siempre preguntaron “¿qué tal va la tesis?”, porque me hicieron recordar mis objetivos en los momentos de distracción.

Agradezco a mis amigos del CENIDET, por sus enseñanzas y compañía en los momentos de estudio.

Agradezco al personal docente del CENIDET, en especial a los doctores, Juan Reyes, Carlos Astorga, Gerardo Guerrero, Carlos Daniel, Fabricio Escobar, Manuel Adam y Jesús Mina, quienes me impartieron clases.

Agradezco al personal administrativo del CENIDET, en especial a la licenciada Lorena, quien nos ha apoyado desde el inicio hasta el final de nuestros estudios de postgrado.

Agradezco al CONACYT por el apoyo económico que me brindó para mis estudios de maestría.

Y sobre todo a Dios que me ha rodeado de personas maravillosas que han sido parte de este pequeño andar por la vida.



*A mis litos, a los maís, a mis hermanos y a mí Yuyí.  
Gracias por todo.*



## Resumen

En el presente trabajo de tesis, se obtiene un sistema de orden conmutado por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange, a partir del modelado de un actuador mecánico rotacional conformado por un eje, sobre el cual se encuentran montados dos trinquetes y dos palancas. Posteriormente, se obtiene el sistema de orden conmutado en su forma generalizada, modelando un actuador con un eje común,  $p$  trinquetes y  $p$  palancas.

Con el actuador de dos palancas, se explica de manera pormenorizada el funcionamiento del sistema de orden conmutado, y se introduce nomenclatura que permite clasificar los submodelos que describen los acoplamientos mecánicos del actuador. La utilidad de la nomenclatura se acentúa al desarrollar el modelado del actuador con  $p$  palancas.

Posteriormente se diseñan los elementos que conforman el actuador mecánico rotacional con dos palancas, para realizar su construcción y poder realizar pruebas experimentales. El sistema de orden conmutado obtenido del actuador con dos palancas es simulado y comparado con las pruebas experimentales del prototipo.

## Abstract

In this thesis, a switched order system is obtained by Euler-Lagrange equations, from modeling a rotational mechanical actuator that consists of a shaft on which two ratchets and two levers are mounted. Subsequently, the generalized form of the switched order system is obtained by modeling an actuator with a common shaft,  $p$  ratchets and  $p$  levers.

The two levers actuator is used to explain in detail the operations of the switched order system, besides the nomenclature to classify submodels which describe the mechanical coupling of the actuator is inserted. The usefulness of the nomenclature is accentuated by developing modeling actuator with  $p$  levers.

Then the elements of the rotational mechanical actuator with two levers, for its construction and to perform experimental tests are designed. The switched order system obtained from the two levers actuator is simulated and compared with experimental tests of the prototype.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	2
1.2. Antecedentes de los alambres musculares en el CENIDET . . . . .	3
1.3. Problemática . . . . .	4
1.4. Objetivos . . . . .	6
1.4.1. Objetivo general . . . . .	6
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	6
1.5. Hipótesis . . . . .	6
1.6. Alcance . . . . .	6
<b>2. Marco teórico</b>	<b>9</b>
2.1. Materiales con memoria de forma . . . . .	9
2.1.1. Fase de austenita . . . . .	9
2.1.2. Fase de martensita . . . . .	10
2.1.3. Alambre muscular . . . . .	10
2.2. Actuador mecánico rotacional para dos alambres musculares . . . . .	13
2.2.1. Función de conmutación $\phi$ . . . . .	15
2.2.2. Parámetro de memoria $\delta_\theta$ . . . . .	15
2.2.3. Vector de conmutación $v_c$ . . . . .	16
<b>3. Modelado de un sistema de orden conmutado</b>	<b>21</b>
3.1. Modelado del actuador mecánico rotacional con dos palancas . . . . .	21
3.1.1. Modelos en su forma matricial . . . . .	28
3.1.2. Sistema de orden conmutado en su forma canónica . . . . .	30
3.1.3. Regiones de operación del actuador mecánico rotacional con dos palancas . . . . .	34

3.2. Actuador mecánico rotacional con $p$ palancas . . . . .	35
<b>4. Diseño y construcción del prototipo</b>	<b>45</b>
4.1. Diseño . . . . .	45
4.1.1. Actuador mecánico rotacional . . . . .	45
4.1.2. Banco del actuador mecánico rotacional . . . . .	50
4.2. Construcción . . . . .	51
4.2.1. Actuador mecánico rotacional . . . . .	51
4.2.2. Banco del actuador mecánico rotacional . . . . .	53
4.2.3. Montaje del actuador mecánico rotacional sobre su banco . . . . .	53
<b>5. Simulación y pruebas experimentales</b>	<b>57</b>
5.1. Simulación del sistema de orden conmutado con dos palancas . . . . .	57
5.1.1. Resultados . . . . .	60
5.2. Pruebas con el prototipo . . . . .	65
5.2.1. Construcción del prototipo . . . . .	65
5.2.2. Pruebas experimentales . . . . .	65
5.2.3. Resultados . . . . .	67
<b>6. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>73</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	73
6.2. Trabajo futuro . . . . .	76
<b>Bibliografía</b>	<b>76</b>
<b>A. Planos del prototipo y material utilizado</b>	<b>83</b>

# Índice de figuras

1.1. Actuador mecánico rotacional . . . . .	5
2.1. Estructura de material inicial y estructura de material entrenado [3] . . . . .	10
2.2. Tipos de martensita [3] . . . . .	10
2.3. Lazos de histéresis de temperatura-deformación . . . . .	12
2.4. Sistema con dos trinquetes . . . . .	13
2.5. a) Posición del eje y de la palanca en el momento $t'_-$ , b) Posición del eje con offset en el momento $t'$ . . . . .	16
3.1. Vista lateral de un elemento desacoplado . . . . .	22
3.2. Actuador con $p$ alambres musculares . . . . .	36
4.1. Rueda dentada, sdp-si.com . . . . .	46
4.2. Fragmento del catálogo de ruedas dentadas, sdp-si.com . . . . .	47
4.3. a) Diseño del horse head convencional, b) Diseño del horse head propuesto . . . . .	48
4.4. Sujeción del alambre de cobre en la palanca con horse head . . . . .	49
4.5. Eje de acero inoxidable, sdp-si.com . . . . .	49
4.6. Eje de acero inoxidable, sdp-si.com . . . . .	50
4.7. a) Distribución de piezas, b) Perspectiva derecha y c) Perspectiva izquierda del ensamblado de la palanca con horse head . . . . .	52
4.8. a) Distribución de piezas, b) Perspectiva derecha y c) Perspectiva izquierda del ensamblado del trinquete . . . . .	52
4.9. Perspectiva del ensamblado del eje . . . . .	53
4.10. Distribución de pijas para el armado del banco del actuador mecánico rotacional . . . . .	54
4.11. a) Perspectiva derecha y b) Perspectiva izquierda del prototipo construido . . . . .	55
5.1. Diagrama a bloques de la simulación . . . . .	58

5.2. Despeje de $\ddot{x}$ . . . . .	60
5.3. Arreglo de los submodelos en una ecuación . . . . .	60
5.4. Obtención de los estados para la simulación . . . . .	60
5.5. Fuerza de los alambres musculares, posiciones y velocidades de las palancas	61
5.6. Orden del sistema, posición del eje y velocidad del eje . . . . .	63
5.7. Posiciones negativas por efecto de la gravedad . . . . .	64
5.8. a) Vista en perspectiva y b) Vista lateral derecha del prototipo del actuador mecánico rotacional . . . . .	66
5.9. Implementación del actuador mecánico rotacional . . . . .	66
5.10. Etapa de potencia . . . . .	67
5.11. a) Voltaje consumido por el alambre muscular 1, b) Voltaje consumido por el alambre muscular 2 y c) Posición angular del eje $\bar{\theta}$ . . . . .	71
5.12. Pruebas de caída de voltaje . . . . .	72
A.1. Piezas del actuador mecánico rotacional . . . . .	85
A.2. Banco de madera para el actuador mecánico rotacional . . . . .	85
A.3. Pieza A . . . . .	86
A.4. Pieza B . . . . .	86
A.5. Pieza C . . . . .	87
A.6. Pieza D . . . . .	87

# Índice de tablas

2.1. Especificaciones de alambres musculares, <a href="http://www.dynalloy.com">www.dynalloy.com</a> . . . . .	11
2.2. Nomenclatura . . . . .	14
2.3. Nomenclatura para sistemas con $p$ palancas . . . . .	17
3.1. Nomenclatura . . . . .	22
5.1. Parámetros de simulación . . . . .	58
A.1. Piezas para la construcción del prototipo . . . . .	84



# Capítulo 1

## Introducción

En el presente trabajo, se modela un actuador mecánico rotacional por las ecuaciones de Euler-Lagrange. El modelado del sistema en estudio, cuenta con trinquetes que por su naturaleza permiten el giro del sistema en un sólo sentido. Los actuadores de simple efecto elegidos para activar los trinquetes fueron alambres musculares, ya que para propósitos de implementación tienen la ventaja de ofrecer una gran fuerza con respecto a su pequeño volumen. Del modelado del actuador mecánico rotacional, para alambres musculares, se han concebido múltiples aportaciones, las más sobresalientes son:

- La propuesta del modelado de orden conmutado para un actuador mecánico rotacional para  $p$  palancas.
- El diseño de un prototipo para dos palancas.
- La construcción de un prototipo para dos palancas con posición angular instrumentada en el eje del actuador rotacional.

Este capítulo contiene una introducción al modelado de sistemas físicos, con la finalidad de situarnos en el contexto en que se busca realizar nuestra aportación. Es decir, el modelado de un sistema de orden conmutado. También contiene una introducción a los alambres musculares que son de interés en el diseño del actuador mecánico rotacional, así como un estado del arte y los antecedentes en el CENIDET que hacen referencia a trabajos en los que se han empleado alambres musculares.

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico, el cual sirve de apoyo para los resultados del presente trabajo mostrados en el capítulo 3, donde el modelo del sistema es llevado a cabo para un actuador con dos palancas para dos alambres musculares en la primera parte

de dicho capítulo. Posteriormente en la segunda sección del capítulo 3, se lleva a cabo el modelado de un sistema con  $p$  palancas para  $p$  alambres musculares, haciendo notar la diversidad estructural que existe en algunos de sus submodelos que lo describen.

El capítulo 4 está dedicado al diseño y construcción del prototipo. Mientras que en el capítulo 5 se muestran los resultados de las simulaciones y de las pruebas realizadas con el prototipo. Finalmente, en el capítulo 6 se muestran las conclusiones y el trabajo futuro.

## 1.1. Estado del arte

El modelo matemático de un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión, o por lo menos bastante bien [14]. Cabe mencionar que los modelos matemáticos no son exactos, pues tienden a idealizarse [18]. El tener conocimiento del comportamiento de un sistema posibilita el diseño de una ley de control que pueda gobernar al sistema en estudio [11].

Los métodos de modelado sistemático encontrados en la literatura son:

- el modelado por métodos de red
- el modelado por métodos variacionales y
- el modelado por métodos de Bond-Graph

Los métodos variacionales se derivan de los estudios de Lagrange, Hamilton y Euler [18]. Se hace énfasis en el método de modelado variacional debido a que el modelado por las ecuaciones de Euler-Lagrange serán de utilidad en la presente tesis.

El modelo de un sistema mecánico debe cumplir con ciertas características. Tales como: una matriz de inercia simétrica definida positiva

$$D = D^T > 0, \tag{1.1}$$

una matriz de Coriolis simétrica que sea igual a su inversa aditiva

$$C = -C^T \tag{1.2}$$

y una matriz de Rayleigh definida positiva [17]

$$R > 0. \tag{1.3}$$

Pasando ahora a los actuadores elegidos para la presente tesis, se encontró en la literatura que los alambres musculares son alambres hechos de una aleación con memoria de forma SMA; por su acrónimo en Inglés (Shape Memory Alloy). Entre las múltiples aleaciones con memoria de forma, la de uso más común es la de níquel y titanio (nitinol), tanto en la industria como en la medicina [2]. Un alambre muscular es un actuador térmico, al momento de calentarlo recuperan su forma original (fase de austenita), logrando así una contracción en el alambre muscular; cuando se enfría el alambre muscular y se le aplica una fuerza de tensión, el alambre muscular se estira (regresando a la fase martensita) [4].

El alambre muscular presenta no linealidades como saturación en su cambio de posición y en la fuerza que entrega, además presenta lazos de histéresis en las curvas de temperatura-deformación.

La mayoría de los modelos matemáticos están basados en el trabajo de Ikuta [9], el cual muestra no linealidades como saturación en su cambio de posición y en la fuerza que es capaz de ejercer. Además de lazos de histéresis en las curvas termoelásticas del alambre muscular.

Los alambres musculares son ampliamente utilizados como actuadores en brazos de palanca [16], en pinzas con dedos mecánicos [12], en mesas para observaciones microscópicas [13], en alerones de aviones [10], en robots móviles [7], en endoscopia activa [8], y en prótesis [1], por mencionar algunos.

Los alambres musculares son una gran motivación en el diseño del actuador mecánico rotacional. Debido a que son pequeños, entregan una gran fuerza de trabajo con respecto a su bajo consumo energético y es un actuador unidireccional. El comportamiento del alambre muscular es aprovechado por el actuador mecánico rotacional, del presente trabajo. Transformando el movimiento oscilatorio traslacional del alambre muscular, en un movimiento intermitente y unidireccional.

## 1.2. Antecedentes de los alambres musculares en el CENIDET

En la necesidad de contar con tecnologías amigables con el ambiente, la comunidad científica tiende a miniaturizar los dispositivos que nos rodean, buscando que sean más eficientes en su consumo energético; en muchos casos estos retos recaen sobre alguna de las ramas de la electrónica, mecánica, robótica, mecatrónica y/o teoría de control.

En el departamento de ingeniería electrónica en la especialidad de control automático

del CENIDET, se encuentra el trabajo de tesis “Regulación de Velocidad Promedio de un Sistema Electrotérmico- Mecánico Móvil con Alambres Musculares” [6] en el que se han utilizado los alambres musculares para actuar un pequeño prototipo mecánico móvil, y regular su velocidad promedio. En dicho trabajo, se desarrolla el modelado y control por análisis de Lyapunov de un sistema electrotérmico-mecánico móvil basado en alambres musculares, dicho sistema es un actuador basado en un trinquete con un alambre muscular y un resorte. De este trabajo de tesis se derivó un artículo “Modelado y control de un sistema Electrotérmico-Mecánico móvil basado en alambres musculares” [15] en el que se presenta un controlador basado en una ley de control tipo PI con histéresis (PIH) para el seguimiento de trayectoria de la posición angular del eje de rotación del actuador propuesto, mismo que se presenta en la tesis antes mencionada.

Al igual que los trabajos previos en el CENIDET, se pretende que este trabajo enriquezca el conocimiento que se tiene acerca de la aplicación de los alambres musculares, ya que parte de la aportación de la presente tesis asociada a un actuador mecánico rotacional presenta características como:

- La utilización de múltiples alambres musculares.
- Un modelado del sistema de orden conmutado.
- Una notación creada para llevar a cabo las ecuaciones por Euler-Lagrange.

### 1.3. Problemática

El sistema que se utilizará en el presente trabajo se puede ver en la figura 1.1, los pormenores se explicarán en la sección 2.2, sin embargo se puede apreciar el actuador mecánico rotacional y sus elementos. Uno de sus elementos de mayor interés es el trinquete, así como la muy útil palanca con horse head.

Las palancas con horse head son los elementos que transmiten movimiento al sistema, son actuadas por fuerza resultante de la fuerza de un alambre muscular y la fuerza de un resorte de pretensado. Las palancas tienen un diseño con horse head para que la fuerza de un alambre muscular se transmita perpendicularmente al sistema y así facilitar el modelado por las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La parte importante del sistema es el trinquete, ya que es en este elemento donde se llevan a cabo las conmutaciones del sistema, sin él no habría acoplamientos y desacoplamientos en el sistema. Son estos acoplamientos los que permiten a los alambres musculares

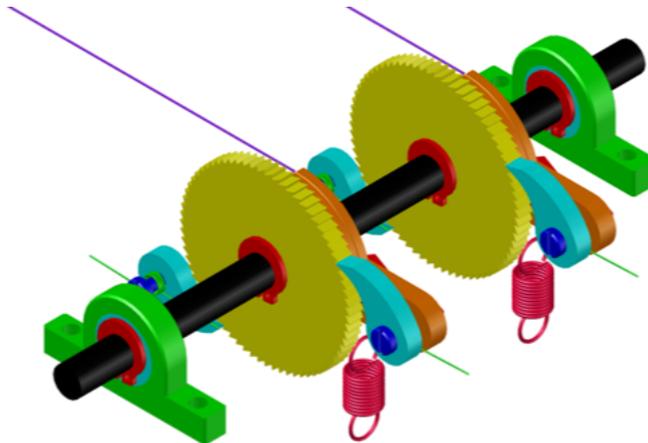


Figura 1.1: Actuador mecánico rotacional

hacer girar el sistema, de lo contrario, si el sistema no contara con trinquetes, el actuador mecánico rotacional simplemente oscilaría apenas una fracción de radian limitada por la contracción máxima de un alambre muscular.

El alambre muscular al ser un actuador unidireccional, sólo ejerce fuerza de trabajo al contraerse cuando es calentado, con lo que estira a un resorte de pretensado; cuando el alambre muscular se enfría, es estirado por el resorte de pretensado, con una fuerza pequeña en comparación a la ejercida por el alambre muscular cuando se contrae. El comportamiento de vaivén de un alambre muscular es transmitido a una palanca con horse head. La palanca con horse head convierte el movimiento traslacional y oscilatorio en un movimiento rotacional e intermitente que se transmite a un trinquete. El trinquete aprovecha únicamente la fuerza de trabajo del alambre muscular haciendo girar el eje, al cual se encuentra unido, mientras que la fuerza resultante del alambre muscular cuando es estirado por el resorte de pretensado es utilizada únicamente para regresar la palanca con horse head a su posición inicial a  $0^{\circ}$ .

Cabe resaltar nuevamente, que el alambre muscular sólo puede ejercer una fuerza significativa al contraerse y no al estirarse. Ya que para ser estirado, además de la condición de estar frío, se le debe aplicar una fuerza externa para poderlo estirar. Dicho de diferente manera, un alambre muscular sólo estira pero no empuja.

En resumen, el planteamiento del problema del modelado, diseño y construcción de un actuador mecánico rotacional para arreglos de alambres musculares, se encuentra en el comportamiento del actuador elegido. Es decir, un alambre muscular, que sólo ejerce una fuerza de trabajo al contraerse, mientras que para estirarse necesita de una fuerza externa aplicada por un resorte de pretensado y por lo tanto, la fuerza ejercida al elongarse es

despreciable. Sumado a esto, se tienen los acoplamientos que genera un trinquete mientras un alambre muscular es estirado. Además, al tener un arreglo de alambres musculares la complejidad del modelo se incrementa, mientras más alambres se le añaden al sistema.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo general

Modelar, diseñar y construir un sistema mecánico que constituya un actuador mecánico rotacional con arreglos de palancas.

### 1.4.2. Objetivos específicos

- Realizar el modelado de la energía cinética de un sistema de orden conmutado.
- Realizar el modelado de las ecuaciones de energía potencial y de disipación de energía de un sistema.
- Modelar un sistema con  $p$  palancas.
- Diseñar el prototipo de un actuador mecánico rotacional con al menos dos palancas.
- Construir el actuador mecánico rotacional con al menos dos palancas diseñado previamente.

## 1.5. Hipótesis

Un modelo de orden conmutado representa adecuadamente un actuador mecánico rotacional con elementos intermitentes, como lo son los trinquetes; y permite agrupar los diferentes submodelos que puedan describir un sistema bajo diversas condiciones iniciales.

## 1.6. Alcance

El trabajo desarrollado en la presente tesis no resultó ser trivial, por lo que se invirtió más tiempo del programado en el modelado del sistema y las actividades programadas en un principio en el cronograma no se pudieron cumplir en tiempo. Se tomó como prioridad emplear el tiempo de la presente tesis en el correcto modelado del sistema, porque los

modelos anteriores no eran adecuados ya que estaban formulados de manera incorrecta, y sin un modelo que describa correctamente al sistema no hubiera sido viable el diseño de una ley de control basada en modelo.

Es por ello que el alcance de la tesis se encuentra en el modelado, diseño y construcción de un actuador mecánico rotacional. Así como las simulaciones del modelo y las pruebas con el prototipo.



# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Materiales con memoria de forma

Los materiales con memoria de forma tienen la habilidad de recordar la forma que tenían a una determinada temperatura y fuerza de tensión; incluso después de haber sufrido grandes deformaciones a bajas temperaturas. Estos cambios externos en el material con memoria de forma se deben a un acomodamiento en su estructura molecular, dichas estructuras se clasifican como fase de austenita y fase de martensita.

#### 2.1.1. Fase de austenita

En esta fase, el alambre muscular se encuentra en su forma y tamaño original (dimensiones a las que fue entrenado). La fase de austenita se presenta al calentar el material con memoria de forma, generando una contracción que alinea a los átomos formando una estructura altamente simétrica en su cristalografía y usualmente cúbica. Tiene comportamiento elástico y es relativamente duro [5].

En esta fase se puede entrenar el material para que recuerde alguna forma deseada. Este entrenamiento se lleva a cabo deformando el material y aplicándole un tratamiento térmico, de esta forma el material recordará la forma con la que ha sido entrenado y adoptará dicha forma cuando sea sometido nuevamente a altas temperaturas, vea la figura 2.1.

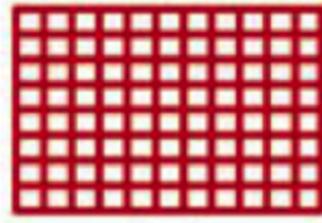


Figura 2.1: Estructura de material inicial y estructura de material entrenado [3]

### 2.1.2. Fase de martensita

La fase de martensita también llamada 'la fase en frío' tiene dos tipos de estructura, la martensita maclada y la martensita demaclada. Cualquiera que sea el tipo de martensita, su estructura siempre será antisimétrica en su cristalografía. La fase de martensita se presenta a temperaturas menores que las de la fase de austenita, tiene comportamiento plástico y es relativamente suave [5].

La fase de martensita maclada tiene lugar después de la fase de austenita, cuando el alambre es enfriado. Exteriormente no ocurre ningún cambio ya que mantiene la forma y longitud de la fase de austenita. Sin embargo, a nivel atómico la estructura tiene un autoacomodo, vea la figura 2.2a. Si a continuación la martensita maclada se deforma por la aplicación de una fuerza de tensión, las fronteras se desplazan creciendo unas regiones a costa de otras, es lo que se denomina demaclado, vea la figura 2.2b.

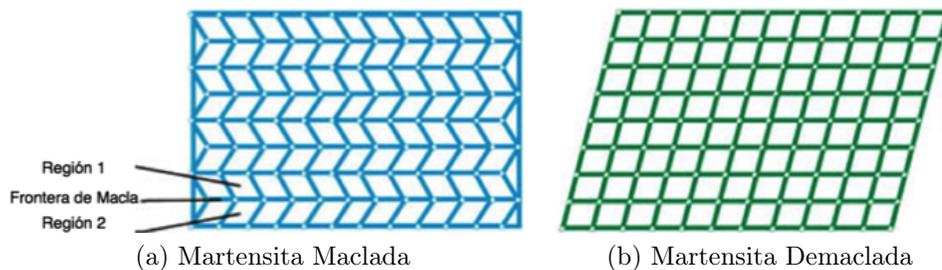


Figura 2.2: Tipos de martensita [3]

### 2.1.3. Alambre muscular

Los alambres musculares, son alambres hechos de una aleación con memoria de forma SMA; por su acrónimo en Inglés (Shape Memory Alloy). Entre las múltiples aleaciones con memoria de forma, la de uso más común es la de níquel y titanio (nitinol), tanto en la industria como en la medicina [2].

Como ya se ha mencionado, estos materiales pueden ser entrenados para cambiar de forma dependiendo de la temperatura a la que sean sometidos. A temperatura ambiente son muy fáciles de estirar con la acción de una fuerza mínima. Al calentarlos, generalmente por efecto Joule, se hace que el alambre muscular tome su forma original (fase de austenita), logrando así una contracción en el alambre muscular. Cuando se enfría el alambre muscular y se le aplica una fuerza de tensión, el alambre muscular se estira (regresando a la fase martensita) [4].

En el caso de los alambres musculares que se utilizarán en este trabajo de tesis, están preparados para producir un acortamiento de un 5% de su longitud.

Existen alambres musculares que trabajan a alta temperatura (HT), y otros que trabajan a baja temperatura (LT). Los de alta temperatura tienen un tiempo de enfriamiento menor con respecto a los de baja temperatura. En el Cuadro 2.1 se observa el tiempo de enfriamiento a una temperatura ambiente de 25°C. Estas velocidades pueden ser incrementadas hasta diez veces si los alambres son ventilados o sumergidos en agua o vaselina.

Tabla 2.1: Especificaciones de alambres musculares, [www.dynalloy.com](http://www.dynalloy.com)

Diámetro Pulgadas (mm)	Resistencia ohms/pulgada (ohms/metro)	Fuerza de Contracción libras (gramos)	Fuerza de Elongación libras (gramos)	Corriente Aproximada por 1 segundo de contracción (mA)	Tiempo de Enfriamiento 158°F, 70°C alambre LT (segundos)	Tiempo de Enfriamiento 194°F, 90°C alambre HT (segundos)
0.004 (0.10)	3.2 (126)	0.31 (143)	0.12 (57)	200	1.1	0.9
0.006 (0.15)	1.4 (55)	0.71 (321)	0.28 (128)	410	2.0	1.7
0.008 (0.20)	0.74 (29)	1.26 (570)	0.50 (228)	660	3.2	2.7

\* La fuerza de tracción de calentamiento esta basada en 25,000 psi (172 MPa).

\*\* El tiempo de contracción es directamente proporcional a la corriente de entrada.

\*\*\* Tiempo de enfriamiento aproximado, a temperatura controlada con aire estático y utilizando un alambre vertical.

Para alargar la vida útil y obtener un buen desempeño se debe tener en cuenta en el diseño:

- Un buen contacto eléctrico y mecánico.
- Protección del alambre muscular para posible sobrecalentamiento.

Como se mencionó en la sección 1.1, gran parte de los modelos matemáticos están basados en el trabajo de Ikuta [9], el cual presenta el modelo matemático de las propiedades mecánicas y la transformación termo-elástica del alambre muscular, así como los lazos mayores de histéresis de temperatura-deformación, figura 2.3.

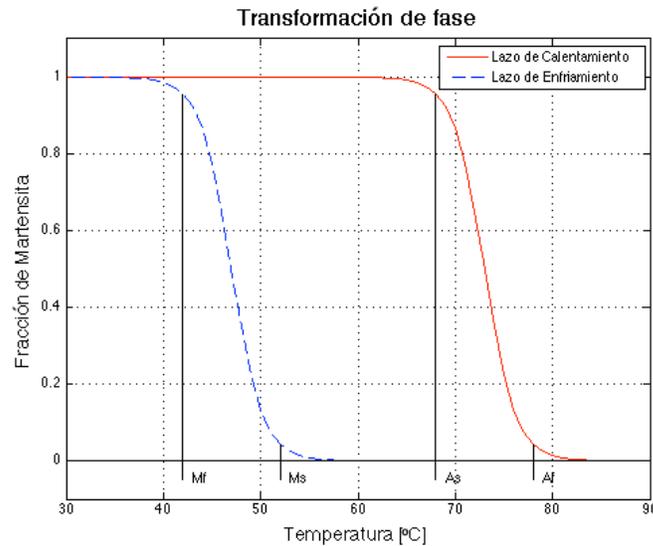


Figura 2.3: Lazos de histéresis de temperatura-deformación

Donde  $\varepsilon$  es la deformación del alambre muscular.

Algunos trabajos posteriores muestran lazos menores de histéresis [13], interrumpiendo los lazos mayores de histéresis en alguna parte de su ciclo [5].

Otros autores i.e. [12], optan por realizar una linealización de la dinámica del alambre por medio de una fuerza de pretensado, con lo que se logra eliminar en gran medida los lazos de histéresis sacrificando el porcentaje de contracción.

Comparados con los solenoides, los alambres musculares poseen muchas ventajas como: tamaño pequeño, livianos, bajo consumo, control preciso, activación por corriente continua o alterna, bajo magnetismo, accionamiento lineal directo, deformable, entre otras. Por lo que tienen muchas aplicaciones en alas de aviones pequeños, actuadores de robot móviles, manipulación de micro robots, endoscopía activa, estructuras inteligentes, entre otras [4]. Las aplicaciones de los alambres musculares son diversas, desde brazo de palanca [16], pinza con dedos mecánicos [12], hasta mesas para observaciones microscópicas [13].

Los alambres musculares son una gran motivación en el diseño del actuador mecánico rotacional, debido a que es pequeño entrega una gran fuerza de trabajo con respecto a su bajo consumo energético y es un actuador unidireccional. El comportamiento del alambre muscular es aprovechada por el actuador mecánico rotacional del presente trabajo, transformando el movimiento oscilatorio traslacional del alambre muscular en un movimiento intermitente y unidireccional.

## 2.2. Actuador mecánico rotacional para dos alambres musculares

El primer sistema que se considera para el presente estudio utiliza dos alambres musculares. El sistema tiene una entrada mecánica generada por la contracción y el estiramiento de los alambres musculares  $f_1$  y  $f_2$ , y los resortes de pretensado  $e_1$  y  $e_2$ ; que transfieren su movimiento traslacional a sus correspondientes palancas con horse head  $d_1$  y  $d_2$  (Fig. 2.4).

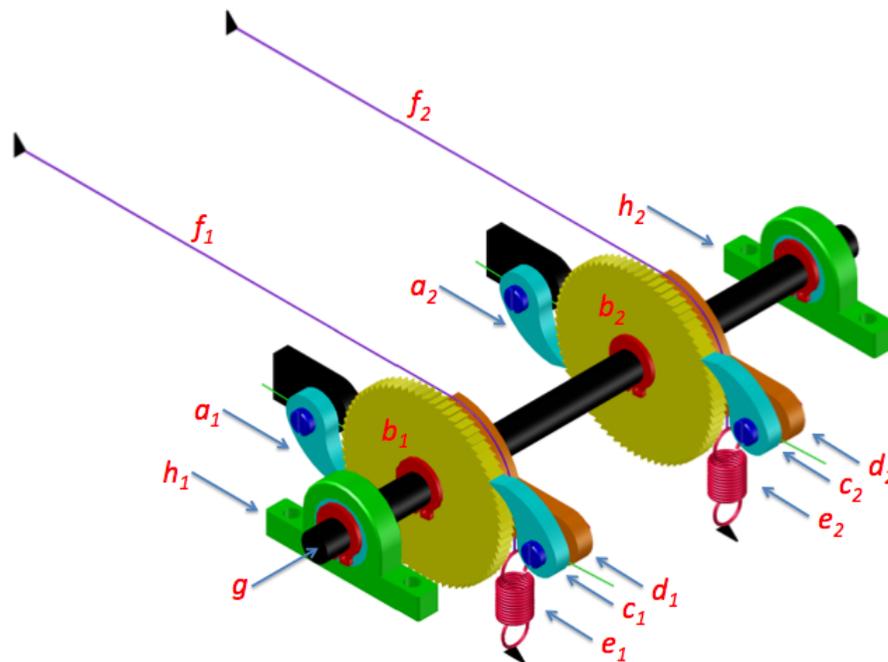


Figura 2.4: Sistema con dos trinquetes

En la misma figura se pueden ver los demás elementos del prototipo, como son:

Tabla 2.2: Nomenclatura

$a_i$	Uña de atranque
$b_i$	Rueda dentada
$c_i$	Uña de trabajo
$d_i$	Palanca con horse-head
$e_i$	Resorte
$f_i$	Alambre muscular
$g$	Eje
$h_i$	Rodamientos

donde  $i = 1, 2$ .

Las palancas con horse head adquieren los movimientos oscilatorios, que son transmitidos a sus respectivos trinquetes. En esta parte, el movimiento oscilatorio de cada palanca es convertido en un movimiento rotacional intermitente y en un solo sentido, que es transmitido al eje  $g$ . Los trinquetes, formados por una rueda dentada  $d_i$ , una uña de trabajo  $c_i$  y una uña de atranque  $a_i$ , crean acoplamientos y desacoplamientos en el sistema.

Esto hace que el sistema se comporte como si todas sus piezas estuvieran soldadas, formando un solo elemento cuando todos los trinquetes se encuentran acoplados. Es decir, el sistema sería un *Eje-Palancas-Trinquetes-Uñas-Alambres-Resortes* conformado por  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g, h_i$ . Por el contrario, cuando el sistema tiene todos sus trinquetes desacoplados, el sistema cuenta con  $p + 1$  elementos, es decir, con  $p$  elementos *Alambre-Resorte-Palanca-Uña de Trabajo* y un elemento *Eje-Ruedas Dentadas-Uñas de Atranque*; donde  $p$  es el número de palancas en el sistema.

Con  $p = 2$  (Fig. 2.4), los tres elementos del sistema desacoplado son el *Eje-Ruedas Dentadas-Uñas de Atranque*, el *Alambre1-Resorte1-Palanca1-Uña de Trabajo1* y *Alambre2-Resorte2-Palanca2-Uña de Trabajo2*.

Al realizar el modelo del sistema, se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden por cada elemento. Por ello, el sistema puede ser de segundo orden como mínimo y puede ser de  $2(p + 1)$  como máximo. Como es de esperarse el sistema tiene varios submodelos. Los submodelos y el orden de los submodelos varían de acuerdo a las palancas que se encuentren desacopladas. No puede haber dos modelos que describan al sistema en un momento determinado, es decir los modelos conmutan entre uno y otro. Esta conmutación está en función de las velocidades relativas de las palancas con respecto al eje.

### 2.2.1. Función de conmutación $\phi$

La función de conmutación ( $\phi$ ), es una representación matemática del acoplamiento mecánico del trinquete con el eje. Debido a que el trinquete sólo puede estar acoplado al sistema o no estarlo, la función de conmutación es binaria.

Sea la función conmutación  $\phi_i$ , la función binaria adquiere valores de 1 cuando la velocidad angular relativa de la  $i$ -ésima palanca ( $\dot{\theta}_i$ ) con respecto al eje ( $\dot{\bar{\theta}}$ ), es menor o igual a cero; y adquiere valores de 0 cuando la velocidad angular relativa es mayor que cero, es decir

$$\phi_i = \begin{cases} 0 & , \Delta\theta_i > 0 \\ 1 & , \Delta\theta_i \leq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $\Delta\theta_i = \dot{\bar{\theta}} - \dot{\theta}_i$ .

El sistema puede conmutar indiscriminadamente entre sus múltiples submodelos. Cuando se acopla alguno de los trinquetes se pierde información de la posición de su palanca correspondiente. Esto hace necesario un parámetro de memoria  $\delta_\theta$ , que registre la posición que tenían las palancas en el submodelo anterior, justo antes de conmutar.

### 2.2.2. Parámetro de memoria $\delta_\theta$

El parámetro de memoria es un artificio propuesto, utilizado para modelar la energía potencial de alguna palanca cuando se encuentra acoplada al sistema. Debido a que en estos casos, el submodelo del sistema acoplado se encuentra en función de la variable generalizada  $\bar{\theta}$ . Mientras que la energía potencial de la palanca debería estar en función de su posición angular  $\theta_i$ .

El parámetro de memoria se considera como constante en el submodelo acoplado y cambia su valor en un instante  $t'_-$ , en el cual ocurre el acoplamiento.

Con la función de memoria se busca crear un offset para reiniciar la posición del eje (únicamente para la palanca acoplada), tomando en cuenta la posición de la palanca acoplada, vea la figura 2.5b. La función con memoria de forma  $\delta_{\theta_i t'_-}$  se describe como:

$$\delta_{\theta_i t'_-} = -\bar{\theta}_{t'_-} + \theta_{i t'_-}, \quad (2.2)$$

dónde

$$t'_- = t' - \xi$$

$$\xi \rightarrow 0$$

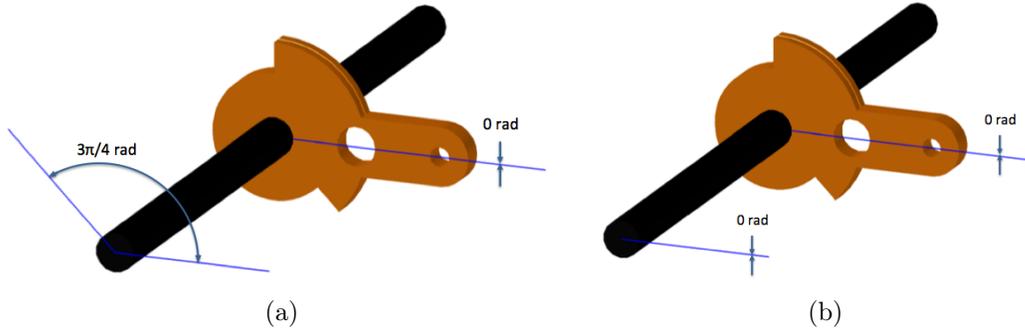


Figura 2.5: a) Posición del eje y de la palanca en el momento  $t'_-$ , b) Posición del eje con offset en el momento  $t'$

Este parámetro se añade al argumento de la función trigonométrica de la energía potencial de la palanca, antes de realizar las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Al realizar las ecuaciones de Euler-Lagrange, la función de memoria se toma como una constante. Pues no cambia su valor mientras la palanca se encuentra acoplada al eje.

Con la posición del eje reiniciada a  $0rad$  más la posición de la palanca, el incremento en la posición angular en el eje es igual al de la palanca. Por ello es correcto decir que

$$\theta_i = \bar{\theta} + \delta_{\theta_i t'}. \quad (2.3)$$

Para organizar los submodelos del sistema con  $p$  palancas, a continuación se definirá el vector de conmutación que será de ayuda para clasificar cada una de las formas que pueda adquirir el sistema.

### 2.2.3. Vector de conmutación $v_c$

El vector de conmutación  $v_c$ , es un vector con entradas binarias que tiene como propósito dar al lector un apoyo visual acerca de las características del sistema mediante una notación. Este vector se lee de derecha a izquierda indicando posicionalmente la palanca que se está describiendo, además coincide con el valor de las correspondientes funciones de conmutación vistas en la subsección 2.2.1.

Por ejemplo, en un sistema de dos palancas con un vector de conmutación

$$v_c = [01]$$

indica que el sistema tiene a su palanca 1 acoplada al eje y la palanca 2 desacoplada del mismo.

El vector tiene como objetivo auxiliar al lector con lo que le ocurre al sistema en algún momento dado. A continuación se puede ver la información con la que cuenta el vector  $v_c$ .

Tabla 2.3: Nomenclatura para sistemas con  $p$  palancas

$p$	Número de palancas
$p_d$	Número de palancas desacopladas
$n_{ED}$	Número de ecuaciones diferenciales de segundo orden
$O_S$	Orden del sistema
$n_{sm}$	Número de submodelos en el sistema
$n_{sm_{pd}}$	Número de submodelos por número de palancas desacopladas
$c_a$	Caso actual

### Número de palancas

El número de palancas en el sistema  $p \in \mathbb{N}^*$ , coincide con el número de columnas que tiene el vector de conmutación  $v_c \in \mathbb{N}^*$ . Entonces, por mencionar un ejemplo, considere los siguientes casos de un vector de conmutación

$$i) \quad v_c = [110] \quad ,$$

$$ii) \quad v_c = [0010101] \quad ,$$

el primer caso muestra un vector de conmutación correspondiente a un sistema con tres palancas, que representa a la segunda y la última palanca acopladas al eje. El vector de conmutación del segundo caso corresponde a un vector de siete palancas, que tiene la primer, tercer y quinta palanca acopladas al eje.

### Número de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden en el Sistema $n_{ED}$

El número de EDSO en el sistema  $n_{ED}$ , va desde 1, cuando todas las palancas del sistema se encuentran acopladas al eje, hasta  $p + 1$ , cuando todas las palancas del sistema se encuentran desacopladas del eje. Comenzando con una ecuación diferencial, el número

de estas se va incrementando con respecto al número de palancas desacopladas  $p_d$ . Este número de palancas desacopladas es igual al número de ceros en el vector de conmutación.

Por lo que el número de EDSO está dado por

$$n_{ED} = p_d + 1. \quad (2.4)$$

En el caso del sistema de dos palancas, cuando el

$$v_c = [01]$$

el número de ecuaciones diferenciales es 2.

### Orden del Sistema $O_S$

Las ecuaciones que describen al sistema son de segundo orden. El sistema va desde segundo orden hasta  $2(p_d + 1)$ -ésimo orden, es decir

$$O_S = 2(p_d + 1), \quad (2.5)$$

retomando el ejemplo del sistema con dos palancas, el sistema es de segundo orden cuando todas las palancas se encuentran acopladas. El sistema de dos palancas, pasa a ser de cuarto orden cuando alguna de sus dos palancas se desacopla. Este sistema alcanza un tercer orden, y su máximo orden posible, cuando sus dos palancas se encuentran desacopladas.

### Número de submodelos en un actuador mecánico rotacional $n_{sm}$

El número de submodelos  $n_{sm}$ , es el número de combinaciones de palancas que pueden existir en un sistema, de acuerdo a los acoplamientos que tengan las palancas con el eje. Por lo que el número de submodelos de un sistema se encuentra en función del número de palancas que este contenga.

Es fácil ver que para el sistema de una palanca se encuentran dos casos; cuando la palanca se encuentra acoplada al sistema y cuando se encuentra desacoplada del mismo. Cuando se trata de un sistema de dos palancas el sistema tiene cuatro casos como se ha visto en la sección anterior. Realizando este ejercicio se puede ver que  $n_{sm}$  es una secuencia numérica descrita por

$$n_{sm} = 2, 4, 6, 8, 16, \dots$$

donde se aprecia que es una serie exponencial de 2, entonces  $n_{sm}$  está dado por

$$n_{sm}(p) = 2^p \quad (2.6)$$

de modo que si se quisiera trabajar con un sistema de  $p = 10$ , el sistema contaría con  $n_C = 1024$ .

### Submodelos clasificados por número de palancas desacopladas $n_{sm_{pd}}$

El conjunto de los submodelos tiene subconjuntos que tienen en común el número de ecuaciones diferenciales  $n_{ED}$ . Cualquiera que sea el modelo siempre habrá dos subconjuntos de un solo elemento, el primero, donde todas las palancas se encuentran acopladas, y el segundo donde todas las palancas están desacopladas

$$\{[111 \cdots 111]\},$$

$$\{[000 \cdots 000]\}.$$

A su vez, existe un par de subconjuntos con  $p$  elementos, el primero, donde solo una palanca está desacoplada

$$\{[0111 \cdots 111], [1011 \cdots 111], [1101 \cdots 111], \dots, [111 \cdots 1011], [111 \cdots 1101], [111 \cdots 1110]\}$$

y el segundo, donde únicamente una palanca está acoplada

$$\{[1000 \cdots 000], [0100 \cdots 000], [0010 \cdots 000], \dots, [000 \cdots 0100], [000 \cdots 0010], [000 \cdots 0001]\}.$$

Siguiendo este ejercicio se notó que el número de submodelos correspondiente a cada subconjunto de  $n_{ED}$ ; no importaba el orden de las palancas desacopladas en el vector de conmutación  $v_c$ , sino el número palancas desacopladas  $p_d$ , con la siguiente ecuación

$$n_{sm_{pd}} = \frac{p!}{(p - p_d)! p_d!}. \quad (2.7)$$

se puede encontrar cuantas ecuaciones diferenciales existen para un sistema de  $p$  palancas con  $p_d$  palancas desacopladas.

**Índice para definir el caso en turno  $c_a$** 

El índice para definir el caso en turno  $c_a$ , es utilizado para hacer referencia al sub-sistema a modelar en el caso del actuador mecánico rotacional de  $p$  palancas. Siendo más específicos, para saber con qué submodelo se está trabajando, basta con pasar el vector  $v_c$  al sistema decimal

$$c_a = v_c \begin{bmatrix} 2^{p-1} \\ 2^{p-2} \\ \vdots \\ 2^1 \\ 2^0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

De esta manera se obtienen los casos desde 0 hasta  $2^p - 1$ .

# Capítulo 3

## Modelado de un sistema de orden conmutado

En este capítulo se modelarán dos sistemas de orden conmutado por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La característica principal de este tipo de modelo es la conmutación del sistema entre los múltiples submodelos que lo describen. Cabe señalar que aún cuando se han encontrado modelos que representan de manera adecuada el comportamiento de un alambre muscular en la literatura, la fuerza suministrada por el alambre muscular se deja señalada con  $F_{wi}$  en el presente trabajo, donde  $i = 1, 2, \dots, p$ , con  $p$  igual a el número de palancas en el sistema.

El primer sistema, modelado en la sección 3.1, es un actuador mecánico rotacional con dos palancas actuado por dos alambres musculares, con el cual se explicarán de manera pormenorizada las características de un sistema de orden conmutado, vea la figura 2.4. El segundo sistema, modelado en la sección 3.2, es un actuador mecánico rotacional con  $p$  palancas actuado por  $p$  palancas. Tiene como objetivo generalizar el modelado del sistema con dos palancas a cualquier número de palancas.

### 3.1. Modelado del actuador mecánico rotacional con dos palancas

Reconsiderando el actuador mecánico rotacional con dos palancas descrito en la sección 2.2 (Fig. 2.4), se puede observar que el sistema cuenta con dos palancas y dos trinquetes montados sobre un eje.

Debido a los acoplamientos que generan los trinquetes, se hace notar que la dinámica completa del sistema queda descrita en cuatro submodelos:

- El primero cuenta con **una** ecuación diferencial de segundo orden y describe al sistema cuando las dos palancas se encuentran acopladas al eje.
- El segundo submodelo está descrito por **dos** ecuaciones diferenciales de segundo orden y representa al sistema cuando la palanca uno se encuentra acoplada.
- El tercero cuenta con **dos** ecuaciones diferenciales de segundo orden y describe al sistema cuando la palanca dos se acopla al eje.
- El cuarto submodelo tiene **tres** ecuaciones diferenciales de segundo orden que describen al sistema cuando ambas palancas se encuentran desacopladas.

Cabe señalar que el número de palancas en el sistema coincide con el número de alambres musculares, puesto que a cada palanca se encuentra unido un alambre muscular.

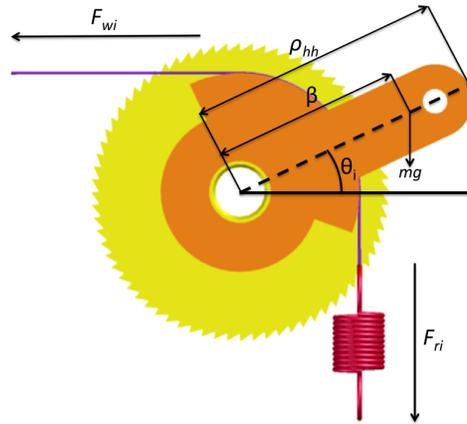


Figura 3.1: Vista lateral de un elemento desacoplado

Tabla 3.1: Nomenclatura

$\beta$	Coefficiente de centro de masa	$m$	Masa de la palanca con horse head [kg]
$\rho_{hh}$	Longitud de la palanca con horse-head [m]	$g$	Constante gravitacional [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ]
$\theta_i$	Posiciones angulares de las palancas $d_1$ y $d_2$ [rad]	$J$	Momento de inercia [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ]
$\bar{\theta}$	Posición angular del eje $g$ [rad]	$\theta$	Coordenada generalizada del sistema [rad]
$F_{ri}$	Fuerza de los resortes $e_1$ y $e_2$ [N]	$b_{pal}$	Coefficiente de fricción de la palanca
$F_{wi}$	Fuerza de los alambres musculares $f_1$ y $f_2$ [N]	$b_{eje}$	Coefficiente de fricción de la palanca

### 3.1. MODELADO DEL ACTUADOR MECÁNICO ROTACIONAL CON DOS PALANCAS 23

A continuación se muestran las energías contenidas en el sistema en cada una de las formas que pueda adquirir.

Se comenzará por modelar el sistema en el caso cero

$$c_a = 0.$$

Al tratarse de un sistema con dos palancas, el vector de conmutación para este caso es

$$v_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nótese que cualquiera que sea el número de palancas en el sistema siempre existirá únicamente un caso cero, ya que sólo existe una configuración en la que todas las palancas se encuentran desacopladas. Además, el caso cero siempre será descrito por el mayor número posible de ecuaciones diferenciales de segundo orden que pueda tener el sistema de orden conmutado.

Para el sistema de orden conmutado con dos palancas, el mayor número posible de ecuaciones diferenciales de segundo orden es de tres. De las cuales corresponde una por cada palanca y la restante corresponde al eje.

Cabe señalar que en el caso cero, la única interacción que existe entre las palancas y el eje, es la fricción que se genera entre dichos elementos cuando:

- El eje se encuentra girando en sentido antihorario y las palancas se encuentran estáticas.
- El eje se encuentra estático y las palancas giran en sentido horario.
- El eje gira en sentido antihorario y las palancas giran en sentido horario.

Las energías cinética  $K_{[00]}$ , potencial  $P_{[00]}$  y de disipación  $G_{[00]}$ , con que cuenta el sistema cuando ambos trinquetes se encuentran desacoplados están dadas por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} K_{[00]} &= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \rho_{hh}^2 \left( \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) \\ P_{[00]} &= mg\beta\rho_{hh} [\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)] + \frac{1}{2k_w} (F_{w1} + F_{w2}) + \frac{1}{2k_r} (F_{r1} + F_{r2}) \\ G_{[00]} &= \frac{1}{2} b_{pal} \rho_{hh}^2 \left[ \left( \dot{\theta}_1 - \dot{\theta} \right)^2 + \left( \dot{\theta}_2 - \dot{\theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} b_{ejc} \rho_{hh}^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Realizando la ecuación de Euler-Lagrange el modelo del sistema queda como:

$$\begin{aligned}
k_w \rho_{hh}^2 (\theta_{1max} - \theta_1) - k_r \rho_{hh}^2 \theta_1 &= m \rho_{hh}^2 \ddot{\theta}_1 + mg\beta \rho_{hh} \cos(\theta_1) + b_{pal} \rho_{hh}^2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\bar{\theta}}) \\
k_w \rho_{hh}^2 (\theta_{2max} - \theta_2) - k_r \rho_{hh}^2 \theta_2 &= m \rho_{hh}^2 \ddot{\theta}_2 + mg\beta \rho_{hh} \cos(\theta_2) + b_{pal} \rho_{hh}^2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\bar{\theta}}) \\
0 &= J \ddot{\bar{\theta}} + b_{pal} \rho_{hh}^2 (2\dot{\bar{\theta}} - \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + b_{eje} \rho_{hh}^2 \dot{\bar{\theta}}
\end{aligned} \quad (3.1)$$

Se puede ver que que la entrada del eje es cero, y que la perdida de energía por fricción se encuentra en función del número de palancas desacopladas.

El caso  $c_a = 1$ , cuando la palanca 1 se encuentra acoplada al sistema, el eje y la palanca 1 se encuentran girando a la misma velocidad. El submodelo que describe al sistema en este caso, tiene un vector de conmutación

$$v_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La energía potencial se encuentra en función de  $\bar{\theta}$  y  $\theta_2$ ; sin embargo, la energía potencial de la palanca 1 debería estar en función de  $\theta_1$ . A manera de solución, se utiliza el parámetro  $\delta_{\theta_1}$  para modelar la energía potencial de la palanca 1 en función de su posición angular. Es decir

$$\theta_1 = \bar{\theta} + \delta_{\theta_1}.$$

Por ello, las energías cinética  $K_{[01]}$ , potencial  $P_{[01]}$  y de disipación  $G_{[01]}$ , se expresan como:

$$\begin{aligned}
K_{[01]} &= \frac{1}{2} (J + m \rho_{hh}^2) \dot{\bar{\theta}}^2 + \frac{1}{2} m \rho_{hh}^2 \dot{\theta}_2^2 \\
P_{[01]} &= mg\beta \rho_{hh} [\sin(\bar{\theta} + \delta_{\theta_1}) + \sin(\theta_2)] + \frac{1}{2k_w} (F_{w1} + F_{w2}) + \frac{1}{2k_r} (F_{r1} + F_{r2}) \\
G_{[01]} &= \frac{1}{2} b_{pal} \rho_{hh}^2 (\dot{\bar{\theta}} - \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} b_{eje} \rho_{hh}^2 \dot{\bar{\theta}}^2
\end{aligned}$$

Posteriormente se desarrolla la ecuación de Euler-Lagrange, dando como resultado:

$$\begin{aligned}
 & k_w \rho_{hh}^2 (\theta_{2max} - \theta_2) - k_r \rho_{hh}^2 \theta_2 \\
 & = m \rho_{hh}^2 \ddot{\theta}_2 + mg \beta \rho_{hh} \cos(\theta_2) + b_{pal} \rho_{hh}^2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\bar{\theta}}) \\
 & k_w \rho_{hh}^2 \left[ \theta_{1max} - (\bar{\theta} + \delta_{\theta_1}) \right]^{\theta_1} - k_r \rho_{hh}^2 (\bar{\theta} + \delta_{\theta_1})^{\theta_1} \\
 & = (J + m \rho_{hh}^2) \ddot{\bar{\theta}} + mg \beta \rho_{hh} \cos(\bar{\theta} + \delta_{\theta_1})^{\theta_1} + b_{pal} \rho_{hh}^2 (\dot{\bar{\theta}} - \dot{\theta}_2) + b_{eje} \rho_{hh}^2 \dot{\bar{\theta}}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como puede observarse, la dinámica del sistema se encuentra descrita por dos ecuaciones diferenciales de segundo orden. De las cuales, una describe la dinámica de la palanca 2 que se encuentra desacoplada, y la otra describe la dinámica del acoplamiento del eje con la palanca uno.

Nótese nuevamente, que en este caso la palanca 1 y eje tienen la misma velocidad pero no necesariamente la misma posición, porque la posición de las palancas se encuentra restringida mecánicamente por los movimientos del alambre muscular, mientras que el eje almacena todos los movimientos en sentido antihorario que le sean transmitidos desde alguna de las palancas.

En el caso  $c_a = 2$ , el sistema tiene la palanca 2 acoplada y la palanca 1 desacoplada. Cuenta con un vector de conmutación

$$v_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso, el sistema se encuentra en función de  $\bar{\theta}$  y  $\theta_1$ , y se requiere la utilización del parámetro de memoria  $\delta_{\theta_2}$  para modelar la energía potencial de la palanca 2. Entonces, las energías cinética  $K_{[10]}$ , potencial  $P_{[10]}$  y de disipación  $G_{[10]}$ , quedan como:

$$\begin{aligned}
 K_{[10]} &= \frac{1}{2} (J + m \rho_{hh}^2) \dot{\bar{\theta}}^2 + \frac{1}{2} m \rho_{hh}^2 \dot{\theta}_1^2 \\
 P_{[10]} &= mg \beta \rho_{hh} [\sin(\theta_1) + \sin(\bar{\theta} + \delta_{\theta_2})] + \frac{1}{2k_w} (F_{w1} + F_{w2}) + \frac{1}{2k_r} (F_{r1} + F_{r2}) \\
 G_{[10]} &= \frac{1}{2} b_{pal} \rho_{hh}^2 (\dot{\bar{\theta}} - \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} b_{eje} \rho_{hh}^2 \dot{\bar{\theta}}^2.
 \end{aligned}$$

Mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange el submodelo que describe al sistema en este caso queda como:

$$\begin{aligned}
& k_w \rho_{hh}^2 (\theta_{1max} - \theta_1) - k_r \rho_{hh}^2 \theta_1 \\
& = m \rho_{hh}^2 \ddot{\theta}_1 + mg\beta \rho_{hh} \cos(\theta_1) + b_{pal} \rho_{hh}^2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\bar{\theta}}) \\
& k_w \rho_{hh}^2 \left[ \theta_{2max} - \left( \bar{\theta} + \delta_{\theta_2} \right)^{\theta_2} \right] - k_r \rho_{hh}^2 \left( \bar{\theta} + \delta_{\theta_2} \right)^{\theta_2} \\
& = (J + m \rho_{hh}^2) \ddot{\bar{\theta}} + mg\beta \rho_{hh} \cos \left( \bar{\theta} + \delta_{\theta_2} \right)^{\theta_2} + b_{pal} \rho_{hh}^2 (\dot{\bar{\theta}} - \dot{\theta}_1) + b_{eje} \rho_{hh}^2 \dot{\bar{\theta}}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Al igual que en el caso  $c_a = 1$ , el sistema se encuentra descrito por dos ecuaciones diferenciales de segundo orden. En cambio, ahora una ecuación diferencial describe la dinámica de la palanca 1 que se encuentra desacoplada, y la segunda describe el acoplamiento entre el eje y la palanca 2.

Nótese que en este caso, la palanca 2 y el eje se encuentran girando a la misma velocidad y no necesariamente tienen la misma posición. Debido a que el eje siempre tiene un incremento en su posición girando en sentido antihorario, mientras que la palanca 2 sólo tiene pequeños movimientos oscilatorios limitados mecánicamente por el movimiento de su alambre muscular correspondiente.

En el caso 3,

$$\begin{aligned}
c_a &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^1 \\ 2^0 \end{bmatrix} \\
&= 3,
\end{aligned}$$

se obtendrá el submodelo con vector de conmutación

$$v_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Este es el último de los casos para el actuador mecánico rotacional con dos palancas. Cuando un actuador mecánico rotacional de este tipo tiene todas sus palancas acopladas, el sistema de orden conmutado se encuentra descrito por sólo una ecuación diferencial de segundo orden.

El sistema en este caso, al contar con todos sus elementos acoplados, todos los elementos se encontrarán girando a la misma velocidad. Por ello, la energía cinética  $K_{[11]}$ , y la energía disipada  $G_{[11]}$ , se encuentran en función de la velocidad angular del eje  $\dot{\bar{\theta}}$ . A su vez, la energía potencial  $P_{[11]}$  se encuentra en función de la posición angular  $\bar{\theta}$ , y son necesarios

### 3.1. MODELADO DEL ACTUADOR MECÁNICO ROTACIONAL CON DOS PALANCAS 27

un par de parámetros de memoria  $\delta_{\theta_1}$  y  $\delta_{\theta_2}$  para modelar la energía potencial de las palancas 1 y 2 respectivamente.

$$\begin{aligned} K_{[11]} &= \frac{1}{2} (J + 2m\rho_{hh}^2) \dot{\theta}^2 \\ P_{[11]} &= mg\beta\rho_{hh} [\sin(\bar{\theta} + \delta_{\theta_1}) + \sin(\bar{\theta} + \delta_{\theta_2})] + \frac{1}{2k_w} (F_{w1} + F_{w2}) + \frac{1}{2k_r} (F_{r1} + F_{r2}) \\ G_{[11]} &= \frac{1}{2} b_{eje} \rho_{hh}^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Tras realizar la ecuación de Euler-Lagrange el modelo del sistema queda como:

$$\begin{aligned} k_w \rho_{hh}^2 \left\{ \left[ \theta_{1max} - \left( \bar{\theta} + \delta_{\theta_1} \right) \right]^{\theta_1} + \left[ \theta_{2max} - \left( \bar{\theta} + \delta_{\theta_2} \right) \right]^{\theta_2} \right\} - k_r \rho_{hh}^2 \left[ \left( \bar{\theta} + \delta_{\theta_1} \right)^{\theta_1} + \left( \bar{\theta} + \delta_{\theta_2} \right)^{\theta_2} \right] \\ = (J + 2m\rho_{hh}^2) \ddot{\theta} + mg\beta\rho_{hh} \left[ \cos \left( \bar{\theta} + \delta_{\theta_1} \right)^{\theta_1} + \cos \left( \bar{\theta} + \delta_{\theta_2} \right)^{\theta_2} \right] + b_{eje} \rho_{hh}^2 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Como se puede observar, en los submodelos obtenido desde el caso  $c_a = 0$  al caso  $c_a = 3$ , el número de ecuaciones diferenciales de segundo orden va disminuyendo. Es decir

- El caso  $c_a = 0$  esta descrito por **tres** ecuaciones diferenciales de segundo orden, por lo que el sistema es de sexto orden,

$$\begin{aligned} O_S &= 2(p_d + 1) \\ &= 2(2 + 1) = 6. \end{aligned}$$

- Los casos  $c_a = 1$  y  $c_a = 2$ , tienen una palanca desacoplada, por ello el orden del sistema es

$$\begin{aligned} O_S &= 2(1 + 1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

- El sistema en el caso  $c_a = 3$  es de segundo orden,

$$O_S = 2,$$

ya que no tiene ninguna palanca desacoplada en este caso.

### 3.1.1. Modelos en su forma matricial

Agrupando submodelos obtenidos en (3.4), (3.2), (3.3) y (3.1), el sistema de orden conmutado de forma simbólica queda expresado como:

$$\sum_{SOC} : \{D_{v_c}(\phi_2, \phi_1) \cdot q_{v_c}(\phi_2, \phi_1) + \varrho_{v_c}(q_c, \phi_2, \phi_1) + R_{v_c}(\phi_2, \phi_1) \cdot \dot{q}(\phi_2, \phi_1) = u_{v_c}(\phi_2, \phi_1)\}, \quad (3.5)$$

donde,  $D$  es la matriz de inercias,  $\varrho$  el vector de componentes gravitatorias,  $R$  es la matriz de disipación de Rayleigh y  $u$  es el vector de torques de entrada.

Sustituyendo (3.4), (3.2), (3.3) y (3.1), en (3.5), el sistema de orden conmutado ( $\sum_{SOC}$ ) quedan como:

$$\sum_{SOC} : \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} m\rho_{hh}^2 & 0 & 0 \\ 0 & m\rho_{hh}^2 & 0 \\ 0 & 0 & J \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} mg\beta\rho_{hh} \cos(\theta_1) \\ mg\beta\rho_{hh} \cos(\theta_2) \\ 0 \end{array} \right] + \\ \left[ \begin{array}{ccc} b_{pal}\rho_{hh}^2 & 0 & -b_{pal}\rho_{hh}^2 \\ 0 & b_{pal}\rho_{hh}^2 & -b_{pai}\rho_{hh}^2 \\ -b_{pal}\rho_{hh}^2 & -b_{pal}\rho_{hh}^2 & \rho_{hh}^2(2b_{pal} + b_{eje}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta} \end{array} \right] \\ = \left[ \begin{array}{c} k_w\rho_{hh}^2(\theta_{1max} - \theta_1) - k_r\rho_{hh}^2\theta_1 \\ k_w\rho_{hh}^2(\theta_{2max} - \theta_2) - k_r\rho_{hh}^2\theta_2 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \right\}, \quad v_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} m\rho_{hh}^2 & 0 \\ 0 & \rho_{hh}^2(J+m) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} mg\beta\rho_{hh} \cos(\theta_2) \\ mg\beta\rho_{hh} \cos(\theta_1) \end{array} \right] + \\ \left[ \begin{array}{cc} b_{pal}\rho_{hh}^2 & -b_{pal}\rho_{hh}^2 \\ -b_{pal}\rho_{hh}^2 & \rho_{hh}^2(b_{pal} + b_{eje}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta} \end{array} \right] \\ = \left[ \begin{array}{c} k_w\rho_{hh}^2(\theta_{2max} - \theta_2) - k_r\rho_{hh}^2\theta_2 \\ k_w\rho_{hh}^2[\theta_{1max} - (\theta_1)] - k_r\rho_{hh}^2(\theta_1) \end{array} \right] \end{array} \right\}, \quad v_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} m\rho_{hh}^2 & 0 \\ 0 & \rho_{hh}^2(J+m) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} mg\beta\rho_{hh} \cos(\theta_1) \\ mg\beta\rho_{hh} \cos(\theta_2) \end{array} \right] + \\ \left[ \begin{array}{cc} b_{pal}\rho_{hh}^2 & -b_{pal}\rho_{hh}^2 \\ -b_{pal}\rho_{hh}^2 & \rho_{hh}^2(b_{pal} + b_{eje}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta} \end{array} \right] \\ = \left[ \begin{array}{c} k_w\rho_{hh}^2(\theta_{1max} - \theta_1) - k_r\rho_{hh}^2\theta_1 \\ k_w\rho_{hh}^2[\theta_{2max} - (\theta_2)] - k_r\rho_{hh}^2(\theta_2) \end{array} \right] \end{array} \right\}, \quad v_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \rho_{hh}^2(J+2m)\ddot{\theta} + mg\beta\rho_{hh}[\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)] + b_{eje}\dot{\theta} = \\ \{[\theta_{1max} - (\theta_1)] + [\theta_{2max} - (\theta_2)]\} - k_r\rho_{hh}^2[(\theta_1) + (\theta_2)] \end{array} \right\}, \quad v_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (3.6)$$

### 3.1. MODELADO DEL ACTUADOR MECÁNICO ROTACIONAL CON DOS PALANCAS 29

Realizando el modelo para el sistema con dos palancas, se puede apreciar que existen cuatro submodelos que lo describen.

El  $\Sigma_{SOC}$  del actuador mecánico rotacional es de segundo orden cuando sus dos palancas se encuentran acopladas al eje. Debido a que su dinámica se encuentra descrita por una ecuación diferencial de segundo orden

$$\begin{aligned}n_{ED} &= 1, \\O_S &= 2.\end{aligned}$$

El vector  $v_c$  correspondiente en este caso es [11], es decir  $\phi_2 = \phi_1 = 1$ . Cuando ambas palancas se encuentran acopladas, el  $\Sigma_{SOC}$  se encuentra en función de la posición  $\bar{\theta}$ , velocidad  $\dot{\bar{\theta}}$  y aceleración del eje  $\ddot{\bar{\theta}}$ . Los pares torsores de ambas palancas se suman para construir un solo par torsor. De igual manera, ocurre con la masa de las palancas y el momento de inercia del eje con las ruedas dentadas del trinquete, y con la componente gravitacional de la palanca 1 y la palanca 2. Sin embargo, las energías de disipación de las palancas no tienen lugar en este caso, debido a que no generan fricción sobre el eje, puesto que únicamente existe la fricción del eje generada en los rodamientos que lo sujetan.

Cuando el sistema se encuentra en  $v_c = [01]$  la palanca 1 se encuentra acoplada, mientras que en  $v_c = [10]$  la palanca 2 se encuentra acoplada. En ambos casos el sistema es de cuarto orden, pues cada submodelo está descrito por dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{aligned}n_{ED} &= 2, \\O_S &= 4.\end{aligned}$$

La diferencia entre estos dos subsistemas, es que en  $v_c = [01]$  el eje se encuentra actuado por el par torsor de la palanca 1, adquiriendo sólo las componentes gravitacionales de la palanca 1, y en este caso, la fricción generada entre la palanca 2 y el eje afecta a todo el sistema.

Cuando  $v_c = [10]$ , el eje se encuentra actuado por el par torsor de la palanca 2, las componentes gravitatorias de la palanca 2 se añaden a la dinámica del eje, y la fricción generada por la palanca 1 y el eje es la que ahora afecta a todo el sistema.

Por último, cuando tiene lugar  $v_c = [00]$ , el sistema es de sexto orden,

$$\begin{aligned} n_{ED} &= 3, \\ O_S &= 6. \end{aligned}$$

este orden es el máximo que se puede obtener para un sistema de este tipo con dos palancas. El  $\Sigma_{SOC}$  en este momento se encuentra subactuado, debido a que ambas palancas se encuentran desacopladas del eje y las palancas no pueden transferir par torsor alguno al eje. En la dinámica del eje también se ausentan las componentes gravitacionales de las palancas. En cambio, el eje adquiere la fricción que se genera entre las palancas y el eje, además de la fricción de los rodamientos que lo sujetan. Mientras que las palancas sólo son afectadas por su propia fricción que generan individualmente sobre el eje.

Estos cuatro submodelos describen al actuador mecánico rotacional en cualquiera de las formas que pueda adquirir. El cambio entre los submodelos es llevado a cabo por las funciones de conmutación  $\phi_c$ , dicho cambio se realiza cuando alguna de sus palancas se acopla o desacopla del eje por medio del trinquete.

### 3.1.2. Sistema de orden conmutado en su forma canónica

El sistema de orden conmutado del actuador con dos palancas en su forma canónica se expresa de manera simbólica como:

$$\dot{x}_{[ji]} = \varrho_{[ij]}(x_{[ij]}) + f_{[ij]}(p) x_{[ij]} + B_{1[ij]}(x_{[ij]}) u + B_{2[ij]} h(x) \quad (3.7)$$

sea  $x_{[ji]}$  el vector de estados conmutado

$$x_{[ji]} \in \begin{cases} \mathbb{R}^6, & j = i = 0 \\ \mathbb{R}^4, & \{j = 0, i = 1\} \vee \{j = 1, i = 0\} \\ \mathbb{R}^2, & i = j = 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

### 3.1. MODELADO DEL ACTUADOR MECÁNICO ROTACIONAL CON DOS PALANCAS31

$$x_{[00]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \bar{\theta} \\ \dot{\bar{\theta}} \end{bmatrix} ; \quad x_{[01]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \bar{\theta} \\ \dot{\bar{\theta}} \end{bmatrix} ;$$

$$x_{[01]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \bar{\theta} \\ \dot{\bar{\theta}} \end{bmatrix} ; \quad x_{[01]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \dot{\bar{\theta}} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

y sea  $D_{[ij]}$  la matriz de inercias

$$D_{[ij]} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m\rho_{hh}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m\rho_{hh}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix}, & j = i = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m\rho_{hh}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{hh}^2 (J + m) \end{bmatrix}, & \{j = 0, i = 1\} \vee \{j = 1, i = 0\} \\ \begin{bmatrix} \rho_{hh}^2 (J + 2m) \end{bmatrix}, & j = i = 1 \end{cases}, \quad (3.10)$$

$q_{[ij]}$  es el vector de conmutado de componentes gravitacionales

$$\varrho_{[ij]}(x_{[ij]}) = \left\{ \begin{array}{l} D_{[00]}^{-1} \begin{bmatrix} x_2 \\ \cos(x_1) \\ x_4 \\ \cos(x_3) \\ x_6 \\ 0 \end{bmatrix} mg\beta\rho_{hh} \quad , \quad j = i = 0 \\ \\ D_{[01]}^{-1} \begin{bmatrix} x_2 \\ \cos(x_1) \\ x_4 \\ \cos(x_3 + \delta\theta_1) \end{bmatrix} mg\beta\rho_{hh} \quad , \quad j = 0, i = 1 \\ \\ D_{[10]}^{-1} \begin{bmatrix} x_2 \\ \cos(x_1) \\ x_4 \\ \cos(\bar{\theta} + \delta\theta_2) \end{bmatrix} mg\beta\rho_{hh} \quad , \quad j = 1, i = 0 \\ \\ D_{[11]}^{-1} \begin{bmatrix} x_6 \\ \cos(\bar{\theta} + \delta\theta_1) + \cos(\bar{\theta} + \delta\theta_2) \end{bmatrix} mg\beta\rho_{hh} \quad , \quad j = i = 1 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

$f_{[ij]}$  es la matriz de componentes gravitacionales

$$f_{[ij]}(p) = \left\{ \begin{array}{l} D_{[00]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \frac{2b_{pal}+b_{eje}}{b_{pal}} \end{bmatrix} b_{pal}\rho_{hh}^2 \quad , \quad j = i = 0 \\ \\ D_{[01]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{b_{pal}+b_{eje}}{b_{pal}} \end{bmatrix} b_{pal}\rho_{hh}^2 \quad , \quad j = 0, i = 1 \\ \\ D_{[10]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{b_{pal}+b_{eje}}{b_{pal}} \end{bmatrix} b_{pal}\rho_{hh}^2 \quad , \quad j = 1, i = 0 \\ \\ D_{[11]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{eje} \end{bmatrix} \quad , \quad j = i = 1 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

### 3.1. MODELADO DEL ACTUADOR MECÁNICO ROTACIONAL CON DOS PALANCAS 33

$B_{[ij]}$  es la matriz de entradas y  $\tau$  es el vector de entradas

$$B_{1[ij]}(x_{[ij]}) = \left\{ \begin{array}{l} D_{[00]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \theta_{1max} - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \theta_{2max} - \theta_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rho_{hh} \quad , \quad j = i = 0 \\ \\ D_{[01]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \theta_{2max} - \theta_2 \\ 0 & 0 \\ \theta_{1max} - \bar{\theta} + \delta_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \theta_{1max} - \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \rho_{hh} \quad , \quad j = 0, i = 1 \quad ; \quad u = \begin{bmatrix} F_{w1} \\ F_{w2} \end{bmatrix} \\ \\ D_{[10]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \theta_{1max} - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \theta_{2max} - \bar{\theta} + \delta_{\theta_2} \\ 0 & 0 \\ \theta_{1max} - \bar{\theta} + \delta_{\theta_1} & 0 \end{bmatrix} \rho_{hh} \quad , \quad j = 1, i = 0 \\ \\ D_{[11]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \theta_{1max} - \bar{\theta} + \delta_{\theta_1} & \theta_{2max} - \bar{\theta} + \delta_{\theta_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \theta_{1max} - \bar{\theta} + \delta_{\theta_1} & \theta_{2max} - \bar{\theta} + \delta_{\theta_2} \end{bmatrix} \rho_{hh} \quad , \quad j = i = 1 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$$B_{2[ij]} = \left\{ \begin{array}{l} D_{[00]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad j = i = 0 \\ \\ D_{[01]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad j = 0, i = 1 \quad ; \quad h = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -k_r \rho_{hh}^2 \theta_1 \\ -k_r \rho_{hh}^2 \theta_2 \end{bmatrix} \quad , \quad j = i = 0 \\ \begin{bmatrix} -k_r \rho_{hh}^2 \theta_2 \\ -k_r \rho_{hh}^2 (\bar{\theta} + \delta_{\theta_1}) \\ -k_r \rho_{hh}^2 \theta_1 \end{bmatrix} \quad , \quad j = 0, i = 1 \\ \begin{bmatrix} -k_r \rho_{hh}^2 (\bar{\theta} + \delta_{\theta_2}) \\ -k_r \rho_{hh}^2 (\bar{\theta} + \delta_{\theta_1}) \\ -k_r \rho_{hh}^2 (\bar{\theta} + \delta_{\theta_2}) \end{bmatrix} \quad , \quad j = 1, i = 0 \\ \begin{bmatrix} -k_r \rho_{hh}^2 (\bar{\theta} + \delta_{\theta_1}) \\ -k_r \rho_{hh}^2 (\bar{\theta} + \delta_{\theta_2}) \end{bmatrix} \quad , \quad j = i = 1 \end{array} \right. \\ \\ D_{[10]}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad j = 1, i = 0 \\ \\ D_{[11]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad j = i = 1 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

### 3.1.3. Regiones de operación del actuador mecánico rotacional con dos palancas

A continuación se mostrarán las regiones de operación del actuador mecánico rotacional para dos palancas.

**Posición angular de las palancas (Estado  $x_1$  y  $x_3$ ).** Las regiones de operación de la posición angular de la palanca 1 ( $x_1$ ), y la palanca 2 ( $x_3$ ), en cada uno de los submodelos del sistema son:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 < x_{1max} & , \quad v_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 < x_1 \leq x_{1max} & , \quad v_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 \leq x_1 < x_{1max} & , \quad v_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 < x_1 \leq x_{1max} & , \quad v_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x_3 < x_{3max} & , \quad v_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 \leq x_3 < x_{3max} & , \quad v_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 < x_3 \leq x_{3max} & , \quad v_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 < x_3 \leq x_{3max} & , \quad v_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

La posición angular mínima y máxima de una palanca está restringida mecánicamente por los movimientos de un alambre muscular.

Por diseño, las palancas se encuentra en su posición mínima en  $0rad$ , cuando su respectivo alambre muscular se encuentra completamente estirado por su correspondiente resorte de pretensado. Mientras que la posición angular máxima de las palancas  $\theta_{1máx}$  y  $\theta_{2máx}$ , es alcanzada cuando su respectivo alambre muscular se encuentra completamente contraído.

Cabe señalar que, la posición máxima de las palancas es la misma para todas, porque los alambres musculares y las palancas con horse head tienen las mismas dimensiones y geometría.

**Velocidad angular de las palancas (Estado  $x_2$  y  $x_4$ ).** Como ya se ha mencionado antes en la sección 2.2, las palancas con horse head transforman el movimiento traslacional de los alambres musculares en movimiento rotacional. Debido a las oscilaciones de un alambre muscular transmitidas a la palanca con horse head, la palanca tiene velocidades positivas y negativas. Entonces, las regiones de operación de la velocidad angular de la palanca 1 ( $x_2$ ), y la velocidad angular de la palanca 2 ( $x_4$ ), en cada uno de los submodelos del sistema son:

$$\begin{aligned}
x_{2min} \leq x_2 < \dot{\theta} & , \quad v_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
0 < x_2 = x_6 \leq x_{2max} & , \quad v_c = \\
x_{2min} \leq x_2 < x_{4max} & , \quad v_c = \\
0 < x_2 = x_4 = x_6 \leq x_{2max} & , \quad v_c =
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
x_{4min} \leq x_4 < x_6 & , \quad v_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
x_{4min} \leq x_4 < x_{2max} & , \quad v_c = \\
0 < x_4 = x_6 \leq x_{4max} & , \quad v_c = \\
0 < x_2 = x_4 = x_6 \leq x_{4max} & , \quad v_c =
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Como se puede ver, la velocidad angular de las palancas es igual a la del eje únicamente cuando se encuentran acopladas.

**Posición angular del eje (Estado  $x_5$ ).** El movimiento de las palancas se transmite al eje a través de sus trinquetes correspondientes. Los trinquetes impiden movimientos negativos en el eje. Por ello, la posición del eje siempre es mayor o igual a cero. Puesto que la región de operación de la posición angular del eje en todos los submodelos del sistema es:

$$x_5 \geq 0, \forall v_c. \tag{3.19}$$

**Velocidad angular del eje (Estado  $x_6$ ).** La velocidad angular del eje siempre será mayor o igual a 0, porque los cambios de posición del eje siempre son positivos. La región de operación de la velocidad angular del eje en cada uno de los submodelos del sistema es:

$$\begin{aligned}
0 \leq x_6 < x_{6max} & , \quad v_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
0 < x_6 = x_2 \leq x_{2max} & , \quad v_c = \\
0 < x_6 = x_4 \leq x_{4max} & , \quad v_c = \\
0 < x_6 = x_4 = x_2 \leq x_{2max} = x_{4max} & , \quad v_c =
\end{aligned} \tag{3.20}$$

## 3.2. Actuador mecánico rotacional con $p$ palancas

En la figura 3.2 se muestra un bosquejo del actuador rotacional con un arreglo de  $p$  palancas, donde  $a_i$  es la  $i$ -ésima uña de atranque,  $b_i$  es el  $i$ -ésimo engrane dentado del trinquete,  $c_i$  es la  $i$ -ésima uña de trabajo,  $d_i$  es la  $i$ -ésima palanca con horse head,  $e_i$  es el  $i$ -ésimo alambre muscular,  $f_i$  es el  $i$ -ésimo resorte de pretensión, con  $i = 1, 2, \dots, p$ ; y  $g$  es el único eje donde se encuentran acoplados cada uno de los  $p$  subsistemas. Como se puede observar, por cada palanca  $d_i$ , hay un mismo número de los demás elementos a

excepción del eje  $g$ .

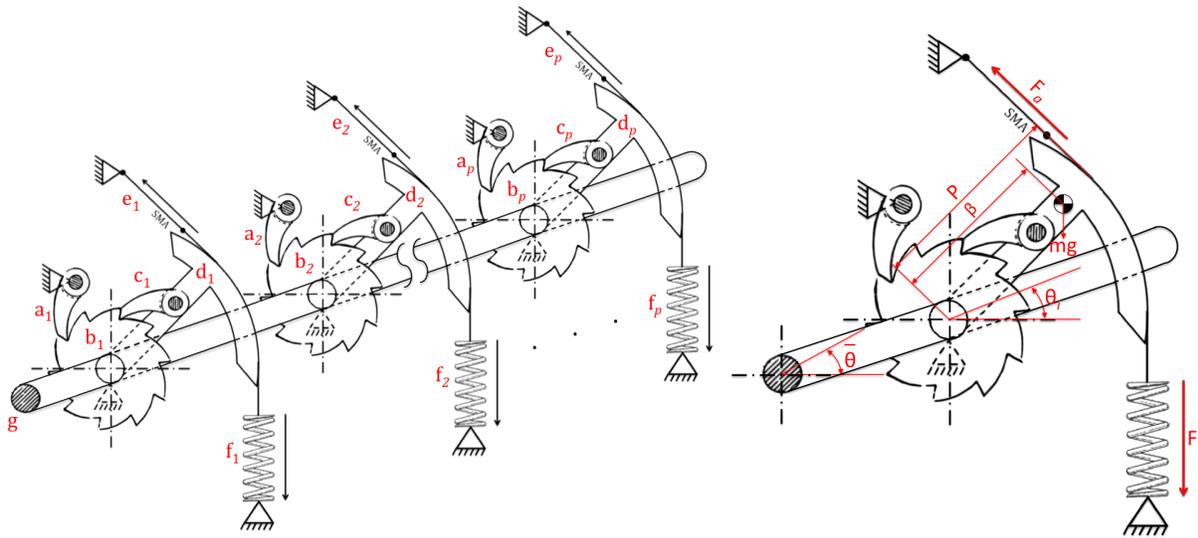


Figura 3.2: Actuador con  $p$  alambres musculares

El funcionamiento del sistema es llevado a cabo por la entrada de par torsor en alguna de las  $p$  palancas. La palanca con horse head transforma mecánicamente el movimiento traslacional a rotacional, a esta palanca se encuentra unida la uña de trabajo  $c_i$  que hace girar al engrane dentado  $b_i$  al cual se encuentra acoplado, y que a su vez hace girar al eje  $g$  al cual se encuentra unido; cabe señalar que todo esto ocurre el mismo sentido antihorario.

Como se puede notar, el funcionamiento de este actuador es similar al descrito en la sección 2.2, la diferencia en este actuador es que puede contar con cualquier número de palancas. Es decir, es la generalización del sistema modelado en la sección 3.1. El objetivo de este modelo es mostrar al lector las dimensiones que puede alcanzar el modelo del sistema al contar con un sistema de  $p$  palancas.

A continuación, se comenzará por modelar el sistema con las  $p$  palancas acopladas al eje, y posteriormente se realizará el modelado de sistema con unas cuantas palancas acopladas al sistema hasta llegar al modelado del sistema con todas las palancas desacopladas. Es decir, comenzaremos modelando el sistema de menor orden hasta alcanzar el máximo orden posible.

### *Caso* $2^p - 1$ para un Sistema de $p$ Palancas

Cuando el sistema se encuentra en el *Caso*  $2^p - 1$ , cuenta con una ecuación diferencial de segundo orden

$$n_{ED} = 1,$$

y el sistema es de segundo orden

$$O_S = 2.$$

Es decir, todas las palancas se encuentran acopladas al eje por medio de sus respectivos trinquetes. La entrada del sistema  $u$  es una sumatoria de los pares torsores  $\tau$  de las  $p$  palancas.

El  $v_c$  de este caso contiene sólo 1s en todas sus columnas

$$[1_p 1_{p-1} 1_{p-2} \cdots 1_3 1_2 1_1].$$

Las energía cinética, potencial y disipada contenidas en el sistema son:

$$\begin{aligned} K_{[111\dots 111]} &= \frac{1}{2} (J + pm\rho_{hh}^2) \dot{\bar{\theta}}^2 \\ P_{[111\dots 111]} &= mg\beta\rho_{hh} \sum_{i=1}^p \sin(\bar{\theta} + \delta_{\theta_i}) + \sum_{i=1}^p \frac{1}{2k_{wi}} F_{wi} + \sum_{i=1}^p \frac{1}{2k_{ri}} F_{ri} \\ G_{[111\dots 111]} &= \frac{1}{2} b_{eje} \rho_{hh}^2 \dot{\bar{\theta}}^2 \end{aligned}$$

donde  $\delta_{\theta_i}$  son los parámetros de memoria, con  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Al modelar por medio de las Ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene la matriz de inercia que dará como resultado un escalar

$$D_{[111\dots 111]} = \rho_{hh}^2 (J + pm) \ddot{\bar{\theta}}, \quad (3.21)$$

la matriz de componentes gravitacionales

$$G_{[11\dots 111]} = mg\beta\rho_{hh} \sum_{i=1}^p \cos(\bar{\theta} + \delta_{\theta_i}), \quad (3.22)$$

y la matriz de Rayleigh es

$$R_{[11\dots 111]} = b_{eje} \rho_{hh} \dot{\bar{\theta}}, \quad (3.23)$$

como se puede ver, sólo se encuentra el coeficiente de fricción del eje, debido a que la

fricción de las palancas es relativa y al ser iguales las velocidades de las palancas con la del eje, estas se eliminan.

La entrada  $u_{[11\dots 111]}$  es sumatoria de los pares torsores de las palancas

$$u_{[11\dots 111]} = \sum_{i=1}^p \tau_{pali}. \quad (3.24)$$

### *Caso* $[11\dots 101\dots 11]$ para un sistema de $p$ palancas

En el *Caso*  $[11\dots 101\dots 11]$ , una palanca se encuentra desacoplada, por lo que el sistema tiene dos ecuaciones diferenciales de segundo orden que lo describen

$$n_{ED} = 2,$$

por lo que el sistema es de segundo orden cuando tiene una palanca desacoplada

$$O_S = 4.$$

Como el sistema cuenta con  $p$  palancas, existen  $p$  casos diferentes en los que el sistema queda descrito por dos ecuaciones diferenciales de segundo orden,

$$n_{C_{pd}} = \frac{p!}{(p-1)!1!} = p.$$

En este caso el vector de conmutación es

$$v_c = [1_p 1_{p-1} \dots 1_{j+1} 0_j 1_{j-1} \dots 1_3 1_2 1_1]; \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Las energías contenidas en este submodelo son:

$$\begin{aligned} K_{[11\dots 101\dots 11]} &= \frac{1}{2} (J + (p-1) \rho_{hh}^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \rho_{hh}^2 \dot{\theta}_j^2 \\ P_{[11\dots 101\dots 11]} &= mg\beta \rho_{hh} \left[ \sum_v \sin(\bar{\theta} + \delta_{\theta_v}) + \sin(\theta_j) \right] + \\ &\quad \sum_{i=1}^p \frac{1}{2k_{wi}} F_{wi} + \sum_{i=1}^p \frac{1}{2k_{ri}} F_{ri} \\ G_{[11\dots 101\dots 11]} &= \frac{1}{2} b_{pal} \rho_{hh}^2 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_j)^2 + \frac{1}{2} b_{eje} \rho_{hh}^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

donde  $v = \{1, 2, \dots, p\} - \{j\}$ .

Al realizar las ecuaciones de Euler-Lagrange, la matriz de inercia es

$$D_{[11\dots 101\dots 11]} = m\rho_{hh}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J}{m} + (p-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_j \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

El vector de componentes gravitacionales es

$$G_{[11\dots 101\dots 11]} = mg\beta\rho_{hh} \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) \\ \sum_v \cos(\bar{\theta} + \delta_{\theta_v}) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

La matriz de disipación es

$$R_{[11\dots 101\dots 11]} = b_{pal}\rho_{hh}^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + \frac{b_{eje}}{b_{pal}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_j \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

El vector de pares torsores de entrada es

$$u_{[11\dots 101\dots 11]} = \begin{bmatrix} \tau_{palj} \\ \sum_v \tau_{palv} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

### *Caso* [11...101...101...11] para un sistema de $p$ palancas

El *Caso* [11...101...101...11], tiene dos palancas desacopladas, cuenta con tres ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$n_{ED} = 3,$$

el sistema es de sexto orden

$$O_S = 6,$$

y el vector de conmutación es

$$[1_p 1_{p-1} \dots 1_{l+1} 0_l 1_{l-1} \dots 1_{j+1} 0_j 1_{j-1} \dots 1_2 1_1]$$

$$l = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, p$$

$$i \neq j$$

siendo dos palancas cuales quiera, las energías del sistema son:

$$\begin{aligned} K_{[11\dots 101\dots 101\dots 11]} &= \frac{1}{2} (J + (p-2) \rho_{hh}^2) \dot{\bar{\theta}}^2 + \frac{1}{2} m \rho_{hh}^2 \dot{\theta}_j^2 + \frac{1}{2} m \rho_{hh}^2 \dot{\theta}_l^2 \\ P_{[11\dots 101\dots 101\dots 11]} &= mg\beta\rho_{hh} \left[ \sum_v \sin(\bar{\theta} + \delta_{\theta_v}) + \sin(\theta_j) + \sin(\theta_l) \right] + \\ &\quad \sum_{i=1}^p \frac{1}{2k_{wi}} F_{wi} + \sum_{i=1}^p \frac{1}{2k_{ri}} F_{ri} \\ G_{[11\dots 101\dots 101\dots 11]} &= \frac{1}{2} b_{pal} \rho_{hh}^2 (\dot{\bar{\theta}} - \dot{\theta}_j)^2 + \frac{1}{2} b_{pal} \rho_{hh}^2 (\dot{\bar{\theta}} - \dot{\theta}_l)^2 + \frac{1}{2} b_{eje} \rho_{hh}^2 \dot{\bar{\theta}}^2 \end{aligned}$$

donde  $v = \{1, 2, \dots, p\} - \{j, l\}$ .

tras desarrollar las ecuaciones de Euler-Lagrange, la dinámica del sistema se encuentra descrita por las matrices siguientes.

$$D_{[11\dots 101\dots 101\dots 11]} = m\rho_{hh}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J}{m} + (p-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_j \\ \ddot{\theta}_l \\ \ddot{\bar{\theta}} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$G_{[11\dots 101\dots 101\dots 11]} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) \\ \cos(\theta_l) \\ \sum_v \cos(\bar{\theta} + \delta_{\theta_v}) \end{bmatrix} mg\beta\rho_{hh} \quad (3.30)$$

$$R_{[11\dots 101\dots 101\dots 11]} = b_{pal}\rho_{hh} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 + \frac{b_{eje}}{b_{pal}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_j \\ \dot{\theta}_l \\ \dot{\bar{\theta}} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$u_{[11\dots 101\dots 101\dots 11]} = \begin{bmatrix} \tau_{palj} \\ \tau_{pall} \\ \sum_v \tau_{palv} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

### Caso 0 para un sistema de $p$ palancas

Por último, en el *Caso 0* todas las palancas del sistema se encuentran desacopladas. El número de ecuaciones diferenciales de segundo orden es de  $p + 1$ , por lo que el sistema es de orden

$$O_S = 2(p + 1).$$

El *Caso 0* es el único que puede tener todas las palancas desacopladas, y sólo hay una manera de expresar este caso

$$n_{C_{pd}} = \frac{p!}{(p-p)!p!} = 1.$$

El vector de conmutación es

$$[0_p 0_{p-1} \cdots 0_3 0_2 0_1],$$

y las energías del sistema son:

$$\begin{aligned} K_{[00\dots 000]} &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\rho_{hh}^2 \sum_{i=1}^p \dot{\theta}_i^2 \\ P_{[00\dots 000]} &= mg\beta\rho_{hh} \sum_{i=1}^p \sin(\theta_i) + \sum_{i=1}^p \frac{1}{2k_{wi}} F_{wi} + \sum_{i=1}^p \frac{1}{2k_{ri}} F_{ri} \\ G_{[00\dots 000]} &= \frac{1}{2}b_{pal}\rho_{hh}^2 \sum_{i=1}^p (\dot{\theta} - \dot{\theta}_i)^2 + \frac{1}{2}b_{eje}\rho_{hh}^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Al realizar las ecuaciones de Euler-Lagrange, las matrices que describen al sistema quedan como:

$$D_{[00\dots 000]} = m\rho_{hh}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{J}{m\rho_{hh}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_p \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$G_{[00\dots 000]} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) \\ \vdots \\ \cos(\theta_p) \\ 0 \end{bmatrix} mg\beta\rho_{hh} \quad (3.34)$$

$$R_{[00\dots 000]} = b_{pal}\rho_{hh} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & p + \frac{b_{eje}}{b_{pal}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$u_{[00\dots 000]} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Como se ha visto en estos últimos apartados, el eje depende de las entradas que tengan las palancas y una vez que se desacoplan las palancas del eje, este queda en dinámica libre con una entrada  $u = 0$ .

Reuniendo todos los sistemas y comenzando por el *Caso 0*, el sistema de orden conmutado ( $\sum_{SOC}$ ) para el actuador mecánico rotacional con  $p$  palancas tendrá la siguiente estructura

$$\sum_{SOC} : \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{J}{m\rho_{hh}^2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_p \\ \ddot{\theta} \end{array} \right] m\rho_{hh}^2 + \left[ \begin{array}{c} \cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) \\ \vdots \\ \cos(\theta_p) \\ 0 \end{array} \right] mg\beta\rho_{hh} + \\ \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \frac{b_{eje}}{b_{pal}\rho_{hh}^2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta} \end{array} \right] b_{pal}\rho_{hh} = \left[ \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_p \\ 0 \end{array} \right] , \quad v_c = [00 \cdots 000] \\ \vdots \\ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J}{m} + (p-2) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_j \\ \ddot{\theta} \end{array} \right] m\rho_{hh}^2 + \left[ \begin{array}{c} \cos(\theta_i) \\ \cos(\theta_j) \\ \sum_v \cos(\bar{\theta} + \delta_{\theta_v}) \end{array} \right] mg\beta\rho_{hh} + \\ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 + \frac{b_{eje}}{b_{pal}} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{\theta} \end{array} \right] b_{pal}\rho_{hh} = \left[ \begin{array}{c} \tau_{pali} \\ \tau_{palj} \\ \sum_v \tau_{palv} \end{array} \right] , \quad v_c = [11 \cdots 101 \cdots 101 \cdots 11] \\ \vdots \\ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J}{m} + (p-1) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\theta} \end{array} \right] m\rho_{hh}^2 + \left[ \begin{array}{c} \cos(\theta_i) \\ \sum_v \cos(\bar{\theta} + \delta_{\theta_v}) \end{array} \right] mg\beta\rho_{hh} + \\ \left[ \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 + \frac{b_{eje}}{b_{pal}} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\theta}_i \\ \dot{\theta} \end{array} \right] b_{pal}\rho_{hh} = \left[ \begin{array}{c} \tau_{pali} \\ \sum_v \tau_{palv} \end{array} \right] , \quad v_c = [11 \cdots 101 \cdots 11] \\ \vdots \\ \rho_{hh}^2 (J + pm) \ddot{\theta} + mg\beta\rho_{hh} \sum_{i=1}^p \cos(\bar{\theta} + \delta_{\theta_i}) + b_{eje} \dot{\theta} = \sum_{i=1}^p \tau_{pali} , \quad v_c = [111 \cdots 111] \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Cuando el modelo del actuador mecánico rotacional se encuentra en el caso  $[00 \cdots 000]$  todas sus palancas se encuentran desacopladas del eje y tiene un orden  $O_s = 2(p+1)$ . En este caso el sistema se encuentra subactuado, ya que las palancas no le transfieren par tursor alguno. En cambio, todas las palancas ejercen fricción sobre el eje.

Cuando  $v_c = [11 \cdots 101 \cdots 101 \cdots 11]$ , dos palancas cualesquiera  $j$  y  $l$ , se encuentran desacopladas. Por lo que el eje es actuado por el par tursor de todas las palancas a excepción de las palancas  $j$  y  $l$ . Cabe señalar que las palancas  $j$  y  $l$  generan fricción sobre el eje afectando a todo el sistema, es decir, a las palancas  $j$  y  $l$ , y al eje con el resto de las palancas acopladas.

En  $v_c = [11 \cdots 101 \cdots 11]$  una palanca cualquiera  $j$  se encuentra desacoplada del eje. Al tener dos ecuaciones diferenciales que describan la dinámica del sistema, el actuador es de cuarto orden. En este caso, la palanca  $j$  no aporta par tursor alguno al sistema y sólo añade fricción al sistema por medio del eje.

En el último caso mostrado en el sistema de orden conmutado, todas las palancas se encuentran acopladas y tiene un vector de conmutación  $v_c = [111 \cdots 111]$ . En este caso los pares torsores de todas la palancas se encuentran actuando al eje. Ninguna palanca se encuentra aplicando fricción al sistema por medio del eje, y la única fricción actuando sobre el sistema es la que añaden los cojinetes que sostienen al eje.

# Capítulo 4

## Diseño y construcción del prototipo

En este capítulo se presenta el diseño y construcción del prototipo. El prototipo del presente trabajo se divide en dos partes, una de ellas es el actuador mecánico rotacional y la segunda es el banco donde se fijará el actuador mecánico rotacional ya construido.

### 4.1. Diseño

Si bien ya se tiene un bosquejo de los elementos que conforman el actuador mecánico rotacional con dos palancas, en esta sección se definirán las dimensiones apropiadas de cada una de dichos elementos. Además se realizará el diseño de un banco de madera, donde será montado el actuador mecánico rotacional.

#### 4.1.1. Actuador mecánico rotacional

El elemento central en el diseño del actuador mecánico rotacional, es la rueda dentada del trinquete, ya que de su número de dientes depende la resolución del trinquete. A continuación se diseñará la palanca con horse head, donde se busca realizar una modificación en su diseño convencional que permita amplificar el movimiento que entregaría normalmente. En base a estos dos elementos, se seleccionará un alambre muscular adecuado para el actuador mecánico rotacional. Por último, se decidirán las dimensiones del eje del actuador mecánico rotacional de acuerdo al número de palancas que se vayan a utilizar.

## Rueda dentada

En el modelado del sistema de orden conmutado visto en el capítulo 3 se consideró un trinquete ideal, es decir, que nunca tendrá velocidades negativas. Por el contrario, en la realidad un trinquete suele tener velocidades negativas, ya que siempre va a regresar al último diente brincado cuando la palanca retroceda. Más adelante, en la Subsección 5.2.3 se verá de manera ejemplificada este comportamiento.

Se buscó la rueda dentada que se creyó adecuada, en relación al mayor número de dientes con menor diámetro. La rueda dentada que se seleccionó cuenta con un diámetro de 1.5" y 72 dientes.

Se buscó que la rueda dentada no fuera de un diámetro demasiado grande con respecto a la longitud de contracción de un alambre muscular de tamaño pequeño. Para que la palanca no fuera demasiado grande y no se perdiera fuerza de trabajo del alambre muscular en la conversión de movimiento.

Se eligió el mayor número de dientes encontrado en esta medida para poder incrementar la posibilidad de brincar un diente de la rueda dentada en cada contracción del alambre muscular.



Figura 4.1: Rueda dentada, sdp-si.com

Part Number	Ratchet Pitch	No. Of Teeth	F			B		O.D.
			Face Width	Mat'l(ratchet/pawl)	Pawl Part #/width	Bore Size	Outside Dia. Inch	
A 1B14-A32100	32	100	3/16	Brass / Steel	A 1C14-04 / 0.125	0.375	3.125	
A 1B14-24018	24	18	1/4	Brass / Steel	A 1C14-06 / 0.187	0.1875	0.75	
A 1B14-24024	24	24	1/4	Brass / Steel	A 1C14-04 / 0.125	0.25	1	
A 1B14-24030	24	30	1/4	Brass / Steel	A 1C14-02 / 0.062	0.25	1.25	
A 1B14-24036	24	36	1/4	Brass / Steel	A 1C14-02 / 0.062	0.25	1.5	
A 1B14-24048	24	48	1/4	Brass / Brass	A 1B14-06 / 0.187	0.3125	2	
A 1B14-32016	32	16	1/16	Brass / Steel	A 1C14-04 / 0.125	0.1875	0.5	
A 1B14-32020	32	20	1/16	Brass / Steel	A 1C14-02 / 0.062	0.1875	0.625	
A 1B14-32028	32	28	1/16	Brass / Brass	A 1B14-06 / 0.187	0.1875	0.875	
A 1B14-32048	32	48	1/16	Brass / Brass	A 1B14-04 / 0.125	0.25	1.5	
A 1B14-32064	32	64	1/16	Brass / Brass	A 1B14-02 / 0.062	0.3125	2	
A 1B14-32100	32	100	1/16	Brass / Steel	A 1C14-06 / 0.187	0.3125	3.125	
A 1B14-48024	48	24	1/8	Brass / Brass	A 1B14-04 / 0.125	0.1875	0.5	
A 1B14-48048	48	48	1/8	Brass / Brass	A 1B14-02 / 0.062	0.25	1	
A 1B14-48072	48	72	1/8	Brass / Steel	A 1C14-06 / 0.187	0.25	1.5	
A 1B14-A32016	32	16	3/16	Brass / Steel	A 1C14-06 / 0.187	0.1875	0.5	
A 1B14-A32024	32	24	3/16	Brass / Steel	A 1C14-04 / 0.125	0.1875	0.75	

Figura 4.2: Fragmento del catálogo de ruedas dentadas, sdp-si.com

## Palanca con horse head

El horse head, en el diseño habitual, se encuentra ubicado en el extremo de una palanca (Fig. 4.3a). Con este diseño, la transformación de movimiento traslacional a rotacional, se encuentra dada por

$$x_i = \rho_{hh}\theta_i \quad (4.1)$$

donde  $x$  es el desplazamiento que tiene el alambre muscular al contraerse,  $\rho_{hh}$  es el radio de la palanca con horse head, y  $\theta$  es la posición angular de la palanca con horse head. Mientras que la relación fuerza-par torsor está dada por

$$F_w = \frac{\tau_w}{\rho_{hh}} \quad (4.2)$$

donde  $F_w$  es la fuerza del alambre muscular y  $\tau_w$  es el par torsor generado por el mismo alambre muscular.

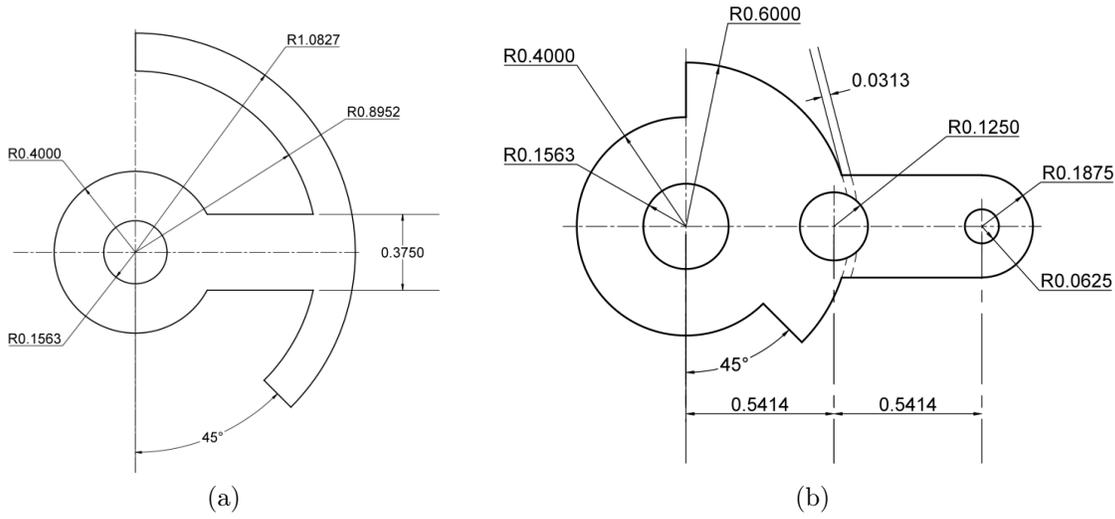


Figura 4.3: a) Diseño del horse head convencional, b) Diseño del horse head propuesto

Considerando el diseño de la figura 4.3a, se busca aumentar la posición angular de la palancas con horse head para evitar llegar a la máxima contracción del alambre muscular, ya que trabajar con la máxima contracción del alambre muscular reduce su vida útil. La figura 4.3b muestra una palanca con un horse head a la mitad de la palanca, representando este diseño matemáticamente queda como:

$$x_i = \frac{\rho_{hh}}{2} \theta_i. \quad (4.3)$$

De acuerdo con la ecuación 4.3, la nueva palanca con horse head amplifica el movimiento angular al doble. Mientras que el par torsor entregado se reduce a la mitad.

$$F_w = \frac{2\tau_w}{\rho_{hh}} \quad (4.4)$$

Además, este diseño de palanca con horse head nos permite buscar una rueda dentada con el mayor número de dientes por radian, dejando de lado la necesidad de buscar una rueda dentada del mismo radio que la del horse head.

La palanca con horse head de la figura 4.3b, tiene un par de perforaciones perpendiculares a su perforación central. Por estas perforaciones pasará un alambre de cobre que sujetará en el extremo inferior un resorte de pretensado, mientras que en el extremo superior se sujetará un alambre muscular. En la perforación central se colocará un tornillo con una tuerca para sujetar el alambre de cobre y de esta forma transmitir el movimiento del alambre muscular a la palanca con horse head, vea la Figura 4.4.

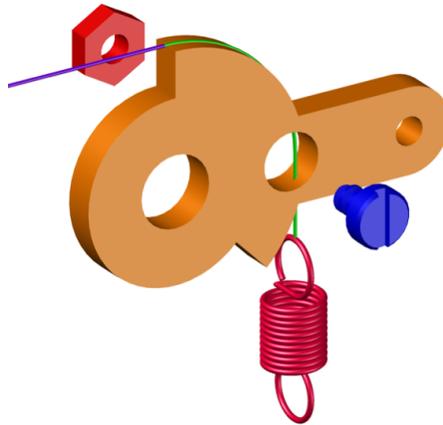


Figura 4.4: Sujeción del alambre de cobre en la palanca con horse head

En la figura 4.4, se puede apreciar el tornillo (en azul), con su tuerca (en rojo), la palanca con horse head (en naranja), el alambre de cobre (en verde), que se encuentra sujeto al alambre muscular (en morado) y al resorte de pretensado (en rojo). Cabe señalar que la unión del alambre de cobre con el alambre muscular y el resorte de pretensado se realizó con un amarre realizado con el alambre de cobre.

### Alambre muscular

El alambre muscular se eligió en base a la geometría de la rueda dentada y el diseño de la palanca con horse head.

El alambre muscular que se ha decidido utilizar tiene 4" de largo y un diámetro de 0.006". La contracción máxima del alambre muscular seleccionado es de 5.08mm (0.2"), por lo que utilizando una cuarta parte de su capacidad de contracción es suficiente para brincar un diente de la rueda dentada del trinquete.



Figura 4.5: Eje de acero inoxidable, sdp-si.com

## Eje

Las dimensiones del eje se decidieron de acuerdo a las dimensiones de las palancas y los trinquetes, y al número de estos elementos que fuera a albergar.

Para decidir el número de palancas y de trinquetes en el actuador mecánico rotacional, recurrimos al sistema de orden conmutado ( $\Sigma_{SOC}$ ), en la sección 3.2. Como ya se ha visto, el número de ecuaciones diferenciales del sistema de orden conmutado ( $\Sigma_{SOC}$ ), se incrementa conforme al número de palancas en el sistema. Es decir, a mayor número de palancas, el  $\Sigma_{SOC}$  de mayor orden será. Para la optimización de recursos y para fines demostrativos se ha elegido un prototipo con un arreglo de dos palancas para alambres musculares, el mismo que se muestra en la sección 3.1.

Para poder realizar un montaje cómodo y poder visualizar el funcionamiento de los elementos del sistema se estima que dejar un espacio de 3/4" de separación entre los rodamientos y los subsistemas "palanca-trinquete", quedará espacio suficiente para poder instrumentar el eje y poder añadir carga de trabajo a el mismo. De acuerdo a las dimensiones de los elementos del actuador mecánico rotacional se ha elegido un eje de 1/4" de diámetro y 5" de largo.

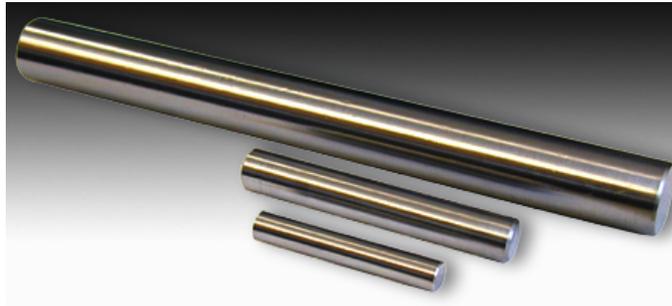


Figura 4.6: Eje de acero inoxidable, sdp-si.com

### 4.1.2. Banco del actuador mecánico rotacional

En base a las dimensiones del actuador mecánico rotacional se continuará con el banco de madera.

El ancho del banco se decidió considerando:

- El largo del eje
- La futura instrumentación
- La adición de carga en el eje

Para largo del banco de trabajo se consideró:

- El ancho del actuador mecánico rotacional
- El largo del alambre muscular.
- La capacidad para utilizar alambres musculares más largos
- La longitud de armellas de medio gancho para sujetar los alambres musculares.

Se hace uso de las armellas de medio gancho para facilitar el montaje del alambre muscular y para hacer ajustes en el tensado del alambre muscular.

La altura del banco de trabajo fue decidida en base a

- La altura del actuador mecánico rotacional
- La longitud del alambre de pretensado
- Y la longitud de los tornillos a los que se sujeta el alambre de pretensado

Cabe señalar que los resortes de pretensado se sujetan a tornillos para poder realizar ajustes en el tensado de dichos resortes.

Por estas consideraciones el banco de trabajo tiene 4.675" de ancho por 10" de largo por 6.125" de alto.

## 4.2. Construcción

Las bases para la construcción del prototipo se han sentado en la sección 4.1, donde fueron diseñados los elementos del actuador mecánico rotacional y del banco donde se fijará dicho actuador. En esta sección se muestran algunas imágenes que podrán servir de apoyo en caso de que se requiera construir una réplica del prototipo del modelo propuesto. Para mayor información acerca de los elementos para ensamblar el actuador mecánico rotacional vea el apéndice A.

### 4.2.1. Actuador mecánico rotacional

#### Palanca con horse head

Sobre la palanca con horse head se encuentran montados algunos elementos como el alambre de cobre mostrado en la figura 4.4, y la uña de trabajo. Para montar la uña de

trabajo se requiere un “tornillo de hombro”, una tuerca de 0.1875” y un resorte rotacional. En la figura 4.7, se muestra la distribución de piezas para ensamblar la palanca con horse head.

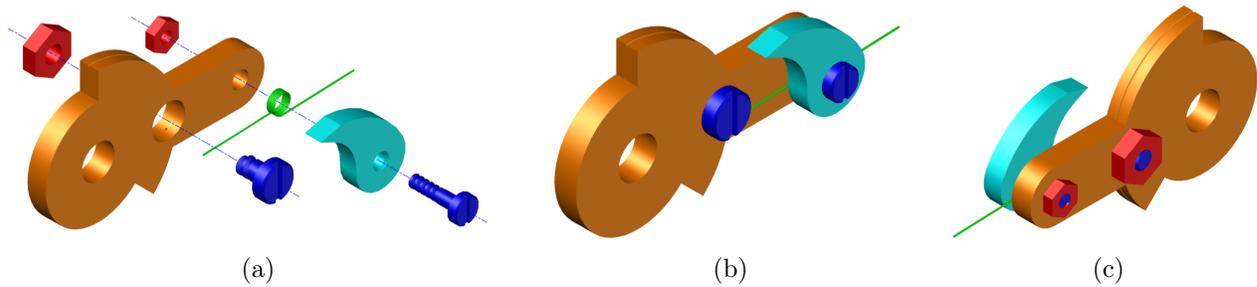


Figura 4.7: a) Distribución de piezas, b) Perspectiva derecha y c) Perspectiva izquierda del ensamblado de la palanca con horse head

## Trinquete

El trinquete se encuentra construido por una uña de atranque y una rueda dentada. La uña de atranque se encuentra montada sobre una ménsula. El trinquete es activado por la palanca con horse head, vea la figura 4.8.

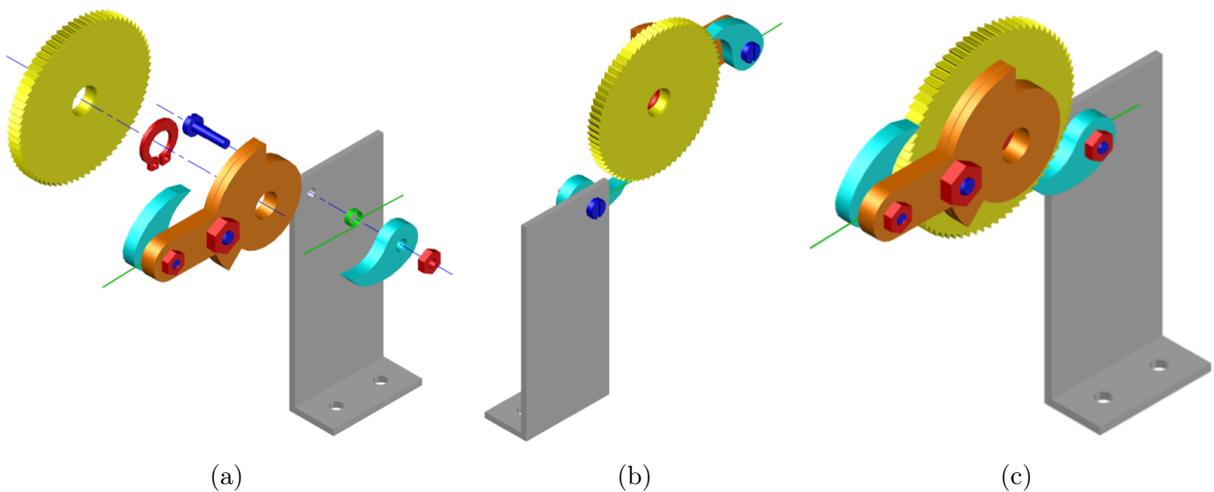


Figura 4.8: a) Distribución de piezas, b) Perspectiva derecha y c) Perspectiva izquierda del ensamblado del trinquete

## Eje

El eje se encuentra montado sobre un par de rodamientos, y sobre el eje se encuentran montadas las dos palancas con horse head con sus respectivos trinquetes. Estos cuatro elementos se encuentran separados por una distancia de  $3/4''$ , vea la figura 4.9.

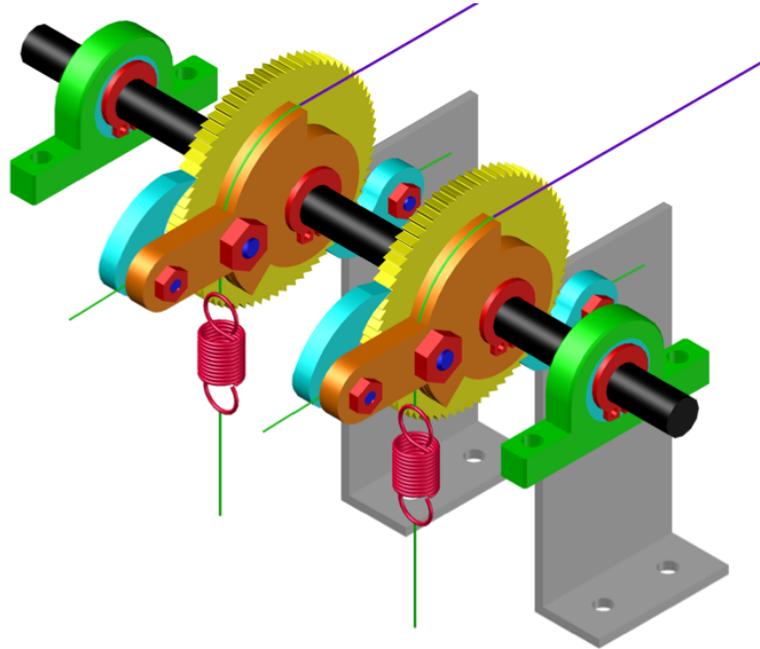


Figura 4.9: Perspectiva del ensamblado del eje

### 4.2.2. Banco del actuador mecánico rotacional

En la figura 4.10, se puede apreciar la distribución de las piezas del banco de madera, así como la dirección de las pijas de sujeción. Para mayor información acerca de las piezas para la construcción del banco de madera vea el apéndice A.

### 4.2.3. Montaje del actuador mecánico rotacional sobre su banco

Para el montaje del actuador mecánico rotacional sobre su banco se utilizarán 4 clavos de  $1/2''$  y 1.5 metros de alambre de cobre UTP.

En la figura 4.11 se puede ver el prototipo construido conformado por el actuador mecánico rotacional y el banco de montaje.

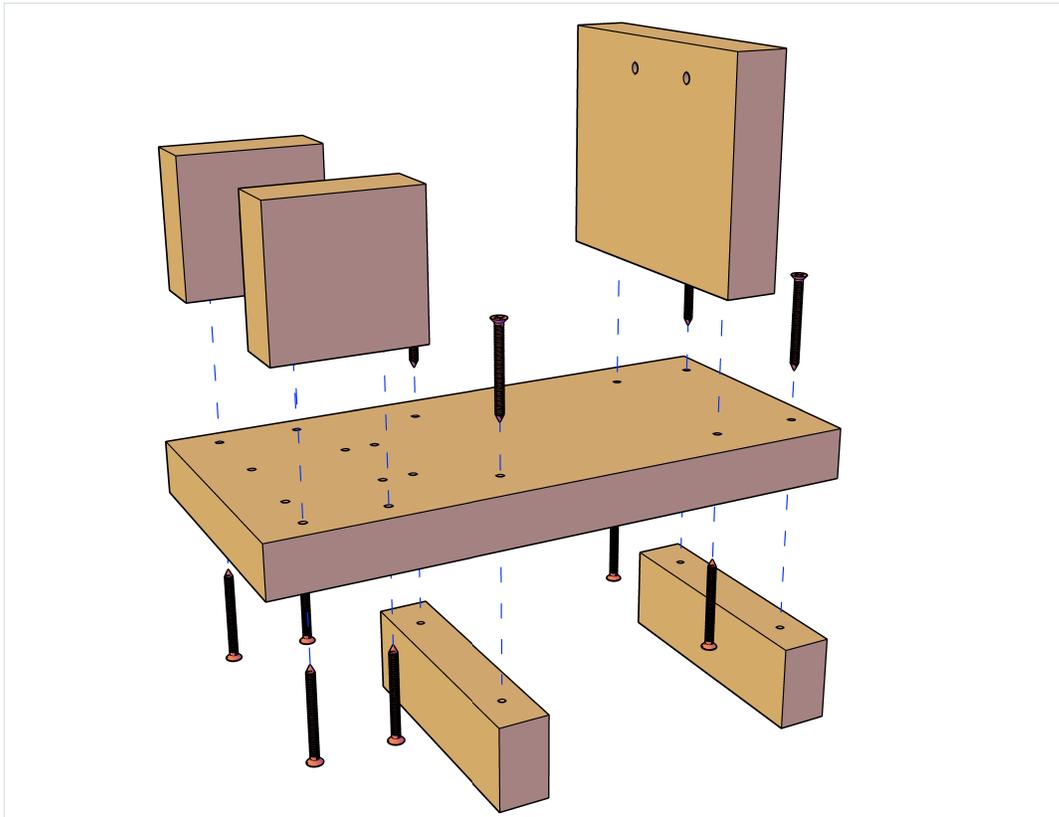
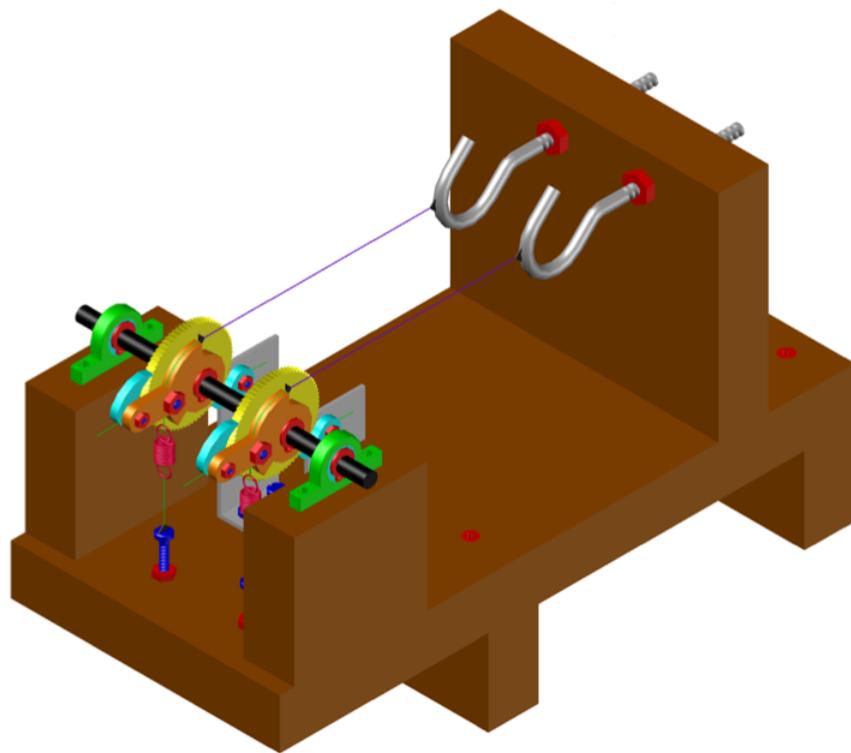
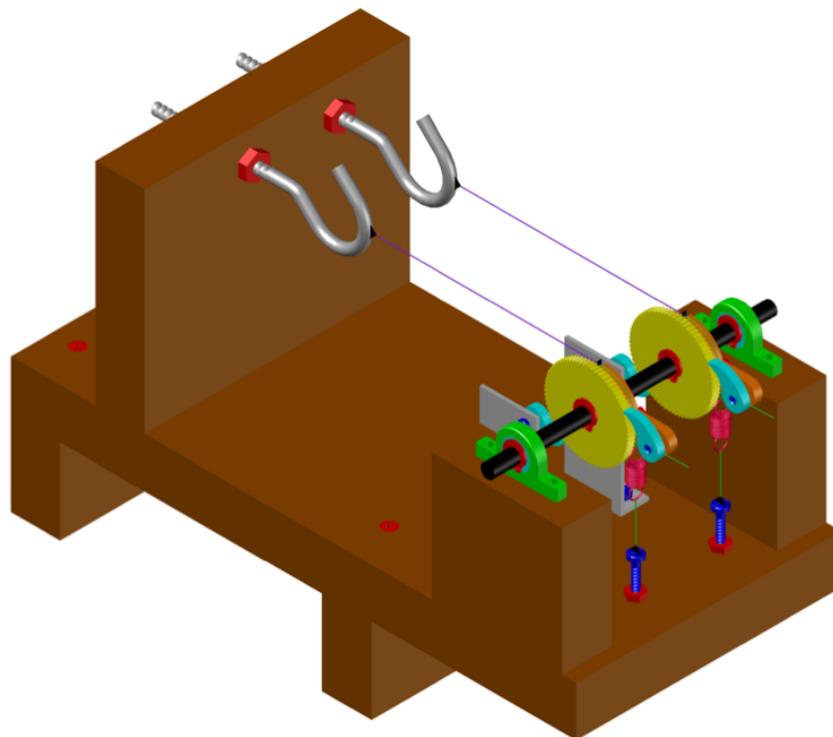


Figura 4.10: Distribución de pijas para el armado del banco del actuador mecánico rotacional

En la siguiente sección se describe realización de la simulación del  $\Sigma_{SOC}$  para observar su comportamiento del mismo.



(a)



(b)

Figura 4.11: a) Perspectiva derecha y b) Perspectiva izquierda del prototipo construido



# Capítulo 5

## Simulación y pruebas experimentales

En la primera sección del presente capítulo, se muestra la simulación del modelo del sistema de orden conmutado para dos alambres musculares; en la segunda sección se presentan los resultados de las pruebas llevadas a cabo con el prototipo del actuador mecánico rotacional, para dos alambres musculares.

### 5.1. Simulación del sistema de orden conmutado con dos palancas

El objetivo de la simulación es dar a conocer el comportamiento del modelo del sistema de orden conmutado para dos alambres musculares obtenido en la primer sección del capítulo 3, para que posteriormente sea comparado con los resultados del prototipo de la siguiente sección.

La simulación fue realizada con Simulink de Matlab, con ode23 como método de integración y un paso de muestreo automático. Se utilizó un bloque ‘Level-2 M-file S-Function’, se colocaron Scope’s para observar el curso de la simulación; también se colocó un bloque de salida hacia ‘Workspace’ para poder construir las gráficas desde un ‘M-file’ (Fig. 5.1).

Tabla 5.1: Parámetros de simulación

Nombre	Símbolo	Valores	Unidades
Coefficiente de centro de gravedad	$\beta$	0.8	—
Radio de la palanca con horse head	$\rho_{hh}$	0.02	$m$
Posición angular máxima de las palancas	$\theta_{max}$	0.36	$rad$
Constante del resorte	$k_{ri}$	70	$N/m$
Fuerza del alambre muscular	$F_{wi}$	0.8	$N$
Masa de la palanca con horse head	$m$	0.05	$kg$
Constante gravitacional	$g$	9.81	$m \cdot s^{-2}$
Momento de inercia	$J$	0.07	$kg \cdot m^2$
Coefficiente de fricción de las palancas	$b_{pal}$	1	—
Coefficiente de fricción del eje	$b_{eje}$	1	—

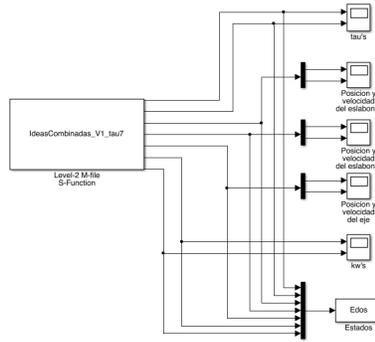


Figura 5.1: Diagrama a bloques de la simulación

La simulación tiene una duración de 60 segundos. Durante la simulación, los alambres musculares son activados de manera intercalada, dos veces cada uno, durante los primeros 30 segundos. Durante la segunda mitad, ambos alambres musculares se activan 4 veces más, pero ahora de manera simultánea.

En la tabla 5.1, se muestran los valores de los parámetros utilizados durante la “Simulación del Modelo del Sistema de Orden Conmutado para Dos Alambres Musculares en Lazo Abierto”. Cabe señalar que los parámetros fueron obtenidos por medio del fabricante y trabajos con alambres musculares encontrados en la literatura [4][6].

Agrupando submodelos obtenidos en (3.4), (3.2), (3.3) y (3.1), el sistema de orden conmutado de forma simbólica queda expresado como:

$$\Sigma_{SOC} : \{D_c(\phi_2, \phi_1) \cdot \ddot{q}_c(\phi_2, \phi_1) + g_c(q_c, \phi_2, \phi_1) + R_c(\phi_2, \phi_1) \cdot \dot{q}_c(\phi_2, \phi_1) = F_c(\phi_2, \phi_1)u + h_c(x), \quad (5.1)$$

## 5.1. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE ORDEN CONMUTADO CON DOS PALANCAS59

donde  $c \in \{0, 0; 0, 1; 1, 0; 0, 0\}$ ,  $D$  es la matriz de inercias,  $G$  el vector de componentes gravitatorias,  $R$  es la matriz de disipación de Rayleigh y  $u$  es el vector de torques de entrada.

Sustituyendo (3.4), (3.2), (3.3) y (3.1), en (5.1), el sistema de orden conmutado en su forma matricial quedan como:

$$\sum_{SOC} : \left\{ \begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{ccc} 2 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 28 \times 10^{-6} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 7848 \times 10^{-7} \cdot \cos(\theta_1) \\ 7848 \times 10^{-7} \cdot \cos(\theta_2) \\ 0 \end{array} \right] + \\
 \left[ \begin{array}{ccc} 4 \times 10^{-4} & 0 & -4 \times 10^{-4} \\ 0 & 4 \times 10^{-4} & -4 \times 10^{-4} \\ -4 \times 10^{-4} & -4 \times 10^{-4} & 12 \times 10^{-4} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta} \end{array} \right] \\
 = \left[ \begin{array}{ccc} 2 \times 10^{-2} \cdot (8726 \times 10^{-5} - \theta_1) & 0 & \\ 0 & 2 \times 10^{-2} \cdot (8726 \times 10^{-5} - \theta_2) & \\ 0 & 0 & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} F_{w1} \\ F_{w2} \end{array} \right] + \\
 \left[ \begin{array}{c} -28 \times 10^{-3} \cdot \theta_1 \\ -28 \times 10^{-3} \cdot \theta_2 \\ 0 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{cc} 2 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 6 \times 10^{-6} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 7848 \times 10^{-7} \cdot \cos(\theta_2) \\ 7848 \times 10^{-7} \cdot \cos(\theta_1) \end{array} \right] + \\
 \left[ \begin{array}{cc} 4 \times 10^{-4} & -4 \times 10^{-4} \\ -4 \times 10^{-4} & 8 \times 10^{-4} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta} \end{array} \right] \\
 = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 2 \times 10^{-2} \cdot (8726 \times 10^{-5} - \theta_2) & \\ 2 \times 10^{-2} \cdot (8726 \times 10^{-5} - \theta_1) & 0 & \\ & & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} F_{w1} \\ F_{w2} \end{array} \right] + \\
 \left[ \begin{array}{c} -28 \times 10^{-3} \cdot \theta_2 \\ -28 \times 10^{-3} \cdot \theta_1 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{cc} 2 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 6 \times 10^{-6} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 7848 \times 10^{-7} \cdot \cos(\theta_1) \\ 7848 \times 10^{-7} \cdot \cos(\theta_2) \end{array} \right] + \\
 \left[ \begin{array}{cc} 4 \times 10^{-4} & -4 \times 10^{-4} \\ -4 \times 10^{-4} & 8 \times 10^{-4} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta} \end{array} \right] \\
 = \left[ \begin{array}{ccc} 2 \times 10^{-2} \cdot (8726 \times 10^{-5} - \theta_1) & 0 & \\ 0 & 2 \times 10^{-2} \cdot (8726 \times 10^{-5} - \theta_2) & \\ & & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} F_{w1} \\ F_{w2} \end{array} \right] + \\
 \left[ \begin{array}{c} -28 \times 10^{-3} \cdot \theta_1 \\ -28 \times 10^{-3} \cdot \theta_2 \end{array} \right] \\
 \\
 32 \times 10^{-6} \cdot \ddot{\theta} + 7848 \times 10^{-7} \cdot [\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)] + b_{eje} \dot{\theta} = \\
 112 \times 10^{-3} \cdot 2 \times 10^{-2} \cdot \left[ \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} F_{w1} \\ F_{w2} \end{array} \right] - 28 \times 10^{-3} \cdot (\theta_1 + \theta_2) \\
 \end{array} \right. , \quad v_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)
 \end{array}$$

Nótese que el sistema conmuta entre cuatro submodelos. El primero de ellos es de sexto orden cuando  $v_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ , en este caso ambas palancas con horse head se encuentran desacopladas del eje, y este se encuentra subactuado. Cuando  $v_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ , el sistema es de cuarto orden y tiene una palanca acoplada. Cuando ambas palancas se encuentran acopladas al eje  $v_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$  y el sistema es de segundo orden.

Para ser simulado el sistema de orden conmutado, se despejó  $\ddot{x}_c$ , dándoles el nombre de Modelo 1, 2, 3 y 4.

```
% ----- \\\caso 0 /////
Modelo1=phi1*phi2*(Tau1-G1-D1)/M1);
% ----- \\\caso 1 /////
Modelo2=phi1*(1-phi2)*(M2\Tau2-G2-D2));
% ----- \\\caso 2 /////
Modelo3=(1-phi1)*phi2*(M3\Tau3-G3-D3));
% ----- \\\caso 3 /////
Modelo4=(1-phi1)*(1-phi2)*(M4\Tau4-G4-DD4));
```

Figura 5.2: Despeje de  $\ddot{x}$

Posteriormente, cada uno de los submodelos se acomodó en una ecuación con ayuda de las funciones de conmutación.

```
DynSys = [Modelo1(1);Modelo1(1);Modelo1(1)]...
+[Modelo2(2);Modelo2(1);Modelo2(2)]...
+[Modelo3(1);Modelo3(2);Modelo3(2)]...
+[Modelo4(1);Modelo4(2);Modelo4(3)];
```

Figura 5.3: Arreglo de los submodelos en una ecuación

Con lo que se obtuvo la dinámica del sistema de la forma:

```
dx1 = Dq1;
dx2 = DynSys(1);
dx3 = Dq2;
dx4 = DynSys(2);
dx5 = Dq3;
dx6 = DynSys(3);
```

Figura 5.4: Obtención de los estados para la simulación

### 5.1.1. Resultados

Como condición inicial la simulación no tiene entrada alguna, además, las posiciones de las palancas  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , y la del eje  $\bar{\theta}$  son igual a  $0 \text{ rad}$ .

## 5.1. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE ORDEN CONMUTADO CON DOS PALANCAS<sup>61</sup>

Cuando transcurren 7 segundos, se introduce una entrada en la palanca 2 con una duración de 2 segundos, cuando han transcurrido 14 segundos se le aplica una entrada a la palanca 1 con una duración de 2 segundos; este proceso se repite otras dos veces, alternando el turno de activación entre el alambre muscular 1 y el alambre muscular 2. Después de los 35 segundos de simulación, ambos alambres musculares son activados cada 7 segundos con una duración de 2 segundos nuevamente. Esto se repite hasta finalizar la simulación a los 60 segundos; vea las dos gráficas superiores de la figura 5.5.

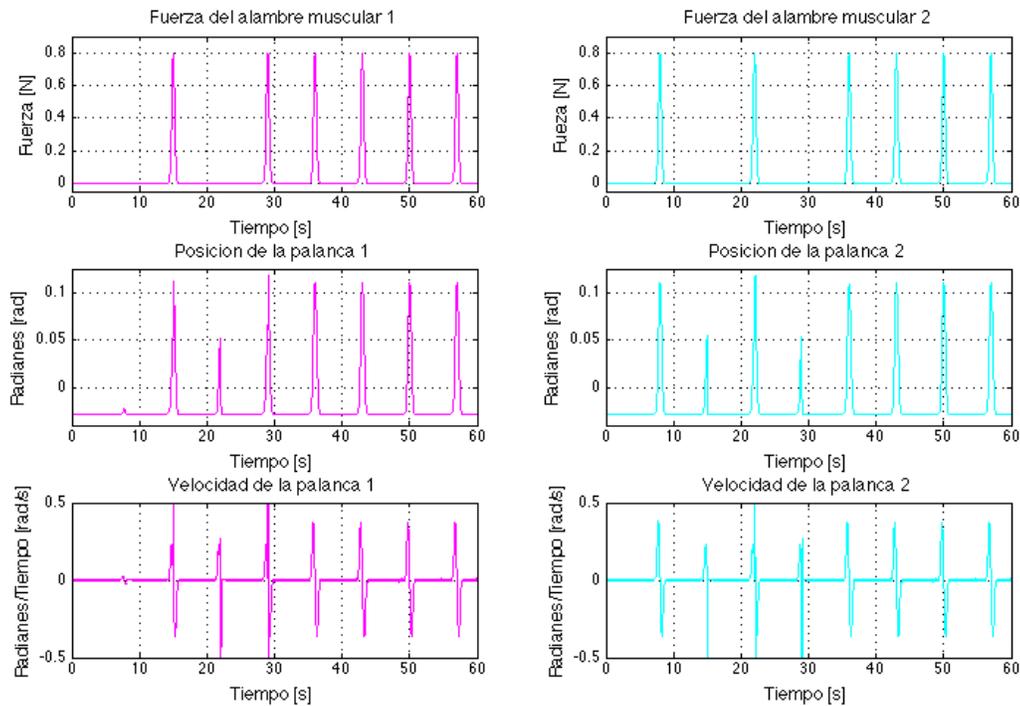


Figura 5.5: Fuerza de los alambres musculares, posiciones y velocidades de las palancas

Nótese que en la figura 5.5, también se puede observar la posición de las palancas y sus velocidades.

**Observación 1:** Algo que no debe pasar desapercibido es la influencia de la fricción generada entre el eje y las palancas; ya que esta fricción afecta la dinámica de las palancas cuando el eje se encuentra girando y viceversa. La fricción generada entre el eje y las palancas, hace que las palancas giren en el mismo sentido que el eje, aún cuando no exista alguna entrada por parte de su correspondiente alambre muscular. Vea las gráficas de “Posición de la palanca 1” cuando  $t = 7, 21$ , y “Posición de la palanca 2” cuando  $t = 14, 28$  en la figura 5.5.

**Observación 2:** No existe necesariamente, un acoplamiento entre la palanca y el sistema cuando la palanca es girada por el efecto de la fricción entre el eje y dicha palanca.

Debido a que sólo existen acoplamientos en el  $\Sigma_{SOC}$  cuando la velocidad de las palancas es igual o mayor que la velocidad del eje, no resulta difícil pensar que el sistema de orden conmutado se encuentra la mayor parte del tiempo desacoplado, como se muestra en la gráfica superior de la figura 5.6.

**Observación 3:** La gráfica superior de la figura 5.6 es un apoyo visual acerca del comportamiento del sistema de orden conmutado. En la cual se muestra qué orden tiene el sistema a lo largo de la simulación, nótese que el sistema la mayor parte del tiempo el sistema está desacoplado, es decir, la mayor parte del tiempo es un sistema de sexto orden.

La gráfica “orden del sistema” de la figura 5.6 cuenta con las siguientes características:

- En color azul se nos indica cuando el  $\Sigma_{SOC}$  se encuentra desacoplado, además se le asigna el valor numérico 6 que coincide con el sexto orden que alcanza al contar con tres ecuaciones diferenciales de segundo orden.
- En color verde se muestran los acoplamientos de la palanca 2 con el sistema. A su vez, con color rojo se señalan los acoplamientos de la palanca 1 al sistema de orden conmutado.
  - Nótese que a los acoplamientos de la palanca 2 se les asignó un valor numérico de 4.1, mientras que a los acoplamientos de la palanca 1 se les ha asignado el valor de 3.9, con la única finalidad de evitar que se encimen las viñetas circulares y de esta manera eliminar ambigüedades.
  - Nótese también que se les asignó un valor cercano a 4, ya que en ambos casos el sistema queda descrito por dos ecuaciones de segundo orden, y por lo tanto, se obtiene un  $\Sigma_{SOC}$  de cuarto orden.
- Por último, las viñetas en color magenta, señalan que ambas palancas se encuentran acopladas al  $\Sigma_{SOC}$ , en este momento, el sistema queda descrito por una sola ecuación diferencial de segundo orden y es por ello que se le ha asignado el valor numérico de 2.

En la segunda y tercer gráfica de la figura 5.6 se muestra la posición y la velocidad del eje a lo largo de la simulación, se puede ver que el eje no retrocede en ningún momento

## 5.1. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE ORDEN CONMUTADO CON DOS PALANCAS63

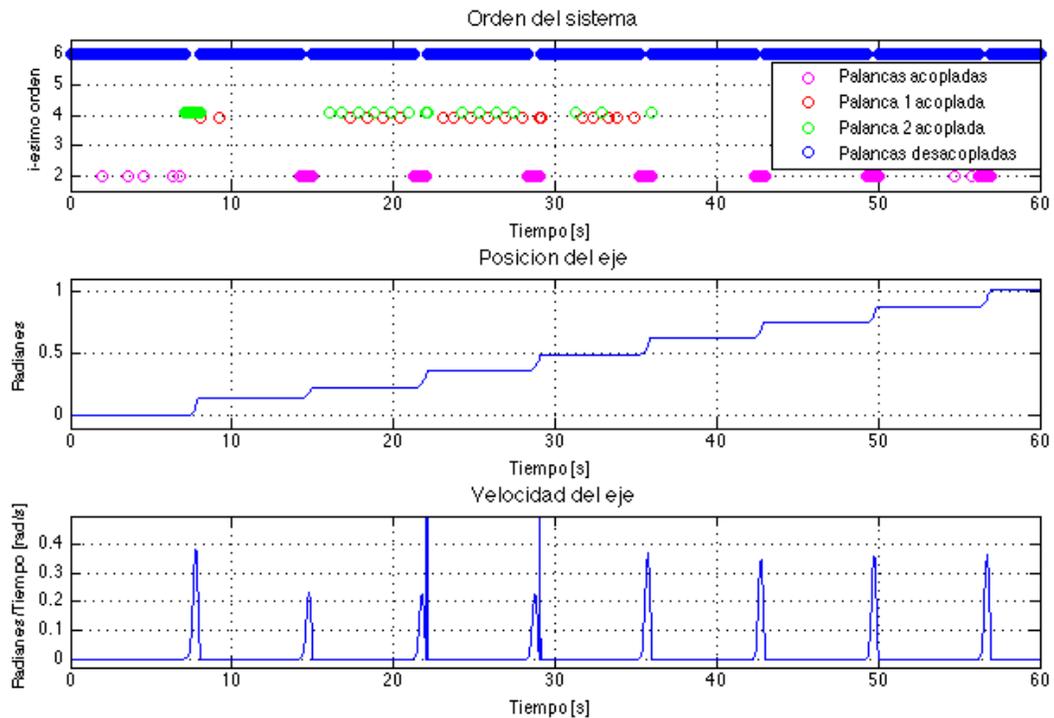


Figura 5.6: Orden del sistema, posición del eje y velocidad del eje

ya que se consideró un trinquete ideal, es decir, se consideró un trinquete con un número infinito de dientes, y cada uno de los movimientos positivos de las palancas son transmitidos al eje si y sólo si las palancas cuentan con una velocidad igual o mayor a la del eje.

Un cambio en la posición de las palancas y el eje, que puede ser de interés y que no se percibe en la figura 5.6, es el giro en dirección sentido horario que realizan las palancas y el eje, vea la figura 5.7. Este cambio de posición de las palancas y el eje se efectúa en los primeros 0.5 segundos de la simulación. En la primer gráfica de la figura 5.7, se puede observar que en los primeros 0.5 segundos de simulación ambas palancas permanecen desacopladas del eje y el sistema es de segundo orden. En el instante que comienza la simulación, las palancas caen ante el efecto de la aceleración gravitacional (segunda y tercer gráfica de la figura 5.7), hasta que la fuerza del resorte de pretensado, la del alambre muscular y la generada por la masa de la palanca y la aceleración gravitatoria se equilibran en  $-0.028 \text{ rad}$  a los 0.5 segundos de simulación. En la última gráfica de la figura 5.7, se puede ver que el eje también gira en la misma dirección de las palancas hasta alcanzar los  $-2.3E - 5 \text{ rad}$ , esta rotación del eje se debe a la fricción que ejercen las

palancas sobre el eje, alcanzando su posición mínima a los 0.35 segundos; cabe señalar que el eje sigue rotando con posiciones negativas aún cuando las palancas se han detenido, ya que tiene un momento de inercia mayor al de las palancas.

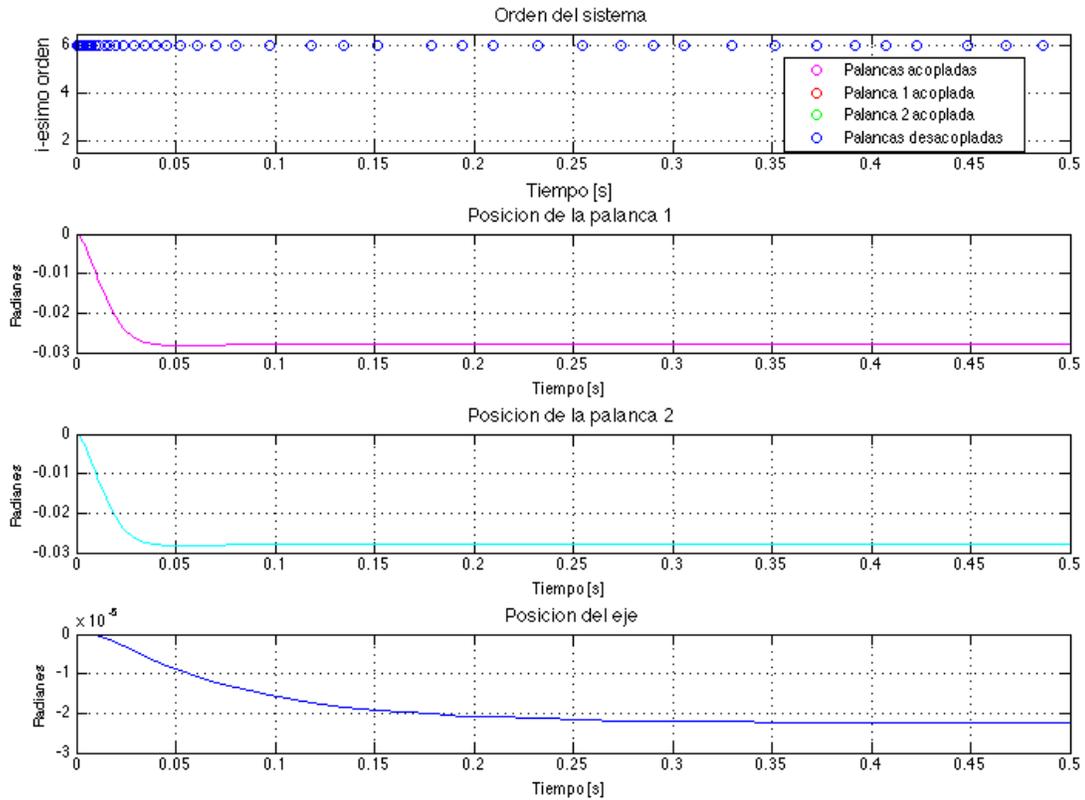


Figura 5.7: Posiciones negativas por efecto de la gravedad

Se concluye que el modelo obtenido en el capítulo anterior describe adecuadamente al actuador mecánico rotacional, y construyendo el  $\Sigma_{SOC}$  representa una gran herramienta que sin duda será de gran utilidad para las generaciones futuras, ya que evita la pérdida de información de sus elementos cuando se encuentran desacoplados del sistema.

## 5.2. Pruebas con el prototipo

### 5.2.1. Construcción del prototipo

El prototipo se encuentra conformado por el actuador mecánico rotacional montado sobre un banco de madera. El diseño del banco de madera y la distribución de las piezas del actuador mecánico rotacional se muestran con mayor detalle en el capítulo 4 y en el apéndice A, así como los materiales empleados en su construcción. La figura 5.8 muestra el actuador mecánico rotacional montado sobre el banco de madera. El actuador mecánico rotacional está diseñado para ser actuado por dos alambres musculares.

La adquisición de los datos del actuador mecánico rotacional para dos alambres musculares se llevó a cabo por la comunicación serial de la tarjeta Arduino UNO y el Ambiente de Desarrollo Integrado de Arduino. Con la adquisición de datos se pudo obtener el voltaje y la potencia consumida por cada alambre muscular, como también la posición del eje del actuador mecánico rotacional. La posición angular del eje fue medida con un encoder *TRD – S1000VD* que cuenta con una precisión de 1000 pulsos en cada vuelta, mientras que el voltaje de los alambres musculares fue medida directamente por medio de la ya mencionada tarjeta Arduino UNO.

La etapa de potencia está conformada por dos transistores MOSFET IRFZ20 (uno para cada alambre muscular), que permite aplicar el voltaje necesario para activar los alambres musculares. Para activar los alambres musculares fueron empleadas dos fuentes de la marca TENMA modelo 72-8345. En la figura 5.10 se puede observar la etapa de potencia de uno de los alambres musculares.

### 5.2.2. Pruebas experimentales

El objetivo de las pruebas es comprobar la dinámica del modelo de orden conmutado llevado en la sección 2.2. Además de obtener los valores del voltaje aplicado a cada alambre muscular para conocer la potencia consumida por cada uno de ellos.

La prueba se llevó a cabo con el actuador mecánico rotacional construido previamente, vea la figura 5.8. El actuador mecánico rotacional fue diseñado para poder ser actuado por un par de alambres musculares de 4". Se utilizaron dos fuentes de alimentación de 5 V, una para cada alambre muscular, ver figura 5.9.

El actuador mecánico rotacional cuenta con un encoder con el cual se puede obtener la posición del eje.

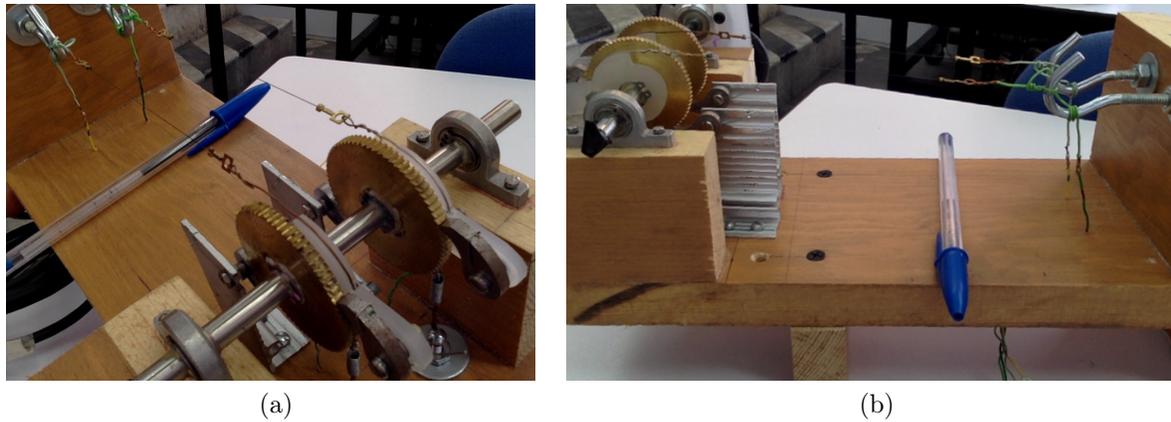


Figura 5.8: a) Vista en perspectiva y b) Vista lateral derecha del prototipo del actuador mecánico rotacional

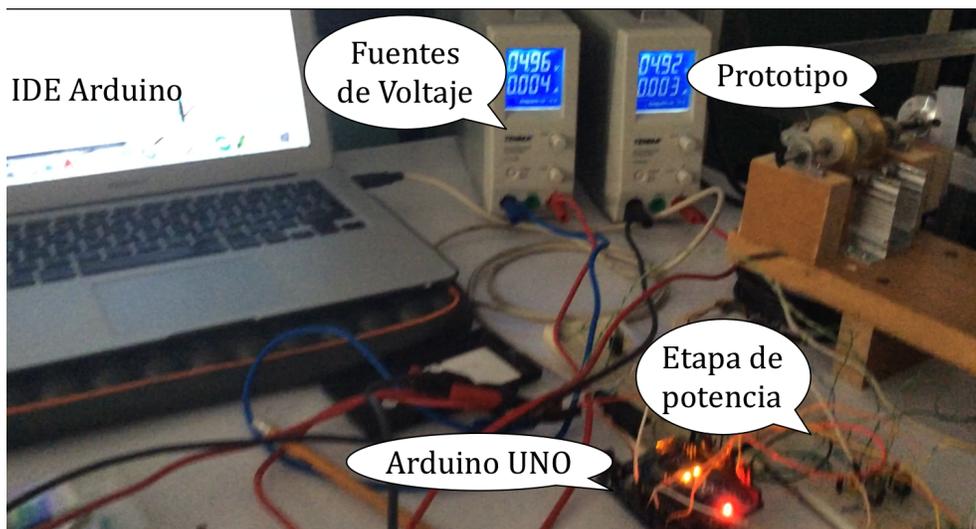


Figura 5.9: Implementación del actuador mecánico rotacional

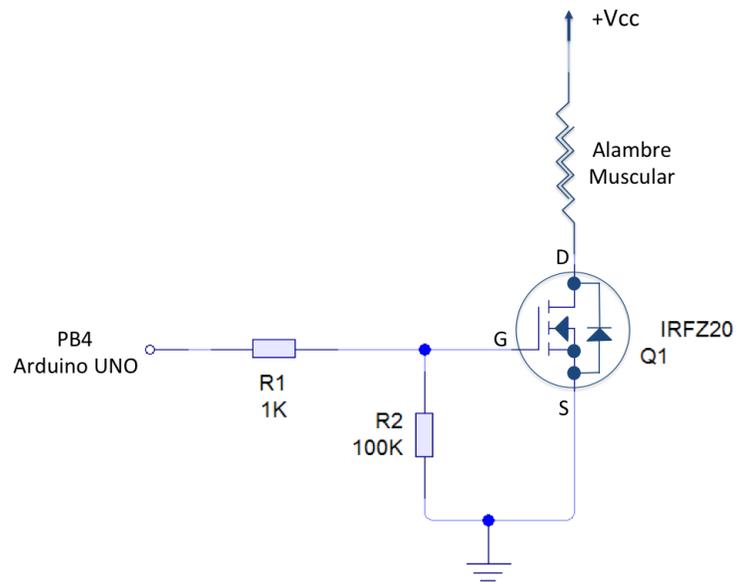


Figura 5.10: Etapa de potencia

Los pulsos de activación tienen una duración de 1.8 segundos. Dichos pulsos son utilizados para activar y desactivar un par de IRFZ20 (uno por cada alambre muscular), vea figura 5.10.

A continuación se presentan los datos obtenidos y condensados en forma de gráficas.

### 5.2.3. Resultados

En las figuras 5.11a y 5.11b se muestran las gráficas de los voltajes consumidos por los alambres musculares y mientras que en la figura 5.11c se muestra la posición angular del eje durante las dos pruebas experimentales realizadas con el prototipo y la simulación ya mencionada.

En color negro se muestran los resultados de la primer prueba, con el actuador en dinámica libre y en color rojo se muestran los resultados de una segunda prueba en la que se añade una carga de 570 g en un extremo del eje. Mientras que en color azul se muestra la posición angular del eje obtenida en la simulación mostrada anteriormente, vea la figura 5.11c.

#### Prueba en dinámica libre del actuador mecánico rotaicional

En esta prueba se puede ver que al transcurrir 14 segundos desde el inicio de la prueba, el eje tiene un cambio de posición máxima de  $0.11 \text{ rad}$  y regresa  $0.02 \text{ rad}$ , es decir que, el

eje tiene incrementos de  $0.09 \text{ rad}$  en cada contracción del alambre muscular, con sobretiros de aproximadamente 22.2%. De acuerdo al diseño de la palanca con horse head, lo dicho anteriormente se traduce en una contracción del 1.3% en el alambre muscular. Esto es apenas un cuarto de la capacidad de contracción del alambre muscular de 4" utilizado en esta prueba. Expresado de otra manera, los alambres musculares se contraen  $0.0522''$ , haciendo girar las palancas con horse head cada vez que son activados; sin embargo, cuando los alambres musculares se enfrían y se estiran con ayuda de su respectivo resorte de pretensado, el eje regresa hasta el último diente brincado en el trinquete. Con la rueda dentada de 72 dientes elegida para el trinquete, el ángulo entre cada diente es de  $0.087 \text{ rad}$ , lo que se ajusta al avance del eje después del sobretiro.

Comparando la posición angular del eje en dinámica libre durante la prueba (línea de color negro) y la posición angular del eje en dinámica libre durante la simulación (línea de color azul), de la figura 5.11c. Se pueden ver que el eje alcanza una posición máxima de  $1.05 \text{ rad}$  en la simulación, mientras que sólo alcanza una posición máxima de  $0.64 \text{ rad}$  durante la prueba experimental. Esto se debe principalmente a que:

- Se considera una rueda dentada ideal durante la simulación, es decir, una rueda dentada con un número de dientes infinito. Esto significa que el eje no tiene pérdidas en su posición angular por regresar al último diente brincado durante el enfriamiento del alambre muscular.
- Se considera una fuente ideal durante la simulación, que no tenga caídas de voltaje al ser conectada a una resistencia.

### Prueba con carga

Como ya se ha mencionado antes, en esta prueba se le añadió más de medio kilogramo de peso al actuador mecánico rotacional en uno de sus extremos. De esta prueba se añaden los comentarios siguientes:

- La línea de color rojo de la figura 5.11c, muestra la posición angular del eje durante la prueba con carga en el eje. En dicha gráfica se puede observar que los sobretiros son del 20% cuando se utiliza un sólo alambre muscular y también cuando se utilizan los dos. Además se puede observar que les cuesta un poco más de trabajo alcanzar su posición máxima en el sobretiro.

- En color rojo en las figuras 5.11a y 5.11b, se puede ver que la activación de los alambres musculares ocurre al mismo tiempo que en la prueba anterior. Nuevamente se comenzó activando los alambres musculares individualmente y alternadamente comenzando con el alambre muscular 2. A los 35 segundos de prueba se activan de manera simultánea ambos alambres musculares.
- Se puede observar que en los primeros 35 segundos de simulación el eje tiene cambios de posición pequeños en comparación a la prueba anterior. Posteriormente, cuando los dos alambres musculares se activan al mismo tiempo, se puede observar que el trinquete brinca un diente en cada activación de los alambres musculares.

Para las pruebas descritas anteriormente se concluye que:

- Los alambres musculares al no tener carga generan sobretiros más grandes en comparación a cuando el sistema se encuentra con alguna carga.
- Existe una sumatoria en la fuerza de los alambres musculares cuando se activan al mismo tiempo. Esto lo podemos verificar observando la posición del eje en la prueba con carga, vea la figura 5.11c. En dicha figura se puede observar que al activar individualmente los alambres musculares los trinquetes no pueden brincar ni un diente completo, en cambio, cuando los alambres musculares son activados al mismo tiempo el eje es capaz de brincar un diente en cada activación.
- Los alambres musculares requieren un voltaje mayor cuando se le añade carga al eje, contrario a lo que se esperaría debido a la caída de voltaje que existe cuando se activa el alambre muscular en dinámica libre, vea la figura 5.12c. El aumento de voltaje en la prueba con carga se le atribuye al control interno de la fuente, puesto que en ambas pruebas las fuentes fueron programadas para entregar 5 V.
- A pesar de que los tiempos de activación de los alambres musculares en la simulación y en las pruebas fueron similares, el sistema tuvo un mejor desempeño cuando se encontraba en dinámica libre y aun mejor cuando se consideró ideal el trinquete y la entrada de fuerza al sistema.

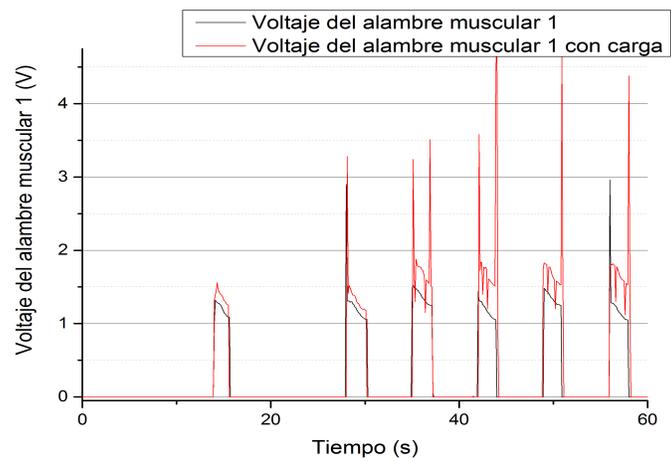
Para complementar esta sección se añaden tres gráficas en la figura 5.12. Estas gráficas son parte de una prueba de caída de voltaje en el circuito mostrado en la figura 5.10:

- En la figura 5.12a, se puede observar el comportamiento del voltaje entre los pines Source y Drain del transistor IRFZ20.

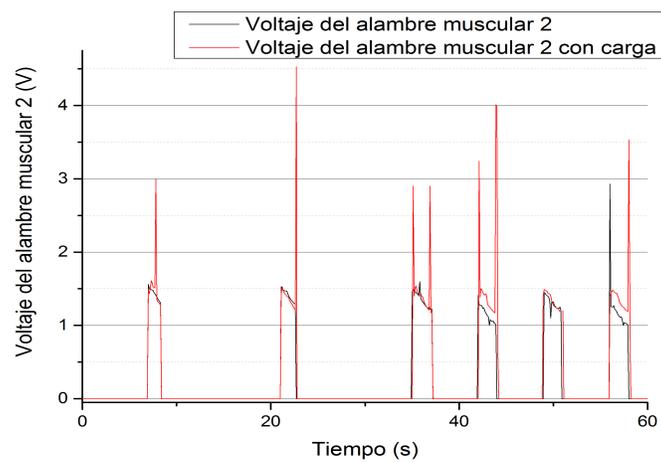
- En la figura 5.12b se puede observar el voltaje leído entre el pin de Drain y +Vcc, cabe señalar que este es el voltaje en el alambre muscular, vea la figura 5.10.
- En la figura 5.12c se muestra la lectura del voltaje entre el pin Source y +Vcc.

Al observar estas tres imágenes se puede apreciar que los voltajes de las figuras 5.12a y 5.12c, permanecen constantes a  $4.65 V$  mientras no se activa el transistor por medio del pin Gate. Cuando el alambre muscular es activado el voltaje promedio que consume es de  $1.5 V$ , mientras que, el voltaje de Source a Drain cae  $0.15 V$ , y el voltaje de Source a Vcc cae en promedio a  $1.5 V$ .

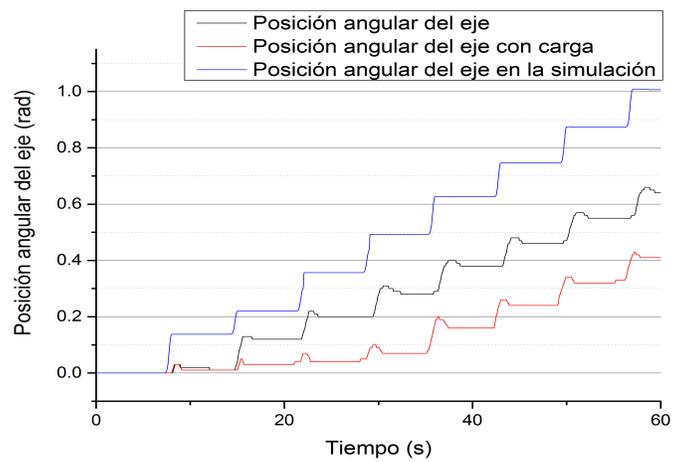
Se concluye que los resultados obtenidos con la prueba son adecuados para ser comparados con las simulaciones. Y con respecto a las pruebas de caída de voltaje, se concluye que la caída de voltaje se da en las fuentes de alimentación TENMA modelo 72-8345 utilizadas para las pruebas.



(a)

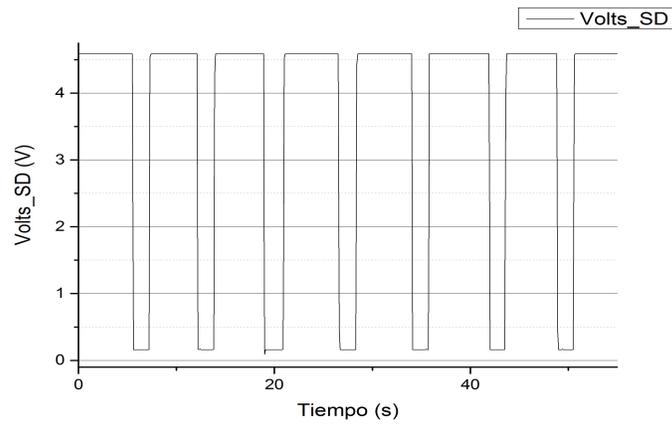


(b)

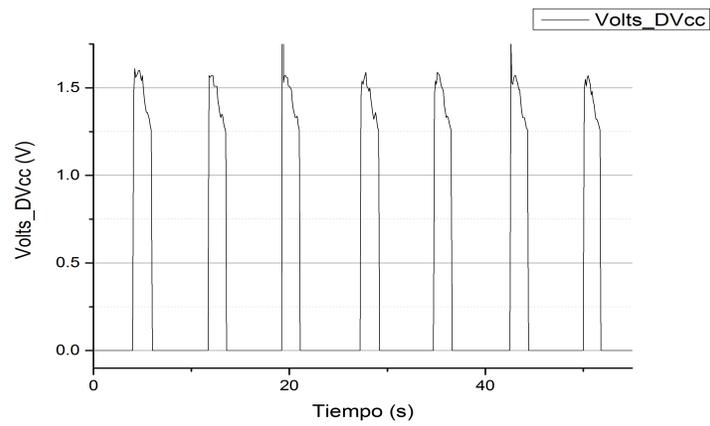


(c)

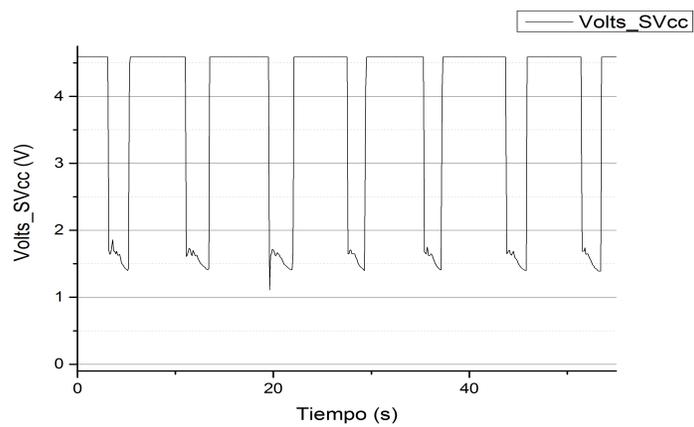
Figura 5.11: a) Voltaje consumido por el alambre muscular 1, b) Voltaje consumido por el alambre muscular 2 y c) Posición angular del eje  $\theta$



(a) Voltaje de Source a Drain



(b) Voltaje aplicado al alambre muscular 1 (de Drain a Vcc)



(c) Voltaje de Source a Vcc

Figura 5.12: Pruebas de caída de voltaje

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajo futuro

### 6.1. Conclusiones

La presente tesis muestra el modelado de un sistema de orden conmutado. El sistema modelado es un actuador mecánico rotacional para arreglos de alambres musculares. Las principales aportaciones son:

- El modelado de un sistema de orden conmutado de un actuador mecánico rotacional con dos palancas para un arreglo de dos alambres musculares.
- El modelo de un sistema de orden conmutado de un actuador mecánico rotacional con  $p$  palancas para un arreglo de  $p$  alambres musculares.
- El diseño y construcción de un prototipo de un actuador mecánico rotacional con dos palancas para un arreglo de dos alambres musculares.

#### Modelado

El primer modelado de un sistema de orden conmutado se realizó en base a un bosquejo de un actuador mecánico rotacional con dos palancas. Las características más sobresalientes de este modelado son:

- El número de ecuaciones diferenciales de segundo orden que componen un submodelo cuando el sistema se encuentra acoplado, desacoplado y con alguna(s) de sus palancas acopladas.
- La conmutación entre submodelos en función de la velocidad relativa de las palancas y con respecto a la velocidad del eje.

- La relación que existe entre el número de submodelos que describen al sistema y el número de palancas en el sistema.

Además la información de los elementos del sistema no se pierde al momento que ocurren las conmutaciones. Tal es el caso de:

- El par torsor de las palancas.
- Las masas de las palancas con horse head, y el momento de inercia de las ruedas dentadas y el eje.
- Las componentes gravitacionales de las palancas.
- La interacción que existe entre las palancas y el eje por efecto de la fricción.

Por otra parte, también se pueden apreciar las regiones de operación del sistema. En ellas se puede ver que existe similitud en las regiones de operación de las palancas, ya que ambas cuentan con la misma geometría y las características de los alambres musculares que las actúan son las mismas.

Una vez realizado el modelo del actuador con dos palancas y considerando las variables que afectan al sistema, se realizó el modelo del actuador para  $p$  palancas.

El modelado del sistema de orden conmutado de un actuador mecánico rotacional con  $p$  palancas es la generalización del modelado del actuador con dos palancas.

Aunque se muestra una mayor atención al modelo del actuador para dos palancas porque con él se llevó a cabo la implementación. El modelo para  $p$  palancas es el resultado del mayor reto asumido en el presente trabajo de tesis.

La complejidad del modelado de un sistema de orden conmutado radica en la consideración de las velocidades angulares relativas de las palancas para crear las funciones de conmutación, y la consideración de las fricciones entre las palancas y el eje cuando las palancas se encuentran desacopladas. Dichas fricciones se presentan cuando la velocidad del eje es mayor que la velocidad de alguna de las palancas.

En el modelado del actuador para  $p$  palancas se encontraron algunas características, tales como:

- El sistema se encuentra definido por  $2^p$  submodelos, donde  $p$  es el número de palancas en el sistema.

- El submodelo con todas sus palancas acopladas está descrito por una ecuación diferencial de segundo orden. En este momento el sistema es de segundo orden.
- El número de ecuaciones diferenciales de segundo orden se incrementa de acuerdo al número de palancas desacopladas.
- El submodelo con todas sus palancas desacopladas está descrito por  $p + 1$  ecuaciones diferenciales de segundo orden. Es decir, el orden máximo del sistema es de  $2(p + 1)$ .

### Diseño y construcción

El diseño del prototipo conformado por un actuador mecánico rotacional con dos palancas y un banco de madera, fue realizado en AutoCAD. Una vez diseñado se compraron y se manufacturaron los elementos que conforman el prototipo. Algunas piezas como las ruedas dentadas, el eje y sus rodamientos, son elementos de precisión pedidos por internet a SDP/SI. Esta es una tienda en línea que manufactura componentes mecánicos pequeños. Otras piezas como las palancas con horse head y el banco de madera fueron elaboradas a partir de materia prima como acrílico y madera.

La finalidad de la construcción del prototipo fue realizar pruebas que arrojaran resultados comparables con las simulaciones del modelo.

En las simulaciones del modelo del actuador con dos palancas se ha podido conocer su comportamiento. En las gráficas de las simulaciones se muestra la fuerza de los alambres musculares, la posición de las palancas y las velocidades de las mismas. También se puede observar el orden que adquiere el sistema en cada uno de los acoplamientos, así como la posición y velocidad del eje.

En las pruebas con el prototipo se pudo obtener el voltaje consumido por cada alambre muscular. También se obtuvo la posición del eje con ayuda de un encoder T RD – S1000V D conectado a una tarjeta Arduino UNO, con la cual se hizo la adquisición de datos. Se realizó una prueba con el prototipo en dinámica libre y una segunda prueba añadiendo una carga de 570 g. Comparando las dos pruebas, el sistema con carga se notó más forzado para alcanzar su posición máxima en cada contracción del alambre muscular. Por lo que requirió de un mayor voltaje.

En conclusión, se presenta el modelado de un sistema de orden conmutado de un actuador mecánico rotacional con  $p$  palancas para un arreglo de  $p$  alambres musculares de manera generalizada. Inicialmente se muestra el modelado de un actuador mecánico rotacional con dos palancas, con el cual se describen pormenorizadamente las características de los sistemas de orden conmutado modelados en el presente trabajo. Al comparar la simulación con las pruebas del prototipo, se observa que el modelo describe de manera adecuada al actuador mecánico rotacional con dos palancas.

## 6.2. Trabajo futuro

Uno de los trabajos a futuro sería la creación de un controlador para el actuador mecánico rotacional para dos alambres musculares del presente trabajo, tomando en cuenta que se trata de un sistema de orden conmutado.

Continuando con la generalización del sistema, el siguiente trabajo futuro sería obtener el controlador para un actuador mecánico rotacional para  $p$  alambres musculares.

Un trabajo más sería la instrumentación que permita obtener la posición de las palancas con horse head y crear observadores para conocer los parámetros que resultan difíciles de medir.

Otro reto futuro sería, sistematizar el modelado de controladores para sistemas de orden conmutado para que sean diseñados e implementados de una manera más práctica.

También se podría considerar trabajar con sistemas tolerantes a fallas, ya que el sistema cuenta múltiples actuadores.

Finalmente, una idea de trabajo futuro, sería incursionar en el diseño de un toolbox en Matlab que facilite las simulaciones de sistemas de orden conmutado.

# Bibliografía

- [1] M Bergamasco, F Salsedo, and P Dario. Shape memory alloy micromotors for direct-drive actuation of dexterous artificial hands. *Sensors Actuat.*, 17:115–119, 1989.
- [2] Iván Carrasco and Francisco Díaz. Alambres musculares. Technical report, Universidad Técnica Federico Santa Maria, Valparaiso, 2003.
- [3] Universidad de Zaragoza. Biomateriales con memoria de forma y superelasticidad, 2014.
- [4] Sushant M. Dutta and Fathi H. Ghorbel. Differential hysteresis modeling of a shape memory alloy wire actuator. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 10(2):189–197, 2005.
- [5] Sushant M Dutta, Student Member, Fathi H Ghorbel, and Senior Member. Differential Hysteresis Modeling of a Shape Memory Alloy Wire Actuator.
- [6] Serket Quintanar Guzmán. Regulación de Velocidad Promedio de un Sistema Electrotérmico-Mecánico. 2014.
- [7] M Hashimoto, M Takeda, H Sagawa, I Chiba, and K Sat. Shape memory alloy and robotic actuators. *Robot. Syst.*, 2:3–25, 1985.
- [8] Koji Ikuta, Masahiro Tsukamoto, and Shigeo Hirose. Shape memory alloy servo actuatorsystem with electric resistance feedback and application for active endoscope. *Robotics and Automation*, 1:427–430, 1988.
- [9] Koji Ikuta, Masahiro Tsukamoto, and Shigeo Hirose. Mathematical Model and Experimental Verification of Shape Memory Alloy for Designing Micro Actuator. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, pages 103–108, 1991.

- [10] J Kudva, B Sanders, Pinkerton Florance, and E Garcia. Overview of the DARPA/AFRL/NASA smart wing Phase 2 program. 4332:383–389, 2001.
- [11] Fank L. *Robot Manipulator Control*. 2004.
- [12] Chao Chieh Lan and Chen Hsien Fan. An accurate self-sensing method for the control of shape memory alloy actuated flexures. *Sensors and Actuators, A: Physical*, 163(1):323–332, September 2010.
- [13] Daniel R Madill and David Wang. Modeling and L2-Stability of a Shape Memory Alloy Position Control System. 6(4):473–481, 1998.
- [14] Katsuhiko Ogata. *Ingenieria de Control Moderna*. 5ta edició edition, 2010.
- [15] Serket Quintanar-Guzmán, Juan Reyes-Reyes, and Carmen Arellano-Sánchez. Modelado y control de un sistema Electrotérmico-Mecánico móvil basado en alambres musculares. pages 834–839. Cacún, 2014.
- [16] Roberto Romano and Eduardo Aoun Tannuri. Modeling, control and experimental validation of a novel actuator based on shape memory alloys. *Mechatronics*, 19(7):1169–1177, October 2009.
- [17] Jean-Jacques E Slotine and Weiping Li. On the Adaptive Control of Robot Manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 6:49–59, 1987.
- [18] Peter E Wellstead. *Introduction to Physical System Modelling*. 2000.

# Nomenclatura

$\bar{\theta}$  Posición angular del eje [rad]

$\beta$  Coeficiente de centro de masa

$\dot{\bar{\theta}}$  Velocidad angular del eje [rad/s]

$\dot{\theta}_i$  Velocidad angular de la  $i$ -ésima palanca,  $i = 1, 2, \dots, p$  [rad/s]

$\phi$  Función de conmutación

$\rho_{hh}$  Longitud de la palancaca con horse head [m]

$\theta_i$  Posición angular de la  $i$ -ésima palanca,  $i = 1, 2, \dots, p$  [rad]

$b_{eje}$  Coeficiente de fricción del eje

$b_{pal}$  Coeficiente de fricción de la palanca

$c_a$  Caso actual

$F_{ri}$  Fuerza de los resortes  $e_1$  y  $e_2$  [N]

$F_{wi}$  Fuerza de los alambres musculares  $f_1$  y  $f_2$  [N]

$g$  Constante gravitacional [ $m \cdot s^{-2}$ ]

$J$  Momento de inercia [ $kg \cdot m^2$ ]

$k_r$  Constante del resorte [N/m]

$k_w$  Módulo del alambre muscular [N/m]

$n_{ED}$  Número de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$n_{sm_{pd}}$  Número de submodelos por número de palancas desacopladas

$n_{sm}$  Número de submodelos en el sistema

$O_S$  Orden del sistema

$p$  Número de palancas

$p_d$  Número de palancas desacopladas

# Apéndice



# Apéndice A

## Planos del prototipo y material utilizado

En el presente apéndice se muestran los planos del prototipo. El prototipo está conformado por el actuador mecánico rotacional (Fig. A.1), y un banco de madera (Fig. A.2), sobre el cual, se encuentra colocado el actuador mecánico rotacional.

Las piezas con la que se construyó el prototipo se enumeran en tabla A.1.

Tabla A.1: Piezas para la construcción del prototipo

No.	Pzas	Nombre	No. de Parte	Descripción
1	4	Pawl*	A 1C14-04	1/8" Thick, Steel pawl
2	4	Ratchet*	A 1B14-48072	48 PITCH, 72 TEETH, BRASS RATCHET
3	2	Extension Spring*	S78ESY-024026075	0.24" (OD), 0.75" Free Length, Helical Extension Spring
4	4	Torsion Spring*	S78TSY-015180109	Torsion spring capable of 180° Deflection and 0.093 lb-in of Torque
5	1	Shaft*	A 7X 1-08050	0.24970" (+.000/-0.0002) Dia., 5" Long, 303 Stainless Steel Shaft
6	2	Ball Bearings*	A 7Z29-XS250	0.25 in. Bore, Pillow Block-Mount with Stainless Steel Pressbearing
7	4	Shoulder Screw*	A 7Y 5-CF1	#2-56 Commercial, 0.0935" Shoulder Dia., 0.13" Shoulder LG., 303 Stainless Steel
8	4	Nuts*	A 9X18-256	Hexagonal Nut, #2-56 Thread Size, 0.1875in. Across the Flats, .066in. Head Height, Material-18-8 Stainless Steel
9	8	Grooveless	S73NW2-GR555-25	External Grooveless Retaining Ring for .248 / .252" Shaft Dia
10	1	Madera**	113334	MADERA TRATADA 1" X 6" X 8 PIES
11	10	Pijas**	202485	TORNILLO CABEZA PLANA DE RANURA-ZN 8" X 2"
12	6	Tornillos		Tornillos de 1/8" X 2"
13	2	Tornillos		Tornillos de 1/8" X 3/16"
14	2	Armellas		Armellas abiertas de 3/16
15	8	Tuercas		Tuercas exagonales de 1/8"
16	4	Tuercas		Tuercas exagonales de 3/16"

### Proveedores

\* <https://sdp-si.com/eStore/Catalog>

\*\* <http://www.homedepot.com.mx>

La parte superior de la figura A.1, muestra las piezas utilizadas para construir el actuador mecánico rotacional. En la parte inferior de la misma figura se muestran dos perspectivas isométricas en las que se puede apreciar el actuador mecánico rotacional ya armado.

La figura A.2, muestra la distribución de las piezas utilizadas para construir el banco de trabajo. Cabe señalar que las piezas utilizadas en el banco fueron manufacturadas a partir de la madera listada en la Tabla A.1.

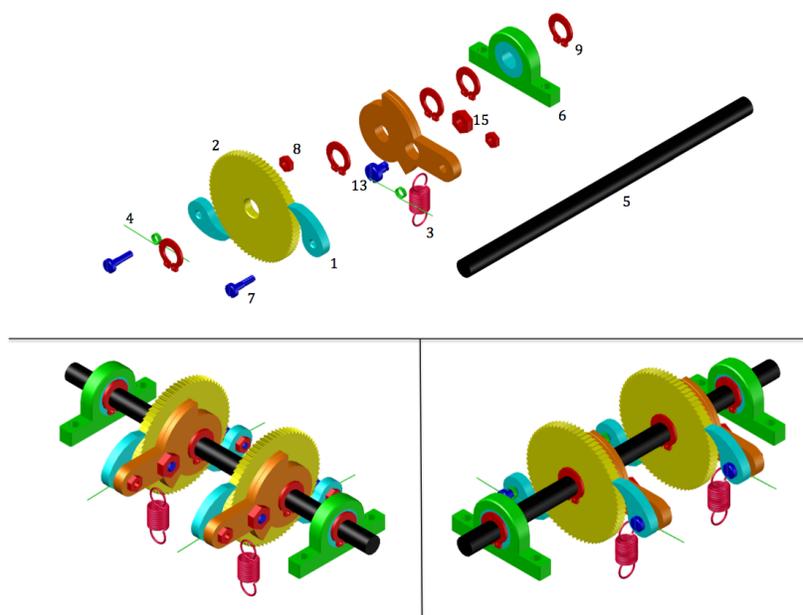


Figura A.1: Piezas del actuador mecánico rotacional

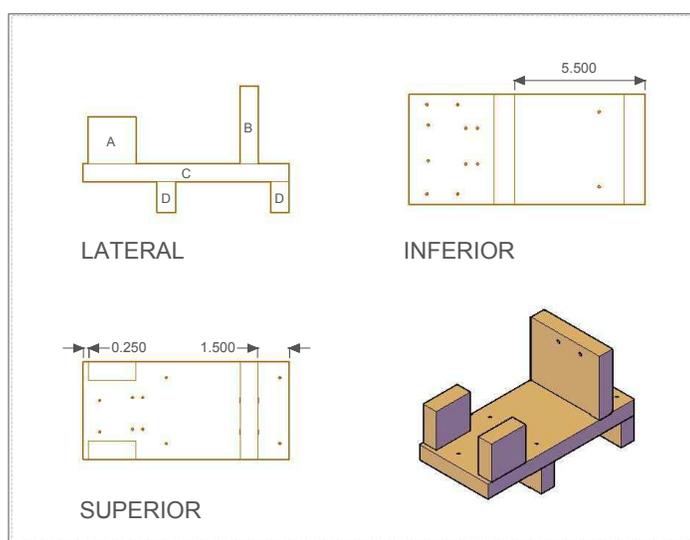


Figura A.2: Banco de madera para el actuador mecánico rotacional

El diseño de las piezas utilizadas para construir el banco de madera se muestra en las figuras A.3, A.4, A.5 y A.6. Para la construcción del banco fueron necesarias dos piezas A, una pieza B, una pieza C y dos piezas D.

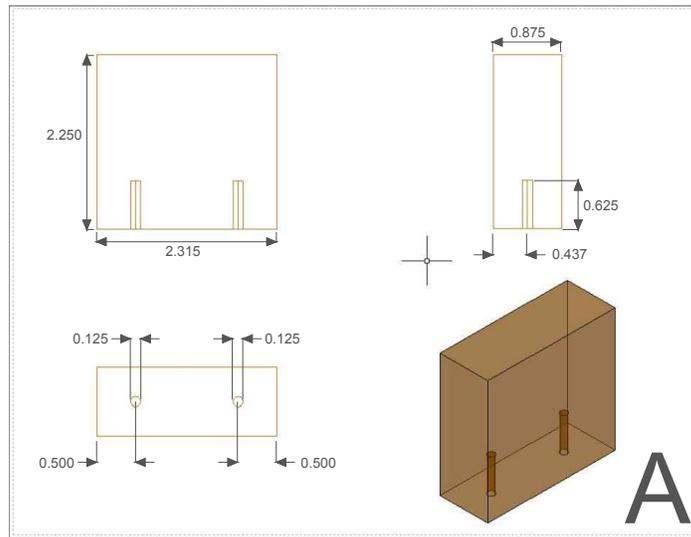


Figura A.3: Pieza A

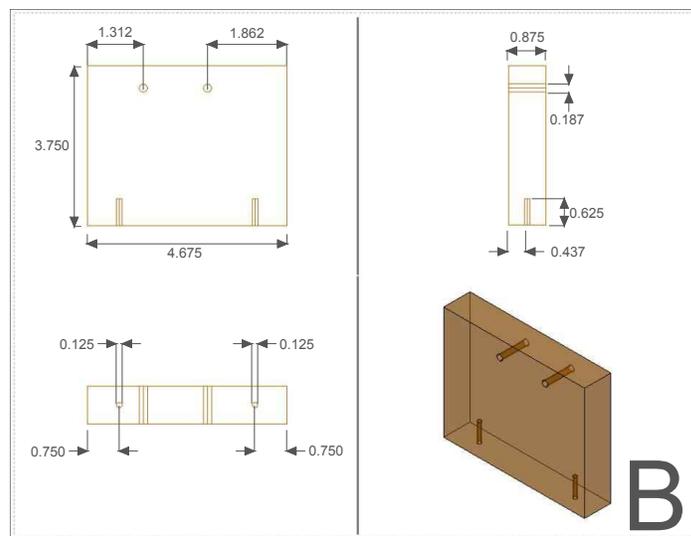


Figura A.4: Pieza B

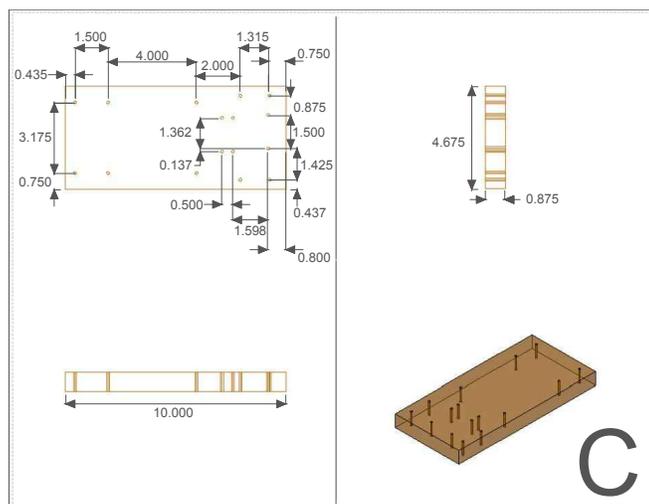


Figura A.5: Pieza C

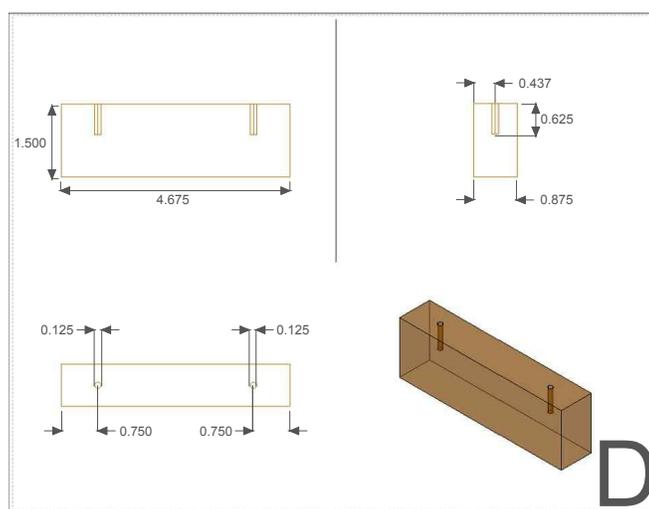


Figura A.6: Pieza D

Un elemento importante para la adquisición de datos es el encoder. El encoder fue de utilidad para medir la posición angular del eje. El encoder utilizado fue el *TRD-S1000VD*, este dispositivo cuenta con una precisión de 1000 pulsos por revolución, es decir, tiene la sensibilidad para detectar cambios angulares de  $6.28 \text{ mrad}$ .