

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Subdirección Académica

Departamento de Ingeniería Electrónica

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

**Comparación de dos Estrategias de Control: a) Platitud más un
Controlador PI, b) Platitud más un Controlador IDA-PBC para una Grúa de
Caballete en Términos de Robustez y Desempeño**

presentada por
Ing. Iris Jazmín Pérez Cisneros

como requisito para la obtención del grado de
Maestra en Ciencias en Ingeniería Electrónica

Director de tesis
Dr. Carlos Daniel García Beltrán

Cuernavaca, Mor., 10 de octubre de 2016.

OFICIO No. DIE/208/2016
Asunto: Aceptación de documento de tesis

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

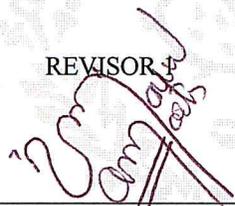
Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Iris Jazmín Pérez Cisneros** con número de control **M13CE082** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **“Comparación de dos Estrategias de Control: a) Platitud más un Controlador PI, b) Platitud más un Controlador IDA-PBC para una Grúa de Caballete en Términos de Robustez y Desempeño”** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

CODIRECTOR DE TESIS



Dr. Carlos Daniel García Beltrán
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 8699605



Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 8031070

REVISOR 2



Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez
Doctor en Ingeniería
Cédula profesional 3431842

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Estudiante
Expediente

CMAZ/lrr



Cuernavaca, Mor., 17 de octubre de 2016

OFICIO No. SAC/303/2016

Asunto: Autorización de impresión de tesis

**ING. IRIS JAZMÍN PÉREZ CISNEROS
CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“Comparación de dos Estrategias de Control: a) Platitud más un Controlador PI, b) Platitud más un Controlador IDA-PBC para una Grúa de Caballete en Términos de Robustez y Desempeño”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

“CONOCIMIENTO Y TECNOLOGIA AL SERVICIO DE LOS ESTUDIOS MEXICANOS”



DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

SEP TecNM
CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr



Dedicatoria

A mis *padres* por sentarme las bases de responsabilidad, compromiso, perseverancia, humildad y dedicación con gran amor y paciencia, por ser mi fuente de inspiración y motivación para superarme cada día.

A mi *hermano* por sus palabras de aliento que no me dejaban decaer para que siguiera adelante.

A mi *abuelita*, aunque no esté físicamente entre nosotros, ha estado cuidándome y guiándome desde el cielo.

Este logro es de ustedes.

Agradecimientos

Primero a Dios por haberme permitido culminar esta etapa profesional de mi vida, por no dejarme caer, por darme fortaleza y sabiduría.

A mis padres José Antonio y María Magdalena, gracias de todo corazón por su apoyo incondicional, por su inmenso amor, por sus consejos para hacer de mí una mejor persona, por motivarme constantemente, por enseñarme que con esfuerzo y trabajo puedo alcanzar mis metas. Los admiro y los amo por sobre todas las cosas.

A mi hermano Miguel, por formar parte de mi vida; gracias por brindarme tu cariño, afecto y por todos los momentos que hemos pasado juntos. Te quiero mi pequeño M. W.

A mi abuelita Petra, gracias por tus enseñanzas, amor y por haberme dado tantos días de felicidad. Siempre te amaré y te llevaré en mi corazón.

Le doy gracias a dios por haberte puesto en mi camino; gracias Luis por tu amor, paciencia, apoyo, por creer en mí, por estar a mi lado en este camino y por tu ayuda en los momentos difíciles... te amo.

Un especial y sincero agradecimiento al Dr. Alejandro Rodríguez Palacios, por sus enseñanzas, consejos, ánimos y por su paciencia, los cuales me permitieron crecer profesionalmente, pero sobre todo gracias por su amistad y confianza a lo largo de este trayecto.

A mi asesor de tesis al Dr. Carlos Daniel García Beltrán, gracias por su apoyo y por sus valiosos consejos los cuales me permitieron culminar este trabajo.

A mis revisores el Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez y Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, gracias por sus comentarios, consejos y observaciones los cuales me permitieron enriquecer este trabajo.

A mis profesores Dr. Alejandro Rodríguez Palacios, Dr. Carlos Daniel García Beltrán, Dr. Gerardo Vicente Guerrero, Dr. Juan Reyes Reyes, Dr. Jesús Mina, Dr. Manuel Adam Medina, Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza y Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez, gracias por sus enseñanzas y por todos los conocimientos brindados.

A mis compañeros de generación del CENIDET por los buenos momentos y con los cuales compartí buenas experiencias. A Ivonne, aunque llevamos poco tiempo de conocernos, hemos forjado una linda amistad, gracias por tu apoyo y compañía.

A mi amiga Amy, gracias por tu apoyo, por los buenos y malos momentos que hemos pasado juntas y por tu amistad incondicional a lo largo de estos años.

A mi amigo Eutiquio, gracias por tus palabras de aliento, por los ánimos y por la amistad que me has brindado.

Al CENIDET por brindarme los medios necesarios para seguir creciendo profesionalmente, a Lic. Lorena Ruiz por su tiempo y apoyo. A la Lic. Patricia Armas por su tiempo y sus enseñanzas en el idioma inglés. A todo el personal que ahí labora por las atenciones prestadas durante mi estancia.

Finalmente, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme brindado el apoyo económico durante el desarrollo del posgrado.

Resumen

Platitud diferencial es una propiedad que poseen algunos sistemas dinámicos que permite una parametrización completa de todas las variables del sistema en términos de un conjunto finito de variables independientes, llamadas salidas planas y un número finito de sus derivadas en el tiempo. Uno de los principales problemas en control es el de planeación y seguimiento de trayectoria, el cual se refiere al hecho de generar una trayectoria que la dinámica del sistema debe seguir, desde un punto inicial hasta un punto final deseado. Si un sistema es plano entonces se puede utilizar la propiedad de platitud diferencial para generar trayectorias. Platitud combinada con una técnica particular de control retroalimentado facilita las tareas de seguimiento de trayectoria.

El método basado en pasividad conocido como Control Basado en Pasividad por Interconexión y Asignación de Amortiguamiento (*Interconnection and Damping Assignment-Passivity Based Control*, IDA-PBC) parte de una estructura Hamiltoniana Controlada por Puerto (PCH) en lazo abierto y obtiene otra en lazo cerrado con las propiedades de estabilidad deseadas. El control PI (*Proportional Integral*) es la suma de una acción proporcional y una integral, se combinan las acciones para tener los beneficios de una respuesta rápida sin oscilaciones de una acción proporcional y una respuesta que nos lleve exactamente al valor deseado de una acción integral.

En esta tesis se presenta el análisis de la robustez ante perturbaciones e incertidumbre paramétrica para el caso de estudio que es una grúa de caballete, en dos estrategias de control; que constan, por una parte, de un control prealimentado (para diseñar fuera de línea una trayectoria de referencia) y, por otra de un control retroalimentado (para asegurar estabilidad y seguimiento de trayectoria). Es decir, controlador basado en Platitud diferencial más PI y controlador basado en Platitud diferencial más IDA-PBC. Finalmente se realiza la comparación de los esquemas combinados para determinar cual presenta un mejor seguimiento de trayectoria de la carga en un plano bidimensional.

Abstract

Differential flatness is a property of some dynamic systems that allows full parameterization of all system variables in terms of a finite set of independent variables, called flat outputs and a finite number of its derivatives in time. One of the main problems in control is the one in planning and trajectory tracking, which refers to the fact of generating a trajectory that the system dynamics must follow, from a starting point to a desired endpoint. If a system is flat, then the property can be used to generate differential flatness trajectories. Flatness combined with a particular feedback control technique which facilitates trajectory tracking tasks.

Passivity based method known as Interconnection and Damping Assignment-Passivity (IDA-PBC) part of a Hamiltonian structure Controlled Port (PCH) in open loop system and closed system with another obtains the desired stability properties loop. The Integral Proportional control (PI) is the sum of a proportional action and an integral, actions combine to have the benefits of a quick response without oscillations of a proportional action and a response that leads exactly to the desired value of a comprehensive action.

In this thesis, it is presented the analysis of robustness before disturbances and parametric uncertainty for the study case which is a gantry crane, in two control strategies are presented consisting, on the one hand, a feedforward control of (offline to design a reference trajectory) and the other a feedback control (to ensure stability and trajectory tracking); i.e. based on differential flatness and more PI controller based on differential flatness more IDA-PBC controller. Finally comparing combination schemes performance to determine which has a better track load path in a two-dimensional plane.

Índice General

Índice de Figuras.....	III
Índice de Tablas.....	VII
Notaciones.....	IX
Capítulo 1 : Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema.....	2
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivo general	2
1.2.2 Objetivos específicos	3
1.3 Estado del arte	3
1.3.1 Clasificación de grúas y su control	3
1.3.2 Platitud diferencial	7
1.3.3 Pasividad	10
1.4 Justificación.....	12
1.5 Estructura de la tesis.....	12
Capítulo 2 : Marco teórico.....	15
2.1 Platitud diferencial.....	15
2.1.1 Definiciones básicas	16
2.1.2 Platitud diferencial para sistemas no lineales	17
2.1.3 Control basado en platitud diferencial	19
2.2 Pasividad.....	20
2.2.1 Definiciones básicas	22
2.2.2 Pasividad y moldeo de energía	25
2.2.3 IDA-PBC	26
2.3 Robustez.....	27
2.3.1 Definiciones básicas	27
2.3.2 Análisis de robustez de sistemas no lineales	29

2.4 Planeación y seguimiento de trayectoria.....	31
Capítulo 3 : Modelado dinámico de una grúa de caballete	33
3.1 Modelo dinámico	35
3.2 Simulaciones en lazo abierto	44
Capítulo 4 : Diseño de esquemas de control.....	47
4.1 Diseño de un control prealimentado basado en platitud diferencial	47
4.1.1 Sistema plano: grúa de caballete.....	47
4.1.2 Planeación de trayectoria mediante curva de Bézier	50
4.1.3 Control basado en platitud diferencial	52
4.2 Diseño de un controlador IDA-PBC	56
4.3 Diseño de un controlador PI.....	63
4.4 Esquema de un control combinado.....	66
Capítulo 5 : Simulaciones y pruebas comparativas.....	69
5.1 Simulaciones de los esquemas de control: Caso nominal.....	69
5.2 Simulación de los esquemas de control: Caso con perturbaciones	75
5.3 Simulaciones de los esquemas de control: Caso con incertidumbre paramétrica	86
5.4 Pruebas comparativas	96
Capítulo 6 : Conclusiones y Trabajos futuros.....	99
6.1 Aportaciones.....	100
6.2 Trabajos futuros.....	100
Bibliografía	101
Anexo 1. Planeación de trayectoria mediante curva de Bézier	105
Anexo 2. Método para desarrollar controlador PI.....	107
Anexo 3. Diagrama de Simulación: Platitud diferencial más IDA-PBC	109
Anexo 4. Diagrama de Simulación: Platitud diferencial más PI.....	111

Índice de Figuras

Figura 2.1 Interpretación geométrica platitud diferencial.....	31
Figura 3.1 Estructura de la grúa de caballete.....	33
Figura 3.2 Pórtico en celosía.....	34
Figura 3.3 Pórtico en vigas-cajón.....	35
Figura 3.4 Grúa de caballete.....	36
Figura 3.5 Esquema de polea y cable.....	37
Figura 3.6 Respuesta de la variable θ en lazo abierto.....	45
Figura 3.7 Respuesta de la variable x en lazo abierto.....	45
Figura 3.8 Respuesta de la variable α en lazo abierto.....	45
Figura 3.9 Respuesta de la variable y_1 en lazo abierto.....	46
Figura 3.10 Respuesta de la variable y_2 en lazo abierto.....	46
Figura 4.1 Diagrama de grúa de caballete.....	48
Figura 4.2 Diagrama de polea y cable.....	48
Figura 4.3 Curva para Eje horizontal.....	51
Figura 4.4 Curva para Eje vertical.....	51
Figura 4.5 Trayectoria física de la carga.....	51
Figura 4.6 Esquema de control basado en Platitud diferencial.....	52
Figura 4.7 Variable θ en términos de la salida plana.....	52
Figura 4.8 Variable x en términos de la salida plana.....	52
Figura 4.9 Variable α en términos de la salida plana.....	53
Figura 4.10 Variable l en términos de la salida plana.....	53
Figura 4.11 Señal de control prealimentada Fx	53
Figura 4.12 Señal de control prealimentada $\tau\alpha$	54
Figura 4.13 Respuesta de θ aplicando control prealimentado.....	54
Figura 4.14 Respuesta de x aplicando control prealimentado.....	54
Figura 4.15 Respuesta de α aplicando control prealimentado.....	55
Figura 4.16 Respuesta de l aplicando control prealimentado.....	55
Figura 4.17 Respuesta de y_1 aplicando control prealimentado.....	55
Figura 4.18 Respuesta de y_2 aplicando control prealimentado.....	56
Figura 4.19 Señal de control Fx (IDA-PBC).....	62
Figura 4.20 Señal de control $\tau\alpha$ (IDA-PBC).....	62

Figura 4.21 Respuesta de x aplicando ley de control IDA-PBC.....	62
Figura 4.22 Respuesta de α aplicando ley de control IDA-PBC.	62
Figura 4.23 Respuesta de θ aplicando ley de control IDA-PBC.....	62
Figura 4.24 Sistema en lazo cerrado para grúa de caballete.....	64
Figura 4.25 Oscilación sostenida para determinar P_{cr}	64
Figura 4.26 Señal de control Fx (PI).....	65
Figura 4.27 Señal de control $\tau\alpha$ (PI).....	65
Figura 4.28 Respuesta de x aplicando ley de control PI.....	65
Figura 4.29 Respuesta de x aplicando ley de control PI.....	65
Figura 4.30 Respuesta de θ aplicando ley de control PI.....	65
Figura 4.31 Estructura del control combinado (Platitud más IDA-PBC).	66
Figura 4.32 Estructura del control combinado (Platitud más PI).	67
Figura 5.1 Señal de control Fx retroalimentada (IDA-PBC).....	69
Figura 5.2 Señal de control $\tau\alpha$ retroalimentada (IDA-PBC).....	70
Figura 5.3 Señal de control Fx combinada (Platitud + IDA-PBC).....	70
Figura 5.4 Señal de control $\tau\alpha$ combinada (Platitud + IDA-PBC).	70
Figura 5.5 Respuesta de la variable θ (Platitud + IDA-PBC).	71
Figura 5.6 Respuesta de x aplicando control combinado (Platitud + IDA-PBC).	71
Figura 5.7 Respuesta de α aplicando control combinado (Platitud + IDA-PBC).....	71
Figura 5.8 Respuesta de y_1 aplicando control combinado (Platitud + IDA-PBC).....	72
Figura 5.9 Respuesta de y_2 aplicando control combinado (Platitud + IDA-PBC).....	72
Figura 5.10 Trayectoria de la carga aplicando control combinado (Platitud + IDA-PBC).....	72
Figura 5.11 Señal de control Fx combinada (Platitud + PI).	72
Figura 5.12 Señal de control $\tau\alpha$ combinada (Platitud + PI).....	73
Figura 5.13 Respuesta de la variable θ (Platitud + PI).	73
Figura 5.14 Respuesta de x aplicando control combinado (Platitud + PI).....	73
Figura 5.15 Respuesta de α aplicando control combinado (Platitud + PI).	73
Figura 5.16 Respuesta de y_1 aplicando control combinado (Platitud + PI).....	74
Figura 5.17 Respuesta de y_2 aplicando control combinado (Platitud + PI).....	74
Figura 5.18 Trayectoria de la carga aplicando control combinado (Platitud + PI).....	74
Figura 5.19 Perturbación en Fx	75
Figura 5.20 Señal de control Fx con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	75
Figura 5.21 Señal de control $\tau\alpha$ con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	76

Figura 5.22 Respuesta de θ con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	76
Figura 5.23 Respuesta de x con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	76
Figura 5.24 Respuesta de α con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	76
Figura 5.25 Respuesta de y_1 con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	77
Figura 5.26 Respuesta de y_2 con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	77
Figura 5.27 Trayectoria de la carga con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	77
Figura 5.28 Señal de control Fx con perturbación (Platitud + PI).....	78
Figura 5.29 Señal de control $\tau\alpha$ con perturbación (Platitud + PI).....	78
Figura 5.30 Respuesta de θ con perturbación (Platitud + PI).....	78
Figura 5.31 Respuesta de x con perturbación (Platitud + PI).....	79
Figura 5.32 Respuesta de α con perturbación (Platitud + PI).....	79
Figura 5.33 Respuesta de y_1 con perturbación (Platitud + PI).....	79
Figura 5.34 Respuesta de y_2 con perturbación (Platitud + PI).....	79
Figura 5.35 Trayectoria de la carga con perturbación (Platitud + PI).....	80
Figura 5.36 Perturbación en $\tau\alpha$	80
Figura 5.37 Señal de control Fx con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	80
Figura 5.38 Señal de control $\tau\alpha$ con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	81
Figura 5.39 Respuesta de θ con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	81
Figura 5.40 Respuesta de x con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	81
Figura 5.41 Respuesta de α con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	81
Figura 5.42 Respuesta de y_1 con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	82
Figura 5.43 Respuesta de y_2 con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	82
Figura 5.44 Trayectoria de la carga con perturbación (Platitud + IDA-PBC).....	82
Figura 5.45 Señal de control Fx con perturbación (Platitud + PI).....	83
Figura 5.46 Señal de control $\tau\alpha$ con perturbación (Platitud + PI).....	83
Figura 5.47 Respuesta de θ con perturbación (Platitud + PI).....	83
Figura 5.48 Respuesta de x con perturbación (Platitud + PI).....	84
Figura 5.49 Respuesta de α con perturbación (Platitud + PI).....	84
Figura 5.50 Respuesta de y_1 con perturbación (Platitud + PI).....	84
Figura 5.51 Respuesta de y_2 con perturbación (Platitud + PI).....	85
Figura 5.52 Trayectoria de la carga con perturbación (Platitud + PI).....	85
Figura 5.53 Señal de control Fx con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).....	86
Figura 5.54 Señal de control $\tau\alpha$ con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).....	87

Figura 5.55 Respuesta de θ con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).....	87
Figura 5.56 Respuesta de x con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).....	87
Figura 5.57 Respuesta de α con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).....	87
Figura 5.58 Respuesta de y_1 con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).....	88
Figura 5.59 Respuesta de y_2 con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).....	88
Figura 5.60 Trayectoria con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).....	88
Figura 5.61 Señal de control Fx con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).....	89
Figura 5.62 Señal de control $\tau\alpha$ con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).....	89
Figura 5.63 Respuesta de θ con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).....	89
Figura 5.64 Respuesta de x con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).....	90
Figura 5.65 Respuesta de α con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).....	90
Figura 5.66 Respuesta de y_1 con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).....	90
Figura 5.67 Respuesta de y_2 con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).....	90
Figura 5.68 Trayectoria con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).....	91
Figura 5.69 Señal de control Fx con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).....	91
Figura 5.70 Señal de control $\tau\alpha$ con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).....	92
Figura 5.71 Respuesta de θ con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).....	92
Figura 5.72 Respuesta de x con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).....	92
Figura 5.73 Respuesta de α con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).....	92
Figura 5.74 Respuesta de y_1 con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).....	93
Figura 5.75 Respuesta de y_2 con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).....	93
Figura 5.76 Trayectoria con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).....	93
Figura 5.77 Señal de control Fx con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).....	94
Figura 5.78 Señal de control $\tau\alpha$ con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).....	94
Figura 5.79 Respuesta de θ con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).....	94
Figura 5.80 Respuesta de x con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).....	95
Figura 5.81 Respuesta de α con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).....	95
Figura 5.82 Respuesta de y_1 con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).....	95
Figura 5.83 Respuesta de y_2 con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).....	95
Figura 5.84 Trayectoria con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).....	96

Índice de Tablas

Tabla 3.1 Ventajas y desventajas de la grúa de caballete.	33
Tabla 3.2 Variables del sistema.	36
Tabla 3.3 Variables grúa de caballete.	37
Tabla 3.4 Variables de esquema y polea.	38
Tabla 3.5 Variables de las funciones de energía cinética $K1$ y $K2$	38
Tabla 3.6 Variables de la función de energía cinética $K3$	40
Tabla 3.7 Variables de la función energía potencial.	40
Tabla 3.8 Valores numéricos de los parámetros de la grúa.	44
Tabla 5.1 Valores de la masa de la carga para el sistema.	86
Tabla 5.2 Valores de la masa del carro para el sistema.	91
Tabla 5.3 Criterios para evaluar el desempeño de los esquemas de control.	97

Notaciones

Acrónimos

PI	Proporcional Integral
IDA-PBC	Interconnection and Damping Assignment Passivity Based Control
PCH	Port Controlled Hamiltonian
PD	Proporcional Derivativo
STA	Algoritmo de Súper Torsión
SCADA	Supervisory Control and Data Acquisition
GPI	Proporcional Integral Generalizado
PDE	Partial Differential Equation
E-L	Euler-Lagrange
PBC	Passivity Based Control
SISO	Single Input Single Output
MIMO	Multiple Input Multiple Output

Nomenclatura

F_x	Fuerza de entrada que actúa sobre el carro
τ_α	Par de torsión que actúa sobre la polea
$q \in \mathbb{R}^4$	Vector de coordenadas generalizadas
l_0	Longitud mínima del cable
$u \in \mathbb{R}^2$	Vector de entradas de control
$q_i \in \mathbb{R}^4$	Vector de posición inicial de la carga
$q_D \in \mathbb{R}^4$	Vector de posición final deseada de la carga
K_t	Energía cinética total del sistema
U	Energía potencial del sistema
\mathcal{L}	Lagrangiano
\mathcal{L}_r	Lagrangiano de orden reducido
$\tilde{q}_r \in \mathbb{R}^3$	Vector de coordenadas reducido
$\tilde{M}_r(\tilde{q}_r) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	Matriz de inercia

$C(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r) \dot{\tilde{q}}_r \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	Matriz de coriolis
$U(\tilde{q}_r) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$	Representa la energía potencial
$y \in \mathbb{R}^2$	Vector de las salidas planas
T	Tensión del cable
$B(t)$	Ecuación general de la Curva de Bézier
t	Variable tiempo
t_0	Tiempo inicial
t_f	Tiempo final
P_0	Valor inicial
P_f	Valor final
P_i	Puntos de control
H	Función Hamiltoniana
H_d	Función Hamiltoniana deseada
M_d	Matriz de inercia deseada
U_d	Función de energía potencial deseada
I	Matriz identidad
J_d	Matriz de interconexión deseada
R_d	Matriz de disipación deseada
J_2	Matriz antisimétrica
u_{es}	Término de moldeo de energía
u_{di}	Término de inyección de amortiguamiento
K_x	Parámetro de ajuste respecto a x
K_α	Parámetro de ajuste respecto a α
K_v	Matriz de parámetros de ajuste
k_p	Ganancia proporcional
T_i	Tiempo integral
$e(t)$	Señal de error

Capítulo 1 : Introducción

En este trabajo se realiza la comparación para seguimiento de trayectoria y análisis de la robustez ante perturbaciones, en dos estrategias de control combinado: que constan, por una parte, de un controlador prealimentado y, por la otra, de un controlador retroalimentado; es decir,

- Controlador basado en Platitud diferencial más PI,
- Controlador basado en Platitud diferencial más IDA-PBC,

para el caso de estudio (grúa de caballete). Como el sistema es diferencialmente plano se puede utilizar la propiedad de platitud diferencial, y con esta diseñar fuera de línea una trayectoria de referencia para desplazar la carga en un plano bidimensional. El controlador prealimentado basado en platitud diferencial no asegura estabilidad y seguimiento de trayectoria, y por esto requiere de un controlador retroalimentado para complementar la acción de control.

La grúa de caballete es una herramienta compuesta por dos o cuatro postes, sobre los cuales hay un riel por donde se desplaza el mecanismo de elevación. Es un sistema mecánico subactuado en el cual la dinámica del sistema propicia oscilaciones indeseadas en la carga que son difíciles de atenuar. Para el problema de control de la grúa se han propuesto diferentes enfoques, habitualmente aplicando técnicas clásicas de control.

El concepto de platitud en el contexto de control fue introducido por M. Fliess y sus colaboradores [Fliess, et al., 1995]. Platitud diferencial es una propiedad que poseen algunos sistemas dinámicos, que permite una parametrización completa de todas las variables del sistema en términos de un conjunto finito de variables independientes, llamadas salidas planas, y un número finito de sus derivadas en el tiempo. Si un sistema es diferencialmente plano entonces se puede utilizar la propiedad de platitud diferencial para la planeación y el seguimiento de trayectorias.

El método basado en pasividad conocido como Control Basado en Pasividad por Interconexión y Asignación de Amortiguamiento (*Interconnection and Damping Assignment-Passivity Based Control*, IDA-PBC) fue introducido en [Ortega & Spong, 2000]. Parte de una estructura Hamiltoniana Controlada por Puerto (PCH), que es una clase que contiene estrictamente los sistemas Euler-Lagrange, en lazo abierto y obtiene otra en lazo cerrado con las propiedades de estabilidad deseadas.

Para resolver el problema de control de la grúa de caballete se aplicó una estrategia de control prealimentado, basada en las nociones de platitudez diferencial y ésta se complementó con una técnica de control retroalimentado compatible (PI e IDA-PBC).

1.1 Planteamiento del problema

La grúa de caballete es un dispositivo que se usa ampliamente en la construcción, transporte (puertos) e industria. Se trata de un sistema mecánico subactuado que presenta un comportamiento no lineal. La dinámica del sistema propicia oscilaciones indeseadas de la carga que son difíciles de atenuar.

El problema de control de la grúa de caballete en general consiste en: *trasladar una carga de un estado inicial en reposo a un estado final en reposo, siguiendo una trayectoria bidimensional predeterminada, preservando estabilidad y reduciendo las oscilaciones de la carga en presencia de perturbaciones y/o incertidumbre paramétrica*. Lo que se hace en este trabajo para resolver el problema de control es:

- Diseñar dos esquemas de control combinado para una grúa de caballete.
- Realizar el análisis de la robustez de los controladores nominales.
- Comparar su desempeño para seguimiento de trayectoria, en presencia de incertidumbre paramétrica y perturbaciones.

Para el diseño de las estrategias de control combinado se utilizó la estrategia de platitudez diferencial, esta estrategia es en lazo abierto y requiere de un esquema de control retroalimentado; de esta forma se obtiene un diseño combinado. En el diseño de controladores no se consideró la perturbación como parte del mismo.

1.2 Objetivos

Los objetivos para este trabajo se presentan a continuación.

1.2.1 Objetivo general

Diseñar y comparar dos estrategias de control: (a) platitudez diferencial más control PI, y (b) platitudez diferencial más control IDA-PBC, para una grúa de caballete modelada inicialmente bajo el enfoque de Euler-Lagrange y extendida hacia el Hamiltoniano, las cuales permitan reducir las

oscilaciones de la carga en presencia de perturbaciones y/o incertidumbre paramétrica. Analizar la robustez de esas estrategias y comparar su desempeño para seguimiento de trayectoria.

1.2.2 Objetivos específicos

- ❖ Desarrollar el modelo matemático en el enfoque Euler- Lagrange de la grúa de caballete pertinente para este trabajo.
- ❖ Asimilar la metodología de platitud diferencial para planeación y seguimiento de trayectoria y de control IDA-PBC.
- ❖ Diseñar controladores: (a) platitud diferencial más control PI y (b) platitud diferencial más control IDA-PBC para estabilización.
- ❖ Analizar la robustez de las estrategias de control en presencia de perturbaciones/incertidumbre paramétrica, y comparar estrategias.

1.3 Estado del arte

El estado del arte se divide en tres secciones, grúas, Platitud diferencial y Pasividad.

1.3.1 Clasificación de grúas y su control

Las grúas son herramientas utilizadas como medio de distribución y elevación de objetos muy pesados; generalmente la movilización es a través de un gancho que se utiliza para suspender objetos. Estas herramientas se utilizan en puertos, obras de construcción, instalaciones industriales y en algunos otros lugares donde es necesario trasladar cargas.

La primera energía mecánica que impulsó a las grúas fue proporcionada por máquinas de vapor. Actualmente son impulsadas por motores de combustión interna y sistemas de motor hidráulico y/o eléctrico, que permiten elevar cargas de mayor peso.

En cuanto al tipo de *instalación y a la movilidad* de la grúa, se pueden distinguir tres grupos principales:

- ❖ **Grúas móviles:** Éstas se caracterizan por poseer una base con ruedas (vehículos), teniendo así movilidad y dirección propia; esta base puede ser de anchura regulable o fija. Su función principal es levantar, girar y bajar las cargas sostenidas por cables.
- ❖ **Grúas fijas:** Son aquéllas que se caracterizan por estar ancladas al suelo o por lo menos la estructura principal, durante el periodo de uso. Tienen la capacidad de soportar mayores cargas y conseguir mayores alturas.
- ❖ **Grúas de rieles:** Comúnmente llamadas de techo, son llamadas así ya que los rieles se colocan en el techo; soportan el peso de la estructura.

De acuerdo a su *forma y tamaño*, las grúas se pueden clasificar en:

- **Grúa torre:** Posee la característica de ponerse en la posición que se desee, su soporte puede rotar; es de instalación temporal, y soporta frecuentes montajes y desmontajes. Se utiliza sobre todo en las obras de construcción. Están formadas por una torre hecha de metal, una extensión paralela al piso que puede rotar y además tiene motores que permitan elevar, trasladar, distribuir los objetos deseados. Estas pueden clasificarse en:
 - **Auto desplegable:** La torre se pliega y despliega de una manera veloz.
 - **Desmontable:** Están diseñadas para soportar diferentes montajes y desmontajes, al igual que trasladar diferentes cargas.
 - **Desplazable:** Posee en su base elementos que hacen posible el desplazamiento sobre carriles u otro medio.
 - **Torre estacionaria:** Está totalmente fija, ya que no posee en su base ningún medio de desplazamiento.
 - **Torre trepadora:** Esta grúa se coloca sobre la estructura de alguna obra que este en construcción; sus movimientos son verticales.
- **Grúa hidráulica:** Estas poseen un sistema hidráulico para elevar y frenar. Normalmente pueden tolerar un poco más de 50 Kilos, son muy utilizadas como medio de transporte para personas. Resultan ideales para uso en el hogar.

- **Grúa pluma:** Permiten subirse a ellas mismas, una característica es la capacidad de que la pluma retroceda. Posee un sistema de poleas que hacen posibles el transporte vertical. Pueden soportar más de tres toneladas.
- **Grúa telescópica:** Son generalmente rectangulares y están hechas de metales muy duros, los cuales son resistentes y perdurables.

A través del tiempo, el hombre se ha tenido que enfrentar a trabajos más difíciles que requieren más esfuerzo y ha buscado soluciones que le faciliten este trabajo en menor tiempo y costo; de ahí la creación y fabricación de nuevas herramientas para la ejecución de los trabajos. Ejemplo de ello, son las grúas., herramienta utilizada como medio de distribución y elevación de objetos. A pesar de sus diferentes estructuras, muchos tipos de grúas que llevan la carga utilizando cables y poleas tienen propiedades mecánicas similares. En la mayoría de las grúas el traslado de la carga tiene que realizarse tan rápido como sea posible; dicho movimiento rápido induce oscilaciones indeseadas y reduce la eficiencia de la operación.

En [Fliess, et al., 1991] se presenta un enfoque simplificado de una grúa mediante un modelo con representación en espacio de estado. Por razones de simplicidad, se presenta una grúa de dos dimensiones ya que el caso de tres dimensiones ofrece dificultades adicionales. Describen la dinámica de la carga como el comportamiento de un péndulo.

En [Lévine, et al., 1999] se demuestra que para las grúas y equipos de manejo de peso se pueden modelar de la misma forma. Las ecuaciones dinámicas se obtienen utilizando los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones geométricas entre coordenadas generalizadas. La estructura del modelo es también útil para obtener métodos para simular la dinámica no lineal de la grúa, sin necesidad de obtener la representación en espacio de estado del sistema mediante operaciones algebraicas complicadas; esto hace posible probar fácilmente los algoritmos de control. Este enfoque proporciona una manera simple de mostrar plitud diferencial para todas las grúas y para generar un software de simulación numérico compacto.

En [Fang, et al., 2008] se presenta el modelo dinámico de un sistema de puente grúa de tres dimensiones, el cual se establece mediante la ecuación de Lagrange. En el modelo se considera la variación de la longitud de la cuerda para proporcionar una descripción precisa para el comportamiento dinámico de los estados del sistema. Además, las principales perturbaciones no lineales que existen en el medio ambiente, tales como la fricción y la resistencia del aire, se incluyen en el modelo.

En [Kazi, et al., 2010] se presenta el modelado y control de una grúa araña de dos dimensiones. Para modelar el mecanismo se separa la dinámica del cable y polea, y la carga se ve como un péndulo suspendido de un cable cuyo punto de suspensión se encuentra en una masa que se mueve en un espacio de dos dimensiones. Los resultados indican que, con oscilación mínima, se puede lograr de manera rápida y precisa el posicionamiento de la carga.

En [Yang, 2009] se propone un control adaptativo de seguimiento de trayectoria para una grúa de tres dimensiones, el esquema de control no lineal incorpora la dinámica del carro y la dinámica del ángulo de balanceo de la carga. El control está diseñado para garantizar la estabilidad general del sistema en lazo cerrado, se considera constante la longitud de la cuerda y esto ocasiona que se desprecie la variación de la longitud de la cuerda en el ángulo de balanceo de la carga.

En [Collado & Vázquez, 2009] se presenta un control por modos deslizantes de segundo orden para la atenuación de la oscilación para una grúa viajera de tres dimensiones, también se presenta una comparación con el controlador PD. El desempeño de los controladores se simula en un modelo no lineal, sin embargo, el modelo no lineal se diseña considerando que el movimiento de la carga no afecta la dinámica del carro. El control de la longitud del cable que desplaza la carga se realiza de forma independiente mediante un controlador PI.

En [Collado & Vázquez, 2011] se presenta un modelo simplificado para una grúa montada en un barco; en estos sistemas debido a las oscilaciones del mar se presenta el fenómeno de la resonancia paramétrica. El objetivo de control es el seguimiento de trayectorias y atenuar las oscilaciones que se presenten; proponen un controlador de segundo orden en modos deslizantes.

En [Kazi, et al., 2012] se presenta un nuevo enfoque para el control óptimo de una grúa araña de dos dimensiones, que se basa en la estructura de la preservación de los integradores numéricos. El marco discreto se desarrolla para los problemas de control óptimo de Lagrange. El método se basa en una discretización directa del principio de Lagrange-D'Alembert para el sistema mecánico. Ya que las grúas están presentes en la industria de la ingeniería pesada, el posicionamiento preciso de la carga por un puente grúa es difícil debido al hecho de que la carga puede exhibir un movimiento de balanceo pendular; esto exige estrategias de control verdaderamente eficaces. El objetivo es la transferencia punto a punto de la carga con un mínimo de fuerza.

En [Collado & Vázquez, 2013] se propone un control para una grúa. La aportación principal de este trabajo es evitar el efecto de la resonancia paramétrica y la atenuación de las oscilaciones de la carga en un sistema sujeto a variaciones periódicas en el soporte de la base. Se presenta el diseño de control por modos deslizantes basado en el Algoritmo de Súper Torsión (STA), esto

garantiza la convergencia en un intervalo de tiempo finito a la superficie de deslizamiento deseado.

En [Mohamed, et al., 2015] se presenta un esquema de control óptimo para una grúa de tres dimensiones (3D), los objetivos de control son un posicionamiento rápido y oscilación mínima de la carga. Un modelo matemático de una grúa 3D de laboratorio a escala se simula en Simulink. Los experimentos con diferentes cargas y longitudes de cable muestran que el controlador propuesto es robusto a cambios en la carga con respuestas satisfactorias.

1.3.2 Platitud diferencial

Platitud diferencial es una propiedad que permite una parametrización completa de todas las variables del sistema en términos de un conjunto finito de variables independientes, llamadas salidas planas y un número finito de sus derivadas en el tiempo; es una idea natural asociada a sistemas de ecuaciones diferenciales subdeterminados (aquellos que tienen más incógnitas que ecuaciones). Por definición, platitud diferencial es una propiedad de algunos sistemas dinámicos controlados que permiten trivializar las trayectorias de planificación, sin resolver ecuaciones diferenciales [Sira-Ramírez, et al., 2004]. Esto hace de platitud una herramienta de análisis que muestra la naturaleza de cada variable del sistema. Se considera a E. Cartan y D. Hilbert como los antecesores del concepto de platitud diferencial en el contexto de conjuntos de ecuaciones diferenciales. En sus trabajos buscaban transformaciones no lineales de coordenadas espaciales y temporales que convirtieran al sistema en estudio en un sistema fácilmente integrable. Con la aparición de platitud diferencial se ha incrementado la aplicación de esta propiedad para la solución de problemas de control; como ejemplo de lo anterior se presentan algunos trabajos relacionados con platitud diferencial.

En [Fliess, et al., 1993] se explora la noción de la carencia de platitud a través de un conjunto de ejemplos físicos interesantes, tales como el péndulo Kapitsa, la bola y la viga, entre otros. Se propone un enfoque de control de alta frecuencia para exhibir la propiedad de platitud del sistema en una variedad de ejemplos.

La formulación de platitud diferencial en el contexto de control automático se debe a los trabajos de Michel Fliess y sus colegas: Jean Levine, Philippe Martin y Pierre Rouchon [Fliess, et al., 1995]. Ellos introdujeron los sistemas planos, los cuales son equivalentes a sistemas lineales mediante un tipo especial de retroalimentación.

En [Murray, et al., 1995] se presenta la aplicación de técnicas de platitud diferencial para sistemas de control mecánicos llamados “Lagrangianos”. Se desarrollan varios ejemplos los cuales

muestran la teoría general y se presenta varios sistemas mecánicos diferencialmente planos. Para el caso especial de este tipo de sistemas de control, se presenta mucha más información en el aspecto matemático y geométrico.

En [Rathinam, 1997] se estudia la propiedad de platitude en el contexto de equivalencia absoluta desarrollado por E. Cartan. La contribución de Rathinam es asociar la platitude con los sistemas Lagrangianos que poseen una entrada de control menos en comparación con el número de grados de libertad del sistema, el cual se caracteriza mediante el uso de las variables de configuración.

En [Morillo, 2001] se desarrolla un método para generar trayectorias en sistemas no lineales de control que presentan la propiedad de platitude diferencial. Sin embargo, este método se restringe sólo a sistemas que son linealizables por retroalimentación estática.

En [Hagenmayer & Delaleau, 2003] se propone una estrategia para sistemas no lineales a la que denominan linealización exacta prealimentada con la que obtienen un controlador de seguimiento de trayectoria combinado: por una parte, un control prealimentado basado en platitude diferencial y, por otra parte, un control retroalimentado.

En [Rouchon & Sira-Ramírez, 2003] se propone un enfoque basado en platitude diferencial para el caminador bípedo, que consiste en dos piernas y un cuerpo central giratorio. El enfoque propuesto permite una caminata suave con pasos de longitudes razonablemente arbitrarias y, además, sin impacto de las piernas en el suelo. Se demuestra que es plano; ya que existen dos salidas auxiliares endógenas independientes, las cuales parametrizan completamente al estado y a las entradas del sistema.

En [Sira-Ramírez, et al., 2004] se examina la propiedad de platitude diferencial para una variedad de sistemas dinámicos controlados, con varios ejemplos que resaltan la ventaja de esta propiedad en sistemas físicos. Es importante resaltar que el énfasis no se acentúa en los aspectos matemáticos de platitude diferencial, sino más bien cómo utilizar esta propiedad en el diseño y planeación de tareas.

En [Thull, et al., 2006] se presenta la aplicación de un controlador de seguimiento de lazo abierto basado en platitude diferencial en combinación con un controlador de lazo cerrado basado en pasividad, al modelo de dimensión infinita de una grúa con cadenas pesadas; la posición de la carga sirve como una salida plana. Esto nos permite realizar la tarea de planificación trayectorial de una manera directa. En particular, el método de diseño se basa directamente en el modelo matemático de dimensión infinita, lo que significa que no hay necesidad de ninguna aproximación de dimensión finita. Este diseño del controlador de dimensión infinita inherentemente evita efectos no deseados, como efectos colaterales. El objetivo del controlador retroalimentado es

proporcionar una buena amortiguación de las vibraciones de las cadenas y por otro lado para estabilizar la posición deseada de la cesta.

En [Rabbani et al., 2009], se presenta el desarrollo de algoritmos basados en platitud diferencial, los cuales pueden contribuir a un manejo más eficiente de canales de irrigación que transporta agua de algunas fuentes; se describe la implementación de un algoritmo en tiempo real de las operaciones de irrigación que utiliza un Sistema de Supervisión, Control y Adquisición de datos (SCADA) con un controlador automático centralizado.

La propiedad de platitud diferencial tiene la ventaja de poder combinarse con otras técnicas de diseño de controladores adecuadas, como: pasividad, modos deslizantes, linealización por retroalimentación, control óptimo, entre muchas otras. En Cenidet se continúan con las investigaciones basadas en el enfoque de platitud diferencial combinada con otras estrategias de control en el contexto de sistemas dinámicos lineales y no lineales; como antecedentes se tienen los siguientes trabajos.

En [Silva, 2008] se considera un enfoque algebraico y se aborda el problema de la detección y estimación de fallas en el modelo del motor de inducción con rotor devanado. En este trabajo se diseñó la etapa de generación de residuos la cual permite la detección y localización de fallas en parámetros y fallas en sensores en el modelo del motor, también se diseñó la etapa de reconstrucción de fallas donde fue posible estimar el comportamiento de fallas aditivas y multiplicativas.

En [Suriano, 2012] se presenta el diseño de controladores tipo GPI combinados con el enfoque de platitud diferencial para el control de un rodamiento magnético activo de cuatro polos; se consideran fallas internas y una perturbación en el rotor. La propiedad de platitud diferencial se emplea para resolver el problema de planeación de movimiento y seguimiento de trayectoria.

En [López, 2013] se abordó el problema de la extensión de la estrategia de control de linealización exacta prealimentada a sistemas no lineales multivariables que tienen la propiedad de platitud diferencial. También se analizó la robustez de la ley de control diseñada mediante linealización exacta prealimentada para dos sistemas no lineales: sistema académico y rodamiento magnético.

En [López, 2014] se desarrolla una estrategia de control mediante linealización exacta prealimentada basada en platitud diferencial para el caso de estudio de un motor de corriente directa de excitación separada. También se realiza un análisis de robustez con respecto a perturbaciones exógenas y parámetros variantes en el tiempo.

Con este trabajo de tesis se continúa con la investigación en el enfoque de control basado en plitud diferencial en combinación con estrategias de control pertinentes para sistemas dinámicos no lineales.

1.3.3 Pasividad

La pasividad es una propiedad fundamental de varios sistemas físicos que se puede definir en términos de disipación y transformación de energía. Esta propiedad se relaciona con la propiedad de estabilidad de Lyapunov la cual se refiere a la estabilidad interna del sistema [Loría, et al., 2002]. La interpretación de pasividad por medio de energía, está íntimamente relacionada con la física del sistema, y en particular con sus propiedades de energía. Los sistemas pasivos son una clase de sistemas dinámicos, en estos sistemas la tasa a la cual la energía fluye en el interior del sistema es mayor que el incremento de energía acumulada. Un sistema pasivo no puede almacenar más energía que la que le es suministrada, por lo que la diferencia entre dichas energías es la energía disipada. Pasividad está relacionada con las entradas y salidas del sistema, se dice que éste es pasivo de la entrada a la salida. A continuación, se presentan trabajos de técnicas de control basadas en pasividad aplicadas a las grúas.

En [Dongkyoung & Keum, 2005] se diseña un control no lineal basado en la energía (función de Lyapunov) para una grúa de tres dimensiones. La contribución de este trabajo es la siguiente: una ley de control basada en la energía, para mejorar el tiempo de subida y la capacidad de disminuir la oscilación. La ley de control presentada en este trabajo utiliza la técnica de linealización por retroalimentación. La prueba de estabilidad en este trabajo es mucho más rigurosa que las disponibles en la literatura. Sin embargo, al igual que en otros trabajos se considera fija la longitud de la cuerda.

En [Banavar, et al., 2006] se realiza un controlador IDA-PBC aplicado a una grúa viajera de dos dimensiones. Esta técnica de diseño de control logra la estabilización de los sistemas mecánicos subactuados, por medio de los principios físicos motivados en el moldeo de energía y en la inyección de amortiguamiento. El sistema de interés en este trabajo constituye una clase especial de sistemas no lineales subactuados con restricciones mecánicas holonómicas.

En [Banavar, et al., 2007] se realiza un control punto a punto para una grúa viajera combinando plitud diferencial e IDA-PBC. Se usa una estrategia de control en lazo abierto basada en los conceptos de plitud diferencial. El control punto a punto se consigue mediante la selección de una trayectoria deseada a seguir. Se añade un controlador retroalimentado para hacer frente a perturbaciones. Se usa una ley de control basada en plitud diferencial para seguir

una trayectoria deseada que traslade al sistema de un punto inicial a un punto final de referencia deseado.

En [Ortega, et al., 2007] se emplea la linealización por retroalimentación parcial para simplificar la solución del conjunto de Ecuaciones Diferenciales Parciales (PDE por sus siglas en inglés) que identifican las funciones de la energía que se pueden asignar al sistema en lazo cerrado. En este artículo se considera la longitud del cable como una variable. La ley de control que se desarrolla presenta un buen desempeño para el objetivo de control, el cual es llevar a la carga de una posición inicial a una posición final con la disminución del ángulo de oscilación.

En [Sun, et al., 2013] se propone un esquema de control por retroalimentación de la salida basado en el acoplamiento de energía para grúas viajeras de 4 grados de libertad con restricciones en las entradas de control; se introduce un nuevo concepto con respecto a cargas virtuales, junto con una nueva función de almacenamiento de energía, para explorar las características de la dinámica de la grúa. Con base en eso, se propone una ley de control con acoplamiento de energía considerando restricciones en las entradas, que alcanza el posicionamiento preciso del carro y la disminución de la oscilación en la carga.

En [Mohammad, et al., 2015] se desarrolla una técnica de control basado en la energía para un sistema de puente grúa con un cable flexible con gran ángulo de oscilación; el sistema de grúa estudiado se clasifica como un sistema subactuado. Por lo tanto, se mueve al mismo tiempo el carro, la carga y la vibración del cable. Debido a tal dificultad, para superar las complejidades del problema de control, se propondrá una estrategia de control basada en la energía correspondiente utilizando el modelo linealizado y el método de Lagrangianos Controlados. El objetivo de control es mover la carga hasta la posición deseada y, al mismo tiempo, reducir la oscilación de la carga y la supresión de las vibraciones transversales en el cable. Los resultados de simulación se presentan para demostrar el comportamiento dinámico y la eficacia del sistema de control para un ejemplo ilustrativo de los sistemas de grúas con cable flexible moviendo una carga de peso ligero.

En los últimos años, un intenso trabajo de investigación se ha centrado en el desarrollo de técnicas de control en diferentes tipos de grúas para trasladar cargas utilizando diferentes enfoques de control, debido a la importancia de reducir las oscilaciones indeseadas que se presentan al desplazar la carga. En este trabajo el caso de estudio es una grúa de tipo caballete y de acuerdo a los trabajos encontrados en la literatura el modelo del sistema está basado en [Banavar, et al., 2007]. Para resolver el problema de las oscilaciones en presencia de perturbaciones e incertidumbre paramétrica, en este trabajo se desarrollaron dos estrategias de control combinado para una grúa de tipo caballete, se analizó la robustez de los controladores

nominales con el enfoque heurístico y posteriormente se evaluó su desempeño en el aspecto de seguimiento de trayectoria.

1.4 Justificación

En la industria existe una gran variedad de trabajos donde es necesario trasladar cargas, de manera tal que la carga llegue a su destino de manera precisa. En algunas ocasiones se tiene la necesidad de mover la carga con mayor velocidad.

En algunos trabajos el movimiento de la carga puede ser muy abrupto: por ejemplo, cuando se mueve de su posición inicial, cuando llega a su posición final y/o al desplazarla. En cualquiera de los casos mencionados anteriormente, el balanceo puede dañar la carga transportada e incluso a los elementos que conforman la grúa. Las oscilaciones que se presentan en la carga son el principal problema de la grúa.

El problema de control de la grúa de caballete consiste en trasladar una carga de un estado inicial en reposo a un estado final en reposo, siguiendo una trayectoria bidimensional deseada, preservando estabilidad y reduciendo las oscilaciones de la carga en presencia de perturbaciones. Para esto es necesario una estrategia de control combinado para la grúa de caballete que disminuya los problemas mencionados anteriormente, de manera precisa y en un intervalo de tiempo deseado.

1.5 Estructura de la tesis

La tesis se divide en cinco capítulos, a continuación, se presenta una breve descripción del contenido de cada capítulo.

En el Capítulo 2 se presenta el marco teórico que sustenta este trabajo, aquí se incluyen los temas de Platitude diferencial, Pasividad, Robustez y Planeación y seguimiento de trayectoria; en los cuales se describen sus características y su estructura.

En el Capítulo 3 se describen las ecuaciones del modelo matemático en el enfoque de Euler-Lagrange de la grúa de caballete, así como también sus respectivas simulaciones. También se demuestra que el sistema tiene la propiedad de platitude diferencial y esto permite una parametrización de las variables del sistema.

En el Capítulo 4 se describe el diseño de las curvas en el eje vertical y en el eje horizontal para la carga utilizando Curvas de Bézier, el diseño del controlador basado en platitud diferencial, el diseño del controlador retroalimentado PI, el diseño del controlador retroalimentado IDA-PBC y se presentan las simulaciones de los esquemas de control en condiciones nominales.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos, la comparación de las estrategias de control combinadas, la robustez de los esquemas de control ante perturbaciones y las conclusiones del trabajo de investigación.

Capítulo 2 : Marco teórico

En el siguiente capítulo se presenta la noción de platitud diferencial para sistemas no lineales, las definiciones básicas de pasividad y robustez para sistemas no lineales. En la última sección se muestra una interpretación geométrica de platitud diferencial adecuada a planeación de trayectorias.

2.1 Platitud diferencial

Platitud diferencial es una propiedad de algunos sistemas dinámicos controlados que permite facilitar las tareas de planeación de trayectorias, sin resolver ecuaciones diferenciales. El número de salidas planas es igual al número de entradas de control; en términos generales, las salidas planas son variables internas del sistema que están en función del estado y la entrada, y de un número finito de derivadas en el tiempo.

Debido al hecho de que la capacidad de control es una propiedad fundamental de los sistemas dinámicos controlados, entonces, las posibilidades de encontrar la propiedad de platitud diferencial en un sistema dinámico dado, será equivalente a tener el sistema controlado satisfaciendo la propiedad de controlabilidad. Se ha demostrado que esta propiedad (platitud) es equivalente a controlabilidad en el caso lineal [Fliess, et al., 1995]. Para sistemas lineales se tiene que si el sistema es controlable entonces es plano.

Uno de los principales problemas en control es el de planeación y seguimiento de trayectoria, el cual se refiere al hecho de generar una trayectoria que la dinámica del sistema debe seguir, desde un punto inicial hasta un punto final deseado. Si un sistema es plano entonces se puede utilizar la propiedad de platitud diferencial para generar trayectorias. Platitud diferencial combinada con una técnica particular de control retroalimentado facilita las tareas de seguimiento de trayectoria. La propiedad de platitud entonces se relaciona con el hecho de que toda trayectoria integral del sistema está en correspondencia una a una (biyectividad) con una curva algebraica que pertenece a un espacio de dimensión m , que es el espacio de las salidas planas. Como consecuencia, las trayectorias deseadas que se especifican para las salidas planas, determinan unívocamente las trayectorias del estado y el comportamiento nominal de las entradas de control del sistema. De manera general, este conjunto de salidas “ficticias” representa un conjunto importante de variables físicas medibles [Fliess, et al., 1999].

La identificación de la salida plana en un sistema dinámico es importante ya que la parametrización diferencial contiene información acerca del sistema. El uso más importante de esta propiedad recae en el hecho de planear trayectorias para el sistema de control, ya que la parametrización diferencial provee de manera natural una relación con los estados, las salidas y las entradas de control. Una trayectoria deseada de la salida plana permite evaluar fuera de línea las trayectorias nominales de los estados, las salidas y las entradas de control, sin necesidad de resolver ecuaciones diferenciales.

2.1.1 Definiciones básicas

En el concepto de plitud diferencial los antecesores son E. Cartan y D. Hilbert en el contexto de ecuaciones diferenciales, en sus trabajos buscaban transformaciones no lineales de coordenadas espaciales y temporales, también buscaban un conjunto de variables que parametrizaban de manera completa las soluciones del sistema sin resolver ecuaciones diferenciales. En el contexto de control el concepto de plitud fue introducido por Michael Fliess y J. Levine, Philippe Martin and Pierre Rouchon. En [Fliess, et al. 1995] se introducen los sistemas planos, los cuales son equivalentes a los sistemas lineales, pero con un tipo de retroalimentación especial llamada endógena. El marco matemático de esto es álgebra diferencial.

Para entender las características básicas de plitud diferencial, considérese un sistema de n ecuaciones algebraicas lineales con $n + m$ incógnitas $\xi = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (x, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (x, f)$, escrito como:

$$Ax + Bf = 0, \text{ donde } B \neq 0, \text{ y } \text{rango}[A, B] = n$$

donde $[A, B]$ representa la matriz aumentada formada por A y B , supóngase que A es invertible y que B es de rango completo m . Entonces, todas las soluciones para x pueden escribirse en términos del vector desconocido f como:

$$x = -A^{-1}Bf$$

es decir, todas las soluciones son parametrizables en términos de f . Por otro lado, ya que la matriz B de $n \times m$ es de rango completo, la variable f se puede expresar en términos de los componentes de x , como la fórmula

$$f = -(B^T B)^{-1} B^T Ax$$

donde $(B^T B)^{-1} B^T$ representa la pseudoinversa de B , en [Noble, et al., 1988] se desarrolla la teoría. El sistema lineal $[A, B]\xi = 0$ exhibe entonces un conjunto de variables, las componentes

de $f = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$, son internas al sistema de ecuaciones y son capaces de lograr que x tome cualquier valor deseado [Sira-Ramírez, et al., 2004].

Los sistemas de control se representan en términos de conjuntos de ecuaciones diferenciales del estado, lineales o no lineales, con m entradas de control. Usualmente, el número de estados, n , es mayor que el número de entradas de control, m , y el número de ecuaciones diferenciales es igual al número de variables de estado. Las entradas de control constituyen un conjunto de variables adicionales que hacen que el sistema de ecuaciones quede subdeterminado, tal y como sucede con la variable f de lo anterior.

La propiedad de controlabilidad es deseable y fundamental en los sistemas dinámicos controlados, entonces, la posibilidad de encontrar la propiedad de platitud diferencial en un sistema dinámico dado significará tener al sistema satisfaciendo la propiedad de controlabilidad. Como esta propiedad se relaciona con la capacidad de lograr que el sistema siga una trayectoria deseada dentro de un intervalo de tiempo finito, entonces platitud diferencial se relaciona con la capacidad de planear fuera de línea trayectorias del estado factibles y diseñar controladores retroalimentados para el seguimiento de trayectoria.

2.1.2 Platitud diferencial para sistemas no lineales

En esta sección se presenta la noción de platitud diferencial para sistemas no lineales. Platitud diferencial es una idea natural asociada con los sistemas subdeterminados; los sistemas subdeterminados se pueden definir como un sistema de m ecuaciones diferenciales ordinarias con n variables dependientes donde $m < n$. Un sistema *diferencialmente plano* es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) no lineales cuyas curvas integrales están en correspondencia suave con curvas algebraicas arbitrarias en un espacio de dimensión igual a $n - m$.

Un sistema no lineal es plano diferencialmente si existe un conjunto finito de variables que son diferencialmente independientes y que son funciones diferenciables de las variables del sistema, a la que se llama la salida plana, de manera que todas las variables del sistema, esto es, el estado, la entrada y la salida se pueden expresar como funciones diferenciales de la salida plana. A continuación, se presenta la propiedad de platitud diferencial en el contexto de sistemas no lineales SISO y sistemas no lineales MIMO.

Platitud diferencial para sistemas no lineales SISO

Considérese un sistema de orden n de una entrada y una salida representada por

$$\dot{x} = f(x, u) \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n)$ es un campo vectorial suave de x, u y el rango de la matriz Jacobiana con respecto a u , $\partial f / \partial u$ es 1.

Definición 2.1 [Fliess, et al., 1995] *Se dice que ϕ es una función diferencial de x si*

$$\phi = \phi(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(\beta)}) \quad (2.2)$$

donde β es un entero finito.

Una función diferencial del estado de x es una función del estado y un número finito de las derivadas en el tiempo de la entrada, como:

$$\phi = \phi(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(\beta-1)}) \quad (2.3)$$

Definición 2.2 [Fliess, et al., 1995] *Un sistema de la forma (2.1) se dice que es diferencialmente plano si existe una función diferencial del estado x , que se denota por y , y se da mediante*

$$y = h(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \quad (2.4)$$

tal que el sistema inverso de $\dot{x} = f(x, u)$ con y como entrada y u como la salida, no tenga dinámica.

Un sistema es plano si existe cierta salida ficticia, tal que dicha salida plana parametrize diferencialmente a todas las variables del sistema. Esto significa que los estados, las entradas y las variables de salida originales en el sistema pueden escribirse como funciones diferenciales de la salida plana y , es decir:

$$x = A(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\gamma)}) \quad (2.5)$$

$$u = B(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\gamma+1)}) \quad (2.6)$$

donde γ es un entero.

La relación entre los sistemas planos de una entrada con sistemas linealizables mediante retroalimentación estática del estado es que ambos conceptos son equivalentes. El resultado principal para sistemas no lineales de una entrada se resume en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 [Fliess, et al., 1999] *Un sistema no lineal de una entrada de la forma $\dot{x} = f(x, u)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, es diferencialmente plano si, y solo si, es linealizable por retroalimentación del estado.*

Supóngase que el sistema es linealizable por retroalimentación del estado; esto significa que existe un difeomorfismo, $z = \phi(x)$, y una transformación de coordenadas de la entrada $u = \Theta(x, v)$, tal que el sistema transformado es lineal y controlable. Se asume, sin pérdida de generalidad, que dicho sistema transformado está en la forma canónica de Brunovsky,

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_n = v \quad (2.7)$$

Se puede decir que $y = z_1$ es la salida plana. Entonces el vector $z = (z_1, \dots, z_n)$ tiene por componentes a y y $n - 1$ de sus derivadas en el tiempo sucesivas $z = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$. Por lo tanto, $x = \phi^{-1}(z)$ se parametriza diferencialmente por y y, dado que $v = y^{(n)}$, también por u . Se tiene que,

$$x = \phi^{-1}(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.8)$$

$$u = \Theta(\phi^{-1}(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}), y^{(n)}) \quad (2.9)$$

y el sistema es plano.

Platitud diferencial para sistemas no lineales MIMO

En el ámbito de los sistemas no lineales de múltiples entradas y múltiples salidas no existe una forma general de obtener la salida plana, la búsqueda de la salida plana se inclina hacia el conocimiento del sistema.

Se tiene que un sistema no lineal de la forma $\dot{x} = f(x, u)$, donde x es el vector de estados de dimensión n y u el vector de entradas de dimensión m , es diferencialmente plano si existe un conjunto de variables $y = (y_1, \dots, y_m)$, tal que los componentes de y son diferencialmente independientes.

2.1.3 Control basado en platitud diferencial

La propiedad de platitud diferencial está relacionada con la posibilidad de planear fuera de línea trayectorias del estado factibles para el sistema y diseñar controladores retroalimentados compatibles para hacer que el estado siga las trayectorias deseadas.

De acuerdo a la Definición 2.1 se dice que un sistema es diferencialmente plano si existe una salida ficticia $y = \phi(x)$, de manera que:

- i. y y sus derivadas en el tiempo sucesivas son independientes, es decir que no están relacionadas mediante una ecuación diferencial.
- ii. y es una función de x, u y de un número finito de sus derivadas en el tiempo.
- iii. x y u se pueden expresar como funciones de las componentes de y y de un número finito de sus derivadas en el tiempo, esto es:

$$\begin{aligned}x &= \psi_x(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \\u &= \psi_u(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)})\end{aligned}\tag{2.10}$$

las componentes de y son diferencialmente independientes. Al conjunto de variables y con estas propiedades se le denomina salida plana. Una consecuencia de la parametrización dadas en las expresiones (2.10), es que al elegir una trayectoria nominal de referencia deseada y^* para la salida plana, se determina el control nominal u^* , como

$$u^* = \psi_u(y^*, \dot{y}^*, \ddot{y}^*, \dots, y^{*(n)})\tag{2.11}$$

Cuando se especifica una curva algebraica para la salida plana se determinan las trayectorias del estado y el comportamiento nominal de las entradas de control. Por tal motivo platitude diferencial se presta de manera natural para tareas de seguimiento de trayectoria y esta estrategia es en lazo abierto. La propiedad de platitude se relaciona con el hecho de que todo el conjunto de trayectorias (soluciones) del sistema están en correspondencia suave, uno a uno (biyección), con trayectorias pertenecientes al espacio de las salidas planas.

A partir de la aparición de platitude diferencial en teoría de control, se ha incrementado la aplicación de los sistemas planos para la solución de problemas de control. Platitude se relaciona con el problema general de los sistemas de equivalencia. Como consecuencia, esta propiedad está íntimamente relacionada con la linealización por retroalimentación. Un problema crucial en el control de sistemas no lineales, incluso si son linealizables por retroalimentación, es el relacionado con el problema de planeación de trayectoria, pero con la propiedad de platitude diferencial se vuelve relativamente simple.

2.2 Pasividad

El concepto de pasividad es importante para el desarrollo de estrategias de control no lineal, uno de los principales trabajos en la teoría de sistemas disipativos es que un sistema que es pasivo, también es estable [Moylan & Hill, 1980]; por lo que pasividad se ha estado utilizando

como herramienta en el área de control. La pasividad es una propiedad fundamental de sistemas físicos que se pueden definir en términos de disipación y transformación de energía. Los sistemas pasivos son una clase de sistemas dinámicos; en términos de energía, un sistema pasivo es aquel cuya energía total almacenada no es mayor que la energía que se le suministra, por lo que la diferencia entre dichas energías es la energía disipada. Además, si la energía total almacenada se puede representar por una función de almacenamiento que sea candidata a Lyapunov, entonces, con base en esta función, se puede analizar la estabilidad de los sistemas pasivos. Pasividad ha permitido replantear el hecho de que, si el sistema en lazo cerrado es pasivo, o más bien, define un mapeo pasivo, entonces el sistema es estable.

El diseño de sistemas de control a través de funciones de energía se ocupa en los sistemas no lineales como sistemas eléctricos y mecánicos, los cuales se pueden descomponer en subsistemas, que, mediante interconexiones determinan el comportamiento del sistema. Se puede ver la acción del controlador como un sistema dinámico interconectado con el proceso para modificar su comportamiento; el problema de control está en encontrar un sistema dinámico y una estructura de interconexión que haga a la función de energía tomar una forma deseada.

El moldeado de energía es la esencia del Control Basado en Pasividad (*Passivity Based Control, PBC*), una técnica de diseño de controladores que es muy conocida en los sistemas mecánicos. La técnica conocida como *moldeo de energía* consiste en calcular una acción de control que modifique la dinámica del sistema de modo que en lazo cerrado se obtenga la dinámica hamiltoniana deseada, y añadir un efecto *disipativo* respecto a la función de Hamilton moldeada. El término PBC fue inventado en 1989 en el contexto del control adaptativo de robots manipuladores para definir una metodología del controlador cuyo objetivo es hacer que el sistema en lazo cerrado sea pasivo, visto como un mapeo de una nueva entrada externa. El método PBC estándar tiene dos etapas principales [Ortega, et al., 1998]. La primera denominada moldeado de energía, busca moldear la función de energía de tal manera que la función de energía en lazo cerrado tenga como mínimos a los puntos de equilibrios deseados. En la segunda etapa, llamada inyección de amortiguamiento, se incrementa la velocidad de convergencia a los mínimos deseados; para esto se añaden elementos que incrementen la disipación de energía. Por otro lado, la estrategia de control basada en pasividad hace uso del conocimiento a priori de la física que rige la dinámica de los sistemas para el diseño del controlador, así como para el análisis y síntesis de sistemas no lineales. Entonces, la dinámica de los sistemas se representa por medio de estructuras con una relación física directa; es decir estructuras derivadas de las ecuaciones de Hamilton y de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

2.2.1 Definiciones básicas

En esta sección se presentan los enfoques Euler-Lagrange y Hamiltoniano, necesarios para el modelado y diseño del controlador retroalimentado IDA-PBC que se utilizó en este trabajo.

Sistemas Euler-Lagrange

La configuración de un sistema físico se puede describir mediante magnitudes llamadas coordenadas. Estas coordenadas pueden ser desde un vector que describa la posición de una partícula a un punto de referencia en un sistema cartesiano o en general cualquier parámetro que describa completamente el movimiento del sistema. En un sistema el número de coordenadas que puede encontrarse es igual a los grados de libertad y si este conjunto de coordenadas elimina las restricciones pueden llamarse coordenadas generalizadas del sistema y estas se asocian con las variables dinámicas generalizadas.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se utilizan para describir cualquier sistema mecánico por medio de coordenadas generalizadas de posición. Para obtener estas ecuaciones se define:

q_j : Coordenadas generalizadas de posición.

\dot{q}_j : Velocidades generalizadas, son las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas.

Q_j : Fuerzas generalizadas que actúan sobre la partícula j .

El Lagrangiano del sistema se define como como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q) \quad (2.12)$$

este método puede aplicarse para sistemas con fuerzas conservativas y no conservativas. En el caso de fuerzas conservativas las ecuaciones de Euler -Lagrange se representan como sigue:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = 0 \quad (2.13)$$

Se pueden generalizar estas ecuaciones para todo tipo de sistemas, se consideran fuerzas no conservativas las entradas de control (u), las perturbaciones externas (Q_p) y la disipación. Esta última puede formularse como la función de disipación de Raleigh $D(\dot{q}) = F\dot{q}$. Si se reformula el

Lagrangiano incluyendo estas fuerzas no conservativas las ecuaciones E-L para sistemas disipativos tienen la forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = u + Q_i - \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.14)$$

Al ignorar las perturbaciones externas, la ecuación toma la forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = u \quad (2.15)$$

donde se obtendrán tantas ecuaciones diferenciales como coordenadas generalizadas.

Las ecuaciones de E-L, en el caso de sólidos rígidos (p. ej. sistemas robóticos, grúas) se pueden expresar de la siguiente forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (2.16)$$

donde $M(q)$ es la matriz de inercia del sistema, $g(q)$ corresponde a los efectos centrífugos, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de coriolis y τ representa la matriz de fuerzas de entrada. Los sistemas compuestos por subsistemas de distinta naturaleza energética se pueden abordar con facilidad mediante la formulación Euler-Lagrange, combinando directamente sus energías cinéticas y potenciales.

Sistemas Hamiltonianos

La dinámica de los sistemas Euler Lagrange admite una descripción alternativa conocida como ecuaciones canónicas de Hamilton. La ventaja que presenta es la estructura: un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, que se ajusta a la descripción clásica en variables de estado $\dot{x} = f(x)$ empleada en control no lineal. Para obtener estas ecuaciones se define la función de Hamilton a partir de la transformada de Legendre de la función de Lagrange.

$$H \triangleq \sum \dot{p}_i q_i - \mathcal{L} \quad (2.17)$$

donde las variables $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ se denominan *momentos conjugados* y se definen como $p_k = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_k$.

Tomando derivadas parciales [Rañada,1990]:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

se llega a la siguiente descripción en variable de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -I_n & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} = \Gamma \nabla H \quad (2.18)$$

donde I_n es la matriz de identidad de orden n . La matriz Γ se denomina *matriz simpléctica*. Si sobre el sistema actúan una serie de fuerzas externas y de control dadas por el vector $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$, la dinámica se transforma en:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \Gamma \nabla H + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ I_n \end{bmatrix} f$$

Más que un cambio de variables, la formulación hamiltoniana de la mecánica ofrece una visión profunda sobre la evolución de los sistemas.

Sistemas Hamiltonianos Generalizados

En [Van der Schaft, 2000] aparece una generalización de los sistemas hamiltonianos mediante la definición de la estructura PCH (Port-Controlled Hamiltonian System), o Sistemas Hamiltonianos Controlados por Puertos. Los sistemas PCH con disipación admiten la siguiente descripción en variables de estado:

$$\dot{x} = (J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x} + Gu \quad (2.19)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $J(x) = -J(x)^T$ es la matriz de interconexión $R(x) \geq 0$ es la matriz de disipación, H es el Hamiltoniano o función de Hamilton, G y u representan respectivamente la matriz y el vector de control. Además:

$$\nabla H = \left[\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right]^T$$

Se puede comprobar, por la propiedad antisimétrica de $J(x)$, que en ausencia de acción de control la derivada del hamiltoniano está dado por:

$$\dot{H} = -(\nabla H)^T R(x) (\nabla H) \leq 0$$

de hecho, si $R(x) = 0$, desaparece el efecto disipativo y el Hamiltoniano sigue manteniendo su forma (sistema PCH). Con la estructura Euler-Lagrange y Hamiltoniana se procede a modelar y diseñar el controlador IDA-PBC para la grúa de caballete.

2.2.2 Pasividad y moldeo de energía

Se propone un sistema con entrada $u \in \mathfrak{R}^m$ y salida $y \in \mathfrak{R}^m$, que satisface la ecuación de balance de energía:

$$\int_0^t \underbrace{u^T(s)y(s)}_{\text{Suministrada}} ds = \underbrace{H[x(t)] - H[x(0)]}_{\text{Almacenada}} + \underbrace{d(t)}_{\text{Disipada}} \quad (2.20)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estados, $H(x)$ es la función de energía total del sistema la cual se representa como $H(x): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ y $d(t)$ es una función no negativa que captura los efectos de disipación (por ejemplo, debido a las resistencias y fricciones). El balance de energía es, por supuesto, una propiedad universal de los sistemas físicos.

Dos importantes corolarios se derivan de la ecuación de balance de energía (2.20):

- La energía de un sistema no controlado, es decir con $u = 0$, no es creciente y decrecerá debido a la disipación. Si la función de energía está acotada en el límite inferior, el sistema se detendrá en un punto de energía mínimo. También, como es de esperar, la tasa de convergencia de la función de energía es incrementada si se extrae la energía del sistema.
- Dado que $-\int_0^t u^T(s)y(s) ds \leq H[x(0)] \leq \infty$, la cantidad total de energía que se puede extraer de un sistema pasivo es acotada.

El punto donde la energía en lazo abierto (normalmente el estado cero) es mínimo por lo general no es de interés práctico, y el control se introduce para operar el sistema alrededor de algún punto de equilibrio distinto de cero, llamado x_* . En la formulación estándar de PBC, se etiqueta a las variables del puerto como entradas y salidas (por ejemplo, u/y respectivamente) y se plantea el problema de estabilización de una manera clásica. La asignación de una *función de energía* con un mínimo en el valor deseado, se refiere generalmente al moldeo de energía mientras que la modificación del término de disipación se llama inyección de amortiguamiento.

Para el problema de estabilización se selecciona una acción de control $u = \beta(x) + v$ de modo que la dinámica de lazo cerrado satisfaga la nueva ecuación de balance de energía:

$$H_d[x(t)] - H_d[x(0)] = \int_0^t v^T(s) z(s) ds - d_d(t) \quad (2.21)$$

donde $H_d(x)$, la función de energía total deseada, tiene un mínimo en x_* , z es la nueva salida pasiva, y $d_d(t)$ es el término de amortiguamiento deseado. En el procedimiento clásico (PBC) el moldeo de energía total, en el cual primero se selecciona la función de energía y después se diseña el control que fuerza la desigualdad de la disipación, hace que la estructura E-L desaparezca. Esto provoca que la función de almacenamiento (que es normalmente una función cuadrática del error) carezca de significado físico, lo cual dificulta el análisis posterior del sistema controlado. El método IDA-PBC incorpora la ventaja de resolver ciertos problemas de forma totalmente sistemática.

2.2.3 IDA-PBC

El método basado en pasividad conocido como IDA-PBC fue introducido en [Ortega & Spong 2000], y sigue dos pasos básicos del control basado en pasividad:

- i. Moldeo de energía: donde se modifica la función de energía total del sistema para asignar el punto de equilibrio deseado.
- ii. Inyección de amortiguamiento: para lograr estabilidad asintótica.

Consiste en partir de una estructura PCH en lazo abierto y obtener otra en lazo cerrado con las propiedades de estabilidad deseadas. Igualando las ecuaciones de lazo abierto y del sistema deseado se obtiene la ley de control. El método IDA-PBC sigue una dinámica en lazo cerrado con función de Hamilton $H_d(q, p)$ y una matriz antisimétrica también llamada de interconexión generalizada de la forma $J_a(q, p) = -J_a(q, p)^T$ que permite aumentar los grados de libertad en el diseño. Las ecuaciones de estado en lazo abierto y cerrado se deben ajustar exactamente. Esto quiere decir que la ley de control u debe calcularse de modo que:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = (J_d - R_d) \begin{bmatrix} \frac{\partial H_d}{\partial q} \\ \frac{\partial H_d}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + Gu \quad (2.22)$$

donde $R_d(q) \geq 0$ es la matriz de disipación en lazo cerrado. La principal dificultad de este método aparece en el caso de que el sistema sea subactuado, ya que el conjunto de funciones de Hamilton H_d en lazo cerrado es limitado, y depende de la manera de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales. En el caso subactuado existe una matriz G^\perp de rango $r > n$ siendo n el número de grados de libertad, que represente las direcciones en las que la ley de control no tiene efecto, cumpliéndose que:

$$G^\perp G = 0$$

es decir, si G es una matriz constante, las filas de G^\perp forman el núcleo de G . Si multiplicamos (2.22) por G^\perp se obtiene:

$$G^\perp (J_d - R_d) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_d}{\partial q} \\ \frac{\partial H_d}{\partial p} \end{bmatrix} = G^\perp \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Esta ecuación se ha de cumplir para cualquier valor de la ley de control, y por lo tanto representa una restricción en el conjunto de sistemas hamiltonianos en lazo cerrado definidos por las matrices (H_d, J_d, R_d) . Una correcta elección de estas matrices debe ser compatible con estas ecuaciones de ajuste y al mismo tiempo representar una dinámica en lazo cerrado con las propiedades deseadas en términos de estabilidad. Para el diseño del controlador retroalimentado se desarrollará el método IDA-PBC para sistemas mecánicos subactuados, como se verá en el capítulo 4.

2.3 Robustez

Se entiende por robustez la capacidad de un sistema en lazo cerrado para responder adecuadamente ante perturbaciones externas y/o variaciones en el modelo de la planta. Un controlador se considera robusto si es capaz de realizar el objetivo de control para el cual se diseñó, en presencia de incertidumbre y perturbaciones.

2.3.1 Definiciones básicas

Un proceso dinámico real suele ser muy complejo para ser descrito por un modelo matemático, ya que, cualquier modelo que represente a este sistema real, va a ser en mayor o menor grado impreciso o dicho de otra forma va a tener incertidumbres o errores de modelado. Entonces, si se desea controlar de manera eficiente un proceso real, se debe tener información

sobre las posibles fuentes de incertidumbre. Las características de diseño de un sistema de control dependen, de la precisión con la que el modelo utilizado describa el comportamiento del sistema.

La necesidad de cumplir especificaciones de diseño cada vez más exigentes, han llevado a tener en consideración aspectos de importancia en el desarrollo de los sistemas de control, de forma que el comportamiento del sistema se mantenga aceptable en presencia de incertidumbres. Entre los principales factores causantes de los errores de modelado pueden destacarse: modificación en el punto de trabajo de la planta, dinámica no lineal no considerada, dinámica de alta frecuencia no modelada, retardos de tiempo e imprecisiones en los parámetros. Estos factores se pueden agrupar en incertidumbre paramétrica e incertidumbre estructural; con respecto al conocimiento disponible sobre las causas de las incertidumbres pueden distinguirse:

- Incertidumbre no estructurada: Cuando hay discrepancia entre el modelo y la planta real.
- Incertidumbre estructural: Cuando se conoce que la incertidumbre en cierta medida se debe a algunos elementos diferenciados de la planta.

A la hora de plantear el diseño de un sistema de control robusto para un proceso con incertidumbres, surgen cuestiones de como: modelar el proceso, analizar el sistema de control y diseñar el control. Para resolver esas cuestiones surge la disciplina de *control robusto*, la cual abarca todos aquellos problemas que se caractericen por considerar incertidumbres en el modelo que sean tolerables por un controlador lineal e invariante en el tiempo. Los objetivos de control tratan de que el controlador diseñado funcione de manera aceptable cuando se implante en el proceso real, teniendo en cuenta:

- ✓ Estabilidad Nominal: El sistema en lazo cerrado es estable en ausencia de incertidumbre.
- ✓ Comportamiento Nominal: El sistema cumple las especificaciones de diseño en ausencia de incertidumbre.
- ✓ Estabilidad Robusta: El sistema es estable para todo el conjunto de posibles plantas (en presencia de incertidumbre).
- ✓ Comportamiento Robusto: El sistema cumple las especificaciones de diseño para todo el conjunto de posibles plantas (en presencia de incertidumbre).

El control de sistemas con incertidumbres abarca el campo de estudio de la disciplina conocida como control robusto, se considera que en la década de los ochenta se desarrolló esta

disciplina. Destacando desarrollos como: Método H_∞ [Zames & Francis, 1983] y [Doyle et al., 1989], Método LTR (Loop Transfer Recovery) [Doyle & Stein, 1981], y Método QFT (Quantitative Feedback Theory) [Horowitz, 1982]. Las principales aplicaciones de la teoría de la teoría de control robusto realizadas en los últimos años se han llevado a cabo en las áreas de control de procesos químicos, robótica, estructuras flexibles.

2.3.2 Análisis de robustez de sistemas no lineales

En relación a la robustez del diseño de controladores para sistemas no lineales, se sabe que no es posible extender los conceptos de control robusto para sistemas no lineales y que no es posible diseñar un controlador robusto puramente no lineal. Lo que con frecuencia se hace es analizar la robustez de un sistema de control no lineal nominal para una planta no lineal bajo ciertas condiciones, tales como incertidumbre paramétrica y/o perturbaciones. La manera más frecuente que se utiliza para analizar la robustez de un controlador nominal para un sistema no lineal, es de manera heurística; es decir mediante la variación numérica de los parámetros de la planta.

En algunos trabajos parece que los conceptos de control robusto para sistemas lineales se pueden aplicar para el caso de sistemas no lineales. Pero esto no es así, ya que lo que a veces se hace es linealizar al sistema no lineal, después se diseña un controlador robusto lineal para ese sistema linealizado y por último se controla al sistema no lineal con un control robusto diseñado a partir del sistema linealizado. En otros casos, la confusión es mayor ya que lo que se hace es linealizar al sistema no lineal, después se diseña un control robusto para el sistema linealizado, luego mediante un cambio de coordenadas se representa al controlador robusto con una expresión no lineal, y, por último, se realiza el control del sistema no lineal con ese supuesto controlador robusto no lineal, que realmente se diseñó en el ámbito lineal.

Tal es el caso de [Shibayama, et al., 2010] donde se presenta un control robusto de un sistema no lineal ante la presencia de incertidumbres, el modelo del sistema se linealiza y a partir del modelo linealizado se realiza el control robusto. En [Sano, et al., 2012] se presenta un método de control basado en la optimización de la Desigualdad Matricial Lineal (LMI) aplicado a una grúa giratoria, para diseñar el control robusto primero se linealizó el modelo no lineal de la grúa. En [Ahsan, et al., 2013] se diseña un control robusto no lineal aplicado a un sistema de suspensión magnética en el cual se realiza una linealización por retroalimentación del estado y de ahí se parte para el diseño del control robusto.

En cuanto a robustez de sistemas no lineales lo más cercano que se realiza son análisis de robustez de los controladores no lineales, los cuales se pueden desarrollar de forma:

- ❖ **Heurística:** se lleva a cabo una variación numérica de todos los parámetros significativos y se encuentra una vecindad para la cual el controlador no lineal nominal es robusto ante la variación de esos parámetros. Esto nos da información de manera empírica pero inexacta de lo robusto que es el controlador diseñado. Este enfoque del análisis de robustez de forma heurística se emplea en publicaciones como,

En [Ahmad, et al., 2009] se realiza un análisis de la robustez de forma heurística de dos controladores no lineales para una grúa giratoria. El análisis se evalúa en términos del nivel de reducción de oscilaciones de la cuerda que sostiene la carga; se concluyó que el sistema de control que presenta mayor robustez es el moldeo de la entrada.

En [Saelal, et al., 2011] se analiza la robustez de forma heurística de tres esquemas de control retroalimentados aplicado a una grúa ante la presencia de incertidumbre en la carga. La robustez de los controladores se obtuvo con base en disminuir el ángulo de oscilación en la carga, el cual se examina en términos de la magnitud de la oscilación.

En [Peng, et al., 2013] se realiza un análisis de la robustez de forma heurística para el desempeño de un controlador no lineal; se hace una variación en el parámetro y se determina de manera heurística el rango del parámetro de la incertidumbre para el cual el modelo no lineal es capaz de responder al sistema de control no lineal ante la presencia de incertidumbre.

- ❖ **Particular:** Este análisis se realiza específicamente para la planta y el controlador particulares, bajo ciertas condiciones propias de la naturaleza del sistema y del controlador diseñado. Esta forma particular de analizar la robustez se pone en evidencia en publicaciones como:

En [Freeman & Kokotovic, 2008] donde se presenta un análisis de la robustez de un controlador no lineal para una clase de sistemas no lineales; para ello se propone una función de Lyapunov y se le llama función de Lyapunov de control robusto.

En [Aghabalaie, et al., 2010] se analiza la robustez de un sistema de control no lineal basado en el segundo método de Lyapunov para un robot bípedo, se considera al sistema expuesto a perturbaciones. El análisis de la robustez se llevó a cabo para comprobar la estabilidad asintótica robusta de la estrategia de control implementada en el robot bípedo.

En [Deng & Bu, 2012] se analiza la robustez para un sistema de retroalimentación no lineal con perturbaciones desconocidas. El análisis se desarrolló para garantizar la estabilidad del sistema y la propiedad de seguimiento.

Para este trabajo se va a hacer un análisis de la robustez de los controladores nominales: Plátitud diferencial más PI y Plátitud diferencial más IDA-PBC con el enfoque heurístico.

2.4 Planeación y seguimiento de trayectoria

La noción de *planeación de trayectoria*, consiste en la generación fuera de línea de una trayectoria o comportamiento deseado. Dicha trayectoria se genera a partir de un punto inicial a un punto final previstos, en lazo abierto; basada solo en el conocimiento del modelo del sistema y en el caso ideal de ausencia de perturbaciones. A este tipo de trayectoria se le llama la *trayectoria nominal* o de *referencia*, y al control asociado el *control nominal* o de *referencia*. Esta noción es muy natural en el contexto de los sistemas mecánicos controlados tales como aviones, automóviles, barcos, vehículos submarinos, grúas, sistemas mecatrónicos, máquina herramientas o sistemas de posicionamiento.

El aspecto de seguimiento se refiere al diseño de una ley de control capaz de seguir la trayectoria de referencia, incluso si algunas perturbaciones desconocidas fuerzan al sistema a desviarse. El tipo de controladores que tienen en cuenta las observaciones del estado del sistema, generalmente se les llama de retroalimentación negativa o control de lazo cerrado. Sin desviación (es decir, sin perturbaciones), el control coincide con la trayectoria, pero tan pronto como una desviación se detecta, la ley de control de lazo cerrado debe garantizar la convergencia del sistema a su trayectoria de referencia.

Una interpretación geométrica de platitude diferencial adecuada a planeación de trayectorias, es la relación que existe entre las curvas integrales y las curvas algebraicas; esta relación constituye un difeomorfismo. Este difeomorfismo establece una correspondencia biunívoca entre las trayectorias integrales del sistema y las curvas algebraicas (salidas planas). A esta correspondencia se le denomina difeomorfismo de Lie-Bäcklund [Fliess, et al., 1999]. En la Figura 2.1 se muestra la representación gráfica de esta equivalencia:

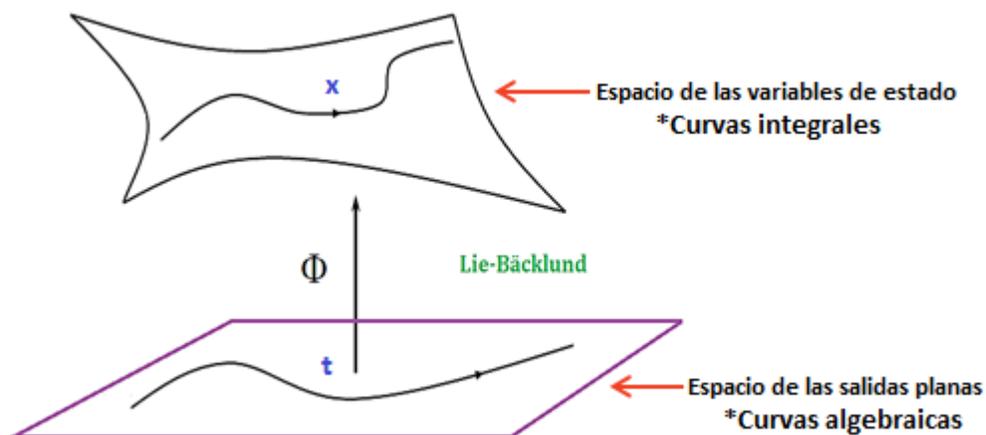


Figura 2.1 Interpretación geométrica platitude diferencial.

Las curvas algebraicas deben satisfacer las condiciones iniciales establecidas para las curvas integrales. El problema de planeación y generación de trayectoria se resuelve al encontrar una trayectoria que sea diferenciable y que satisfaga la condición inicial y final establecida. La transformada diferencial permite la transformación de ecuaciones diferenciales no lineales a un sistema algebraico de ecuaciones; con esto los estados y las entradas se pueden expresar en términos de las salidas planas. Entonces la transformada diferencial es muy útil para problemas de planeación de trayectorias, ya que la trayectoria puede ser planeada en el espacio de las salidas planas del sistema usando funciones de interpolación, curvas de Bézier, entre otras técnicas. Para el problema de planeación de trayectoria para el sistema (grúa de caballete) se empleará el método de Curva de Bézier.

Capítulo 3 : Modelado dinámico de una grúa de caballete

Dentro de la clasificación que se refiere al tipo de instalación y a la movilidad de la grúa (grúas fijas) se encuentra la grúa de caballete; es una herramienta compuesta por dos o cuatro postes que elevan una estructura por donde se desplaza el mecanismo de elevación. Este tipo de grúa realiza dos movimientos; el movimiento transversal que se lleva a cabo en la viga y el movimiento vertical que se realiza a través del mecanismo de elevación. Se le denomina así por la forma de la estructura de los postes que es similar al de un caballete, estas presentan ventajas y desventajas mencionadas en la siguiente Tabla.

Ventajas	Desventajas
No dependen de contrapesos para mantener su estabilidad.	Están fijas a un carril.
Son de fácil mantenimiento y construcción.	Puede producirse el efecto de pandeo en las columnas.
Se pueden desplazar largas distancias en el plano horizontal con mucha facilidad.	No presentan desplazamientos de forma radial.

Tabla 3.1 Ventajas y desventajas de la grúa de caballete.

Una representación gráfica de la grúa de caballete es la que se muestra en la siguiente Figura.

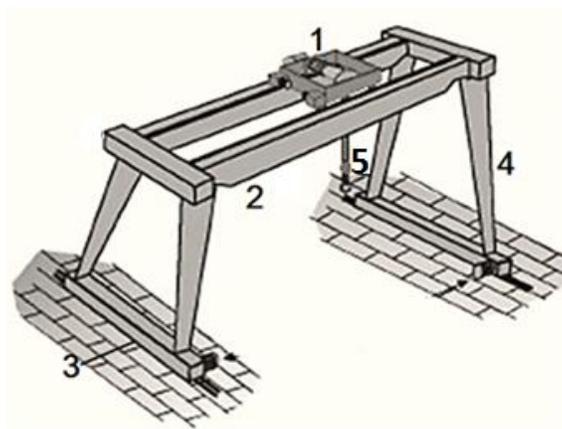


Figura 3.1 Estructura de la grúa de caballete.

de acuerdo a la Figura 3.1 las partes principales de una grúa de caballete son:

1. Carro. Se desplaza sobre las vigas y realiza el movimiento transversal de la carga.
2. Viga. Existen dos importantes estructuras:
 - Viga principal única: Tiene una sola viga principal que se utiliza para cargas de baja y media magnitud.
 - Vigas principales dobles: Esta se forma por dos vigas principales, cuya distancia aumenta conforme aumenta la altura con objeto de conseguir una alta cota de estabilidad de la grúa y se utiliza para transportar cargas de mayor peso.
3. Vigas laterales. Elementos transversales que sirven para mantener unidas y a la vez a una distancia fija a la estructura de la grúa de caballete.
4. Poste. Columna en forma vertical que sirve de apoyo para sostener la estructura por donde se desplaza el mecanismo de elevación.
5. Mecanismo de elevación. Es el encargado de levantar las cargas en un plano vertical, estos pueden ser manuales, eléctricos de cadena, de cable y neumáticos; constituye el componente que está sujeto a la viga principal.

Fundamentalmente, existen dos tipos de grúas de caballete:

- **Pórtico en celosía:** Este tipo de pórtico se usaba antiguamente, su estructura reticular precisaba de un carro abierto como mecanismo de elevación. Se caracterizaba por su ligereza y su alto coste en mano de obra de fabricación. Actualmente, los pórticos con este tipo de estructura han sido desplazados por pórticos conformados en viga cajón.

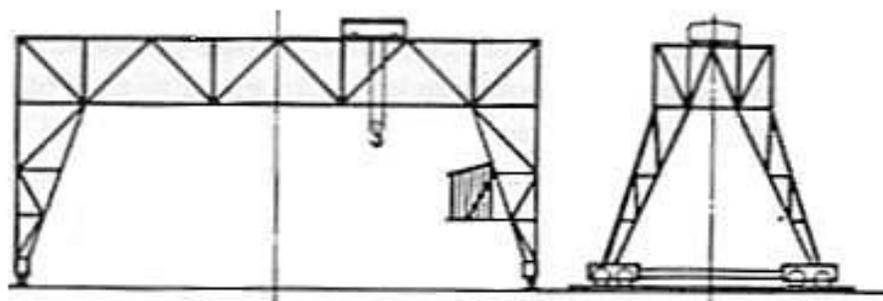


Figura 3.2 Pórtico en celosía.

- **Pórtico en vigas-cajón:** Este tipo de estructura soporta altos esfuerzos de torsión además de los correspondientes a flexión y cortadura. Esta característica implica la posibilidad de implementar carros abiertos o carros en voladizo.

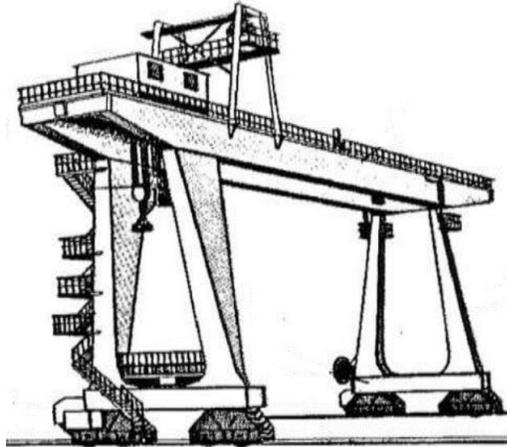


Figura 3.3 Pórtico en vigas-cajón.

La grúa de caballete pertenece al grupo pórtico en vigas cajón; se trata de un sistema mecánico que presenta las siguientes características: es un sistema no lineal ya que las ecuaciones que rigen su dinámica tienen términos no lineales y es un sistema subactuado por que posee menos entradas de control que grados de libertad. El sistema cuenta con dos entradas que son la fuerza que actúa sobre el carro (F_x) y el par de torsión que actúa sobre la polea (τ_α). El sistema tiene tres grados de libertad que son el desplazamiento lineal del carro, el desplazamiento angular de la polea y los ángulos de oscilación de la carga. La dinámica del sistema propicia la aparición de oscilaciones indeseadas de la carga que son difíciles de atenuar.

3.1 Modelo dinámico

El modelo de la grúa de caballete presentado en esta tesis está basado en [Banavar, et al., 2007]. El sistema tiene dos actuadores: un actuador lineal que acciona el carro y un actuador giratorio que acciona la polea. Para los efectos de estudio se tienen las siguientes suposiciones:

- No se considera la masa del cable y éste es inelástico.
- Las fuerzas disipativas en el carro y en la polea son insignificantes.
- No se produce deslizamiento en el punto de contacto entre la polea y el cable.

- iv. El radio de la polea es pequeño en comparación con la longitud del carro.
- v. La longitud mínima del cable es $l_0 = 0.35$ debido a que es la distancia entre el centro de masa de la polea y la viga.

Las variables del sistema son $q = [\theta \ x \ \alpha \ l]^T$, dónde:

θ	$x \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	α
Angulo de la masa respecto al eje vertical.	Posición del centro de gravedad del carro.	Longitud del cable.	Angulo a través del cual la polea gira

Tabla 3.2 Variables del sistema.

El control $u \in \mathbb{R}^2$ se define como: $u = [F_x \ \tau_\alpha]^T$, donde:

- ✓ F_x : Fuerza de entrada que actúa sobre el carro.
- ✓ τ_α : Par de torsión que actúa sobre la polea.

El objetivo de control es mover la carga desde una posición $q_i = [\theta_i \ x_i \ \alpha_i \ l_i]^T$ a la posición deseada específica como $q_D = [0 \ x_D \ \alpha_D \ l_D]^T$ siguiendo una trayectoria bidimensional predeterminada. Los esquemas de los componentes que forman parte de la grúa de caballete se muestra en las Figuras 3.4, y 3.5; donde 3.4 a) y 3.5 a) representan el atraso de la carga y 3.4 b) y 3.5 b) representan el adelanto de la carga.

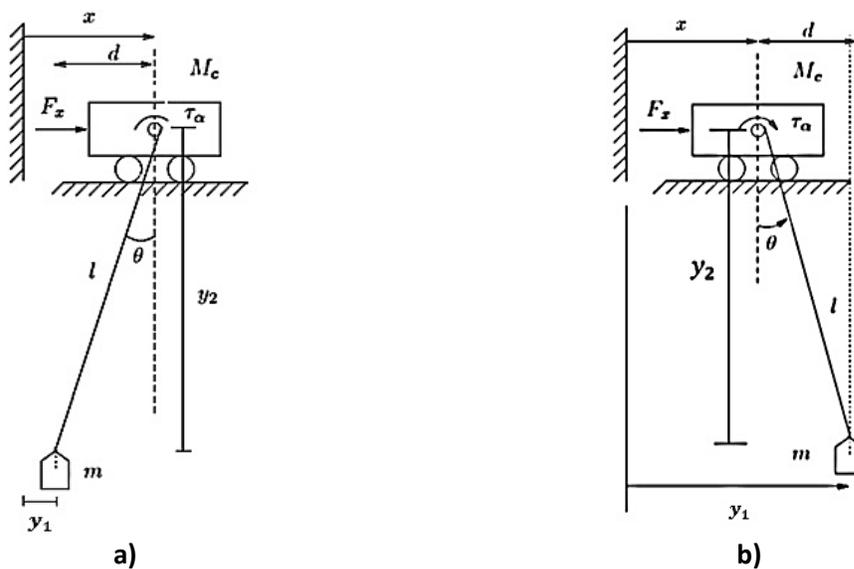


Figura 3.4 Grúa de caballete.

Las variables que se muestran en la Figura 3.4 se presentan en la siguiente Tabla.

Variables	
F_x	Fuerza de entrada que actúa sobre el carro.
τ_α	Par de torsión que actúa sobre la polea.
θ	Angulo de la masa respecto al eje vertical.
x	Posición del centro de gravedad del carro.
l	Longitud del cable.
m	Masa de la carga.
M_c	Masa del carro.
d	Posición que tiene la carga respecto al centro de gravedad del carro.
y_1	Descomposición ortogonal del cable.
y_2	

Tabla 3.3 Variables grúa de caballete.

A continuación, se presenta el diagrama de la polea y el cable de la grúa.

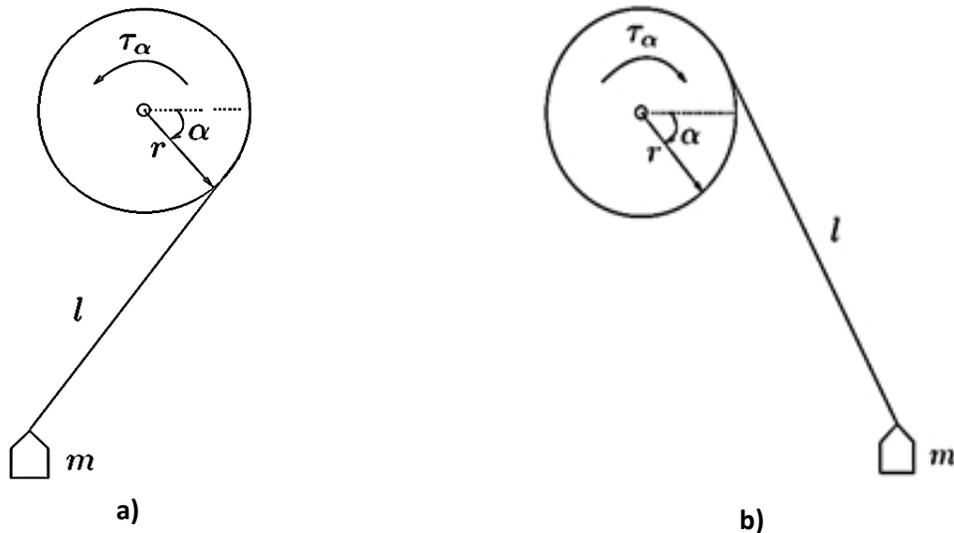


Figura 3.5 Esquema de polea y cable.

Las variables que se muestran en la Figura 3.5 se presentan en la Tabla 3.4.

Variables	
τ_α	Par de torsión que actúa sobre la polea.
α	Angulo a través del cual la polea gira.
r	Radio de la polea.
l	Longitud del cable.
m	Masa de la carga.

Tabla 3.4 Variables de esquema y polea.

El modelado de este sistema se obtiene mediante el enfoque de Euler-Lagrange. Las ecuaciones de Euler-Lagrange de movimiento son un conjunto general de ecuaciones diferenciales que describen la evolución en el tiempo (comportamiento dinámico) de sistemas mecánicos.

De acuerdo al procedimiento para obtener las ecuaciones de movimiento basadas en el enfoque Euler- Lagrange descrito en el capítulo 2:

- ❖ Se determinan las coordenadas generalizadas que definen la configuración del sistema: x, θ, α y l .
- ❖ Se procede a encontrar las funciones de energía.

A. Determinación de la energía cinética del sistema.

Respecto a la Figura 3.4 de la grúa de caballete, tenemos:

$$K_1 = \frac{1}{2} M_c v_c^2 \tag{3.1}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m v_m^2 \tag{3.2}$$

donde:

M_c	m	v_c	v_m	K_1, K_2
Masa del carro.	Masa de la carga.	Velocidad del carro.	Velocidad de la carga.	Representan las energías cinéticas del sistema.

Tabla 3.5 Variables de las funciones de energía cinética K_1 y K_2 .

Se procede a determinar las velocidades de las expresiones anteriores, como:

$$v_c^2 = \dot{x}^2 \quad (3.3)$$

$$v_m^2 = (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) \quad (3.4)$$

Observando la Figura 3.4 se obtienen las componentes para la velocidad de la carga v_m :

$$y_1 = l \operatorname{sen}(\theta) + x \quad (3.5)$$

$$y_2 = l \operatorname{cos}(\theta) \quad (3.6)$$

derivando 3.5 y 3.6 tenemos:

$$\dot{y}_1 = \dot{x} + l \operatorname{cos}(\theta) \dot{\theta} + \operatorname{sen}(\theta) \dot{l} \quad (3.7)$$

$$\dot{y}_2 = -l \operatorname{sen}(\theta) \dot{\theta} + \operatorname{cos}(\theta) \dot{l} \quad (3.8)$$

La expresión 3.7 se eleva al cuadrado, entonces:

$$\dot{y}_1^2 = (\dot{x}^2 + \dot{x}l \operatorname{cos}\theta \dot{\theta} + \dot{x} \operatorname{sen}\theta \dot{l}) + (l \operatorname{cos}\theta \dot{\theta} \dot{x} + l^2 \operatorname{cos}^2 \theta \dot{\theta}^2 + l \operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}\theta \dot{l} \dot{\theta}) + (\dot{x} \operatorname{sen}\theta \dot{l} + l \operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}\theta \dot{l} \dot{\theta} + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{l}^2) \quad (3.9)$$

La expresión 3.8 se eleva al cuadrado, entonces:

$$\dot{y}_2^2 = l^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\theta}^2 - 2l \operatorname{sen}\theta \operatorname{cos}\theta \dot{l} \dot{\theta} + \operatorname{cos}^2 \theta \dot{l}^2 \quad (3.10)$$

Para obtener la velocidad de la carga se sustituye 3.9 y 3.10 en la ecuación 3.4, así:

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}l \operatorname{cos}\theta \dot{\theta} + \dot{x} \operatorname{sen}\theta \dot{l} + l \operatorname{cos}\theta \dot{\theta} \dot{x} + l^2 \operatorname{cos}^2 \theta \dot{\theta}^2 + l \operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}\theta \dot{l} \dot{\theta} + \dot{x} \operatorname{sen}\theta \dot{l} + l \operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}\theta \dot{l} \dot{\theta} + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{l}^2 + l^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\theta}^2 - 2l \operatorname{sen}\theta \operatorname{cos}\theta \dot{l} \dot{\theta} + \operatorname{cos}^2 \theta \dot{l}^2 \quad (3.11)$$

reduciendo términos en la expresión 3.11 y utilizando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 + \operatorname{cos}^2 = 1$, tenemos:

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}l \operatorname{cos}\theta \dot{\theta} + 2\dot{x} \operatorname{sen}\theta \dot{l} + l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{l}^2 \quad (3.12)$$

la ecuación 3.12 es el resultado del desarrollo de la ecuación 3.4.

Sustituyendo 3.3 en 3.1, tenemos:

$$K_1 = \frac{1}{2} M_c \dot{x}^2 \quad (3.13)$$

Sustituyendo 3.12 en 3.2, tenemos:

$$K_2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos\theta \dot{\theta} + 2\dot{x} \operatorname{sen}\theta \dot{l} + l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{l}^2) \quad (3.14)$$

Respecto a la Figura 3.5 de los esquemas de polea y cable, se tiene:

$$K_3 = \frac{1}{2} I_p \dot{\alpha}^2 \quad (3.15)$$

donde:

I_p	α	K_3
Momento de inercia de la polea.	Angulo a través del cual la polea gira.	Representa la energía cinética del sistema.

Tabla 3.6 Variables de la función de energía cinética K_3 .

La energía cinética total del sistema se expresa como:

$$K_t = K_1 + K_2 + K_3 \quad (3.16)$$

entonces sustituyendo las expresiones 3.13, 3.14 y 3.15 en 3.16 tenemos:

$$K_t = \frac{1}{2} M_c \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos\theta \dot{\theta} + 2\dot{x} \operatorname{sen}\theta \dot{l} + l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{l}^2) + \frac{1}{2} I_p \dot{\alpha}^2 \quad (3.17)$$

B. Determinación de la energía potencial del sistema.

Respecto a la Figura 3.4 que representa los componentes de la grúa de caballete, se tiene:

$$U = mgy_2 \quad (3.18)$$

donde:

m	g	y_2	U
Masa de la carga.	Gravedad.	Eje vertical de la carga.	Representa la energía potencial del sistema.

Tabla 3.7 Variables de la función energía potencial.

❖ De acuerdo a la expresión (2.13) se determina el Lagrangiano como:

$$\mathcal{L} = K_t - U \quad (3.19)$$

Sustituyendo 3.17 y 3.18 en la expresión 3.19 se obtiene el Lagrangiano del sistema

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2} M_c \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos\theta \dot{\theta} + 2\dot{x} \operatorname{sen}\theta \dot{l} + l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{l}^2) + \frac{1}{2} I_p \dot{\alpha}^2 \right) - mgl \cos(\theta) \quad (3.20)$$

En forma matricial el Lagrangiano del sistema tiene la siguiente estructura:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - U(q) \quad (3.21)$$

donde

$$M(q) = \begin{bmatrix} ml^2 & ml \cos\theta & 0 & 0 \\ ml \cos\theta & (M_c + m) & 0 & m \sin\theta \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & m \sin\theta & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$U(q) = mgl \cos \theta$$

Con respecto a las coordenadas generalizadas α, l se tiene: el radio de la polea (r) es pequeño en comparación con la longitud del cable y la longitud del cable depende del ángulo a través del cual se mueve la polea, se tiene que $\alpha(t_0) = 0$, entonces:

$$r\dot{\alpha} = \dot{l} \quad (3.22)$$

integrando 3.22 en el intervalo $[0, t]$ y considerando que la longitud mínima del cable es l_0 , se obtiene:

$$l(t) - r\alpha(t) = l_0 \quad (3.23)$$

De lo anterior podemos ver la dependencia de las coordenadas α y l . Esto nos lleva a reducir el orden del Lagrangiano 3.21. Para obtener el Lagrangiano de orden reducido, primero se desarrolla una transformación de coordenadas como

$$\tilde{q} = Aq$$

donde $q = [\theta \ x \ \alpha \ l]^T$, $\tilde{q} = [\theta \ x \ \alpha \ l - r\alpha]^T$ y $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ es un operador lineal matricial dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores de las matrices q , \tilde{q} y A en la expresión 3.21, el Lagrangiano en las nuevas coordenadas es:

$$\mathcal{L}_n(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} (A^{-1}\dot{\tilde{q}})^T M (A^{-1}\tilde{q}) (A^{-1}\dot{\tilde{q}}) - V(A^{-1}\tilde{q}) \quad (3.24)$$

de la expresión 3.24, tenemos:

$$\tilde{M}(\tilde{q}) = A^{-T} M(\tilde{q}) A^{-1} \quad (3.25)$$

desarrollando 3.25

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ml^2 & ml\cos\theta & 0 & 0 \\ ml\cos\theta & (M_c + m) & 0 & m\sin\theta \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & m\sin\theta & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ml_0^2 & ml_0\cos\theta & 0 & 0 \\ ml_0\cos\theta & (M_c + m) & mrsin\theta & m\sin\theta \\ 0 & mrsin\theta & I_p + mr^2 & rm \\ 0 & m\sin\theta & mr & m \end{bmatrix}$$

En el sistema de orden reducido $l - r\alpha = l_0$ el vector de coordenadas generalizadas resulta como $\tilde{q}_r = [\theta \quad x \quad \alpha]^T$, por lo que el Lagrangiano de orden reducido es:

$$\mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r) = \frac{1}{2} [(\dot{\theta}^2 ml_0^2) + (\dot{x}^2 (M_c + m)) + (\dot{\alpha}^2 (I_p + mr^2))] + \dot{x}\dot{\theta} ml_0 \cos\theta + \dot{x}\dot{\alpha} (mrsin\theta) - mg l_0 \cos\theta \quad (3.26)$$

Como tenemos que los grados de libertad no están totalmente actuados (sistemas **subactuado**), las ecuaciones E-L se definen como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \dot{\tilde{q}}_r} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \tilde{q}_r} = U_i \quad (3.27)$$

de acuerdo al vector de coordenadas generalizadas la primera ecuación de Lagrange se define como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \theta} = 0 \quad (3.28)$$

donde

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \dot{\theta}} \right] = \ddot{\theta} m l_0^2 - \dot{x} \sin \theta m l_0 \dot{\theta} + \cos \theta \dot{x} m l_0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \theta} = -\sin \theta \dot{x} m l_0 + \cos \theta m r \dot{x} \dot{\alpha} - m g l_0 \sin \theta \quad (3.30)$$

sustituyendo 3.29 y 3.30 en la expresión 3.28 tenemos la primera ecuación de Lagrange, como:

$$0 = \ddot{\theta} (m l_0^2) + \dot{x} (m l_0 \cos \theta) + \dot{\alpha} (-m r \cos \theta \dot{x}) + m g l_0 \sin \theta \quad (3.31)$$

de acuerdo al vector de coordenadas generalizadas la segunda ecuación de Lagrange se define como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \dot{\alpha}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \alpha} = F_x \quad (3.32)$$

donde

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \dot{\alpha}} \right] = \ddot{x} (m + M_c) + \ddot{\theta} (m l_0 \cos \theta) + \dot{\alpha} (m r \cos \theta \dot{\theta}) + \ddot{\alpha} (m r \sin \theta) - m l_0 \dot{\theta} \sin \theta \dot{\theta} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.34)$$

sustituyendo 3.33 y 3.34 en la expresión 3.32 tenemos la segunda ecuación de Lagrange, como:

$$F_x = \ddot{\theta} (m l_0 \cos \theta) + \ddot{x} (m + M_c) + \ddot{\alpha} (m r \sin \theta) + \dot{\theta} (-m l_0 \sin \theta \dot{\theta}) + \dot{\alpha} (m r \cos \theta \dot{\theta}) \quad (3.35)$$

de acuerdo al vector de coordenadas generalizadas la tercera ecuación de Lagrange se define como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \dot{\alpha}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \alpha} = \tau_\alpha \quad (3.36)$$

donde

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \dot{\alpha}} \right] = \ddot{\alpha} (m r^2 + I_p) + \dot{x} \cos \theta m r \dot{\theta} + \dot{x} m r \sin \theta \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_r(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.38)$$

sustituyendo 3.37 y 3.38 en la expresión 3.36 tenemos la tercera ecuación de Lagrange, como:

$$\tau_\alpha = \ddot{x}(m \sin \theta r) + \ddot{\alpha}(mr^2 + I_p) + \dot{\theta}(mr \cos \theta \dot{x}) \quad (3.39)$$

De acuerdo a las expresiones 3.31, 3.35 y 3.39 la dinámica de la grúa queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F_x \\ \tau_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml_0^2 & ml_0 \cos \theta & 0 \\ ml_0 \cos \theta & m + M_c & mr \sin \theta \\ 0 & m \sin \theta r & mr^2 + I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mr \cos \theta \dot{x} \\ -ml_0 \sin \theta \dot{\theta} & 0 & mr \cos \theta \dot{\theta} \\ mr \cos \theta \dot{x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl_0 \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

esta dinámica se puede representar como:

$$G(\tilde{q}_r)u = \tilde{M}_r(\tilde{q}_r)(\ddot{\tilde{q}}_r) + C(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r)\dot{\tilde{q}}_r + U(\tilde{q}_r) \quad (3.41)$$

donde $\tilde{M}_r(\tilde{q}_r) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de inercia, $C(\tilde{q}_r, \dot{\tilde{q}}_r) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de coriolis, $G(\tilde{q}_r)u \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es el vector fuerzas de entradas y $U(\tilde{q}_r) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ representa la energía potencial.

3.2 Simulaciones en lazo abierto

En esta sección se muestran los resultados de simulación de la grúa de caballete de dos dimensiones representado por (3.40) en lazo abierto; para analizar la respuesta del sistema en condiciones nominales la simulación se realiza en SIMULINK® de MATLAB®, utilizando el bloque S-Function. En la Tabla 3.8 se presentan los valores numéricos de los parámetros del sistema:

Parámetros	Valor	Unidades
M_c	6	kg
m	1	kg
M_i	0.0018	kgm^2
r	0.03	m
g	9.81	m/s^2

Tabla 3.8 Valores numéricos de los parámetros de la grúa.

Las entradas del sistema son $F_x = 0.02 N$ y $\tau_\alpha = 0.00001 Nm$; la simulación se realiza con una duración de 70 s. A continuación, se presentan las respuestas de las variables de la grúa de caballete en lazo abierto.

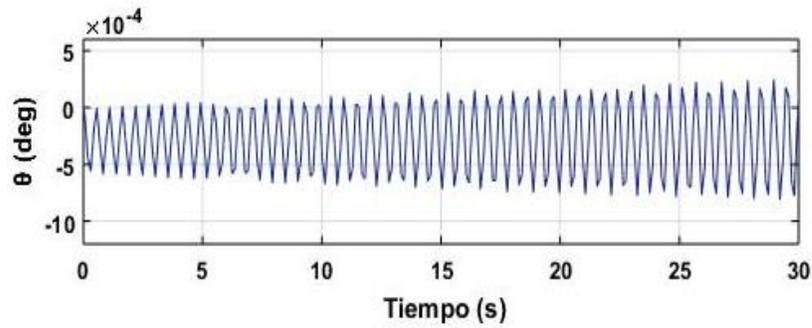


Figura 3.6 Respuesta de la variable θ en lazo abierto.

En la Figura 3.6 se muestra el comportamiento del ángulo θ con respecto al tiempo y se aprecia que la carga presenta oscilaciones las cuales van aumentando de amplitud.

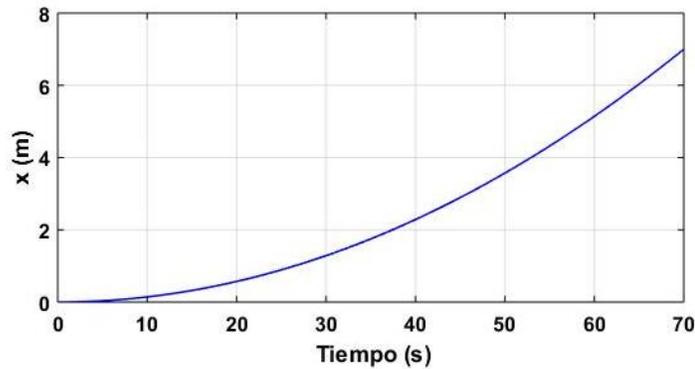


Figura 3.7 Respuesta de la variable x en lazo abierto.

En la Figura 3.7 se muestra el comportamiento de la variable x y se aprecia que en 70 s llega a 7 m aproximadamente la posición del centro de gravedad del carro.

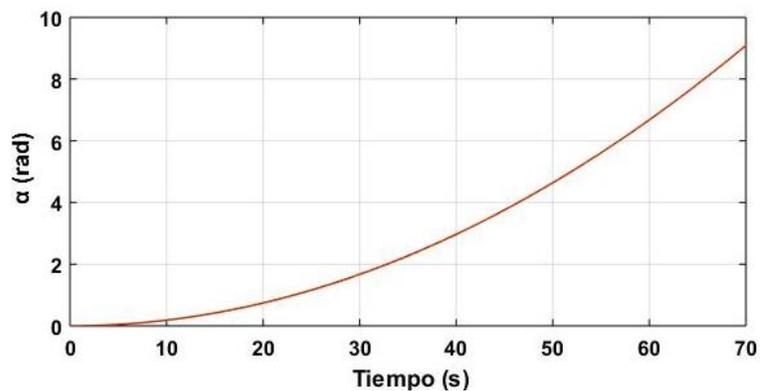


Figura 3.8 Respuesta de la variable α en lazo abierto.

En la Figura 3.8 podemos observar el comportamiento del ángulo α con respecto al tiempo el cual va aumentando ya que se aplicó un par constante.

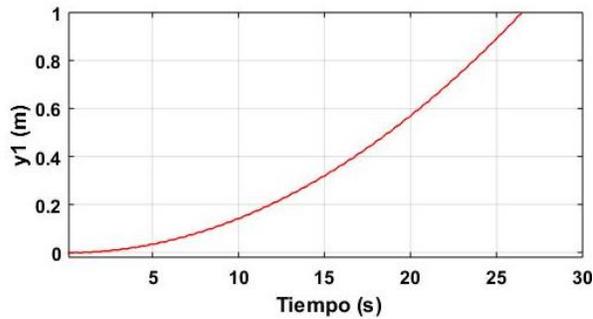


Figura 3.9 Respuesta de la variable y_1 en lazo abierto.

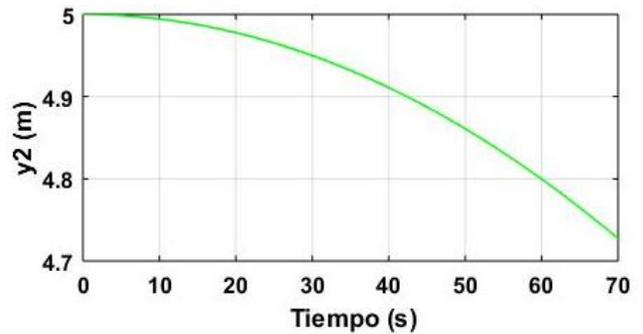


Figura 3.10 Respuesta de la variable y_2 en lazo abierto.

En la Figura 3.9 se presenta el comportamiento de y_1 que es el componente de la trayectoria de la carga en el eje x , se puede apreciar que presenta pequeñas oscilaciones, esto se debe a la oscilación que presenta la carga. En la Figura 3.10 se aprecia el componente de la trayectoria de la carga en el eje y con respecto al tiempo el cual se desplaza pocos metros durante 70 s.

Con las simulaciones en lazo abierto se concluye el análisis de la respuesta del sistema ante las condiciones presentadas anteriormente.

Capítulo 4 : Diseño de esquemas de control

En este capítulo se presenta el diseño de un control prealimentado basado en platitud diferencial, el control retroalimentado basado en el método IDA-PBC y PI para una grúa de caballete; así como también las simulaciones de cada controlador.

4.1 Diseño de un control prealimentado basado en platitud diferencial

En esta sección se verifica que el sistema es diferencialmente plano, se presenta el diseño de la trayectoria empleando Curva de Bézier y el diseño del control prealimentado basado en las nociones de platitud diferencial.

4.1.1 Sistema plano: grúa de caballete

En este apartado se aborda el concepto de platitud diferencial para el caso particular de la grúa de caballete. En términos generales, un sistema dinámico no lineal es diferencialmente plano si satisface las condiciones presentadas en el capítulo 2. Para verificar que el sistema tiene la propiedad de platitud diferencial se tiene la siguiente proposición:

Proposición 4.1 [Banavar, et al., 2007] *El sistema reducido representado en (3.40) en las nuevas coordenadas $\tilde{q}_r = [\theta \ x \ \alpha]^T$, con la dinámica expresada por (3.41), la restricción $(y_1 - x)^2 + y_2^2 - l^2 = 0$ y la salida plana $y = [y_1 \ y_2]^T$, es un sistema plano.*

Para demostrar que el sistema es plano, se tiene que probar que las entradas de control $u = [F_x \ \tau_\alpha]^T$, así como todo el estado se pueden expresar en términos de las salidas planas y de un número finito de sus derivadas en el tiempo.

Para obtener la parametrización de las componentes del vector $q = [\theta \ x \ \alpha \ l]^T$ la dinámica de la grúa se expresa como:

$$m\ddot{y}_1 = -T \sin \theta \quad (4.1)$$

$$m\ddot{y}_2 = -T \cos \theta + mg \quad (4.2)$$

donde T denota la tensión del cable. La tensión del cable puede despejarse de 4.2 como

$$T = m \frac{g - \ddot{y}_2}{\cos \theta}$$

si $y_2 = l \cos \theta$, entonces la tensión del cable se expresa de la siguiente manera:

$$T = ml \frac{g - \ddot{y}_2}{y_2} \quad (4.3)$$

Se muestra que la variable d del sistema se puede expresar como una función diferencial de y_1, y_2 mediante la solución de la expresión 4.2 utilizando 4.3 como:

$$m\ddot{y}_1 = -ml \frac{g - \ddot{y}_2}{y_2} \sin \theta$$

$$m\ddot{y}_1 = -ml \frac{g - \ddot{y}_2}{y_2} \frac{d}{l} \quad (4.4)$$

$$d = ml \frac{y_1 - \ddot{y}_2}{g - \ddot{y}_2} \quad (4.5)$$

Ahora podemos representar las componentes del vector q en términos de las salidas planas y sus derivadas sucesivas, con ayuda de las Figuras 4.1 y 4.2 como se muestra a continuación.

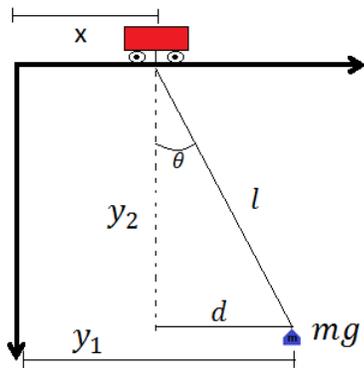


Figura 4.1 Diagrama de grúa de caballete.

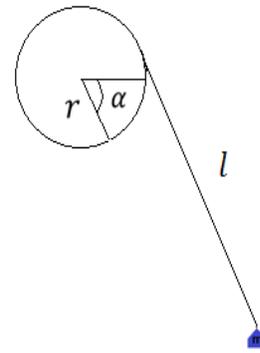


Figura 4.2 Diagrama de polea y cable.

$$\theta = \arctan \frac{d}{y_2} = \arctan \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2 - g} \quad (4.6)$$

$$x = y_1 - d = y_1 + \frac{\dot{y}_1 y_2}{(g - \dot{y}_2)} \quad (4.7)$$

$$l = \sqrt{d^2 + y_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\ddot{y}_1 y_2}{g - \ddot{y}_2}\right)^2 + (y_2)^2} \quad (4.8)$$

$$\alpha = \frac{5 - l}{r} = \frac{5 - \sqrt{\left(\frac{\ddot{y}_1 y_2}{g - \ddot{y}_2}\right)^2 + (y_2)^2}}{r} \quad (4.9)$$

La entrada de control u se obtiene de la dinámica dada en 3.40 y diferenciando de 4.6 a 4.9 se puede expresar la parametrización diferencial de las entradas con las siguientes expresiones:

$$F_x = (ml \cos \theta) \ddot{\theta} + (m + M_c) \ddot{x} + (mr \sin \theta) \ddot{\alpha} - (ml \sin \theta \dot{\theta}) \dot{\theta} + (mr \cos \theta \dot{\theta}) \dot{\alpha} \quad (4.10)$$

$$\tau_\alpha = (mr \sin \theta) \ddot{x} + (mr^2 + I_p) \ddot{\alpha} + (mr \cos \theta \dot{x}) \dot{\theta} \quad (4.11)$$

La fuerza y el par dadas por las expresiones anteriores, se pueden representar como:

$$\begin{aligned} F_x = & \left[\left(m \left(\sqrt{\left(\frac{\ddot{y}_1 y_2}{g - \ddot{y}_2} \right)^2 + (y_2)^2} \right) \cos \left(\arctan \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_2 - g} \right) \right) \left(\arctan \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_2 - g} \right) \right] \\ & + \left[(m + M_c) \left(y_1 + \frac{\ddot{y}_1 y_2}{(g - \ddot{y}_2)} \right) \right] \\ & + \left[\left(mr \sin \left(\arctan \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_2 - g} \right) \right) \left(\frac{5 - \sqrt{\left(\frac{\ddot{y}_1 y_2}{g - \ddot{y}_2} \right)^2 + (y_2)^2}}{r} \right) \right] \\ & + \left[\left(ml \sin \left(\arctan \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_2 - g} \right) \right) \left(\arctan \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_2 - g} \right) \right] \left(\arctan \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_2 - g} \right) \\ & + \left[\left(mr \cos \left(\arctan \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_2 - g} \right) \right) \left(\arctan \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_2 - g} \right) \right] \left(\frac{5 - \sqrt{\left(\frac{\ddot{y}_1 y_2}{g - \ddot{y}_2} \right)^2 + (y_2)^2}}{r} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_\alpha = & \left[\left(mr \sin \left(\arctan \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2 - g} \right) \right) \left(y_1 + \frac{\ddot{y}_1 y_2}{(g - \dot{y}_2)} \right) \right] \\ & + \left[\left(mr^2 + I_p \right) \left(\frac{5 - \sqrt{\left(\frac{\dot{y}_1 y_2}{g - \dot{y}_2} \right)^2 + (y_2)^2}}{r} \right) \right] \\ & + \left[\left(\left(mr \cos \left(\arctan \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2 - g} \right) \right) \left(y_1 + \frac{\dot{y}_1 y_2}{(g - \dot{y}_2)} \right) \right) \left(\arctan \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2 - g} \right) \right] \end{aligned}$$

Con las expresiones 4.5 a 4.11 se muestra que el sistema 3.40 es plano *con* $y = [y_1 \ y_2]^T$ como salida plana, y que se puede usar dicha propiedad para realizar una planeación de trayectoria. Con la parametrización diferencial de la entrada 4.10 y 4.11 se obtiene de manera directa el diseño del control prealimentado.

4.1.2 Planeación de trayectoria mediante curva de Bézier

Para el problema de planeación de trayectoria para el sistema (grúa de caballete) se empleará el método de Curva de Bézier, este método consiste en diseñar curvas paramétricas y suaves; es decir son curvas continuamente diferenciables requisito necesario para el diseño de controladores basados en plitud diferencial.

Se desea generar un desplazamiento de la carga de un estado inicial en reposo a un estado final en reposo. Como se mencionó anteriormente la grúa de caballete tiene dos salidas planas $y = [y_1 \ y_2]^T$, para cada una de ellas se generó una curva con respecto al tiempo.

De acuerdo a la ecuación general de Bézier (Anexo 1) se tienen las componentes de la carga en el eje horizontal y vertical respectivamente.

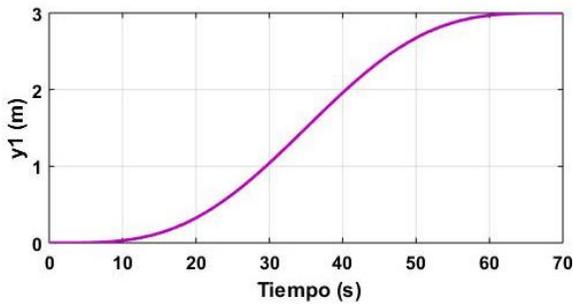


Figura 4.3 Curva para Eje horizontal.

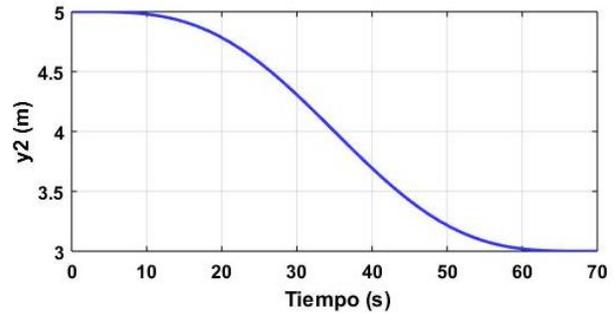


Figura 4.4 Curva para Eje vertical.

- **Componente de la trayectoria de la carga en el eje horizontal (y_1):**

de acuerdo con la ecuación general de una Curva de Bézier, la curva y_1 se diseña con las siguientes posiciones: $P_0 = 0$; $P_f = 3$ y con los siguientes valores para el tiempo: $t_0 = 0$; $t_f = 70$; es decir, se desea que el sistema siga la trayectoria de un estado estable inicial ($P_0 = 0$ m) a un estado estable final ($P_f = 3$ m); en un tiempo de 70 s; como se muestra en la Figura 4.3.

- **Componente de la trayectoria de la carga en el eje vertical (y_2):**

de acuerdo con la ecuación general de una Curva de Bézier, la curva y_2 se diseña con las siguientes posiciones: $P_0 = 5$; $P_f = 3$ y con los siguientes valores para el tiempo: $t_0 = 0$; $t_f = 70$; es decir, se desea que el sistema siga la trayectoria de un estado estable inicial ($P_0 = 5$ m) a un estado estable final ($P_f = 3$ m); en un tiempo de 70 s; como se muestra en la Figura 4.4.

Para obtener las componentes de la carga en el eje horizontal y vertical se desarrolló la ecuación general de la Curva de Bézier en MATLAB® con los puntos de control correspondientes para cada curva. De acuerdo con las Figuras 4.3 y 4.4 la trayectoria física de la carga es como se muestra en la Figura 4.5.

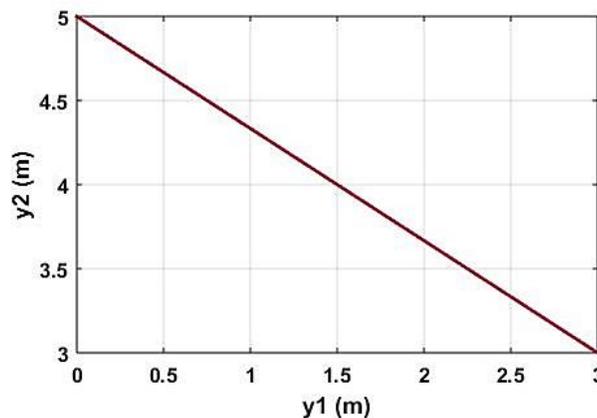


Figura 4.5 Trayectoria física de la carga.

Las curvas de Bézier, representadas por la Figuras 4.3 y 4.4, se utilizan para definir la trayectoria bidimensional deseada de la carga como se muestra en la Figura 4.5. Para el diseño de los controladores se usa una estrategia de control prealimentado basada en plitud diferencial, la cual se suele complementar con una técnica de control retroalimentado (PI e IDA-PBC) para complementar la acción de control (seguimiento de trayectoria) para el caso de estudio que es la grúa de caballete; con esto se tiene una estrategia de control combinada que se muestra en las siguientes secciones del capítulo.

4.1.3 Control basado en plitud diferencial

Con la parametrización diferencial de la entrada, se obtiene de manera directa el diseño del controlador prealimentado para el seguimiento de trayectoria. Este sistema de control se simula en el software MATLAB® con SIMULINK® para esto, se emplea un diagrama como el que se muestra en la Figura 4.6. En el bloque color azul se tiene el diseño de las curvas (y_1, y_2) , en el bloque en color verde se tiene la parametrización diferencial de las variables del estado $(\theta, x, \alpha \text{ y } l)$, en el bloque rojo se encuentra la parametrización diferencial de las entradas (F_x, τ_α) como en las expresiones 4.10 y 4.11.

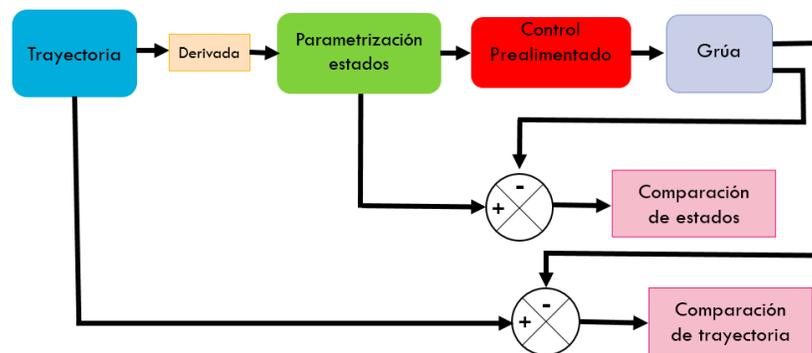


Figura 4.6 Esquema de control basado en Plitud diferencial.

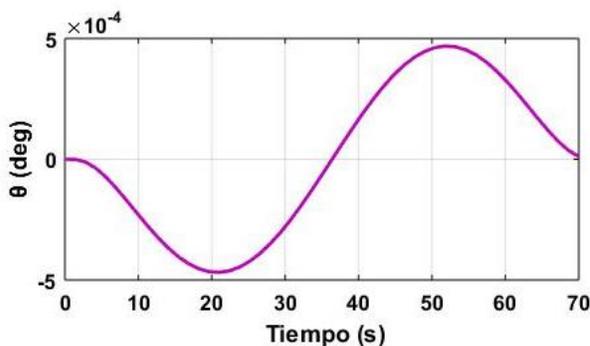


Figura 4.7 Variable θ en términos de la salida plana.

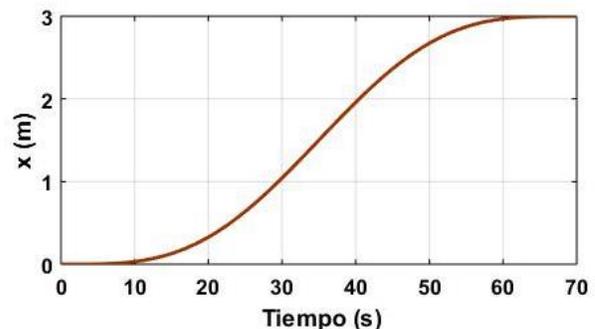


Figura 4.8 Variable x en términos de la salida plana.

En la Figura 4.6, en el bloque verde de parametrización de las variables del estado, se encuentra el ángulo θ parametrizado en términos de las salidas planas (y_1, y_2) , cuya expresión está dada por 4.6 y se muestra en la Figura 4.7, podemos observar que se desea que θ tenga mínimas oscilaciones y de amplitud pequeña. En la Figura 4.8 se muestra el comportamiento de la variable x durante 70 s; la curva que forma x al desplazarse es parecida a la curva de la carga en el eje horizontal y después de 60 s llega a la posición final deseada.

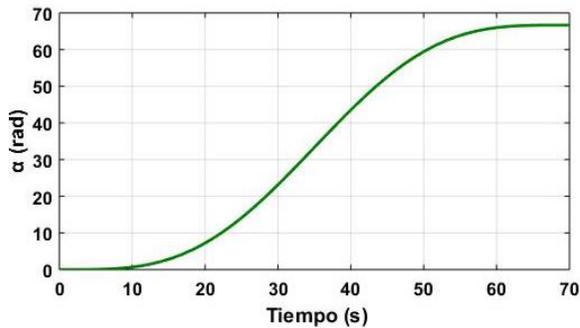


Figura 4.9 Variable α en términos de la salida plana.

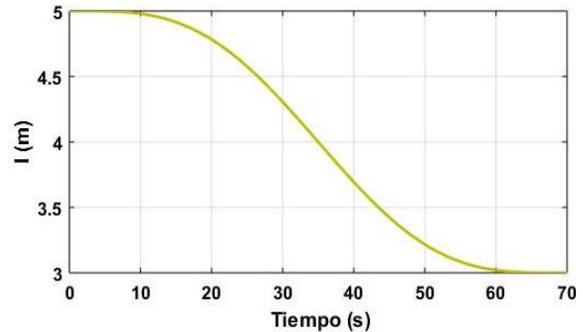


Figura 4.10 Variable l en términos de la salida plana.

En la Figura 4.9 se muestra el ángulo α , que está dado por la expresión 4.9. Podemos observar que α comienza en 0 radianes, esto se debe a que la carga está en el suelo y al llegar a la posición final deseada α corresponde a 66.66 radianes. En la Figura 4.10 podemos observar el comportamiento de la variable l , que es la longitud del cable; al inicio la longitud del cable es de 5 m ya que la carga se encuentra en el suelo y al llegar a su posición final deseada se enrolla 2 m. Con la Figura 4.10 se concluye la parametrización de las variables del estado de la grúa de caballete, dadas por el bloque de color verde de la Figura 4.6.

De la Figura 4.6 que representa el esquema de control prealimentado basado en plitud diferencial, en el bloque color rojo tenemos las señales de control (F_x, τ_α) dadas por las expresiones 4.10 y 4.11. En la Figura 4.11 vemos la señal F_x ideal para obtener la trayectoria deseada de la Figura 4.5.

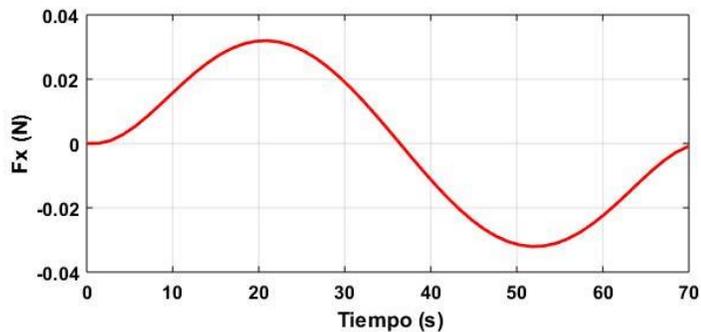


Figura 4.11 Señal de control prealimentada F_x .

En la Figura 4.12 podemos ver la señal ideal del par para obtener las curvas de las Figuras 4.3 y 4.4, las cuales nos van a llevar a la trayectoria deseada para la carga.

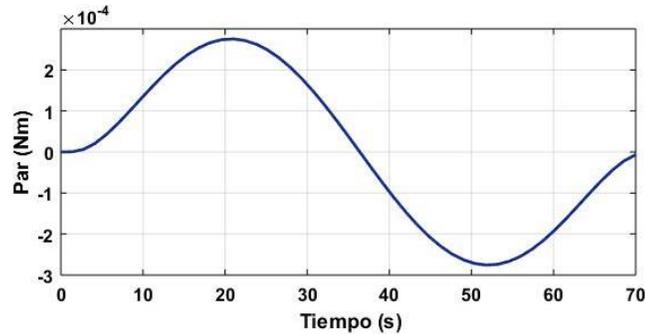


Figura 4.12 Señal de control prealimentada τ_α .

Las señales de control (F_x , τ_α) dadas por las Figuras 4.11 y 4.12 se conectan a las entradas de control de la grúa de caballete y los resultados se muestran a continuación. En la Figura 4.13 se observa que el ángulo θ controlado con plitud diferencial (señal de color rosa) no se mantiene en la posición deseada y en menos de 0.5 s oscila, y estas oscilaciones van aumentando de amplitud.

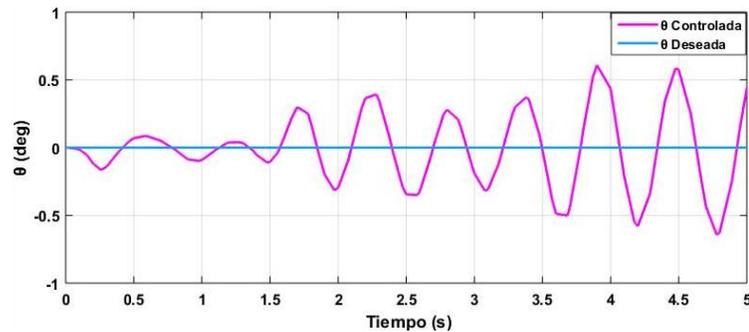


Figura 4.13 Respuesta de θ aplicando control prealimentado.

En la Figura 4.14 observamos la comparación de la variable x controlada con plitud diferencial (señal de color azul) contra la variable x deseada (señal de color rojo) y en menos de 10 s hay una discrepancia entre las dos señales.

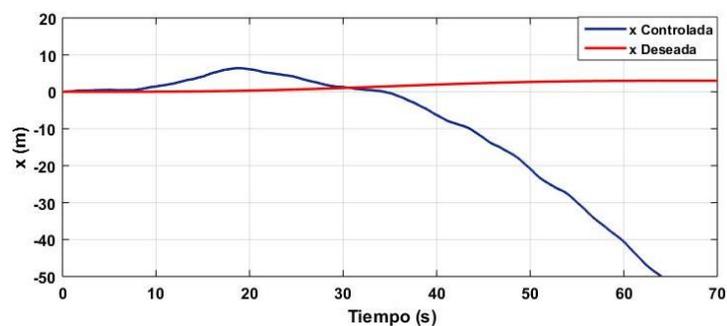


Figura 4.14 Respuesta de x aplicando control prealimentado.

En la Figura 4.15 observamos la comparación del ángulo α controlado con plitud diferencial (señal de color rosa) contra el ángulo α deseado (señal de color azul); el control prealimentado logra mantener a α en la posición deseada hasta 2 s y después de eso hay discrepancia entre la señal de deseada y la controlada.

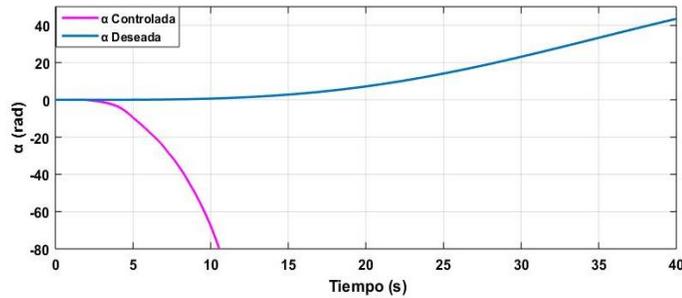


Figura 4.15 Respuesta de α aplicando control prealimentado.

En la Figura 4.16 se observa el comportamiento de la variable l controlada con plitud diferencial (señal de color rojo) con la variable l deseada (señal de color verde); en menos de 5 s hay una discrepancia entre las dos señales, el control prealimentado no es capaz de mantener a la señal en la trayectoria deseada.

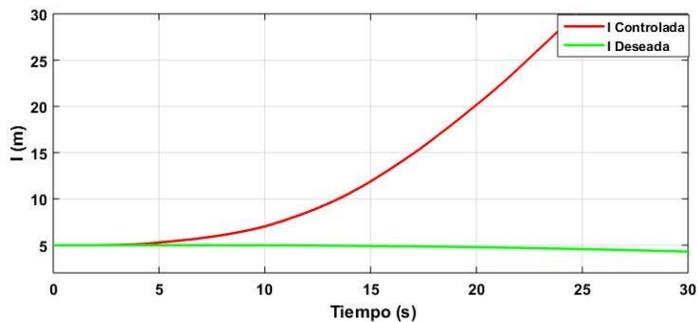


Figura 4.16 Respuesta de l aplicando control prealimentado.

El comportamiento de la carga en eje horizontal controlado con plitud diferencial (señal color amarillo) se puede observar en la Figura 4.17; esta señal tiene oscilaciones que van aumentado de amplitud esto se debe a las oscilaciones del ángulo θ .

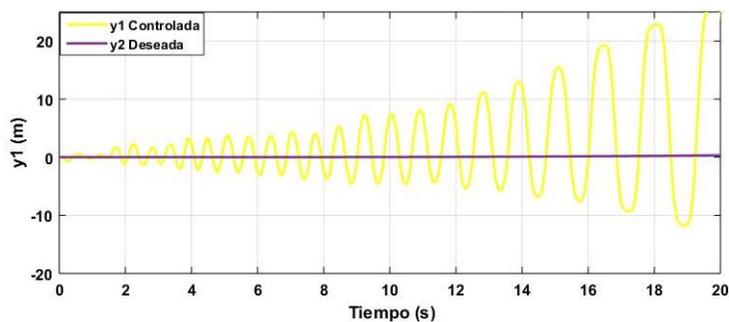


Figura 4.17 Respuesta de y_1 aplicando control prealimentado.

El comportamiento de la carga en eje vertical controlado con plitud diferencial (señal color verde) se puede observar en la Figura 4.18, en menos de 3 s hay una discrepancia entre las dos señales, el control prealimentado no es capaz de mantener a la señal en la trayectoria deseada y además presenta oscilaciones que van aumentando de amplitud.

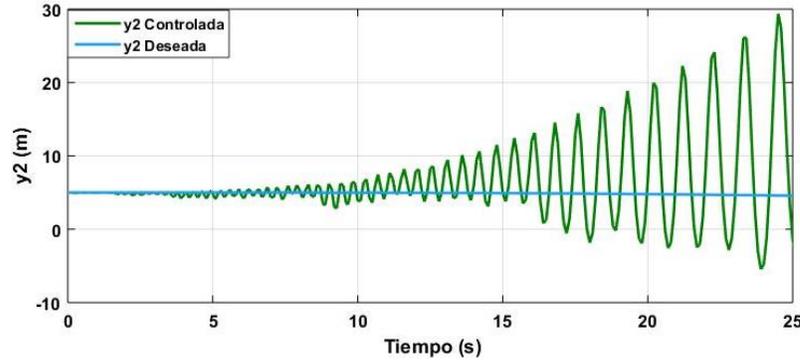


Figura 4.18 Respuesta de y_2 aplicando control prealimentado.

Como pudimos observar de las Figuras 4.13 a 4.18 el control prealimentado basado en plitud diferencial no es capaz de mantener las señales en la posición deseada; es decir no asegura el seguimiento de trayectoria durante los 70 s; es por eso que se necesita un controlador retroalimentado (PI e IDA-PBC) para complementar la acción de control para la grúa de caballete.

4.2 Diseño de un controlador IDA-PBC

En el método IDA-PBC se siguen dos pasos básicos del control basado en Pasividad [Ortega & Spong, 2000], que son moldeo de energía e inyección de amortiguamiento. En este apartado se aplicará el enfoque IDA-PBC a la dinámica del sistema expresada por 3.40 de la grúa de caballete, cuya energía está dada por:

$$H(\tilde{q}_r, \tilde{p}) = \frac{1}{2} \tilde{p}^T \tilde{M}_r^{-1}(\tilde{q}_r) \tilde{p} + U(\tilde{q}_r) \quad (4.12)$$

donde $\tilde{q}_r \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{p} \in \mathbb{R}^n$ son las coordenadas y momentos generalizados, respectivamente, $\tilde{M}_r(\tilde{q}_r) = \tilde{M}_r^T(\tilde{q}_r) > 0$ es la matriz de inercia, y $U(\tilde{q}_r)$ es la energía potencial. Si suponemos que el sistema no tiene amortiguamiento natural, entonces las ecuaciones de movimiento pueden escribirse del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \quad (4.13)$$

La matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ está determinada por el modo en el que el controlador $u \in \mathbb{R}^m$ actúa sobre el sistema y es invertible en el caso de que el sistema sea completamente actuado ($m = n$).

Considerando el caso más difícil en el que el sistema es subactuado, la matriz de control es tal que, el rango $(G) = m < n$.

Se propone la siguiente forma para la función de energía deseada en lazo cerrado:

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2} p^T M_d^{-1}(q) p + U_d(q) \quad (4.14)$$

donde $M_d = M_d^T > 0$ y U_d representan, respectivamente, la matriz de inercia y la función de energía potencial deseada. Se va a requerir que U_d tenga un mínimo en q_* , es decir:

$$q_* = \arg \min U_d(q) \quad (4.15)$$

En Control Basado en Pasividad la señal de control se descompone de forma natural en:

$$u = u_{es}(q, p) + u_{di}(q, p) \quad (4.16)$$

Los subíndices “es” y “di” hacen referencia, respectivamente, a las palabras Moldeo de Energía (*energy shaping*) e inyección de amortiguamiento (*damping injection*). El primer término se diseña para lograr el moldeo de energía y el segundo es responsable de la inyección de amortiguamiento. En [Ortega, et al., 2002] se justifica la elección de la dinámica hamiltoniana deseada de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = [J_d(q, p) - R_d(q, p)] \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

donde los términos:

$$J_d = -J_d^T = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2(q, p) \end{bmatrix} \quad R_d = R_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GK_v G^T \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.18)$$

representan las estructuras de interconexión y amortiguamiento. La matriz antisimétrica J_2 y algunos elementos de M_d se pueden usar como parámetros libres. Proporcionar estos grados de libertad adicionales es la esencia del método IDA-PBC. Lo siguiente a realizar es obtener términos de moldeo de energía e inyección de amortiguamiento para la grúa de caballete.

De lo anterior tenemos que la matriz R_d se incluye para introducir amortiguamiento en el sistema. Como es bien sabido, esto se logra mediante retroalimentación negativa de la (nueva) salida pasiva, que en este caso toma la forma $G^T \nabla_p H_d$. Esto quiere decir que se seleccionará el segundo término de (4.16) como:

$$u_{di} = -K_v G^T \nabla_p H_d. \quad (4.19)$$

donde $K_v = K_v^T > 0$. Esto justifica el bloque (2,2) de R_d .

Para obtener el término de moldeo de energía u_{es} , sustituiremos (4.16) y (4.19) en (4.13) y se igualará a (4.17):

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u_{es} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2(q, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix}$$

De la ecuación anterior, obtenemos dos ecuaciones diferenciales parciales:

$$\nabla_p H = M^{-1}M_d \nabla_p H_d \quad (4.20)$$

$$G u_{es} = \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2(q, p) \nabla_p H_d \quad (4.21)$$

de (4.20) se tiene que:

$$\nabla_p H_d = \nabla_p H M M_d^{-1} \quad (4.22)$$

de (4.12) y (4.13) tenemos:

$$\dot{q} = \nabla_p H \quad (4.23)$$

$$p = M \dot{q} \quad (4.24)$$

$$\dot{q} = M^{-1} p \quad (4.25)$$

Sustituimos (4.23) en (4.22) y tenemos:

$$\nabla_p H_d = M_d^{-1} M \dot{q} \quad (4.26)$$

Sustituimos (4.24) en (4.26) y tenemos:

$$\nabla_p H_d = M_d^{-1} p \quad (4.27)$$

Sustituimos (4.27) en (4.21) y tenemos la siguiente expresión:

$$G u_{es} = \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \quad (4.28)$$

Es claro que, si G es invertible el sistema es completamente actuado y se puede resolver de forma única para la señal de control u_{es} dadas cualesquiera H_d y J_2 . En nuestro caso (subactuado) G no es invertible, es de rango completo por columnas y u_{es} puede influenciar solamente a los términos que pertenecen a la imagen de G . Esto lleva al siguiente conjunto de ecuaciones de restricción el cual debe ser satisfecho para cualquier elección de u_{es}

$$G^\perp \{ \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \} = 0 \quad (4.29)$$

donde G^\perp es un aniquilador izquierdo de rango completo de G , es decir $G^\perp G = 0$. La ecuación (4.29) con H_d dado por (4.12), es un conjunto de EDPs no lineales cuyas incógnitas son M_d y U_d . Se tomará a J_2 como parámetro libre, y p es una coordenada independiente. Si se obtiene una solución para esta EDP, la ley de control resultante u_{es} estará dada por:

$$u_{es} = (G^T G)^{-1} G^T (\nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p) \quad (4.30)$$

Las EDPs (4.29) pueden separarse de forma natural en los términos que dependen de p y términos que son independientes de p , es decir, aquellos que corresponden a las energías cinéticas y potencial, respectivamente. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (4.29) puede reescribirse como:

$$G^\perp \{ \nabla_q (p^T M^{-1} p) - M_d M^{-1} \nabla_q (p^T M_d^{-1} p) + 2J_2 M_d^{-1} p \} = 0 \quad (4.31)$$

$$G^\perp \{ \nabla_q U - M_d M^{-1} \nabla_q U_d \} = 0 \quad (4.32)$$

La primera ecuación es una EDP no lineal que ha de resolverse para los elementos desconocidos de la matriz de inercia en lazo cerrado M_d . Dado M_d la ecuación (4.32) es una simple EDP lineal cuya incógnita es U_d y por lo tanto la principal dificultad radica en hallar la solución de (4.31).

Lo anterior caracteriza una clase de sistemas subactuados para los cuales el método IDA-PBC proporciona estabilización. Esto viene dado en términos de cómo resolver la EDP no lineal (4.31) y la EDP lineal (4.32). Para el caso de estudio, si $M_d = M$ y $J_2 = 0$, entonces la ecuación del controlador (4.30) se reduce a:

$$u_{es} = (G^T G)^{-1} G^T (\nabla_q U - \nabla_q U_d) \quad (4.33)$$

que es el conocido control de moldeo de energía potencial. El objetivo de moldeo de energía potencial es asignar puntos de equilibrio en lazo cerrado con la función de energía potencial U_d , que es una solución de (4.32).

La función de energía potencial del sistema (grúa de caballete) es $U = mg(l - r) \cos \theta$ y la función de energía potencial deseada se obtiene a partir de (4.32), donde:

$$G^\perp = [1 \quad 0 \quad 0] \quad \nabla_q U = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ \frac{\partial U}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad M_d M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \nabla_q U_d = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_d}{\partial q_1} \\ \frac{\partial U_d}{\partial q_2} \\ \frac{\partial U_d}{\partial q_3} \end{bmatrix}$$

Desarrollando (4.32) tenemos:

$$[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ \frac{\partial U}{\partial q_3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U_d}{\partial q_1} \\ \frac{\partial U_d}{\partial q_2} \\ \frac{\partial U_d}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{\partial U_d}{\partial q_1}$$

Así:

$$\nabla_{q_1} U - \nabla_{q_1} U_d = 0 \quad (4.34)$$

Para simplificar la expresión anterior se sustituye la función de energía potencial del sistema en (4.34) como:

$$-mg(l-r) \sin \theta = \frac{\partial U_d}{\partial q_1} \quad (4.35)$$

De la expresión anterior la incógnita que se tiene es la función de energía potencial deseada (U_d) y se procede a encontrarla resolviendo (4.35) con:

$$\frac{dq_1}{a} = \frac{dq_2}{b} = \frac{dq_3}{c} = \frac{dU_d}{S} \quad a = 1 \quad b = 0 \quad c = 0 \quad S = -mgl_0 \sin \theta$$

$$\frac{dq_1}{a} = \frac{dq_2}{b} \longrightarrow b\{dq_1 = a\{dq_2 \longrightarrow aq_2 = bq_1 + C_1 \longrightarrow C_1 = q_2$$

$$\frac{dq_1}{a} = \frac{dq_3}{c} \longrightarrow c\{dq_1 = a\{dq_3 \longrightarrow aq_3 = cq_1 + C_2 \longrightarrow C_1 = q_3$$

$$\frac{dq_1}{a} = \frac{dU_d}{S} \quad -mgl_0\{\sin q_1 dq_1 = a\{dU_d \quad aU_d = -mgl_0 \cos q_1 + C_3 \quad C_3 = U_d + mgl_0 \cos \theta$$

$$f(C_1 \ C_2 \ C_3) = 0 \longrightarrow \Phi(q_2, q_3) = U_d + mgl_0 \cos \theta \longrightarrow U_d = \Phi(q_2, q_3) - mgl_0 \cos \theta$$

Con los desarrollos previos para obtener la función de energía potencial deseada (U_d), se tiene que seleccionar Φ tal que cumpla la condición de (4.15). Para ello la condición necesaria $\nabla_q U_d(q^*) = 0$ se satisface si y sólo si $\nabla_q^2 U_d(q^*) > 0$. Para este caso se elige Φ como una función cuadrática que da:

$$U_d = -mg(l-r) \cos \theta + \frac{K_x}{2}(q_2 - q_{2*})^2 + \frac{K_\alpha}{2}(q_3 - q_{3*})^2 \quad (4.36)$$

Con lo anterior se procede a obtener los términos de moldeo de energía e inyección de amortiguamiento de la señal de control dada por (4.16). Para obtener el término u_{es} se desarrolla la expresión (4.33), donde:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{es} = (G^T G)^{-1} G^T \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{\partial U_d}{\partial q_1} \\ \frac{\partial U}{\partial q_2} - \frac{\partial U_d}{\partial q_2} \\ \frac{\partial U}{\partial q_3} - \frac{\partial U_d}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Desarrollando la expresión (4.37), el término de moldeo de energía toma la forma:

$$u_{es} = \begin{bmatrix} K_x(q_{x^*} - x) \\ K_\alpha(q_{\alpha^*} - \alpha) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

donde (q_{x^*}, q_{α^*}) se denotan por las expresiones (4.7) y (4.9) respectivamente y (K_x, K_α) se utilizan como parámetros de ajuste.

Para obtener el término de inyección de amortiguamiento de la grúa de caballete se desarrolla la expresión (4.19), donde:

$$K_v = \begin{bmatrix} K_a & K_b \\ K_b & K_c \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-K_v G^T \nabla_p H_d = \begin{bmatrix} 0 & K_a & K_b \\ 0 & K_b & K_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

así el término de inyección de amortiguamiento (4.39) toma la forma:

$$u_{di} = - \begin{bmatrix} K_a \dot{x} + K_b \dot{\alpha} \\ K_b \dot{x} + K_c \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Con las expresiones dadas por (4.38) y (4.40) la ley de control retroalimentada para la grúa de caballete es:

$$u = \begin{bmatrix} K_x(q_{2^*} - x) \\ K_\alpha(q_{3^*} - \alpha) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_a \dot{x} + K_b \dot{\alpha} \\ K_b \dot{x} + K_c \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Los parámetros de ajuste fueron seleccionados como $K_a = 35, K_b = 0.5, K_c = 0.15, K_x = 50$ y $K_\alpha = 0.8$.

La ley de control IDA-PBC dada por (4.41) se conecta en las entradas de control de la grúa de caballete y las respuestas se muestran a continuación; con los parámetros dados anteriormente y con $q_{2*}=3$ y $q_{3*} = 2/0.03$.

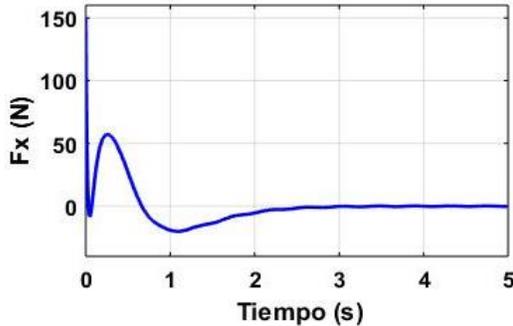


Figura 4.19 Señal de control F_x (IDA-PBC).

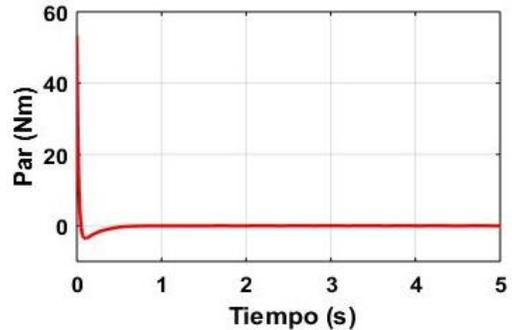


Figura 4.20 Señal de control τ_α (IDA-PBC).

En la Figura 4.19 se muestra la señal de control F_x dada por el controlador IDA-PBC y al inicio se aplica una fuerza de 150 N , la cual disminuye de amplitud hasta llegar a 0 N . En la Figura 4.20 se presenta la señal de control τ_α dada por el controlador IDA-PBC y se aprecia que al inicio se aplica un par de 53 Nm aproximadamente y luego disminuye hasta llegar a 0 .

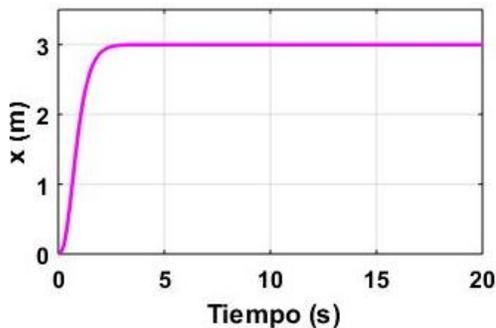


Figura 4.21 Respuesta de x aplicando ley de control IDA-PBC.

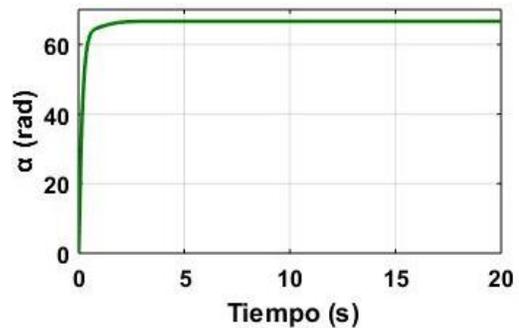


Figura 4.22 Respuesta de α aplicando ley de control IDA-PBC.

En la Figura 4.21 se tiene la respuesta de la variable x y se aprecia que en menos de 3 s llega a la posición final deseada. En la Figura 4.22 se tiene la respuesta de la variable α y se observa que llega muy rápido al punto final deseado.

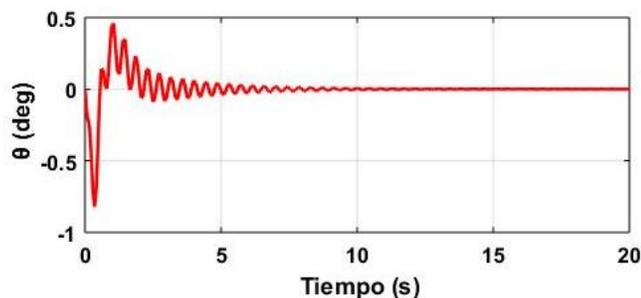


Figura 4.23 Respuesta de θ aplicando ley de control IDA-PBC.

En la Figura 4.23 se muestra la respuesta del ángulo θ y se aprecia que presenta oscilaciones, esto se debe a que el sistema llega muy rápido a la posición final deseada. El controlador IDA-PBC hace que la carga llegue muy rápido a la posición final deseada y esto ocasiona oscilaciones y esfuerzos de control de magnitud amplia como se mostró en las Figuras 4.19 y 4.20.

4.3 Diseño de un controlador PI

Este controlador es la suma de una acción proporcional y una integral. La acción proporcional nos acerca al el valor deseado y la acción integral nos lleva exactamente al valor deseado. Se combinan las acciones para tener los beneficios de una respuesta rápida sin oscilaciones de una acción proporcional y una respuesta que nos lleve exactamente al valor deseado de una acción integral. También se le conoce como “Proporcional-Reposicionador”.

La acción de control se define como:

$$u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(t) d(t) \quad (4.42)$$

donde k_p es la ganancia proporcional, $e(t)$ el error y T_i es el tiempo integral. El inverso de T_i se conoce como velocidad de reajuste, la cual nos da la cantidad de veces por minuto que se duplica la parte proporcional de la acción de control.

La acción de control para la grúa es:

$$u_{Fx} = k_p (x_* - x) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t (x_* - x) d(t) \quad (4.43)$$

$$u_{\tau\alpha} = k_p (\alpha_* - \alpha) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t (\alpha_* - \alpha) d(t) \quad (4.44)$$

donde x_* y α_* se denotan por las expresiones (4.7) y (4.9) respectivamente. Para determinar los parámetros del controlador (k_p, T_i) se utiliza el método que se denomina “reglas de sintonía de Ziegler-Nichols”; específicamente, el segundo método (Anexo 2).

Para nuestro sistema (grúa de caballete) tenemos las siguientes figuras que nos ayudan a determinar los parámetros del controlador PI.

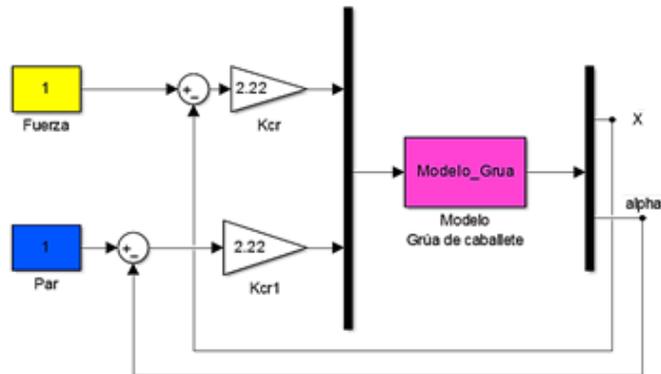


Figura 4.24 Sistema en lazo cerrado para grúa de caballete.

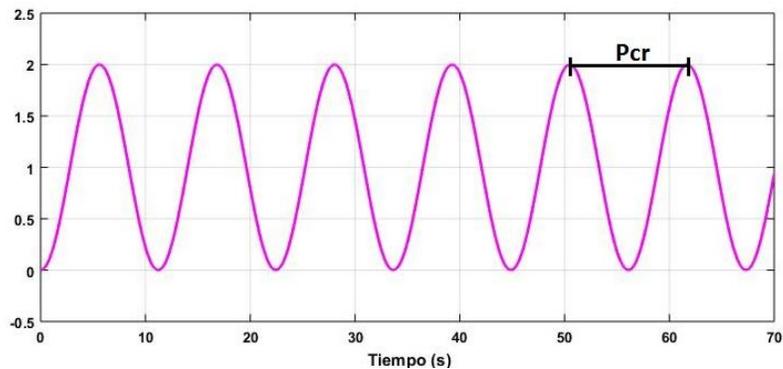


Figura 4.25 Oscilación sostenida para determinar P_{cr} .

En la Figura 4.24 observamos que con una referencia y una ganancia proporcional obtenemos una oscilación sostenida como se aprecia en la Figura 4.25; por lo tanto, el valor de P_{cr} es igual a 11.

Ya que tenemos los valores de los parámetros del controlador PI de acuerdo a la Tabla del Anexo 2 ($k_p = 1$ y $T_i = 9.2$), el controlador tiene la siguiente forma:

$$u_{Fx} = 1(x_* - x) + \frac{1}{9.2} \int_0^t (x_* - x) d(t) \quad (4.45)$$

$$u_{\tau\alpha} = 1(\alpha_* - \alpha) + \frac{1}{9.2} \int_0^t (\alpha_* - \alpha) d(t) \quad (4.46)$$

Con lo anterior se concluye el diseño de los controladores retroalimentados, para proceder a observar el desempeño de los controladores combinados (Platitud diferencial más IDA-PBC y Platitud diferencial más PI) para seguimiento de trayectoria. Con lo anterior se concluye el diseño de los controladores retroalimentados. Las leyes de control dadas por (4.45) y (4.46) se conecta en las entradas de control de la grúa de caballete, donde x_* se representa por la expresión (4.7) y α_* por la expresión (4.9); las respuestas se muestran a continuación.

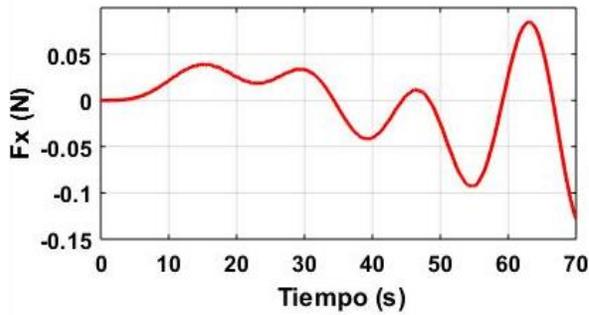


Figura 4.26 Señal de control F_x (PI).

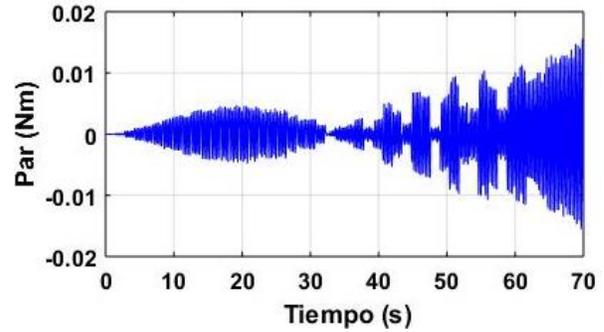


Figura 4.27 Señal de control τ_α (PI).

En la Figura 4.26 se muestra la señal de control F_x dada por el controlador PI y comienza en 0 N , la cual aumenta y disminuye de amplitud. En la Figura 4.27 se presenta la señal de control τ_α dada por el controlador PI y se aprecia que comienza en 0 Nm aproximadamente y después presenta múltiples oscilaciones.

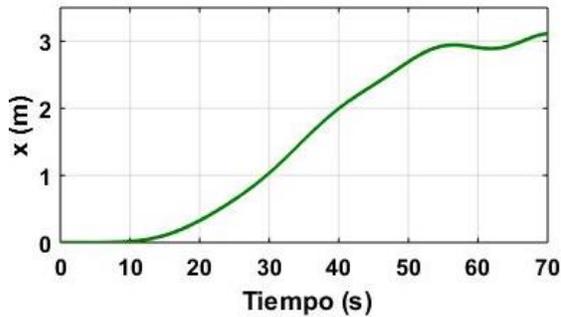


Figura 4.28 Respuesta de x aplicando ley de control PI.

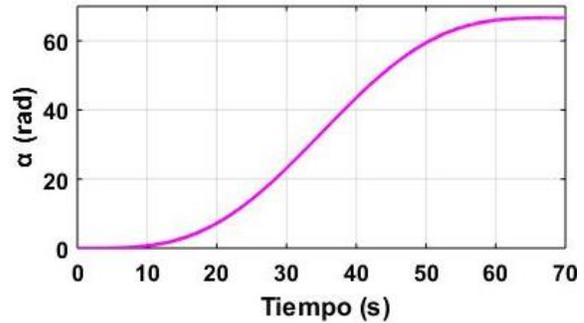


Figura 4.29 Respuesta de α aplicando ley de control PI.

En la Figura 4.28 se tiene la respuesta de x controlado con PI, se aprecia que trata de seguir el perfil de curva, pero no llega al punto final deseado. En la Figura 4.29 se tiene la respuesta del ángulo α y se observa que llega al punto final deseado.

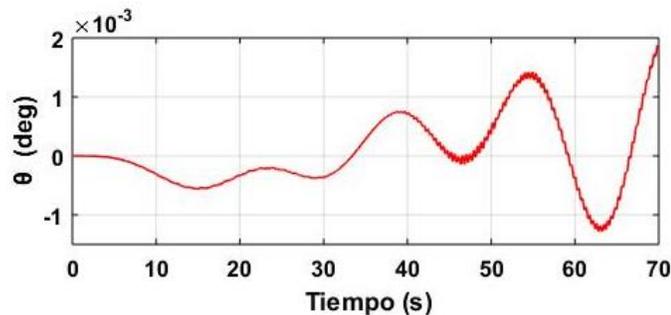


Figura 4.30 Respuesta de θ aplicando ley de control PI.

En la Figura 4.30 se muestra la respuesta del ángulo θ y se aprecia que no se reducen las oscilaciones de la carga, ya que están van aumentando de amplitud. El controlador PI no logra reducir las oscilaciones que se presentan en la carga y no llega a la posición final deseada.

4.4 Esquema de un control combinado

En esta sección se presenta el control combinado para la grúa de caballete que consta, por una parte, de un controlador prealimentado y, por la otra, de un control retroalimentado.

▪ Platitud diferencial más IDA-PBC

De acuerdo a las leyes de control prealimentada y retroalimentado la estructura de este controlador combinado es como se muestra a continuación:

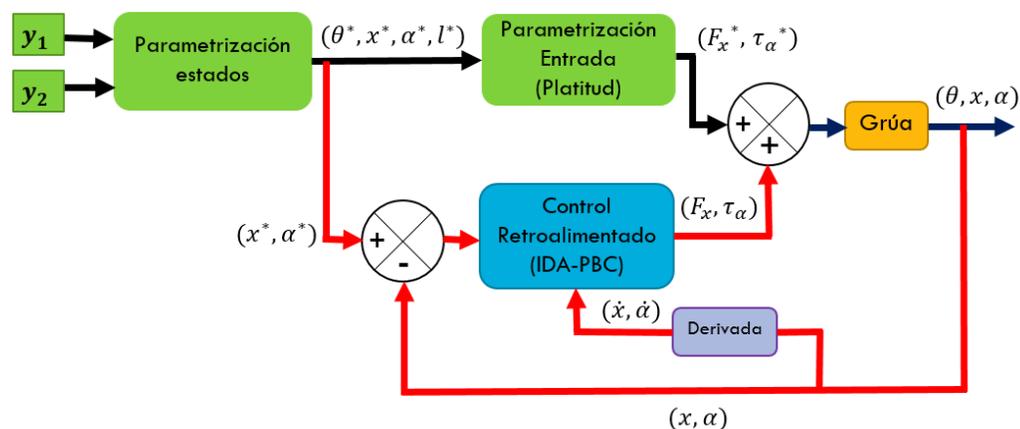


Figura 4.31 Estructura del control combinado (Platitud más IDA-PBC).

En la Figura 4.31 se aprecia la estructura del controlador combinado, donde los bloques en color verde representan los componentes para el controlador prealimentado basado en las nociones de platitud diferencial, las señales de control F_x^* y τ_{α}^* se representan por las expresiones (4.10) y (4.11). El bloque en color azul representa la ley de control retroalimentada, dada por la expresión (4.41); podemos observar que las señales de error y las derivadas de las variables (x, α) son señales necesarias para el control basado en IDA-PBC. Al tener las señales de control se suman, para posteriormente conectarlas al modelo de la grúa de caballete (representado por el bloque amarillo) y obtener las salidas correspondientes para evaluar el desempeño del controlador combinado.

▪ Platitud diferencial más PI

De acuerdo a las leyes de control prealimentada y retroalimentado la estructura de este controlador combinado es como se muestra a continuación:

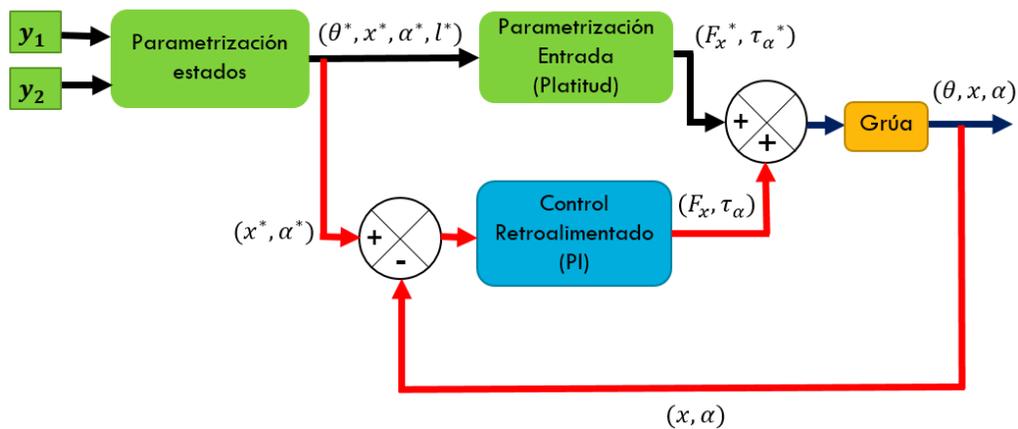


Figura 4.32 Estructura del control combinado (Platitud más PI).

En la Figura 4.32 se aprecia la estructura del controlador combinado Platitud diferencial más PI. Los bloques en color verde representan las trayectorias y la parametrización de los estados, que son componentes necesarios para desarrollar la ley de control prealimentada basada en platitud diferencial, que se representa por las señales de control F_x^* y τ_{α}^* las cuales se dan por las expresiones (4.10) y (4.11). El bloque en color azul representa la ley de control retroalimentada, dada por las expresiones (4.45) y (4.46). Al tener las señales de control se suman, para posteriormente conectarlas al modelo de la grúa de caballete (representado por el bloque amarillo) y evaluar el desempeño del controlador combinado para seguimiento de trayectoria.

La estructura de los controladores combinados se representa de manera general por las Figuras 4.31 y 4.32. En este trabajo para fines de simulación se desarrolló el programa en dos partes, es decir, el control prealimentado se realiza en una hoja de simulación del software MATLAB® con SIMULINK® y el controlador combinado se desarrolla en otra hoja de simulación, donde se solicitan las variables necesarias dadas por Platitud diferencial para desarrollar controlador combinado.

Capítulo 5 : Simulaciones y pruebas comparativas

En este capítulo se muestran las simulaciones de los esquemas de control combinados en el caso nominal, caso con perturbaciones (fricción en el carro y fricción en la polea) y caso con incertidumbre paramétrica en la masa de la carga y en la masa del carro, para determinar cuál de los dos esquemas es superior en términos de robustez y desempeño.

5.1 Simulaciones de los esquemas de control: Caso nominal

Ya que están diseñados el control prealimentado basado en platitud diferencial y el control retroalimentado, se procederá a observar el desempeño de los controladores nominales para seguimiento de trayectoria.

Esquema de control: Platitud diferencial + IDA-PBC.

A continuación, se presentan las señales de control retroalimentado F_x y τ_α .

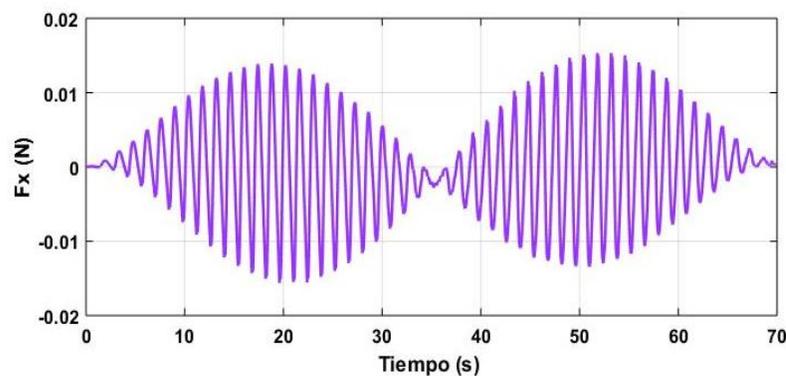


Figura 5.1 Señal de control F_x retroalimentada (IDA-PBC).

En la Figura 5.1 se aprecia la señal de control F_x que comienza en 0 N y durante los 70 s aumenta y disminuye de amplitud para poder llevar a cabo el objetivo de control.

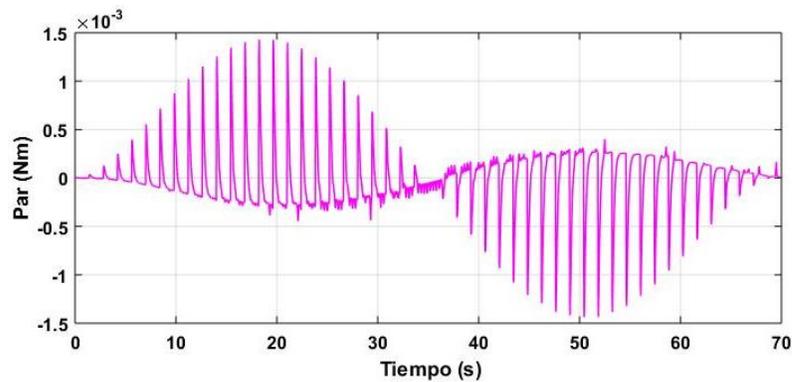


Figura 5.2 Señal de control τ_α retroalimentada (IDA-PBC).

En la Figura 5.2 se observa la señal de control τ_α que comienza en 0 Nm y durante el transcurso del tiempo desenrolla y enrolla el cable que sostiene la carga.

Ahora, se presentan las señales de control combinado para la grúa de caballete.

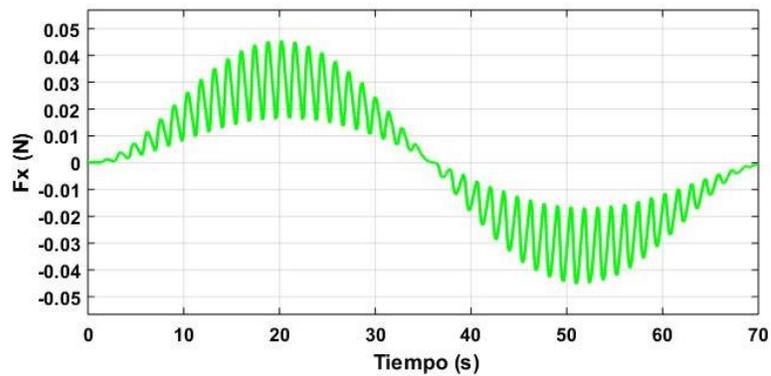


Figura 5.3 Señal de control F_x combinada (Platitud + IDA-PBC).

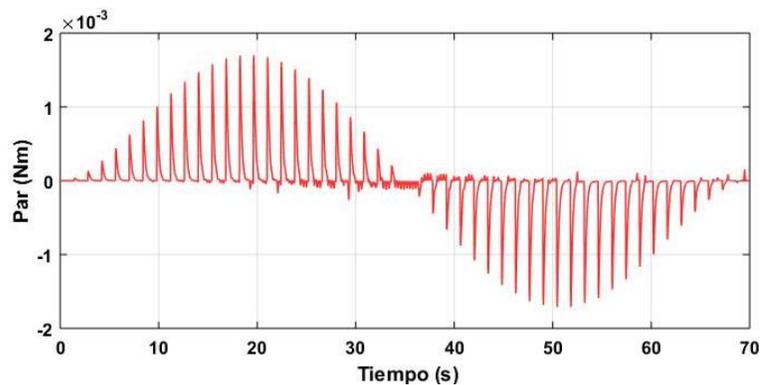


Figura 5.4 Señal de control τ_α combinada (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.3 se aprecia la señal de control F_x combinada, la cual tiene el perfil como la señal mostrada en la Figura 4.11 con platitud diferencial; esta señal tiene un mejor desempeño que la señal de control retroalimentada. En la Figura 5.4 se observa la señal τ_α combinada, que

muestra una envolvente muy parecida a la señal mostrada en la Figura 4.12 con la propiedad de platitude diferencial. Con las señales de control combinado se analiza la respuesta de cada una de las variables del sistema para verificar si se cumple el objetivo de control, que es seguimiento de trayectoria.

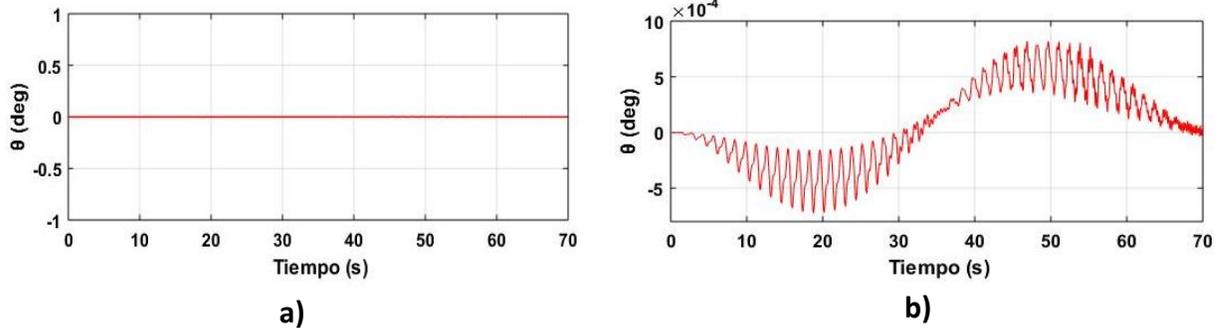


Figura 5.5 Respuesta de la variable θ (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.5 se tiene la respuesta del ángulo θ . En la Figura 5.5 a) se aprecia la respuesta acotada y aparentemente no hay oscilaciones, pero haciendo un acercamiento en la Figura 5.5 b) se aprecia que trata de seguir el perfil de curva deseado y las amplitudes que se presentan son pequeñas; entonces el esquema de control combinado funciona de manera aceptable ya que las oscilaciones que presenta son mínimas.

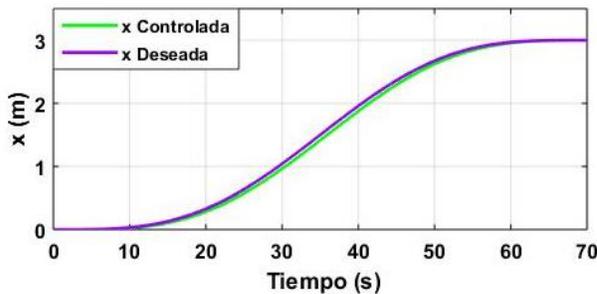


Figura 5.6 Respuesta de x aplicando control combinado (Platitud + IDA-PBC).

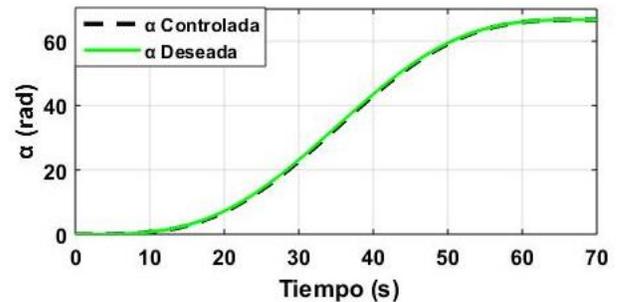


Figura 5.7 Respuesta de α aplicando control combinado (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.6 se observa la respuesta de la variable x la cual se acerca mucho a la curva deseada y en algunos instantes de tiempo ambas señales se sobreponen. En la Figura 5.7 se aprecia que α sigue el perfil deseado de la curva y en algunos instantes de tiempo la señal deseada y la señal controlada se sobreponen.

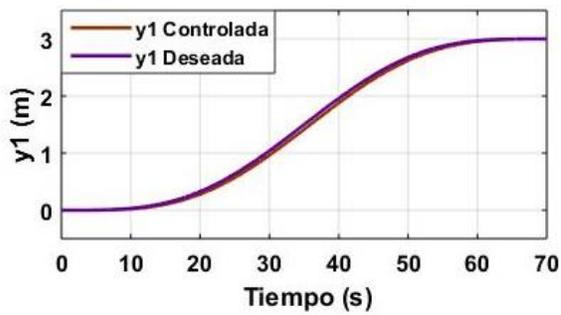


Figura 5.8 Respuesta de y_1 aplicando control combinado (Platitud + IDA-PBC).

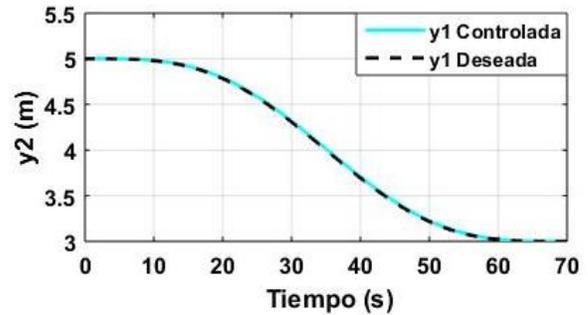


Figura 5.9 Respuesta de y_2 aplicando control combinado (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.8 se aprecia la componente en el eje horizontal de la carga, la cual trata de seguir al perfil de curva deseado y en la Figura 5.9 se observa la respuesta de la componente de la carga en el eje vertical y durante el tiempo de simulación ambas señales se superponen.

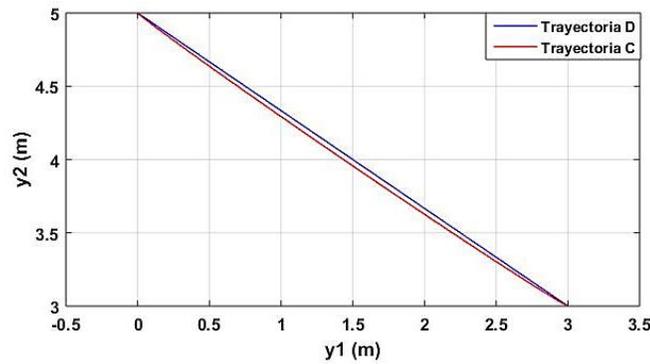


Figura 5.10 Trayectoria de la carga aplicando control combinado (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.10 se aprecia que el esquema de control combinado funciona de manera aceptable ya que la trayectoria controlada (señal de color rojo) trata de seguir el perfil de la trayectoria deseada (señal de color azul).

Esquema de control: Platitud diferencial + PI

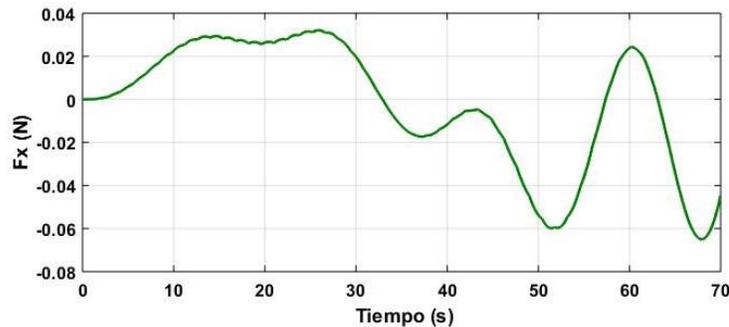


Figura 5.11 Señal de control F_x combinada (Platitud + PI).

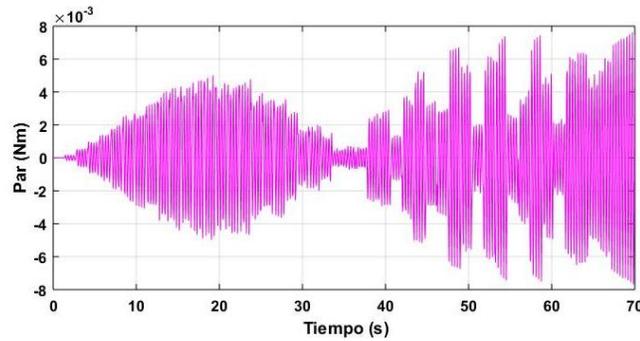


Figura 5.12 Señal de control τ_α combinada (Platitud + PI).

En la Figura 5.11 se observa la señal de control combinado F_x después de 35 segundos presenta cambios bruscos para tratar de cumplir el objetivo de control. En la Figura 5.12 se aprecia la señal de control del par, la cual presenta oscilaciones que varían de amplitud. Con las señales de control combinado se analiza la respuesta de cada una de las variables del sistema para verificar si se cumple el objetivo de control, que es seguimiento de trayectoria.

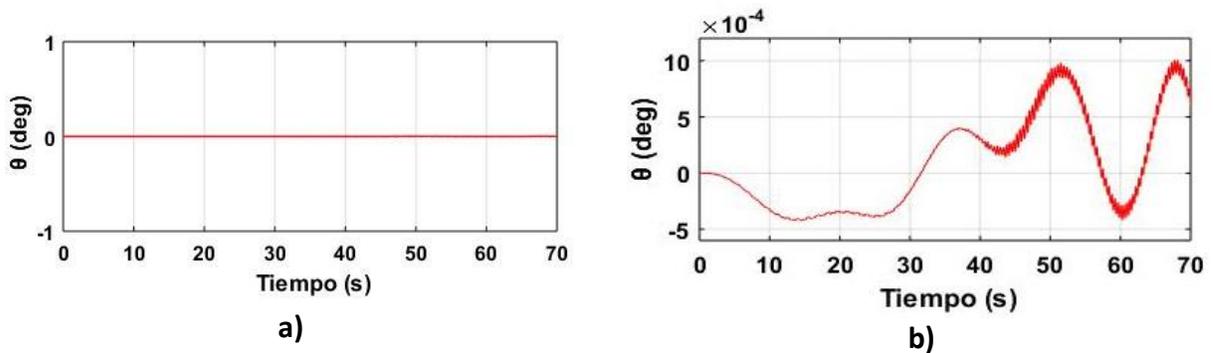


Figura 5.13 Respuesta de la variable θ (Platitud + PI).

En la Figura 5.13 a) y 5.13 b) se presenta la respuesta del ángulo θ . En la Figura 5.13 a) parece que la variable θ no presenta oscilaciones, pero al hacer un acercamiento se aprecia en la Figura 5.13 b) que después de 30 s presenta oscilaciones las cuales no disminuyen de amplitud; esto muestra que el esquema de control combinado no es suficiente para llevar a cabo el seguimiento.

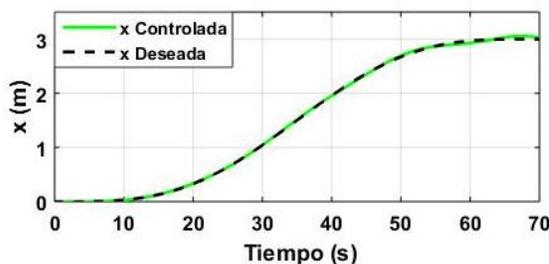


Figura 5.14 Respuesta de x aplicando control combinado (Platitud + PI).

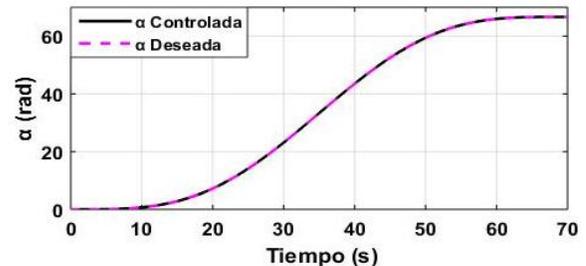


Figura 5.15 Respuesta de α aplicando control combinado (Platitud + PI).

En la Figura 5.14 se observa la respuesta de x al principio ambas señales se sobreponen, pero después de 50 s la señal controlada presenta discrepancia. En la Figura 5.15 se observa la respuesta de α con la ley de control combinado y ambas señales se sobreponen.

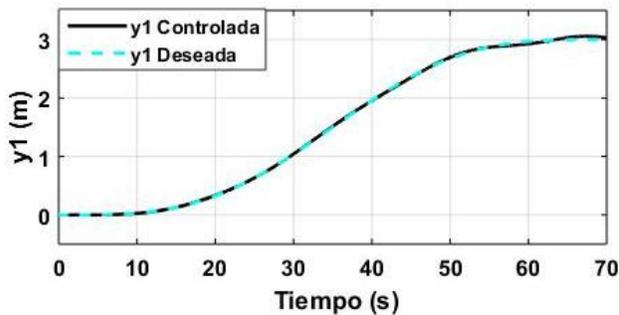


Figura 5.16 Respuesta de y_1 aplicando control combinado (Platitud + PI).

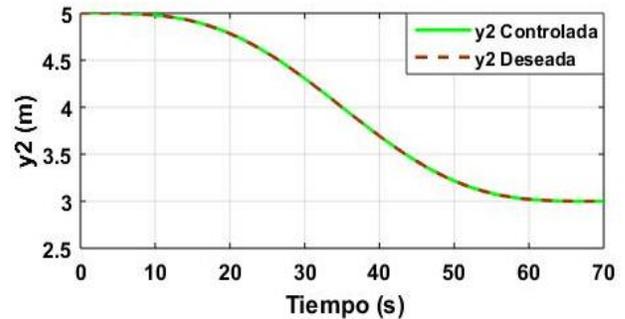


Figura 5.17 Respuesta de y_2 aplicando control combinado (Platitud + PI).

En la Figura 5.16 se presenta la respuesta de y_1 que representa la componente en el eje x de la carga y se observa que después de 50 s hay una discrepancia entre la señal controlada y la señal deseada. En la Figura 5.17 se aprecia que la componente en el eje y de la carga sigue el perfil de la curva deseada.

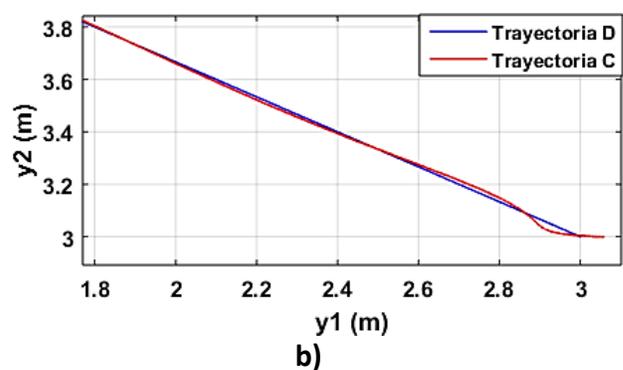
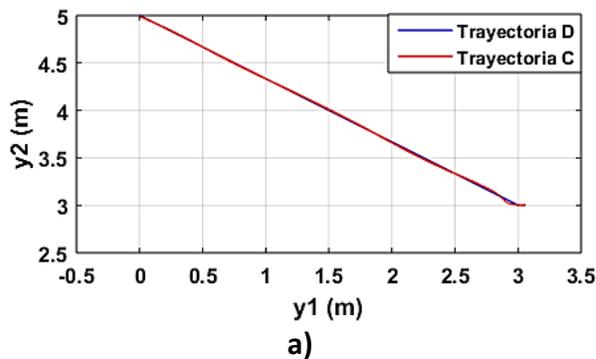


Figura 5.18 Trayectoria de la carga aplicando control combinado (Platitud + PI).

En la Figura 5.18 a) se aprecia la trayectoria física de la carga controlada (señal color rojo) y se observa que el esquema de control combinado cumple con el seguimiento, pero al llegar a la posición final se aprecia en la Figura 5.18 b) que no llega a la posición final deseada. Con el análisis de las respuestas de los esquemas de control combinado nominales se finaliza esta Sección.

5.2 Simulación de los esquemas de control: Caso con perturbaciones

En esta sección se analiza la respuesta del sistema en presencia de perturbaciones en la Fuerza y el Par, para verificar si las estrategias combinadas cumplen con el objetivo de control.

A. Perturbación en F_x

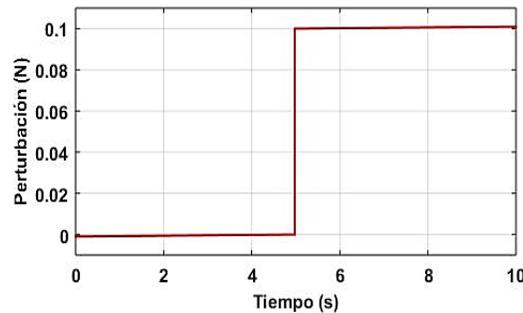


Figura 5.19 Perturbación en F_x .

En la Figura 5.19 podemos observar que la perturbación aplicada a la Fuerza que actúa sobre el carro tiene una amplitud de 0.1 N y que se inyecta al sistema en $t = 5\text{ s}$ y dura 5 s ; esta perturbación se considera fricción.

Esquema de control: Platitud diferencial + IDA-PBC.

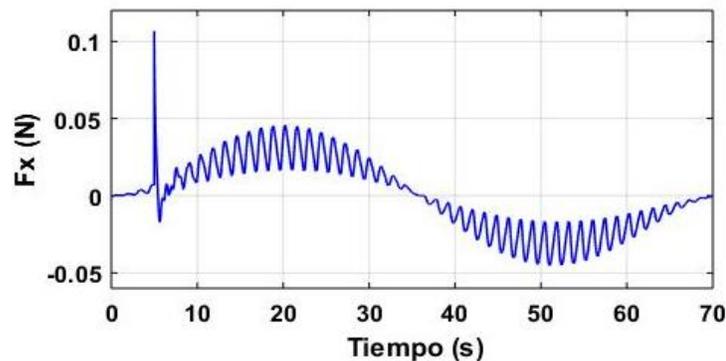


Figura 5.20 Señal de control F_x con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.20 se aprecia la señal de control F_x para el esquema combinado Platitud diferencial más IDA-PBC y se observa un pico en el segundo 5, esto se debe a la perturbación mostrada en la Figura 5.19.

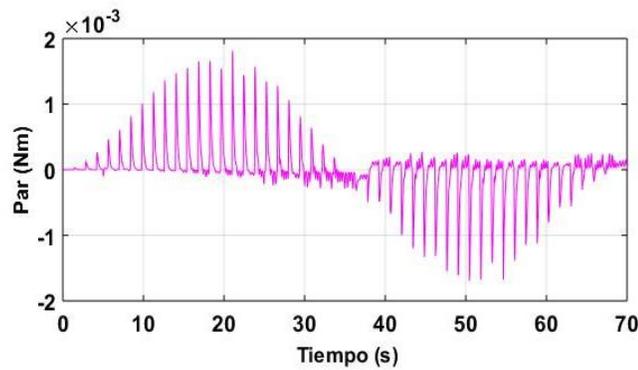


Figura 5.21 Señal de control τ_α con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.21 se aprecia la señal de control τ_α , y se observa que en presencia de la perturbación se mantiene la envolvente de la curva, como se muestra en la Figura 5.4.

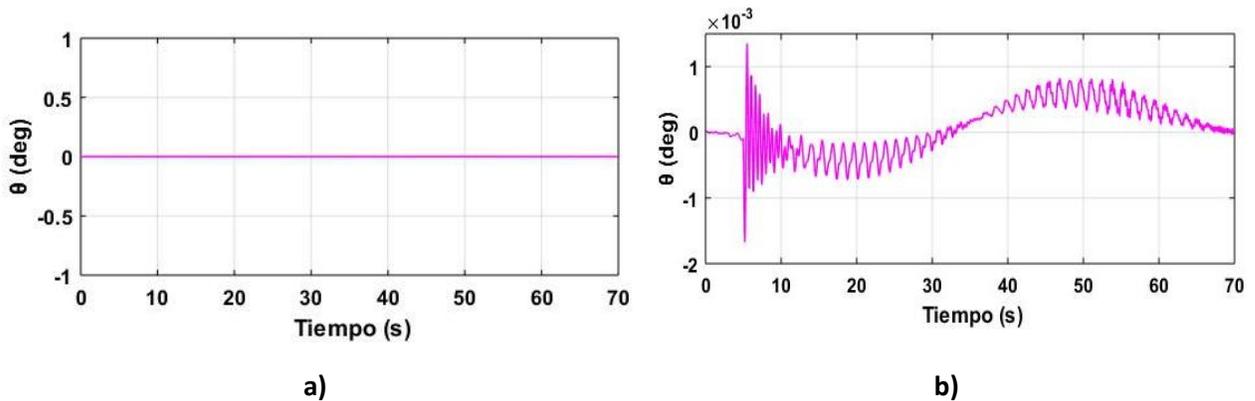


Figura 5.22 Respuesta de θ con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.22 se tiene la repuesta del ángulo θ con perturbación en el esquema Platitud más IDA-PBC. Se aprecia que las oscilaciones son muy pequeñas comparadas con en un margen de ± 1 grado como se muestra en la Figura 5.22 a); en la Figura 5.22 b) se puede observar que a pesar de la perturbación el controlador Platitud más IDA-PBC es capaz de reducir las oscilaciones.

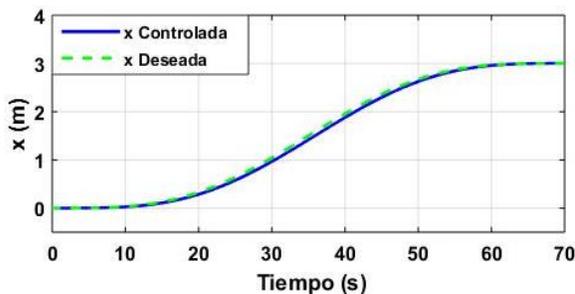


Figura 5.23 Respuesta de x con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

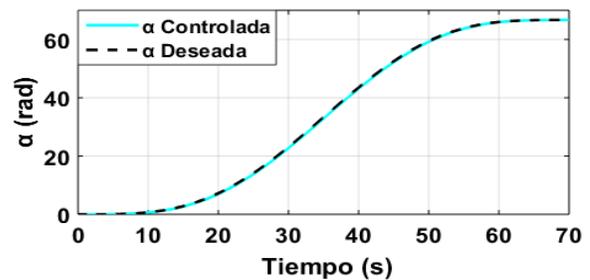


Figura 5.24 Respuesta de α con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.23 se observa la respuesta la variable x en la estrategia Platitud diferencial más IDA-PBC y a pesar de la perturbación sigue la curva deseada de manera aceptable. En la Figura 5.24 se tiene la respuesta del ángulo α y se aprecia que hay un seguimiento de la curva deseada en presencia de la incertidumbre.

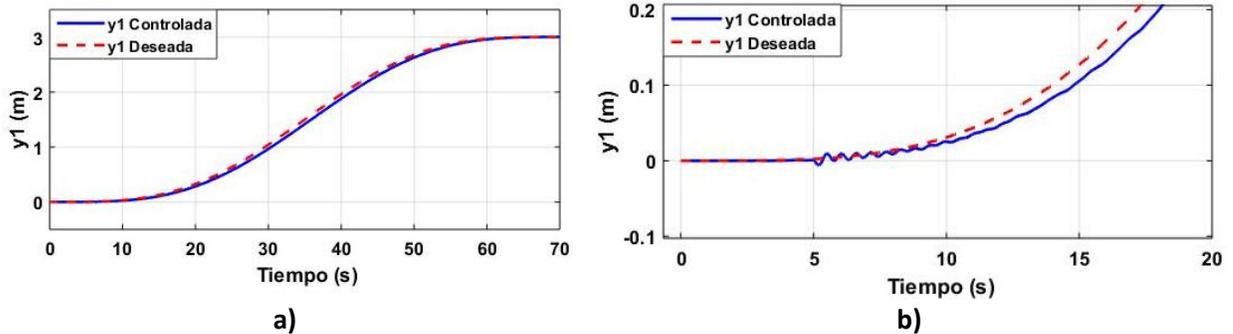


Figura 5.25 Respuesta de y_1 con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.25 se tiene la respuesta de la componente de la carga en el eje x . En la Figura 5.25 a) se observa que tiene el perfil de curva deseado, pero haciendo un acercamiento en la Figura 5.25 b) se aprecia que en el segundo 5 aparecen unas oscilaciones, estas se deben a la perturbación, que el esquema de control Platitud diferencial más IDA-PBC es capaz de reducir.

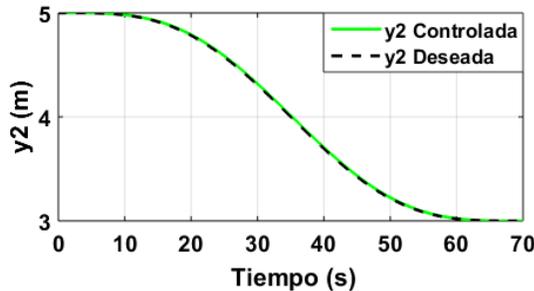


Figura 5.26 Respuesta de y_2 con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.26 se tiene la respuesta de la componente de la carga en el eje vertical y se aprecia que a pesar de la perturbación sigue la curva de manera aceptable.

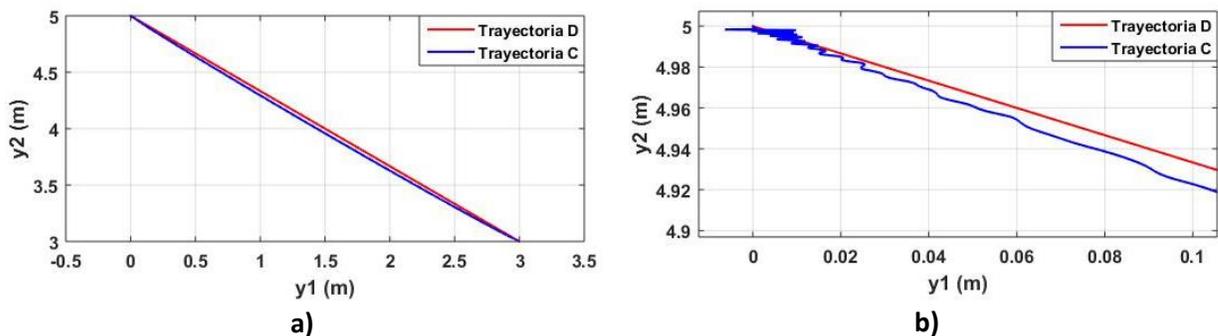


Figura 5.27 Trayectoria de la carga con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.27 se tiene la trayectoria física de la carga controlada (señal color rojo). En la Figura 5.27 a) se aprecia que inicia y termina en la posición deseada y en la Figura 5.27 b) se aprecia que al inicio hay unas pequeñas oscilaciones, pero el esquema de control Platitud diferencial más IDA-PBC es capaz de disminuir y continuar con el seguimiento de la trayectoria.

Esquema de control: Platitud diferencial + PI.

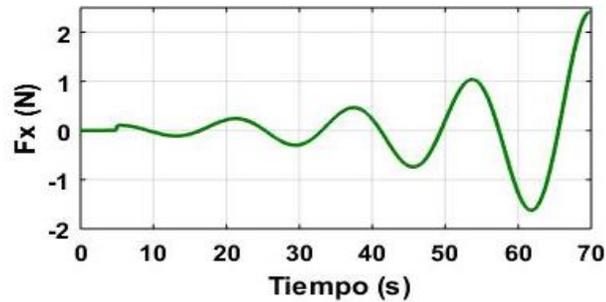


Figura 5.28 Señal de control F_x con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.28 se aprecia la señal de control F_x para el esquema combinado Platitud más PI y se observa un pico en el segundo 5, esto se debe a la perturbación mostrada en la Figura 5.19.

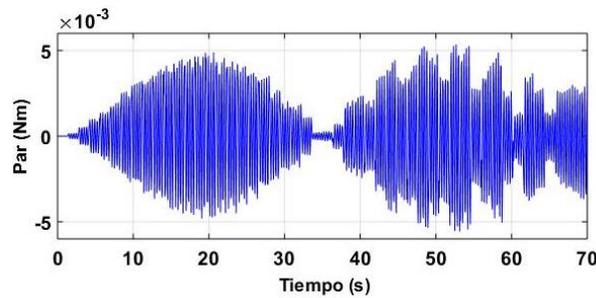


Figura 5.29 Señal de control τ_α con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.29 se aprecia la señal de control τ_α para el esquema combinado Platitud más PI y se observa que en presencia de la perturbación la amplitud de la señal disminuye.

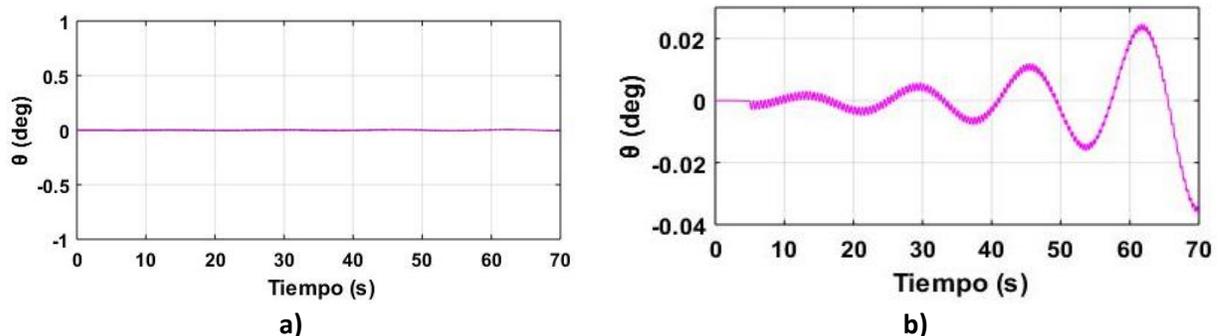


Figura 5.30 Respuesta de θ con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.30 se muestra la respuesta del ángulo θ con el esquema Platitude más PI. En la Figura 5.30 a) se muestra la respuesta de θ y aparentemente no presenta oscilaciones, pero haciendo un acercamiento se observa en la Figura 5.30 b) que después de la perturbación el controlador no logra disminuir las oscilaciones y éstas van aumentando de amplitud.

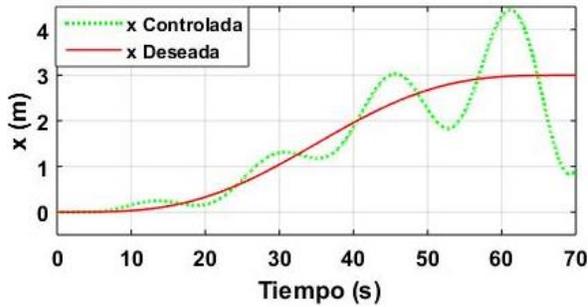


Figura 5.31 Respuesta de x con perturbación (Platitude + PI).

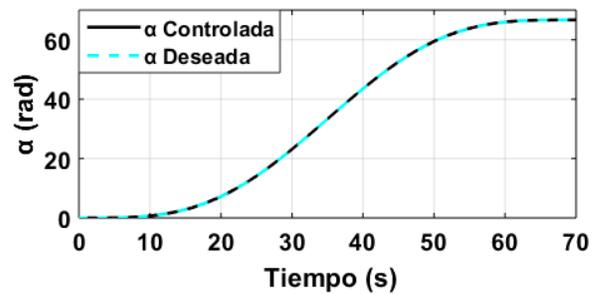


Figura 5.32 Respuesta de α con perturbación (Platitude + PI).

En la Figura 5.31 se aprecia x y después de la perturbación el controlador no es capaz de estabilizar y mantener el perfil de curva deseado. En la Figura 5.32 se tiene la respuesta del ángulo α y a pesar de la perturbación se mantiene el perfil de curva deseado.

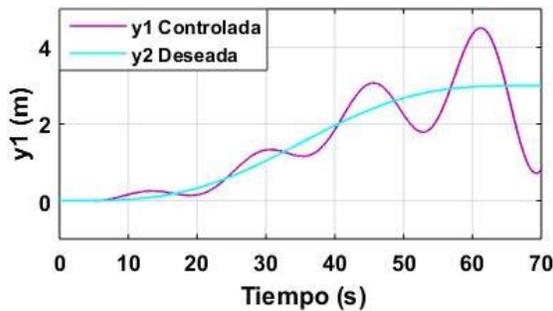


Figura 5.33 Respuesta de y_1 con perturbación (Platitude + PI).

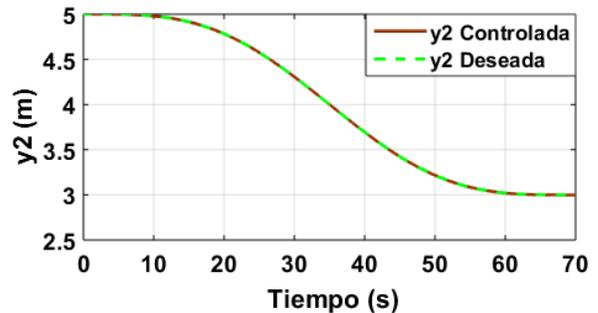


Figura 5.34 Respuesta de y_2 con perturbación (Platitude + PI).

En la Figura 5.33 se observa la respuesta y_1 con el esquema de control combinado Platitude diferencial más PI y después de la perturbación el controlador no es capaz de mantener la curva cerca de la curva deseada y presenta oscilaciones, esto se debe a las oscilaciones en θ mostradas en la Figura 5.30. En la Figura 5.34 se presenta la respuesta de la variable y_2 con el esquema Platitude diferencial más PI, y a pesar de la presencia de la perturbación hay un seguimiento de curva aceptable.

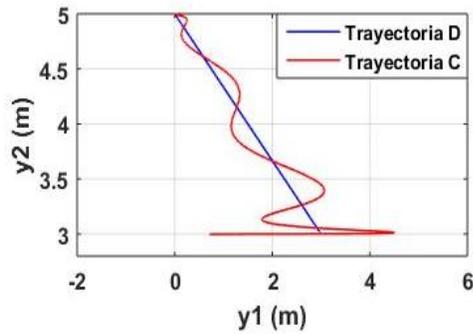


Figura 5.35 Trayectoria de la carga con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.35 se aprecia que el esquema de control Platitud diferencial más PI no es capaz de cumplir con el objetivo de control, ya que la respuesta (señal color rojo) no presenta estabilidad y seguimiento de trayectoria.

B. Perturbación en τ_α

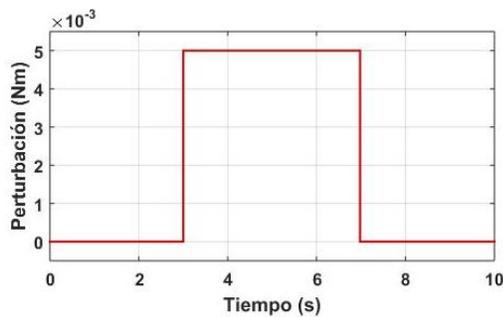


Figura 5.36 Perturbación en τ_α .

En la Figura 5.36 podemos observar que la perturbación aplicada al Par que actúa sobre la polea tiene una amplitud de 0.005 Nm y que se inyecta al sistema en $t = 3 \text{ s}$ y tiene una duración de 4 s ; esta perturbación se considera fricción en la polea.

Esquema de control: Platitud diferencial + IDA-PBC.

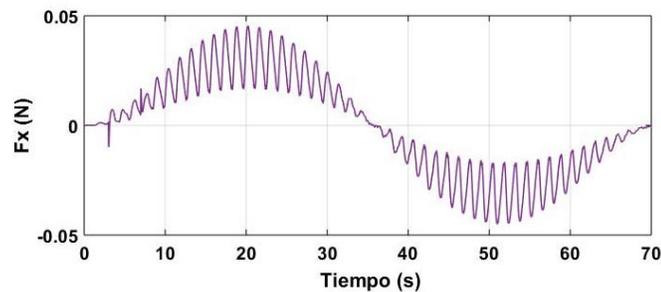


Figura 5.37 Señal de control F_x con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.37 se tiene la señal de control F_X y se aprecia que en el instante de tiempo 3 hay un pico, esto se debe a la presencia de la perturbación en la polea.

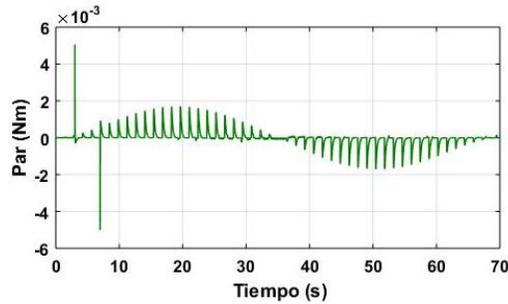


Figura 5.38 Señal de control τ_α con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.38 se tiene la señal de control τ_α perturbada y se aprecia que en el instante 3 y 8 se presentan unos picos, esto se debe a la perturbación mostrada en la Figura 5.36.

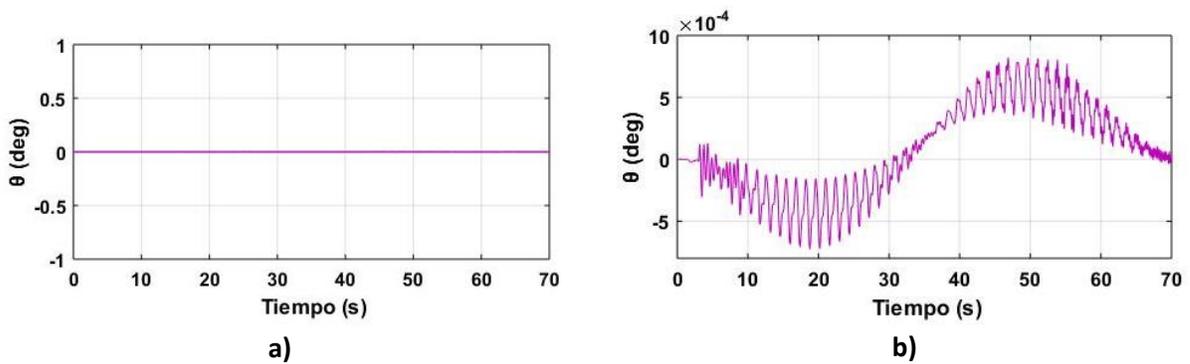


Figura 5.39 Respuesta de θ con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.39 se tiene la respuesta del ángulo θ con el esquema Platitud más IDA-PBC. Se aprecia que las oscilaciones son muy pequeñas si son comparadas con un margen de ± 1 grado como se muestra en la Figura 5.39 a), en la Figura 5.39 b) se puede observar la señal en un margen de miligrados y a pesar de la perturbación el controlador Platitud más IDA-PBC es capaz de mantener a la curva cerca de la curva deseada y con oscilaciones de pequeña amplitud.

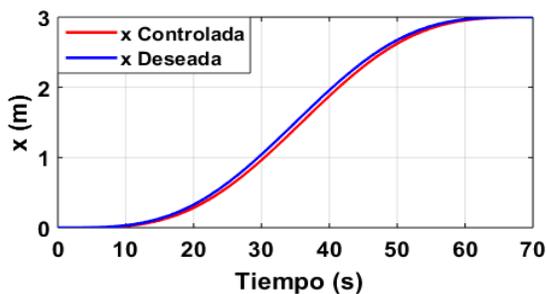


Figura 5.40 Respuesta de x con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

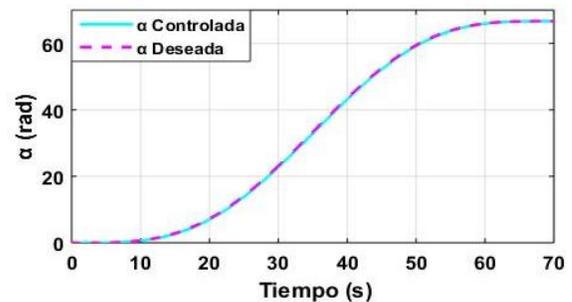


Figura 5.41 Respuesta de α con perturbación (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.40 se presenta la respuesta de la variable x y a pesar de la perturbación se aprecia que la señal es muy parecida al perfil de curva deseado. En la Figura 5.41 se tiene la respuesta del ángulo α con el esquema de control Platitude diferencial más IDA-PBC y logra mantener a la curva en el perfil deseado sin presentar oscilaciones en presencia de perturbación.

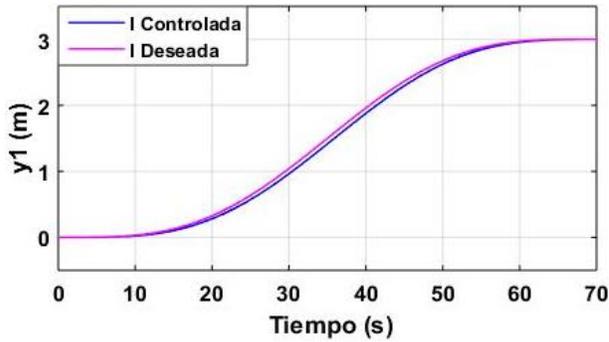


Figura 5.42 Respuesta de y_1 con perturbación (Platitude + IDA-PBC).

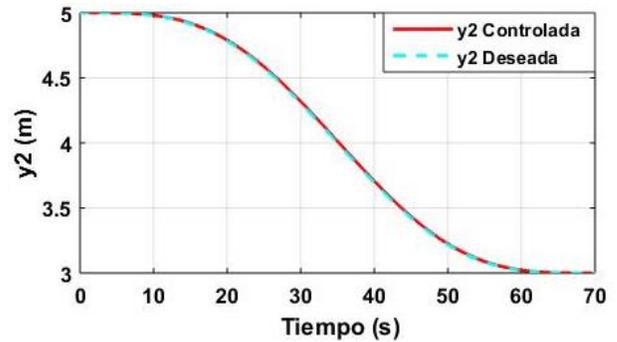


Figura 5.43 Respuesta de y_2 con perturbación (Platitude + IDA-PBC).

En la Figura 5.42 se observa la respuesta de la componente en eje horizontal de la carga (y_1) y a pesar de la perturbación se muestra un seguimiento de la curva satisfactorio. En la Figura 5.43 se muestra la componente de la carga en el vertical y se observa que el controlador Platitude diferencial más IDA-PBC es capaz de cumplir con el seguimiento de la curva deseada.

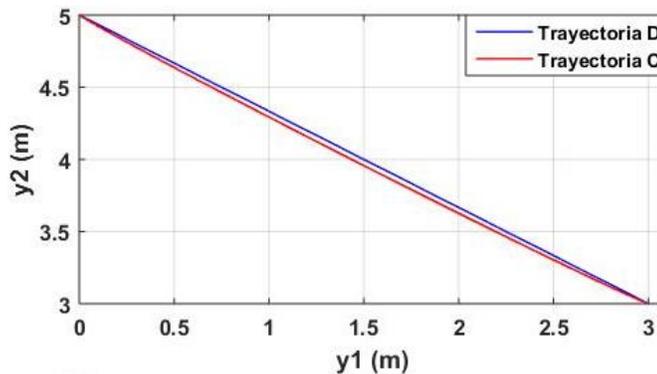


Figura 5.44 Trayectoria de la carga con perturbación (Platitude + IDA-PBC).

En la Figura 5.44 se muestra la trayectoria de la carga aplicando control con la estrategia combinada Platitude diferencial más IDA-PBC (señal color rojo), se aprecia que hay un seguimiento de trayectoria satisfactorio en presencia de la perturbación en la polea.

Esquema de control: Platitud diferencial + PI.

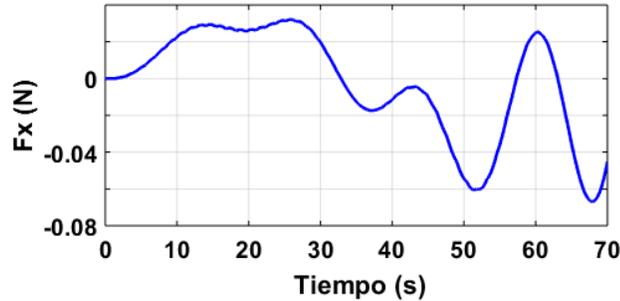


Figura 5.45 Señal de control F_x con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.45 está la señal de control F_x y se aprecia que no hay una variación en presencia de la perturbación en la polea, en comparación con la gráfica sin perturbación.

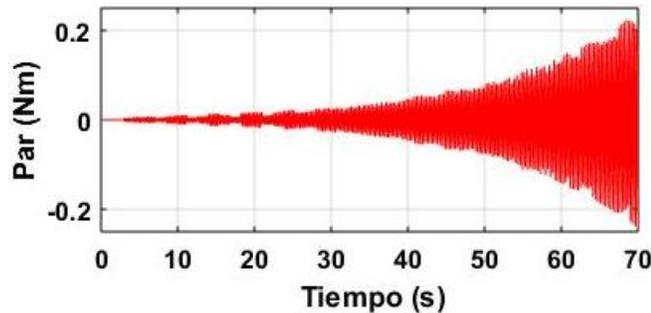


Figura 5.46 Señal de control τ_α con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.46 está la señal de control τ_α pero con el esquema Platitud diferencial más PI y después de la perturbación se presentan múltiples oscilaciones.

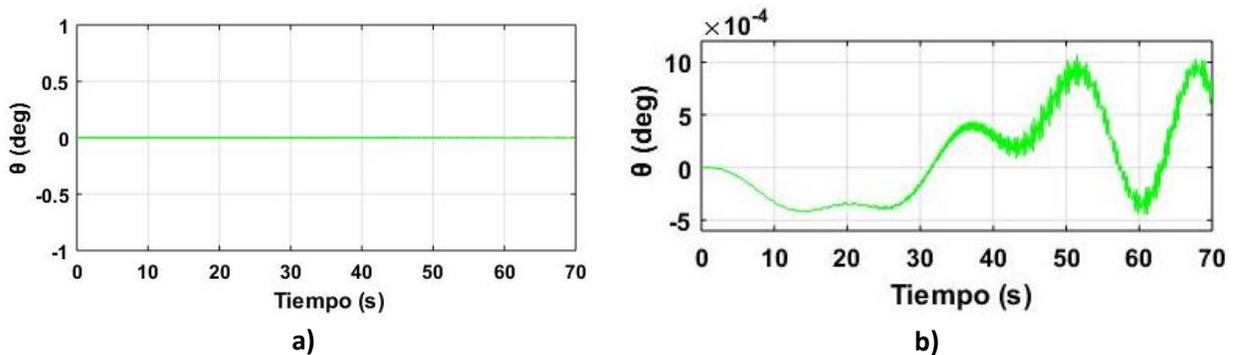


Figura 5.47 Respuesta de θ con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.47 se tiene la respuesta del ángulo θ con perturbación en el esquema combinado Platitud diferencial más PI. En la Figura 5.47 a) se observa que no hay oscilaciones, pero haciendo un acercamiento se aprecia en la Figura 5.47 b) que el esquema de control Platitud diferencial más PI no logra reducir las oscilaciones, las cuales van aumentando de amplitud.

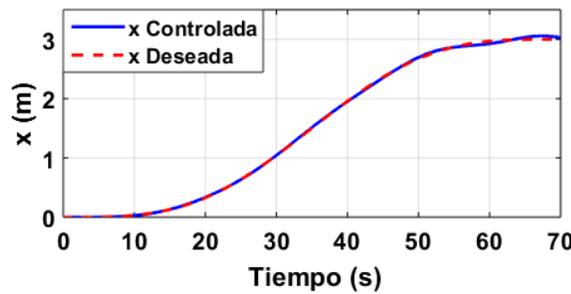


Figura 5.48 Respuesta de x con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.48 se muestra la respuesta de la variable x y no hay una variación en presencia de la perturbación en la polea.

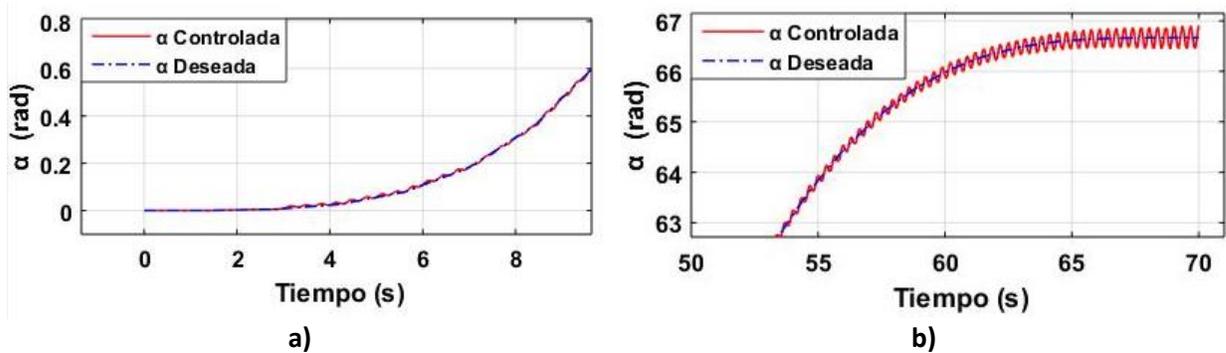


Figura 5.49 Respuesta de α con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.49 se tiene la respuesta de α con el esquema de control Platitud diferencial más PI. En la Figura 5.49 a) se observa que en el instante de tiempo 3 se presentan oscilaciones, esto debido a la perturbación y estas se mantienen hasta la posición final deseada como se muestra en la Figura 5.49 b).

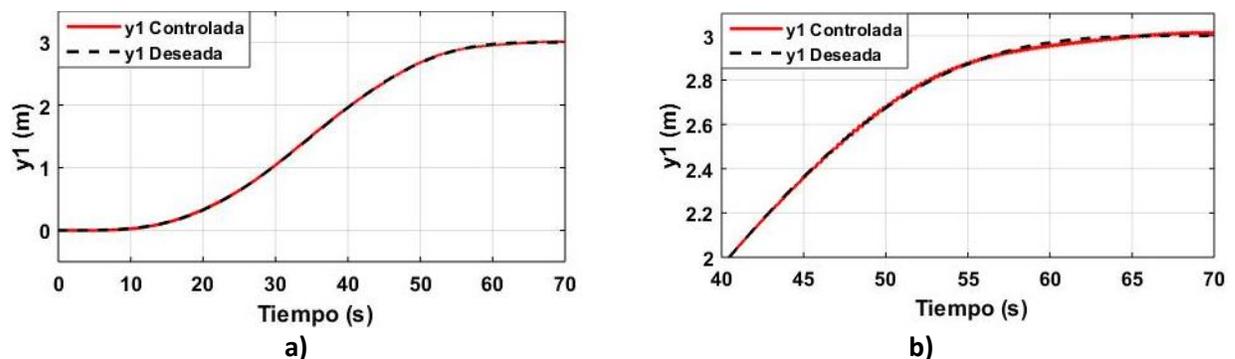


Figura 5.50 Respuesta de y_1 con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.50 se tiene la respuesta de y_1 con el esquema Platitud diferencial más PI. En la Figura 5.50 a) se aprecia que hay un seguimiento de la curva deseada, pero al acercarse a la posición final se aprecia en la Figura 5.50 b) que no llega a la posición final deseada.

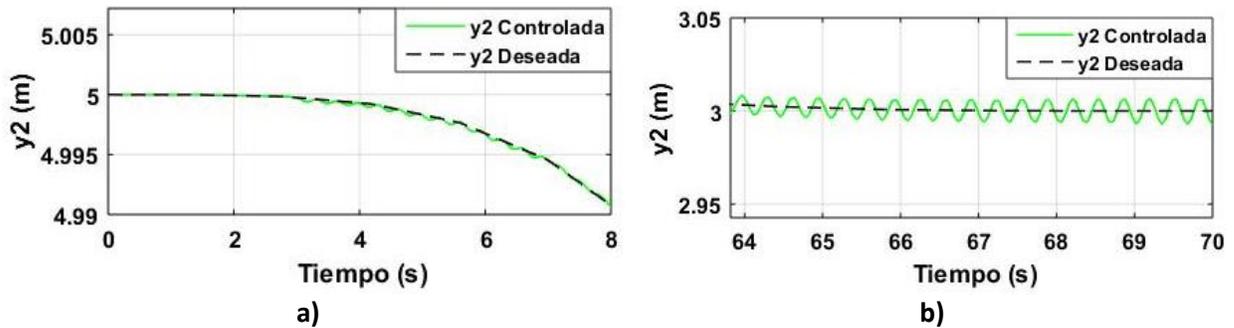


Figura 5.51 Respuesta de y_2 con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.51 se tiene la respuesta de la componente de la carga en eje vertical, y después de 3 s se aprecia en la Figura 5.51 a) que hay pequeñas oscilaciones debidas a la perturbación y el esquema Platitud diferencial más PI no es capaz de anularlas ya que al llegar a la posición final deseada se siguen manteniendo las oscilaciones, como se muestra en la Figura 5.51 b) debido a las oscilaciones que se presentan en θ .

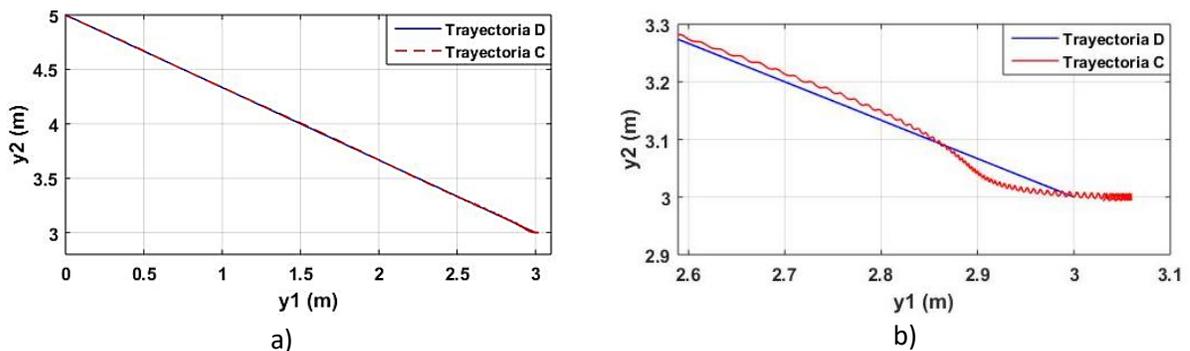


Figura 5.52 Trayectoria de la carga con perturbación (Platitud + PI).

En la Figura 5.52 se tiene la trayectoria de la carga con la estrategia de control Platitud diferencial más PI (señal color rojo). En la Figura 5.52 a) se observa que aparentemente hay seguimiento de trayectoria satisfactorio, pero haciendo un acercamiento en la Figura 5.52 b) se aprecia que hay oscilaciones que se mantienen hasta llegar a la posición final.

5.3 Simulaciones de los esquemas de control: Caso con incertidumbre paramétrica

En esta sección se analiza la respuesta del sistema ante incertidumbre paramétrica en la masa de la carga y la masa del carro, para verificar si las estrategias combinadas cumplen con el objetivo de control. El objetivo de control es mover la carga desde una posición inicial $(0\text{ m}, 5\text{ m})$ a la posición deseada específica como $(3\text{ m}, 3\text{ m})$ en un intervalo de 70 s , siguiendo una trayectoria bidimensional deseada como se aprecia en la Figura 4.5, reduciendo las oscilaciones en presencia de incertidumbre paramétrica.

A. Incertidumbre paramétrica en m

Parámetro	Valor nominal	Valor máximo	Valor mínimo
m	1 kg	2 kg (+100%)	0.1 kg (-10%)

Tabla 5.1 Valores de la masa de la carga para el sistema.

Para fines de simulación, se presenta la respuesta del sistema ante una variación en la masa de la carga sobre su valor nominal de acuerdo a la Tabla 5.1, para cada uno de los esquemas de control combinados.

Esquema de control: Platitud diferencial + IDA-PBC.

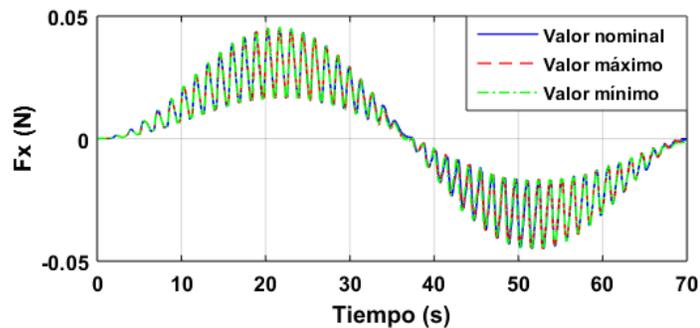


Figura 5.53 Señal de control F_x con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.53 se tienen las señales de control F_x con variaciones, y se aprecia que la señal de valor nominal, valor máximo y valor mínimo se sobreponen.

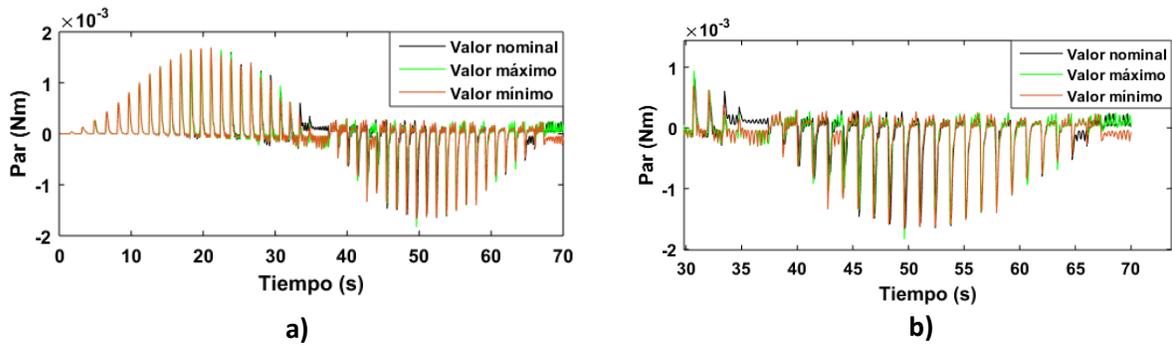


Figura 5.54 Señal de control τ_α con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.54 se tienen las señales de control τ_α con variaciones, en la Figura 5.54 a) se observa que las tres señales mantienen la misma forma y haciendo un acercamiento en la Figura 5.54 b) se aprecia que en los puntos críticos hay una ligera variación de amplitud.

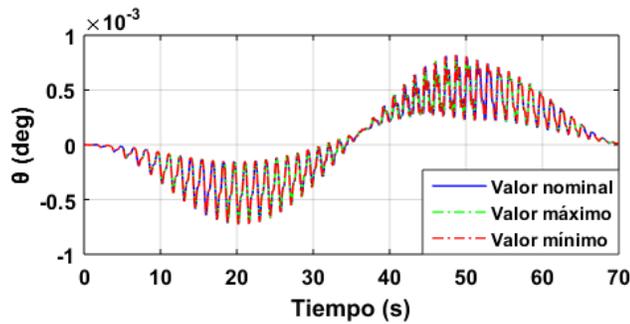


Figura 5.55 Respuesta de θ con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.55 se muestra la respuesta del ángulo θ con variaciones respecto a su valor nominal, se observa que la señal de valor nominal, valor máximo y valor mínimo se sobreponen.

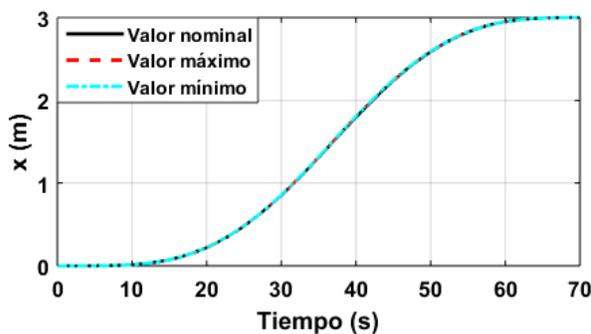


Figura 5.56 Respuesta de x con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).

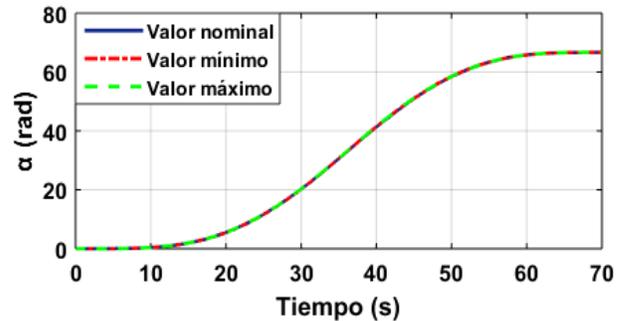


Figura 5.57 Respuesta de α con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.56 se tiene la respuesta de la variable x y se aprecia que la señal con variación máxima y mínima se sobreponen a la señal del valor mínimo. En la Figura 5.57 se tiene la respuesta del ángulo α y la variación que se hace en el parámetro de la masa de la carga no afecta el desempeño del controlador.

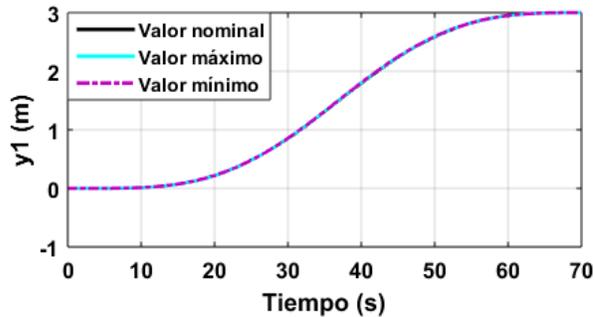


Figura 5.58 Respuesta de y_1 con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).

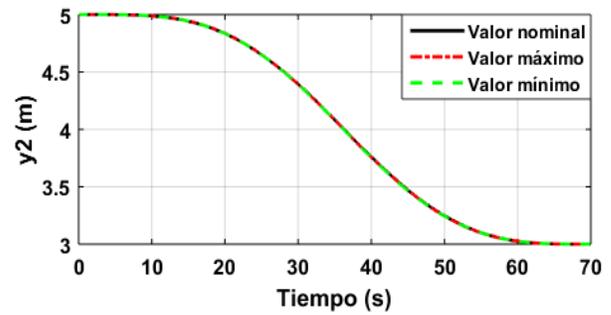


Figura 5.59 Respuesta de y_2 con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.58 se muestra la respuesta de la componente en el eje horizontal de la carga con variaciones sobre su valor nominal, y se aprecia que las tres señales (valor nominal, valor máximo y valor mínimo) se sobreponen. En la Figura 5.59 se tiene la respuesta de la componente de la carga en el eje vertical y se observa que las tres señales se sobreponen y mantienen el perfil de curva deseado.

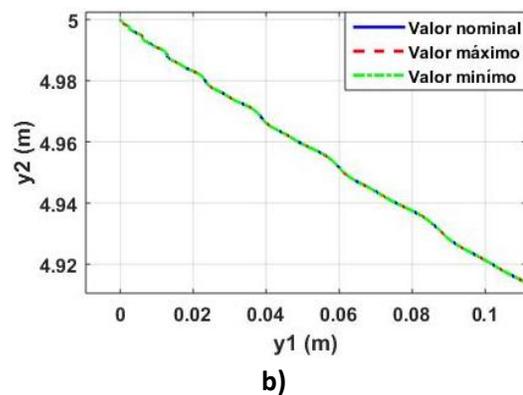
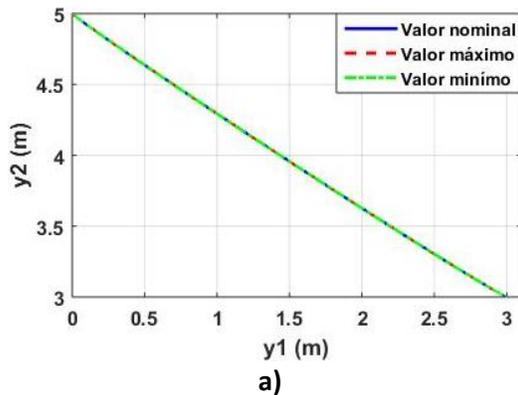


Figura 5.60 Trayectoria con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.60 se tiene la comparación de la trayectoria con incertidumbre en la masa de la carga con el esquema de control Platitud diferencial más IDA-PBC. En la Figura 5.60 a) se aprecia que las variaciones (máxima y mínima) se sobreponen con el valor nominal y al hacer un acercamiento en la Figura 5.60 b) se observa que las tres señales son iguales; es decir no afecta la variación el desempeño que muestra el controlador ya que sigue la trayectoria deseada.

Esquema de control: Platitud diferencial + PI.

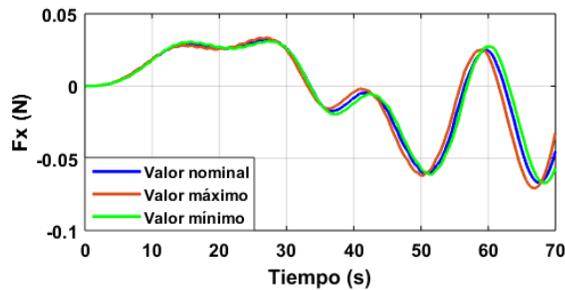


Figura 5.61 Señal de control F_x con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).

En la Figura 5.61 se muestra la señal de control F_x con variaciones sobre su valor nominal y se aprecia una ligera diferencia de la señal de valor máximo y la señal de valor mínimo sobre la señal de valor nominal; pero las tres señales conservan la misma forma.

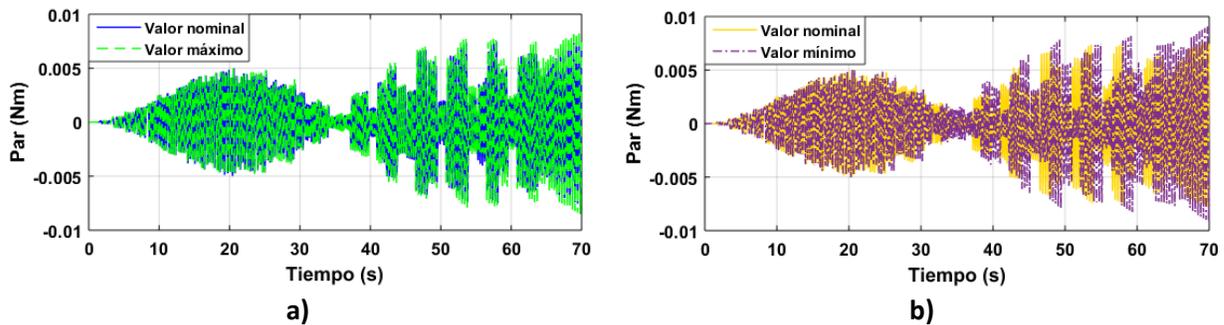


Figura 5.62 Señal de control τ_α con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).

En la Figura 5.62 se muestra la señal de control τ_α con variaciones en la masa de la carga. En la Figura 5.62 a) se tiene la comparación de las señales de valor nominal y valor máximo, y se aprecia que la señal de valor máximo presenta mayor amplitud con respecto a la señal de valor nominal. En la Figura 5.62 b) se muestra la comparación de las señales de control de valor nominal y valor mínimo y se observa que la señal de valor nominal presenta menor amplitud con respecto a la señal de valor mínimo.

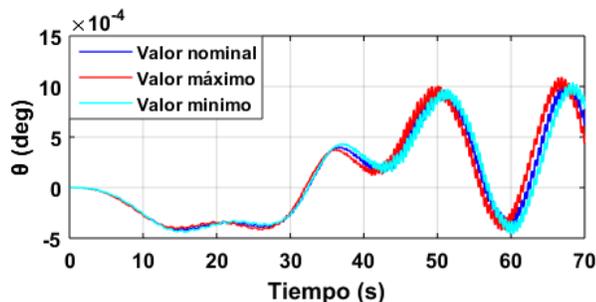


Figura 5.63 Respuesta de θ con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).

En la Figura 5.63 se tiene la respuesta del ángulo θ con incertidumbre en la masa de la carga con el esquema Platitude diferencial más PI y se aprecia una ligera variación de las señales de valor máximo y mínimo con respecto a la señal de valor nominal; pero las tres señales mantienen la misma forma.

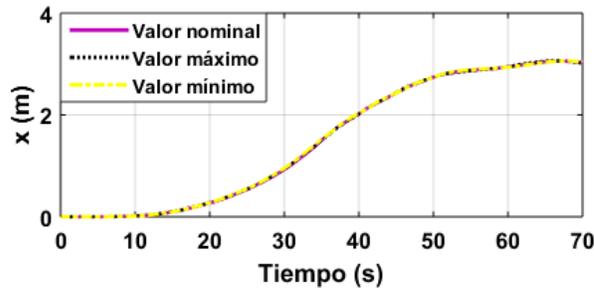


Figura 5.64 Respuesta de x con incertidumbre en la masa de la carga (Platitude + PI).

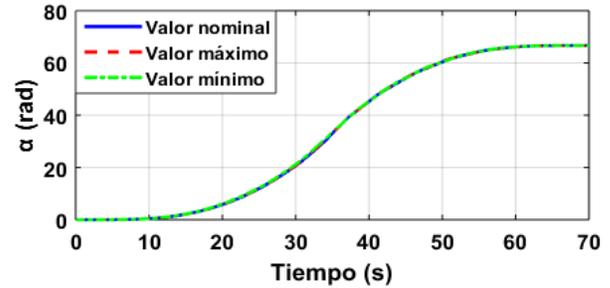


Figura 5.65 Respuesta de α con incertidumbre en la masa de la carga (Platitude + PI).

En la Figura 5.64 se tiene la respuesta de la variable x con variaciones sobre su valor nominal y se aprecia que las tres señales se superponen. En la Figura 5.65 se muestra la respuesta del ángulo α y se observa que no afecta la variación del parámetro ya que las tres señales se superponen y mantienen el perfil de curva deseado.

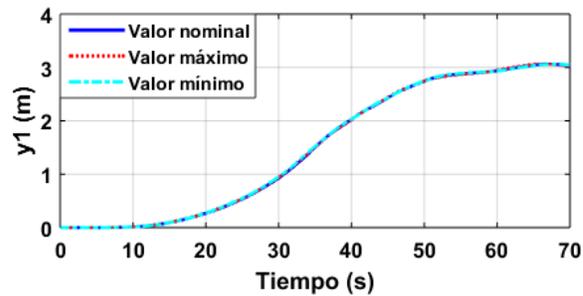


Figura 5.66 Respuesta de y_1 con incertidumbre en la masa de la carga (Platitude + PI).

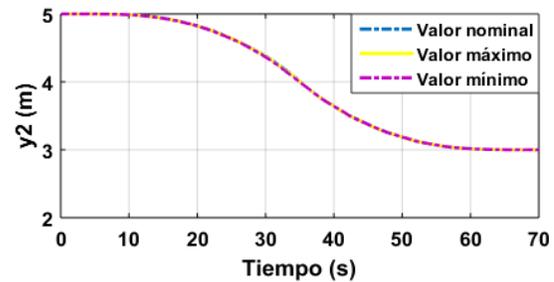


Figura 5.67 Respuesta de y_2 con incertidumbre en la masa de la carga (Platitude + PI).

En la Figura 5.66 se tiene la respuesta de la variable y_1 que representa la componente de la carga en el eje horizontal y se aprecia que con la variación del valor de la masa de la carga las tres señales se superponen. En la Figura 5.67 se muestra la respuesta de la componente de la carga en el eje vertical y las señales de valor mínimo y valor máximo se superponen sobre la señal de valor nominal.

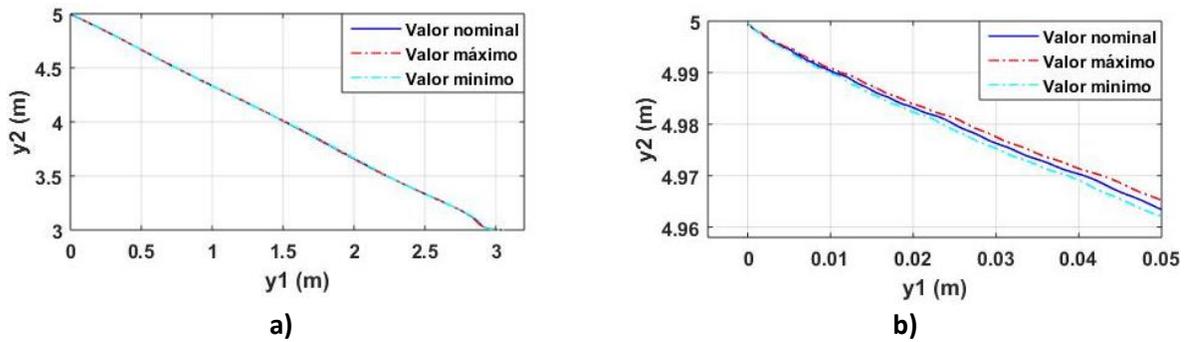


Figura 5.68 Trayectoria con incertidumbre en la masa de la carga (Platitud + PI).

En la Figura 5.68 se tiene la comparación de la trayectoria con incertidumbre en la masa de la carga con el esquema de control combinado Platitud diferencial más PI. En la Figura 5.68 a) se observa que las variaciones (máxima y mínima) se superponen con el valor nominal y al hacer un acercamiento en la Figura 5.68 b) se observa que hay discrepancia entre las señales.

B. Incertidumbre paramétrica en M_c

Parámetro	Valor nominal	Valor máximo	Valor mínimo
M_c	6 kg	6.3 kg (+5%)	5.7 kg (-5%)

Tabla 5.2 Valores de la masa del carro para el sistema.

Para fines de simulación, se presenta la respuesta del sistema ante una variación en la masa del carro sobre su valor nominal de acuerdo a la Tabla 5.2, para cada uno de los esquemas de control combinados.

Esquema de control: Platitud diferencial + IDA-PBC.

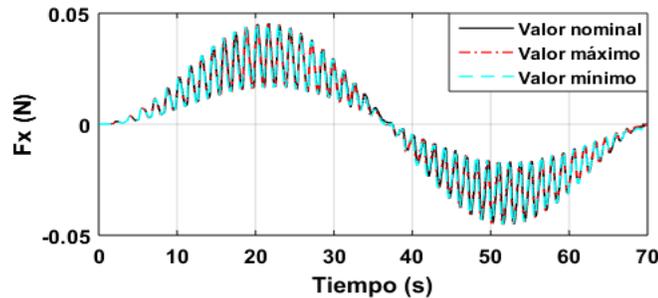


Figura 5.69 Señal de control F_x con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.69 se muestra la señal de control F_x con variaciones sobre su valor nominal y se aprecia que la variación no afecta, ya que las tres señales se superponen.

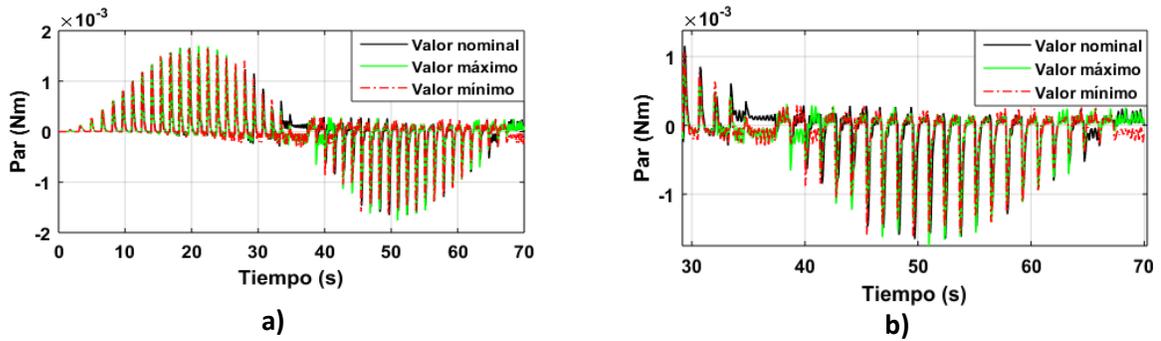


Figura 5.70 Señal de control τ_α con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.70 se tiene la señal de control τ_α con variación en el parámetro que corresponde a la masa del carro con el esquema Platitud diferencial más PI. En la Figura 5.70 a) se aprecia que las tres señales tienen la misma forma, pero al hacer un acercamiento en la Figura 5.70 b) se observa que hay ligeras variaciones de las señales de valor máximo y valor mínimo con respecto a la señal de valor nominal.

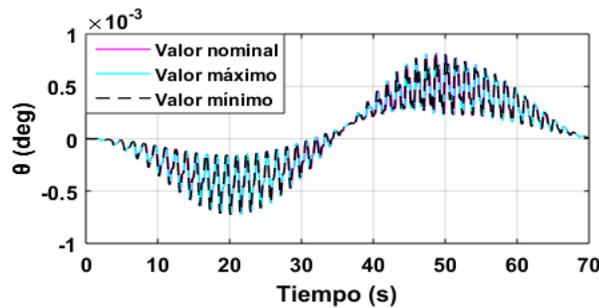


Figura 5.71 Respuesta de θ con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.71 se tiene la respuesta del ángulo θ con variaciones en el parámetro M_c que corresponde a la masa del carro, se aprecia que las tres señales (valor nominal, valor máximo y valor mínimo) se sobreponen.

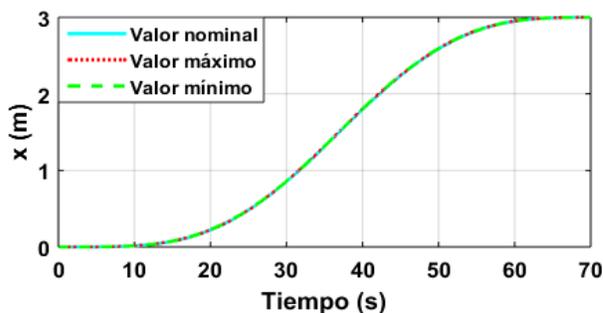


Figura 5.72 Respuesta de x con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).

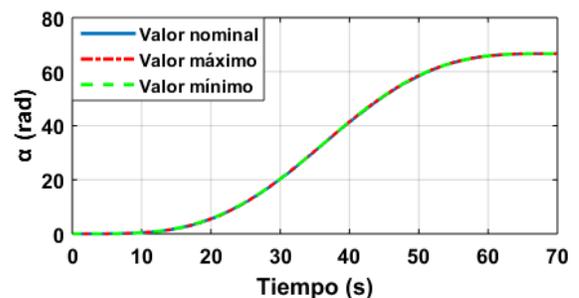


Figura 5.73 Respuesta de α con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.72 se muestra la respuesta de la variable x con variaciones sobre el valor nominal de la masa del carro y se aprecia que las señales de valor máximo y mínimo se superponen sobre la señal de valor nominal. En la Figura 5.73 se muestra la respuesta del ángulo α y se observa que la variación no afecta, ya que se sigue manteniendo el perfil de curva deseado.

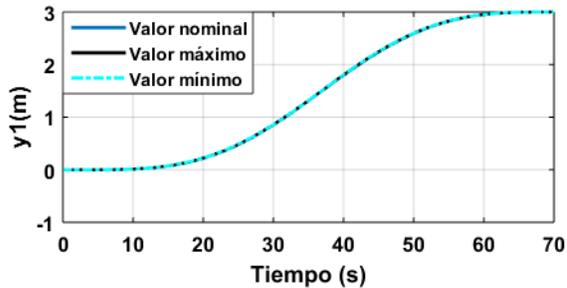


Figura 5.74 Respuesta de y_1 con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).

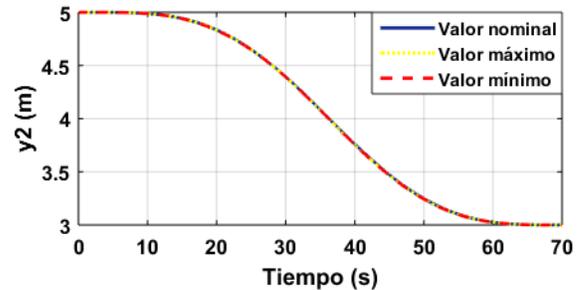
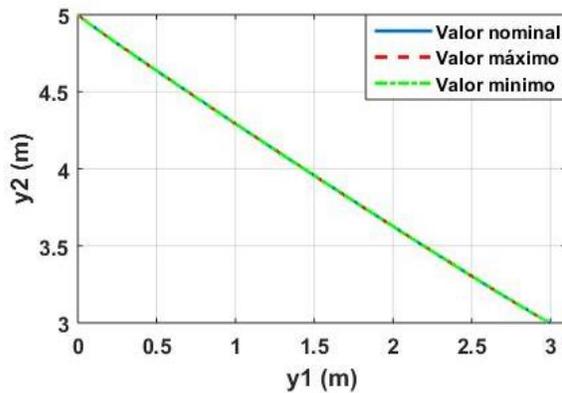
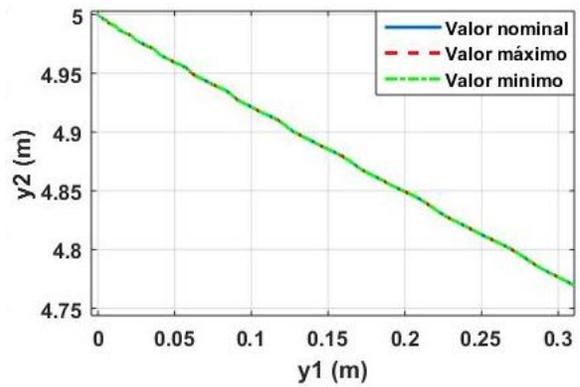


Figura 5.75 Respuesta de y_2 con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.74 se tiene la respuesta de la variable y_1 y se aprecia que las señales de valor máximo y mínimo se superponen a la señal de valor nominal. En la Figura 5.75 se muestra la respuesta de la variable y_2 que representa la componente de la carga en eje vertical y se observa que las tres señales (valor nominal, valor máximo y valor mínimo) se superponen y se mantiene el perfil de curva deseado de manera aceptable.



a)



b)

Figura 5.76 Trayectoria con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + IDA-PBC).

En la Figura 5.76 se tiene la comparación de la trayectoria de la carga con incertidumbre en la masa del carro con el esquema de control combinado Platitud diferencial más IDA-PBC. En la Figura 5.76 a) se observa que las variaciones (máxima y mínima) se superponen con el valor nominal y al hacer un acercamiento en la Figura 5.76 b) se observa que las tres señales son iguales; es decir la respuesta del controlador combinado no se ve afectada por la variación en el parámetro de la masa del carro.

Esquema de control: Platitud diferencial + PI.

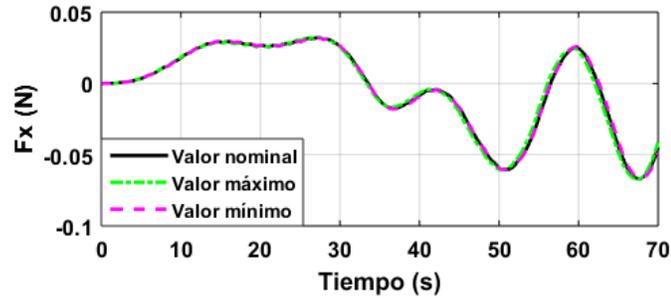


Figura 5.77 Señal de control F_x con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).

En la Figura 5.77 se tiene la señal de control F_x con variación en el parámetro M_c que representa a la masa del carro con el esquema combinado Platitud más PI, y se aprecia que las tres señales mantienen la misma forma y después de 40 s se presenta una pequeña discrepancia.

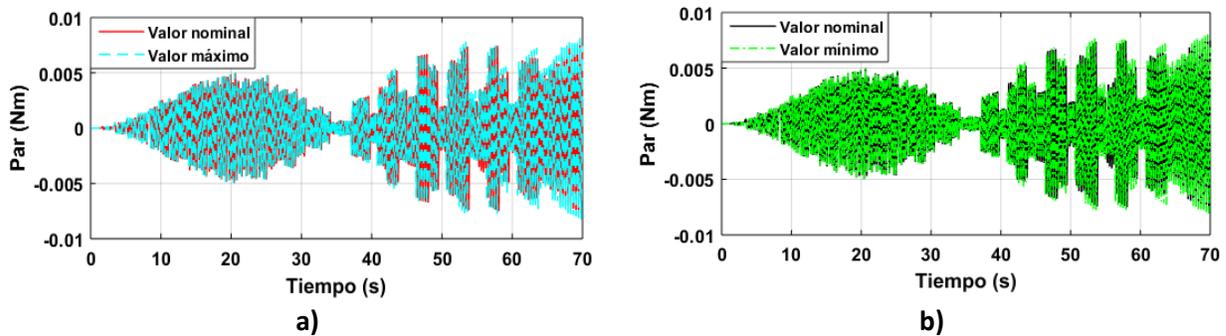


Figura 5.78 Señal de control τ_α con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).

En la Figura 5.78 se presenta la señal de control τ_α con variación sobre el valor nominal. En la Figura 5.78 a) se tiene la comparación de la señal de valor nominal y valor máximo y se aprecia que en algunos instantes de tiempo se sobreponen y la señal de valor máximo presenta mayor amplitud. En la Figura 5.78 b) se muestra la comparación de la señal de valor nominal y valor mínimo y se observa que ambas señales se sobreponen.

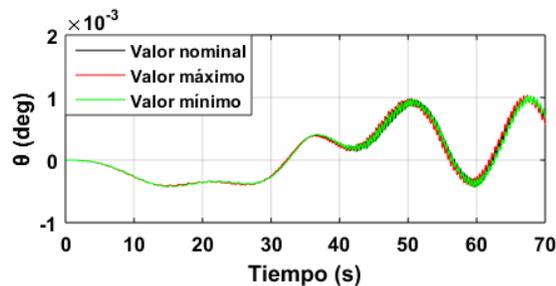


Figura 5.79 Respuesta de θ con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).

En la Figura 5.79 se presenta la respuesta del ángulo θ y se aprecia que la señal de valor máximo y mínimo se sobreponen a la señal de valor nominal, después de 40 s se presenta una discrepancia entre las señales.

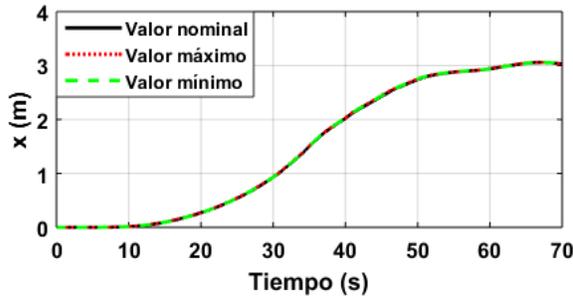


Figura 5.80 Respuesta de x con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).

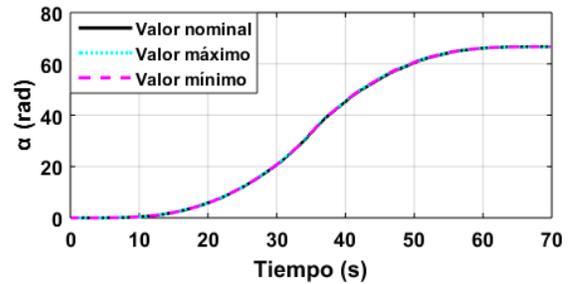


Figura 5.81 Respuesta de α con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).

En la Figura 5.80 se muestra la comparación de la variable x con variación sobre su valor nominal y se aprecia que las tres señales (valor nominal, valor máximo y valor mínimo se sobreponen). En la Figura 5.81 se tiene la respuesta del ángulo α con variación en el parámetro de la masa de la carga y las tres señales se sobreponen y mantienen el perfil de curva deseado.

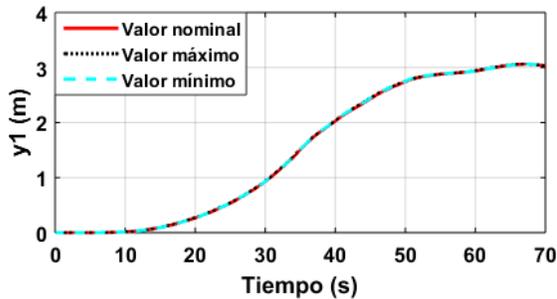


Figura 5.82 Respuesta de y_1 con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).

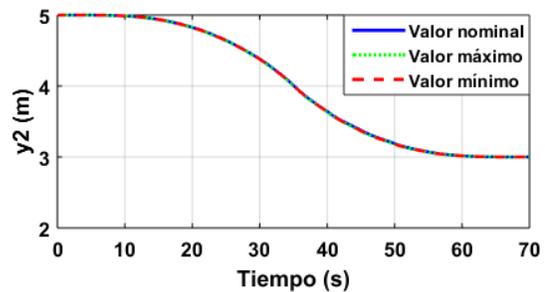


Figura 5.83 Respuesta de y_2 con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).

En la Figura 5.82 se tiene la respuesta de la variable y_1 que representa la componente de la carga en el eje horizontal con variación en el parámetro de la masa de la carga y se aprecia que las tres señales se sobreponen. En la Figura 5.83 se tiene la respuesta de la variable de la componente de la carga en el eje vertical y se aprecia que a pesar de la variación las señales mantienen el perfil de curva deseado.

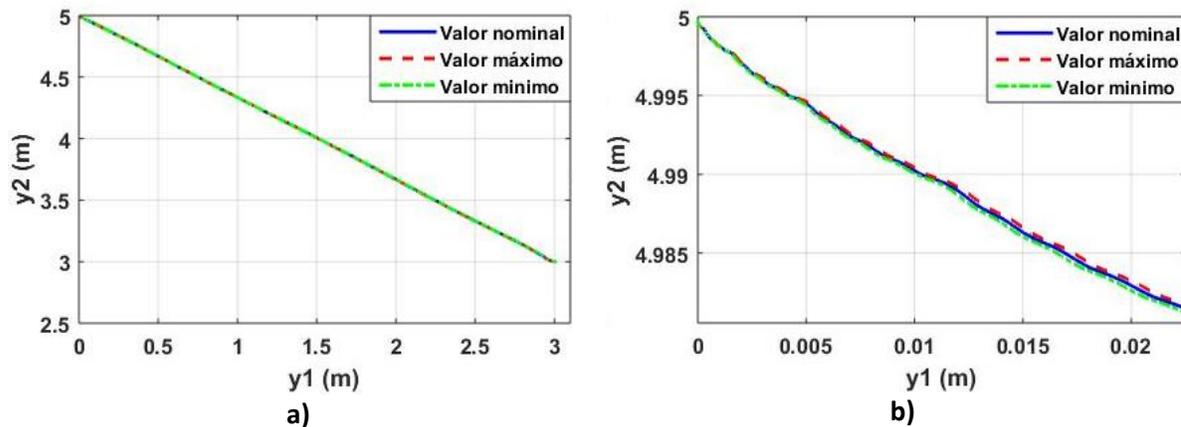


Figura 5.84 Trayectoria con incertidumbre en la masa del carro (Platitud + PI).

En la Figura 5.84 se tiene la comparación de la trayectoria de la carga con incertidumbre en la masa del carro con el esquema de control combinado Platitud diferencial más PI. En la Figura 5.84 a) se observa que las variaciones (máxima y mínima) se superponen con el valor nominal y al hacer un acercamiento en la Figura 5.84 b) se observa que hay discrepancia entre las tres señales. La respuesta del controlador combinado no es satisfactoria ya que la trayectoria no llega a la posición final deseada.

5.4 Pruebas comparativas

Como se mostró en las secciones anteriores debido a que se tiene un seguimiento de trayectoria de la carga satisfactorio en condiciones nominales, se procedió a analizar la respuesta de los esquemas de control para determinar cuál esquema es capaz de cumplir con el objetivo de control que consta en desplazar la carga desde una posición inicial $(0\text{ m}, 5\text{ m})$ a la posición deseada específica como $(3\text{ m}, 3\text{ m})$ en un intervalo de 70 s , siguiendo una trayectoria bidimensional predeterminada como se aprecia en la Figura 4.5, reduciendo las oscilaciones en presencia de perturbaciones e incertidumbre paramétrica.

Para evaluar el desempeño de los controladores se utilizan los siguientes criterios:

$$\text{Integral del valor absoluto del error (IAE)} = \int |(y_{1*} - y_1)| - |(y_{2*} - y_2)|$$

$$\text{Esfuerzo de control máximo para la Fuerza} = ECM_{Fx}$$

$$\text{Esfuerzo de control máximo para el Par} = ECM_{\tau\alpha}$$

$$\text{Oscilación máxima en el ángulo } \theta = OsM$$

Error con respecto a la posición final de la carga = ef

A continuación, se muestra una tabla que contiene los criterios para evaluar el desempeño de los controladores

Esquemas \ Casos	Criterio	Nominal	Perturbaciones		Incertidumbre	
			F_x	τ_α	m	M_c
Platitud	ECM_{F_x}	0.032 N	-----	-----	-----	-----
	ECM_{τ_α}	$2.7^{-4} Nm$				
	OsM	4.6^{-4°				
IDA-PBC	ECM_{F_x}	150 N	-----	-----	-----	-----
	ECM_{τ_α}	53.3 Nm				
	OsM	0.45 °				
PI	ECM_{F_x}	0.0848 N	-----	-----	-----	-----
	ECM_{τ_α}	0.0156 Nm				
	OsM	1.87 °				
Platitud + IDA-PBC	IAE	3.184	3.066	3.183	3.184	3.184
	ECM_{F_x}	0.045 N	0.106 N	0.04 N	0.045 N	0.045 N
	ECM_{τ_α}	$1.77^{-3} Nm$	$1.6^{-3} Nm$	5.062 Nm	$1.63^{-3} Nm$	$1.7^{-3} Nm$
	OsM	8.2^{-4°	1.3^{-3°	8.1^{-4°	8.1^{-4°	8.2^{-4°
	ef	1.1554^{-4}	2.1^{-3}	1.1633^{-4}	1.214^{-4}	1.1758^{-4}
Platitud + PI	IAE	0.9166	30.35	0.9946	0.9749	0.9981
	ECM_{F_x}	0.032 N	2.4 N	0.032 N	0.033 N	0.032 N
	ECM_{τ_α}	$6.7^{-3} Nm$	$7.5^{-3} Nm$	0.22 Nm	$7.06^{-3} Nm$	$6.38^{-3} Nm$
	OsM	0.001°	0.024°	1.06^{-3°	1.066^{-3°	1.015^{-3°
	ef	0.0303	2.1902	0.0377	0.0176	0.0265

Tabla 5.3 Criterios para evaluar el desempeño de los esquemas de control.

De acuerdo a la Tabla 5.3 que muestra los criterios para evaluar el desempeño de los controladores diseñados, se aprecia que el controlador IDA-PBC (nominal) presenta mayores esfuerzos de control en el Par y la Fuerza, a diferencia del esquema combinado con platitud diferencial donde presenta mínimas oscilaciones en la carga y menores esfuerzos de control. El esquema PI muestra oscilaciones de pequeña amplitud y al combinarlo con Platitud diferencial se aprecia que presenta un incremento en el error final de la posición de la carga, en comparación con el otro esquema combinado. Entonces el esquema más robusto ante perturbaciones (fricción) e incertidumbre paramétrica es Platitud diferencial más IDA-PBC, por que logra llegar a la posición final deseada y logra que la carga presente oscilaciones de pequeña amplitud.

Capítulo 6 : Conclusiones y Trabajos futuros

Las grúas han sido objeto de estudio, ya que se tiene la necesidad de lograr de manera precisa y rápida el posicionamiento de la carga y reducir la aparición de oscilaciones indeseadas al elevar la carga.

La grúa de caballete es un sistema mecánico subactuado que presenta un comportamiento no lineal y la dinámica del sistema propicia oscilaciones indeseadas en la carga que son difíciles de atenuar. El modelo dinámico de la grúa se basó en el enfoque Euler-Lagrange y como el sistema es plano, fue posible utilizar la estrategia de platitud diferencial para planeación de trayectorias ya que la trayectoria de la carga se planeó en el espacio de las salidas planas del sistema utilizando Curvas de Bézier.

Para resolver el problema de control de las grúas, en este trabajo se diseñaron dos esquemas de control combinado: que constan, por una parte, de un controlador prealimentado y, por la otra, de un controlador retroalimentado; es decir, Platitud diferencial más PI y Platitud diferencial más IDA-PBC. Como en ambos esquemas se tuvo un seguimiento de trayectoria de la carga satisfactorio en condiciones nominales entonces, se procedió a comparar y analizar la robustez ante la presencia de perturbaciones e incertidumbre paramétrica.

De acuerdo a la Tabla 5.3, en el caso nominal se aprecia que el esquema basado en PI, presentan muy bajos esfuerzos de control tanto en Fuerza como en el par, en comparación con el esquema IDA-PBC el cual presenta mayores esfuerzos de control en F_x y τ_α . Se aprecia que el controlador por platitud diferencial no logra alcanzar la referencia. En el caso del esquema combinado Platitud diferencial más IDA-PBC se presentan menores oscilaciones en la carga y esfuerzos de control. El esquema PI muestra oscilaciones de pequeña amplitud y al combinarlo con Platitud diferencial se aprecia que presenta un incremento en (ef) que es el error final de la posición de la carga, en comparación con el otro esquema combinado.

En el caso con perturbaciones e incertidumbre paramétrica se tiene que los esquemas combinados presentan oscilaciones en el ángulo θ de pequeña amplitud. El esquema Platitud diferencial más IDA-PBC presenta menor error con respecto a la posición final de la carga en comparación con el esquema Platitud diferencial más PI.

De los esquemas desarrollados, la combinación de platitud diferencial más PI logra un buen seguimiento de trayectoria para el caso nominal, sin embargo, esta combinación es muy sensible a las perturbaciones, ya que no logra eliminar el error en estado estable en la referencia

final. Contrariamente el esquema Platitud diferencial más IDA-PBC no presenta el mismo desempeño en el caso nominal, sin embargo, se aprecia una mayor robustez al lograr llegar a la posición final deseada, reducir las oscilaciones y mantener estable al sistema en presencia de incertidumbre paramétrica y perturbaciones; con lo anterior se concluye que el esquema más robusto ante perturbaciones (fricción) e incertidumbre paramétrica es Platitud diferencial más IDA-PBC

6.1 Aportaciones

Las principales aportaciones que se desarrollaron en este trabajo de investigación son:

- Diseño de los esquemas de control combinado que constan, por una parte, de un controlador prealimentado y, por la otra, de un controlador retroalimentado; es decir: Platitud diferencial más IDA-PBC y Platitud diferencial más PI, implementados en un caso de estudio subactuado (grúa de caballete).
- Mediante la variación paramétrica fue posible realizar un análisis comparativo de la robustez de las estrategias de control combinado para el sistema de grúa de caballete que tiene la característica de ser subactuado.

6.2 Trabajos futuros

De acuerdo a lo que se desarrolló en este trabajo, algunas propuestas para trabajos futuros son:

- ❖ Implementación de los controladores para la grúa de caballete.
- ❖ Extender el método basado en pasividad conocido como IDA-PBC para otros casos de estudio subactuados; por ejemplo, Vehículo Aéreo no Tripulado (UAV), procesos y sistemas mecánicos.
- ❖ Ampliar este trabajo añadiendo funciones estrictas de Lyapunov para mejorar la robustez del sistema.
- ❖ Desarrollar un método para analizar la robustez para sistemas no lineales subactuados.

Bibliografía

Aghabalaie P., M. Hosseinzadeh, H. Talebi and M. Shafiee (2010). "Nonlinear Robust Control of a Biped Robot". IEEE, International Symposium on Industrial Electronics (ISIE), pp. 1907-1912, Bari, Italy.

Ahsan M., N. Masood and F. Wali (2013). "Control of a Magnetic Levitation System Using Non-Linear Robust Design Tools". IEEE, 3rd. International Conference on Computer, Control and Communication (IC4), pp. 1-6, Pakistan.

Ahmad M.A., R. Ismail, M.S. Ramli, N.F. Zakaria and N.M. Abd (2009). "Robust Feed-forward Schemes for Anti-Sway Control of Rotary Crane". International Conference on Computational Intelligence, Modelling and Simulation, Singapore, pp. 17-23, 23-26 Jan. 2009.

Banavar R., Kazi F., Ortega R. & Manjarekar N. (2006). "The IDA-PBC Methodology Applied to a Gantry Crane". *Proc. of the 17th Int. Symp. On Mathematical Theory of Networks and Sysys.* Kyoto, Japan.

Banavar R., Kazi F., Ortega R. & Manjarekar N. (2007). "Point-to-Point Control of a Gantry Crane: A Combined Flatness and IDA-PBC Strategy". *Proc. of the European Control Conference 2007.* Kos, Greece.

Collado J., Vázquez C. (2009) "Optimal delayed control for an overhead crane". 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, pp. 1-6, 2009.

Collado J., Vázquez C. (2011). "Control of a parametrically excited crane". Preprints of the 18th IFAC World Congress. Milano Italy, pp 6703-6708, September, 2011.

Collado J., Vázquez C. (2013). "Super twisting control of aparametrically excited overhead crane". *Journal of the Franklin Institute, Elsevier* Vol. 351(4), 2283–2298.

Deng M. and A.Wang (2012). "Robust non-linear control design to an ionic polymer metal composite with hysteresis using operator-based approach". *Control Theory and Applications, IET*, Vol. 6, No. 17, pp. 2667-2675.

Dongkyoung C. and H. Keum (2005). "Nonlinear Control of 3-D overhead cranes: Energy-based decoupling". *Proceedings 16th IFAC World Congress, Prague Czech Republic.* Vol. 16, parte 1, pp. 1255-1260.

Doyle J. C., Glover K., Khargoner P. and Francis B. A. (1989). *State-space solutions to standard H_2 and H_∞ Control Problems.* Transactions on Automatic Control. Vol 34, pp. 831-846.

Doyle J. C. and Stein G. (1981). *Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis,* IEEE Transactions on Automatic Control. Vol AC-26, pp. 4-16.

Fliess M., Lévine J., and Rouchon P. (1991). "A simplified approach of crane control via a generalized state-space model". Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control Brighton, England, December 1991.

Fliess M., Lévine J. and Rouchon P. (1993). "Defaut des systemes non lineaires et commande haut frequence". Comptes Rendus Hebdomadaires des Scéances de Academie de Scienes, Seriel, Vol.1- 316, pp. 513-518.

Fliess M., Levine J., Martin Ph. & Rouchon P. (1995). "Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples". *International Journal of Control*, vol. 61, No. 6, 1327-1361.

Fliess, Levine, Martin and Rouchon (1999) "A Lie Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, pp. 922-937.

Fang Y., E. Zergeroglu, W. E. Dixon and D. M. Dawson (2008). "Nonlinear Coupling Control Laws for an Overhead Crane System". International Conference on Mechatronics and Automation, Harving,China.

Freeman R. A. and P. V. Kokotovic (2008). Robust nonlinear control design state-space and Lyapunov techniques. Ed. Birkhäuse.

Hagenmeyer V. and Delaleau E., (2003) "Exact feedforward linearization based on differential flatness", *International Journal of Control*, Vol. 76, No.6, pp. 537-556, 2003.

Horowitz I. (1982). Quantitative feedback theory. Proceedings of the Institution of a Electrical Engineers, Part D 129, pp 215-226.

Kazi F., Kamath A., Navdeep M. Singh (2010) "Dynamics and Control of 2D SpiderCrane: A RHC Approach". Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems – MTNS 2010, 5–9 July, 2010 Budapest, Hungary.

Kazi F., Venkatesh C., Mehra R., Singh N., (2012) "Structure Preserving Optimal Control of 2D-Spider Crane". Systems Conference (SysCon), 2012 IEEE International, 19-22 March 2012, Vancouver, BC.

Lévine J., Kiss B., and Müllhaupt P. (1999). "Modeling, Flatness and Simulation of a Class of Cranes". *Periodica polytechnica Electrical Eng.*, Vol. 43, No. 3, pp. 215-225.

López M. (2013). Linealización exacta prealimentada: enfoque de aplanamiento diferencial para análisis de robustez. Tesis de Maestría Cenidet. Cuernavaca, Morelos.

López L. (2014). Análisis de robustez con respecto a perturbaciones exógenas y parámetros variantes en el tiempo para linealización exacta prealimentada basada en plitud diferencial. Tesis de Maestría Cenidet. Cuernavaca, Morelos.

Loría A. & Nijmeijer H. (2002). *Passivity Based Control*. France, Saint-Martin-d'Herès .

Mohamed Z., Maghsoudi M. J., Husain A. R and Tokhi M. O. (2015), "An optimal performance control scheme for a 3D crane", *Mechanical Systems and Signal Processing*.

Mohammad H. Fatehi, Mohammad Eghtesad and Roya Amjadifard, (2015). "Energy-based Control of an Underactuated Crane System with a Flexible Cable and Large Swing Angle". *International Journal of Current Engineering and Technology*.

Murray Richard, Rathinam Muruhan & Sluis Willem. (1995). "Differential flatness of mechanical control systems: A catalog of prototype systems". *Proceedings of the 1995 ASME International Congress and Exposition*.

Morillo A., (2001) Generación de trayectorias en sistemas diferencialmente planos. Revista técnica de la Facultad de Ingeniería Universidad de Zulia, 2001.

Moylan J. P. and D. Hill (1980). "Dissipative Dynamical System: Basic Input-Output and state Properties". *The Franklin Institute*, 305(5), pp. 327-355.

Ortega, R., Loria, A., Niklasson, P. & Sira-Ramírez, H. (1998), *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*, Springer-Verlag, Sept., 1998,

Ortega R. and Spong M. (2000), Stabilization of Underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 47, pp. 1218-1233.

Ortega, Kazi, Banavar, and N. S. Manjarekar, (2007) "Minimizing Cable Swing in a Gantry Crane using the Interconnection and Damping Assignment-Passivity Based Control Methodology", *13th National Conference on Mechanisms and Machines (NaCoMM07)*, IISc, Bangalore, India. December 12-13.

Ortega, R., Van der Schaft, A., Maschke, B. & Escobar, G. (2002), "Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems", *Automatica* 38, No. 10, 585-596.

Peng Y., X. Liu, Q. Zhu, F. Xu and D. Zhao (2013). "The Initial Robustness Analysis of Designed V-Pole Placement Control Systems". *Proceedings of International Conference on Modelling, Identification and Control*, pp. 253-258, Cairo, Egypt.

Rabbani T., S. Munier, D. Dorchies, P. Malaterre, A. Bayen and X. Litrico (2009). "Flatness-based control of open-channel flow in an irrigation canal using SCADA (Applications of Control)". *Control Systems Magazine, IEEE*, Vol. 29, pp. 22-30.

Rañada, A. (1990), *Dinámica Clásica*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

Rathinam M. (1997). *Differentially at nonlinear control systems*. Phd thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California.

- Rouchon P. and Sira-Ramírez (2003). "Control of the walking toy: a Flatness approach". Proceedings of the American Control Conference, Vol. 3, pp. 2018-2023.
- Saealal M., N. Nik, M. Zawawi, M. Ahmad and M. Mohd (2011). "Robustness Evaluation of Feedback Control Scheme for Overhead Crane". 11th International Conference on Control, Automation and Systems, pp. 66-71, Gyeonggi-do, Korea.
- Sano S., H. Ouyang and N. Uchiyama (2012). "Robust Control of Rotary Cranes under Rope Length Variance via LMI Optimization". IEEE, International Conference On Industrial Technology, pp. 846-851, Busan, Korea.
- Silva F. (2008). Detección y Estimación de Fallas en el Motor de Inducción mediante Reconstructores de Estado: un Enfoque Algebraico-Diferencial. Tesis de maestría, CENIDET, Cuernavaca, Morelos.
- Sira-Ramírez and S. K. Agrawal, *Differentially flat systems*. New York, Marcel Dekker, 2004.
- Shibayama K., V. Kroumov and A. Inoue (2010). "Robust Control of Underactuated Inverted Pendulum System in Presence of Unknown Disturbances". Proceedings International Conference on Modelling, Identification and Control, pp. 349-353, Okayama, Japan.
- Sun N., Y. Fang and X. Zhang (2013). "Energy coupling output feedback control of 4-DOF Underactuated cranes with saturated inputs". Automatica, Elsevier, Vol., 49, pp. 1318-1325.
- Suriano., J. (2012). Diseño de un controlador tipo GPI para un rodamiento magnético considerando fallas internas y una perturbación en el rotor: Enfoque de platitudez diferencial, Tesis Maestría. CENIDET, Cuernavaca, Morelos.
- Thull D., Wild D. and Kugi A. (2006). "Application of a Combined Flatness- and Passivity-Based Control Concept to a Crane With Heavy Chains and Payload". Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications, pp. 656-661, Munich, German.
- Van der Schaft, A. (2000), *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, Springer-Verlag.
- Yang J. H. (2009). "On the Adaptive Tracking Control of 3-D Overhead Crane Systems, Adaptive Control". pp. 277-301, intechopen, Pingtung Taiwan, 2009.
- Zames G. and Francis B. A. (1983). "Feedback minimax sensitivity and optimal Robustness", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-28, pp 585-601, May 1983.

Anexo 1. Planeación de trayectoria mediante curva de Bézier

Para el problema de planeación de trayectoria para el sistema (grúa de caballete) se empleará el método de Curva de Bézier. Es un sistema desarrollado en los años de 1960 para el trazado de dibujos técnicos, el diseño técnico y el de automóviles. El nombre es en honor al Dr. Pierre Bézier. Son curvas paramétricas y suaves, es decir son curvas continuamente diferenciables, requisito necesario para el diseño de controladores basados en plitud diferencial. La curva de Bézier une dos puntos mediante una curva suave, como se muestra en la siguiente figura:

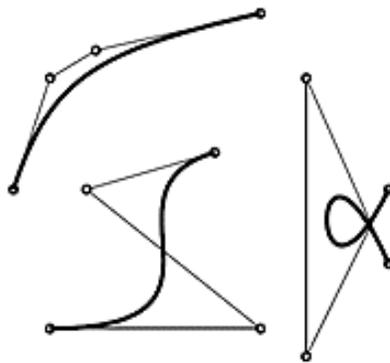


Figura A.1.1 Ejemplos de Curvas de Bézier.

En la Figura A.1.2 podemos observar los elementos que componen la curva de Bézier; los puntos P_i se llaman nodos o puntos de control, a la figura que forman esos nodos se le llama polígono de control, y a los puntos Q_i se les denomina puntos intermedios mediante los cuales se puede modificar la forma de la curva. El número de lados que tenga el polígono de control representa el grado de la curva.

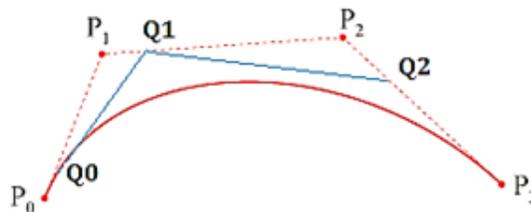


Figura A.1.2 Curva de Bézier.

Estas curvas se forman a partir de una ecuación general, la curva de Bézier de grado n se puede generalizar de la siguiente manera:

$$B(t) = \begin{cases} P_0 & , t < t_0 \\ \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n-i} \left(\frac{t - t_0}{t_f - t_0}\right)^i P_i & , t_0 < t < t_f \\ P_f & , t > t_f \end{cases}$$

donde P_0, P_f son los valores inicial y final, respectivamente; t_0, t_f el tiempo inicial y final y n es el orden de la curva. Este tipo de curva se utiliza para el problema particular de llevar a un sistema dinámico de un estado inicial en reposo a otro estado final en reposo, mejor conocido como problema de control reposo a reposo.

De la ecuación general de la Curva de Bézier el grado del polinomio para cada curva se obtiene de acuerdo a las condiciones iniciales y finales, es decir:

- Para $y_1 = f_1$

$$\begin{aligned} f_1(t_0) &= x_0 & \dot{f}_1(t_0) &= 0 & \ddot{f}_1(t_0) &= 0 \\ f_1(t_f) &= x_1 & \dot{f}_1(t_f) &= 0 & \ddot{f}_1(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

- Para $y_2 = f_2$

$$\begin{aligned} f_2(t_0) &= y_0 & \dot{f}_2(t_0) &= 0 & \ddot{f}_2(t_0) &= 0 \\ f_2(t_f) &= y_1 & \dot{f}_2(t_f) &= 0 & \ddot{f}_2(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

Debido a que tenemos 6 condiciones iniciales y finales, el grado del polinomio es igual a 5, para cada curva. Los valores de P y t son:

f_1		f_2	
$P_0 = 0$	$P_f = 3$	$P_0 = 5$	$P_f = 3$
$t_0 = 0$	$t_f = 70$	$t_0 = 0$	$t_f = 70$

Tabla A.1 Valores para el diseño de Curva de Bézier.

Para obtener los puntos de control P_i como el grado del polinomio es impar, se tiene que:

$$\begin{aligned} P_i &= P_0, & i &= 0, 1, \dots, \frac{n+1}{2} \\ P_i &= P_f, & i &= \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n \end{aligned}$$

de acuerdo con los datos anteriores y sustituyendo estos valores en la ecuación general de la Curva de Bézier el polinomio es:

$$f(t) = \sum_{i=0}^5 \frac{5!}{i!(5-i)!} \left(\frac{70-t}{70}\right)^{5-i} \left(\frac{t}{70}\right)^i P_i$$

Anexo 2. Método para desarrollar controlador PI

Para determinar los parámetros del controlador (k_p , T_i) se utiliza el método que se denomina “reglas de sintonía de Ziegler-Nichols”; específicamente, el segundo método. Este consiste sólo en usar temporalmente la parte proporcional del PI como en la Figura A.2.1. Se varia la ganancia k_p desde 0 hasta un valor crítico k_{cr} en donde la salida exhibe oscilaciones sostenidas, como se muestra en la Figura A.2.2

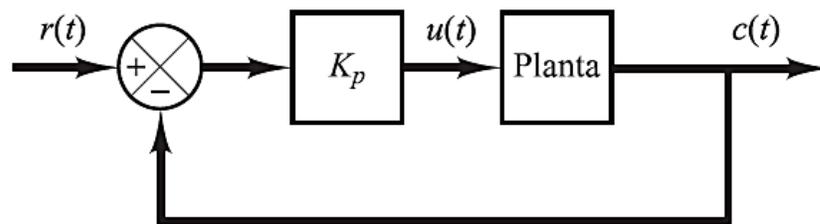


Figura A.2.1 Sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional.

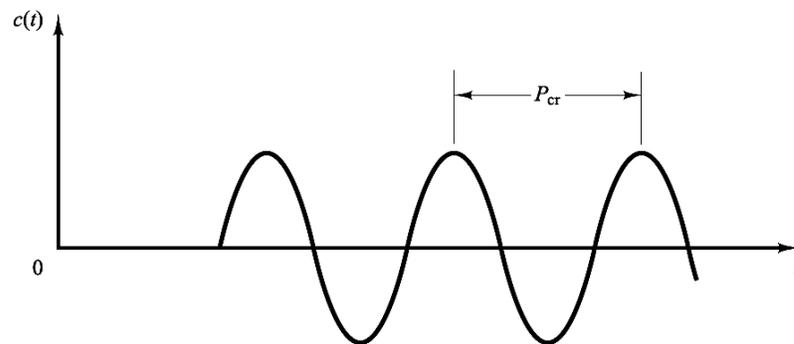


Figura A.2.2 Oscilación sostenida con periodo P_{cr} (P_{cr} se mide en segundos).

así, la ganancia crítica k_{cr} y el periodo P_{cr} correspondiente se determinan experimentalmente como se ve en la Figura 4.24. Ziegler-Nichols sugirieron que se establecieran los valores de los parámetros k_p , y T_i de acuerdo con la fórmula que se muestra en la siguiente Tabla (A.2).

Tipo	k_p	T_i	T_d
P	$0.5 k_{cr}$	∞	0
PI	$0.45 k_{cr}$	$\frac{P_{cr}}{1.2}$	0
PID	$0.6 k_{cr}$	$0.5 P_{cr}$	$0.125 P_{cr}$

Tabla A.2 Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la ganancia y periodo.

Para determinar los parámetros del controlador PI, se sustituye los valores de k_{cr} y P_{cr} de acuerdo al sistema de lazo cerrado para la grúa de caballete:

$$k_p = 0.45 \quad (2.22)$$

$$T_i = \frac{11}{1.2}$$

desarrollando lo anterior tenemos $k_p = 1$ y $T_i = 9.2$

Anexo 3. Diagrama de Simulación: Platitisud diferencial más IDA-PBC

El esquema de control combinado se desarrolla en el software MATLAB® con SIMULINK® como se muestra en la Figura A.3

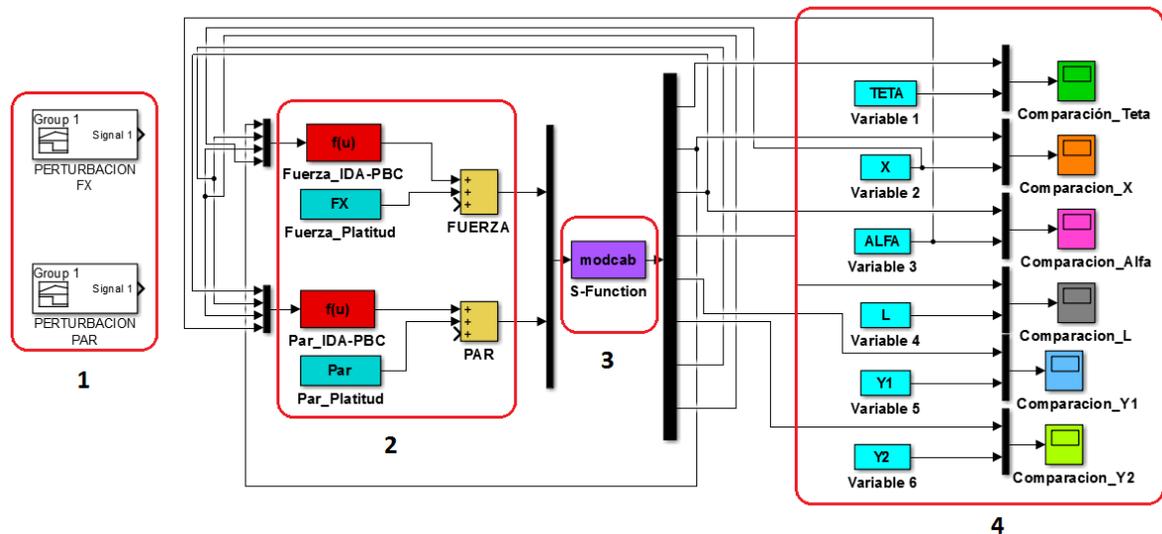


Figura A.3 Diagrama en Simulink de del esquema de control platitisud más IDA-PBC.

en la Figura A.3 se presentan cuatro bloques, los cuales son:

- 1.- Perturbaciones
- 2.- Control combinado Platitisud diferencial más IDA-PBC
- 3.- Grúa de Caballete
- 4.- Comparación de variables y trayectoria

En el primer bloque se tiene las perturbaciones que afectan al sistema para verificar que controlador presenta un mejor desempeño en presencia de cada perturbación.

En el segundo bloque se tiene la ley de control combinada. Los cuadros en color azul representan las leyes de control prealimentado basadas en las nociones de platitisud diferencial dadas por las expresiones 4.10 y 4.11. Los cuadros en color rojo representan las leyes de control retroalimentada basadas en el método baso en pasividad IDA-PBC dadas por la expresión 4.41

presentada en el capítulo 4. La suma de las leyes representa la ley de control combinada Platitude diferencial más IDA-PBC.

En el tercer bloque se tiene el modelo de la grúa de caballete presentado en la Sección 3.2 del capítulo 3; la dinámica que representa al sistema se desarrolla en el bloque S-Function de Simulink.

En el cuarto bloque se presenta la comparación de las variables del sistema y de las curvas que representan la carga en el eje horizontal (y_1) y vertical (y_2). Los cuadros en color azul representan el comportamiento para cada variable dado por platitude diferencial; es decir la parametrización en términos de las salidas planas y de sus derivadas sucesivas.

Anexo 4. Diagrama de Simulación: Platitud diferencial más PI

El esquema de control combinado se desarrolla en el software MATLAB® con SIMULINK® como se muestra en la Figura A.4

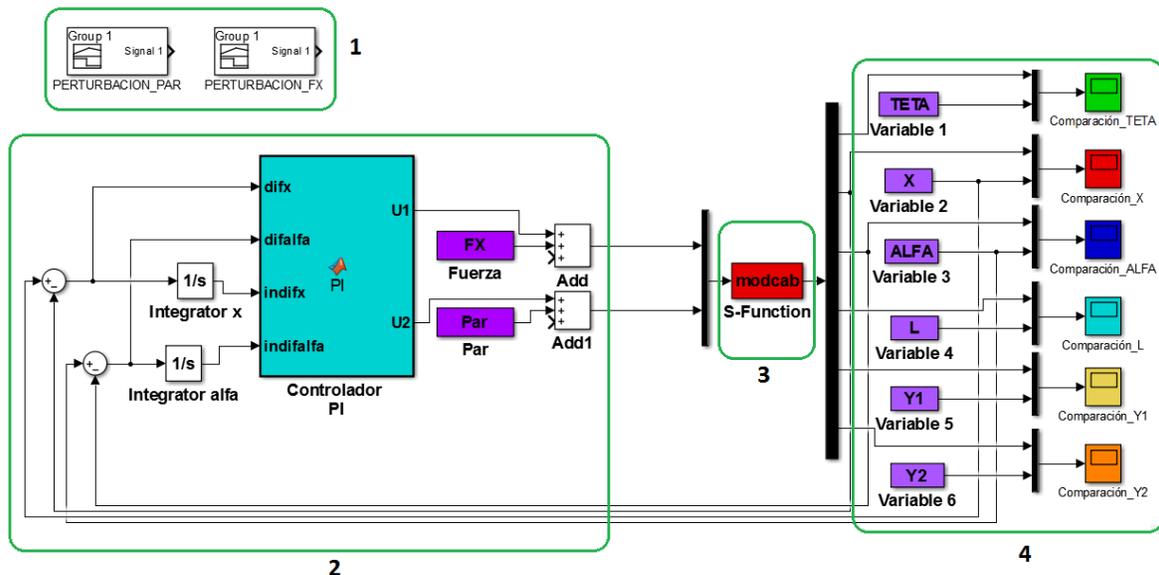


Figura A.4 Diagrama en Simulink del esquema de control platitud más PI.

en la Figura A.4 se presentan cuatro bloques, que son:

- 1.- Perturbaciones
- 2.- Control combinado Platitud diferencial más PI
- 3.- Grúa de Caballete
- 4.- Comparación de variables y trayectoria

En el primer bloque se tiene las perturbaciones que afectan al sistema para verificar que controlador presenta un mejor desempeño en presencia de cada perturbación.

En el segundo bloque se tiene la ley de control combinada. Los cuadros en color morado representan la ley de control prealimentado basadas en las nociones de platitud diferencial dadas por las expresiones 4.10 y 4.11. El cuadro en color azul representa las leyes de control retroalimentada basadas en PI dadas por las expresiones 4.45 y 4.46 presentadas en el capítulo 4. La suma de las leyes representa la ley de control combinada Platitud diferencial más PI.

En el tercer bloque se tiene el modelo de la grúa de caballete presentado en la Sección 3.2 del capítulo 3; la dinámica que representa al sistema se desarrolla en el bloque S-Function de Simulink.

El cuarto bloque representa la comparación de las variables del sistema y de las curvas que representan la carga en el eje horizontal (y_1) y vertical (y_2). Los cuadros en color morado representan la parametrización de las variables del sistema en términos de las salidas planas y sus derivadas sucesivas basado en platitud diferencial, como se presentó en la Sección 4.1 del capítulo 4.