

NOMBRE DEL TRABAJO

Apuntes_Calc_Vect_HPLA_2023-Final.pdf

AUTOR

Luis Arturo Hernández Portillo

RECuento DE PALABRAS

46548 Words

RECuento DE CARACTERES

170199 Characters

RECuento DE PÁGINAS

507 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

16.2MB

FECHA DE ENTREGA

Mar 12, 2024 7:33 AM CST

FECHA DEL INFORME

Mar 12, 2024 7:37 AM CST

● 14% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

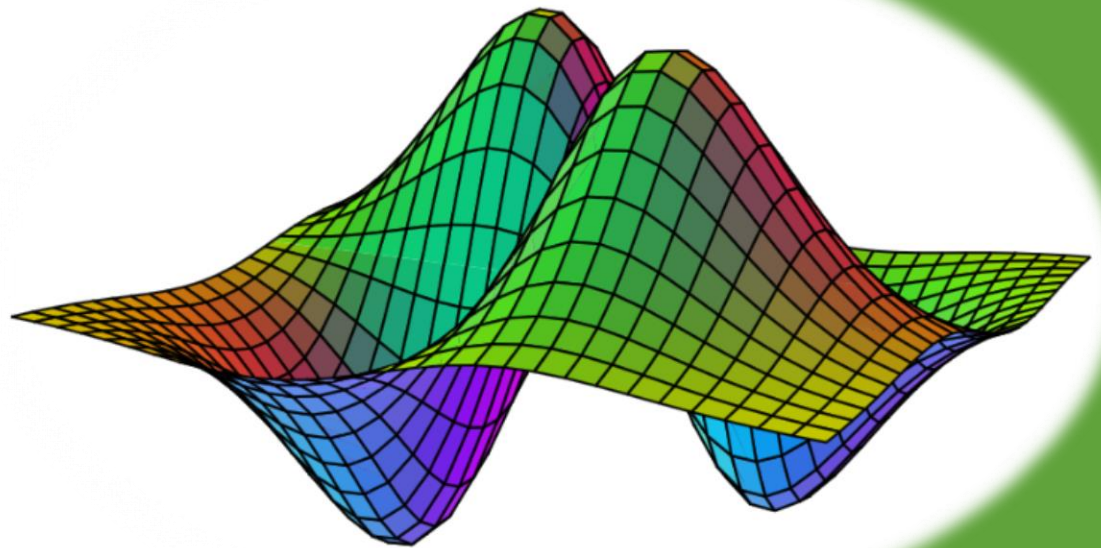
- 9% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 5% Base de datos de trabajos entregados
- 4% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref



TEC, DE
JUÁREZ
Forjando el futuro...

Sabático
Enero – Junio
de 2023

Apuntes de Cálculo Vectorial



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®

Luis Arturo Hernández Portillo

TecNM – IT de Cd. Juárez

Sabático Enero – Junio de 2023



Contribución Académica:

Se desarrollan estas notas con el fin de contribuir académicamente en la mejora de la calidad de la enseñanza-aprendizaje del Cálculo Vectorial a través del uso de herramientas tecnológicas visuales como el Applet CalcPlot3D que puede ser utilizado en todo el curso de Cálculo vectorial del TecNM, así como el uso de Geogebra o Wolfram Alpha para visualizar o verificar algunos de los cálculos que se desarrollan en estas notas.

Contenido

Contenido	3
Introducción	6
1. Álgebra de vectores en R^2 y R^3	7
1.1 Definición de vector y escalar, gráfica y módulo de un vector en R^2 y R^3 . 7	
1.2 Operaciones básicas: ² suma de vectores y producto por un escalar.	22
1.3 ¹ Producto escalar, trabajo efectuado por una fuerza, ángulo entre dos vectores, ¹ ecuación de la recta en el espacio.	49
1.4 ⁶ Producto vectorial. Planos en el espacio, ecuación de un plano en el espacio, ángulo entre dos planos, cálculo de áreas de paralelogramos y triángulos.	88
1.5 Triple producto escalar. Volumen de un paralelepípedo.	116
2. Funciones vectoriales en una variable real	118
2.1 Ecuaciones paramétricas. Definiciones. Curvas planas y trayectorias. .	118
2.2 Definición de función vectorial, función vectorial y gráficas.....	155
⁵ 2.3 Límites y continuidad de una función vectorial.....	158
¹ 2.4 Derivada de una función vectorial, vector tangente a una curva y velocidad. 166	
2.5 Segunda derivada, aceleración, segunda Ley de Newton.	169
¹ 2.6 Integración de una función vectorial y longitud de arco en coordenadas cartesianas. (Áreas se verá con menor importancia)	171
2.7 Tangente, normal y binormal unitarios, representación gráfica.....	208

2.8	Curvatura, descomposición de la aceleración en sus componentes normal y tangencial.....	229
3.	Funciones de varias variables.....	239
3.1	Definiciones y ejemplos.....	239
3.2	Representación geométrica ⁵ de funciones de dos variables. Curvas y superficies de nivel.....	241
3.3	¹ Límites y continuidad de una función de varias variables.	248
3.4	Derivadas parciales, incrementos y diferenciales, diferencial total.	255
¹ 3.5	Regla de la cadena, derivada implícita.....	275
3.6	Derivadas parciales de orden superior.....	282
3.7	Derivada direccional y gradiente.	293
3.8	Valores extremos de funciones de varias variables, ¹ plano tangente y recta normal a una superficie.....	306
4.	Integración múltiple	336
4.1	Integrales iteradas.....	336
4.2	Integral doble en coordenadas rectangulares y cálculo de áreas planas. 349	
4.3	Cálculo de áreas de superficies curvas.....	363
¹² 4.4	Integrales dobles en coordenadas polares.....	369
4.5	Cálculo de volúmenes mediante integrales dobles.	380
4.6	Integral triple en coordenadas rectangulares. Volúmenes.	392
¹ 4.7	Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas.	397
5.	Integración vectorial	412
5.1	Campos vectoriales, divergencia, rotacional y campos conservativos. ...	412
5.2	Trabajo e integrales de línea.....	427

6.	Anexo	476
6.1	Anexo A: Introducción al uso de CalcPlot3D	476
6.2	Anexo B: Geogebra.....	498
6.3	Anexo C: Winplot	502
7.	Referencias	506



Introducción

En el presente trabajo se desarrolla el curso de Cálculo Vectorial basado en el programa del TecNM apoyado en herramientas tecnológicas visuales como el Applet CalcPlot3D que puede ser utilizado en los cinco elementos de competencia que comprende el curso, así como el uso de Geogebra o Wolfram Alpha para visualizar o verificar algunos de los cálculos que se desarrollan en estas notas. Cabe mencionar que en la mayoría de los ejercicios se estará implementando el Applet CalcPlot3D ya que fue diseñado, por el maestro Paul Seeburger del Monroe Community College (State University of New York), como herramienta auxiliar para cálculo vectorial.



1. Álgebra de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

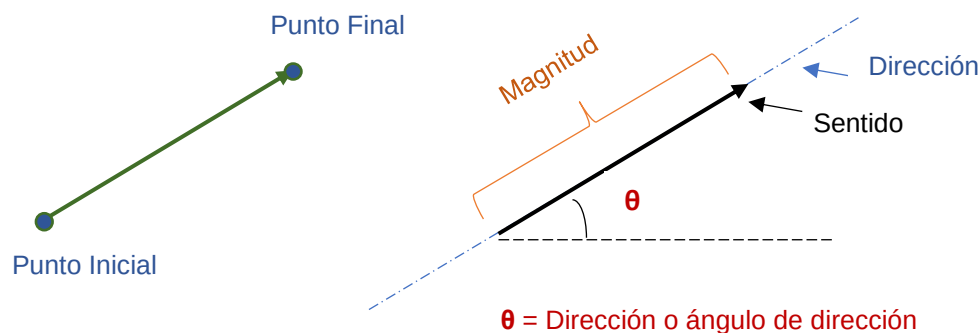
1.1 Definición de vector y escalar, gráfica y módulo de un vector en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Definición de vector:

A la lista ordenada o secuencia de números reales (componentes del vector) se llama vector de dimensión n . Por lo tanto, un vector del espacio $\mathbb{R}^n$ se representa como:

$$v = \vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \rangle, \text{ donde } v \in \mathbb{R}^n$$

Para interés de este curso definiremos un vector como ¹ un segmento de recta dirigido. Esto es, un vector queda determinado por su magnitud, su dirección y su sentido.



Un vector lo representaremos como un par o triada ordenada:

$$v = \vec{v} = \langle v_x, v_y \rangle, \text{ donde } v \in \mathbb{R}^2$$

$$v = \vec{v} = \langle v_x, v_y, v_z \rangle, \text{ donde } v \in \mathbb{R}^3$$

A continuación, se presentan algunos ejemplos de vectores con su respectiva gráfica realizada en CalcPlot3D

EJEMPLO 1

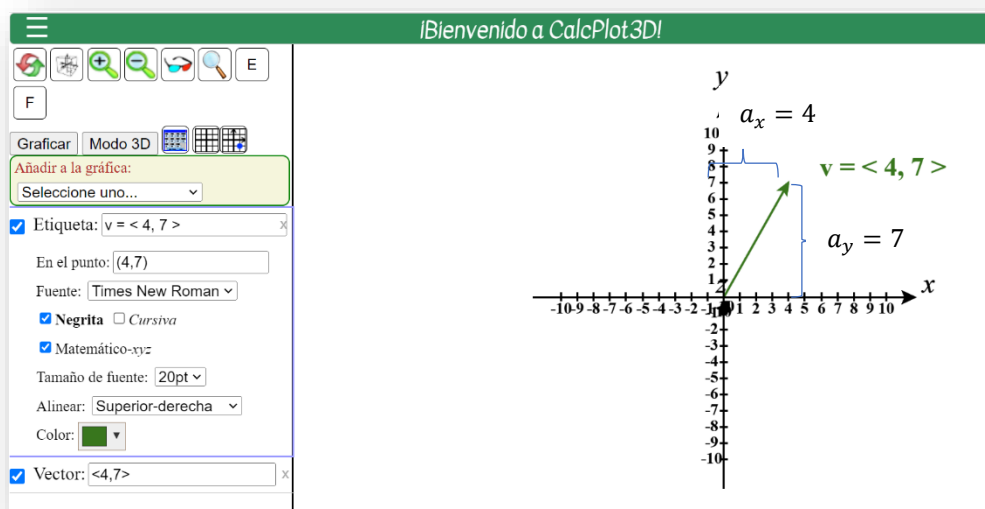
Sea $\vec{A} = \langle 4, 7 \rangle$, representa gráficamente al vector.

Solución:

Componente en x : $a_x = 4$

Componente en y : $a_y = 7$

Para visualizar la gráfica del vector se recurre al CalcPlot3D (ver Anexo A para el uso del Applet):



EJEMPLO 2

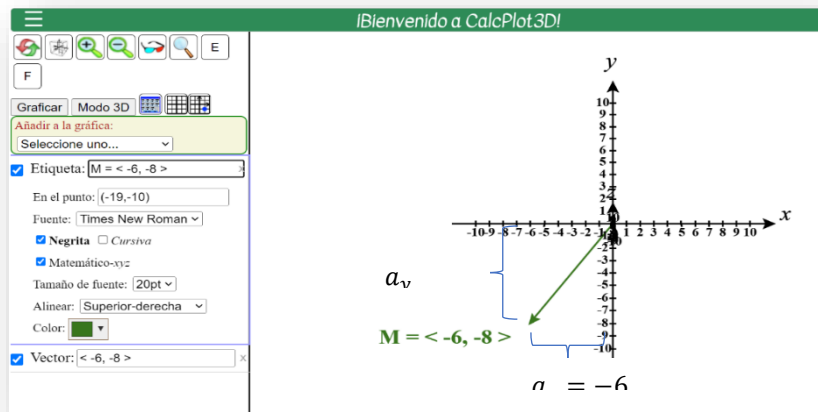
Sea $\vec{M} = \langle -6, -8 \rangle$, representa gráficamente al vector.

Solución:

Componente en x : $m_x = -6$

Componente en y : $m_y = -8$

Para visualizar la gráfica del vector se recurre al CalcPlot3D (ver Anexo A para el uso del Applet):



EJEMPLO 3

Sea $\vec{R} = \langle 4, -9, 5 \rangle$, representa gráficamente al vector.

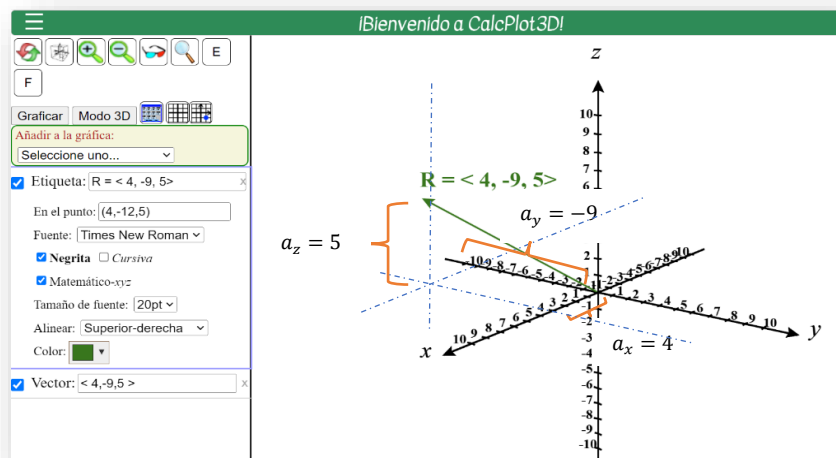
Solución:

Componente en x: $r_x = 4$

Componente en y: $r_y = -9$

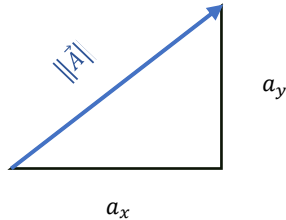
Componente en z: $r_z = 5$

Para visualizar la gráfica del vector se recurre al CalcPlot3D (ver Anexo A para el uso del Applet):



Magnitud y dirección de un vector en R^2 :

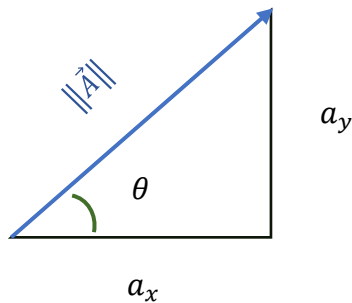
La magnitud de un vector conocidas sus componentes se obtienen aplicando el teorema de Pitágoras:



$$\|\vec{A}\|^2 = (a_x)^2 + (a_y)^2$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$

El *ángulo de dirección* θ se calcula utilizando la función tangente ya que conocemos los catetos (ambas componentes del vector).



$$\tan(\theta) = \frac{co}{ca} = \frac{a_y}{a_x}$$

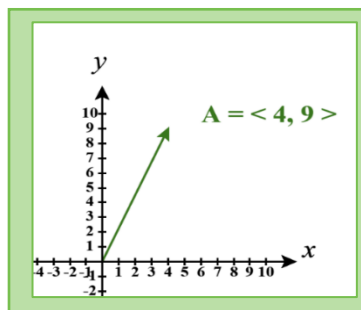
$$\theta = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$



El *ángulo de dirección* θ es con respecto al semieje x positivo, se debe tener en cuenta el cuadrante en el que se encuentra el vector.

EJEMPLO 4

Calcular la magnitud y dirección del vector dado gráficamente:



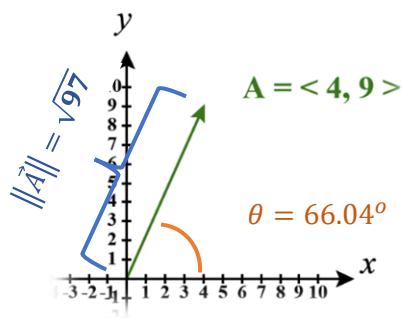
Solución:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(4)^2 + (9)^2} = \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97} = 9.85$$

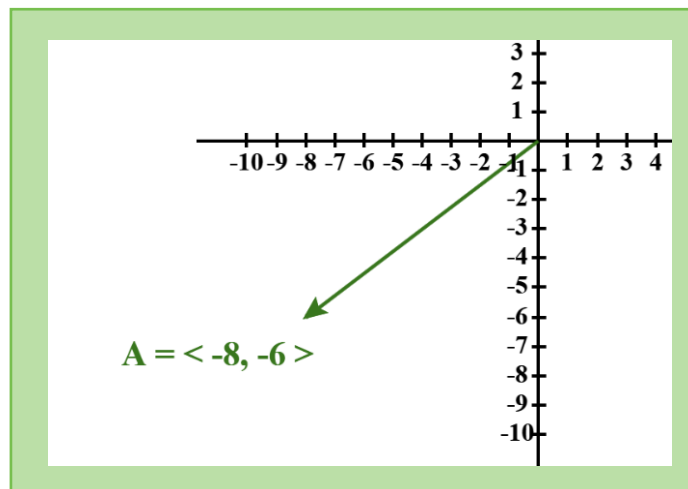
$$\theta = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$\theta = 66.04^\circ$$



EJEMPLO 5

Calcular la magnitud y dirección del vector dado gráficamente:



Solución:

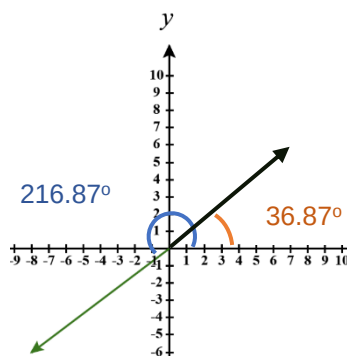
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{100} = \mathbf{10}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-6}{-8}\right) = \mathbf{36.87^\circ}$$

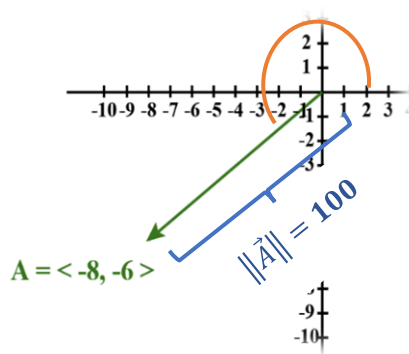
Como el vector se encuentra en el tercer cuadrante, es necesario sumar 180o al ángulo obtenido ya que dicho ángulo corresponde al primer cuadrante:



$$\theta \approx 180^\circ + 36.87^\circ = \mathbf{216.87^\circ}$$

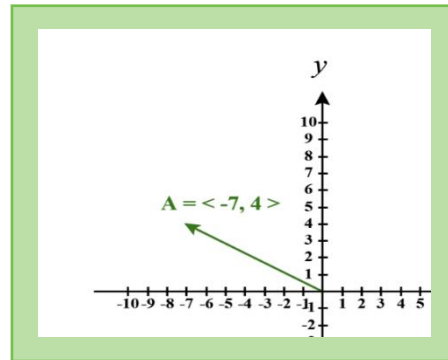
La respuesta es:

$$\theta = \mathbf{216.87^\circ}$$



EJEMPLO 6

Calcular la magnitud y dirección del vector dado gráficamente:



Solución:

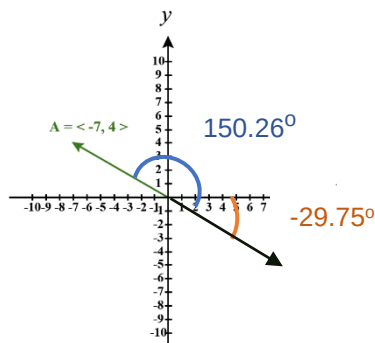
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(-7)^2 + (4)^2} = \sqrt{49 + 16}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{65} = \mathbf{8.06}$$

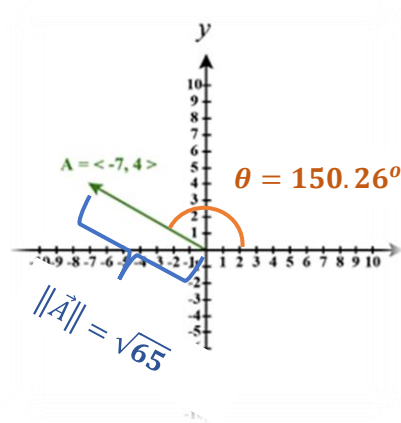
$$\theta = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{-7}\right) = \mathbf{-29.75^\circ}$$

Como el vector se encuentra en el segundo cuadrante, es necesario sumar 180° al valor del ángulo obtenido ya que dicho ángulo corresponde al primer cuadrante:



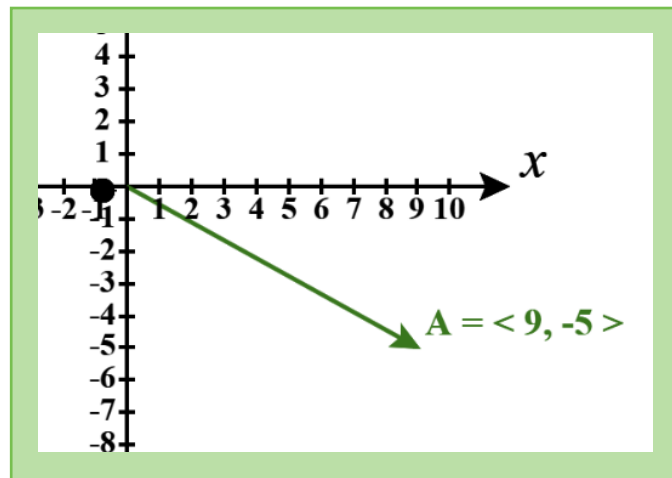
$$\theta \approx 180^\circ - 29.75^\circ = \mathbf{150.26^\circ}$$

La respuesta es:



EJEMPLO 7

Calcular la magnitud y dirección del vector dado gráficamente:



Solución:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$

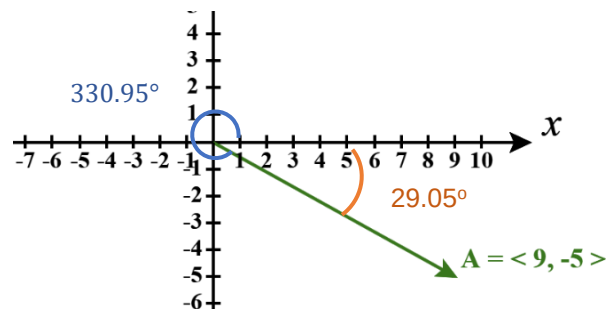
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(9)^2 + (-5)^2} = \sqrt{81 + 25}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{106} = \mathbf{10.3}$$

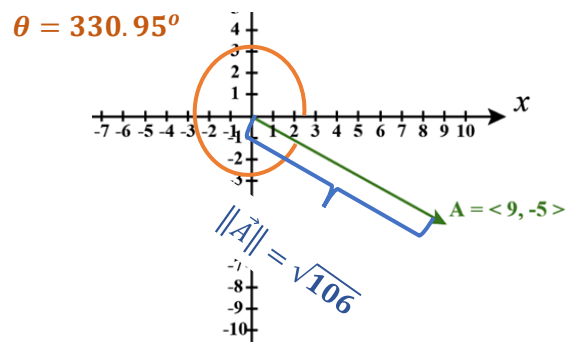
$$\theta = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{9}\right) = \mathbf{-29.05^\circ}$$

Como el vector se encuentra en el cuarto cuadrante, es necesario sumar 360° al ángulo obtenido ya que dicho ángulo corresponde al primer cuadrante:

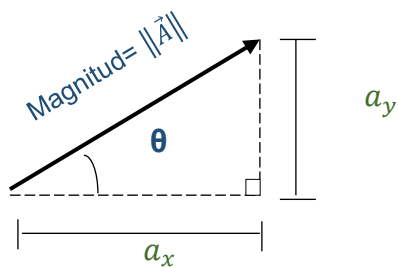
$$\theta \approx 360^\circ - 29.05^\circ = 330.95^\circ$$



La respuesta es:



Componentes de un vector en $\mathbb{R}^2$ dados magnitud y dirección:



$$\text{Sen } \theta = \frac{co}{h} = \frac{a_y}{\|\vec{A}\|}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{ca}{h} = \frac{a_x}{\|\vec{A}\|}$$

$$a_y = \|\vec{A}\| \text{sen}(\theta)$$

$$a_x = \|\vec{A}\| \text{cos}(\theta)$$

θ = Ángulo de dirección con respecto del semieje x positivo.

$$\vec{A} = \langle \|\vec{A}\| \cos(\theta), \|\vec{A}\| \operatorname{sen}(\theta) \rangle = \|\vec{A}\| \underbrace{\langle \cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta) \rangle}_{\text{Vector de magnitud 1}}$$

$$\|\langle \cos(\theta), \operatorname{Sen}(\theta) \rangle\| = 1$$

$$A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

$$A = \sqrt{(\cos(\theta))^2 + (\operatorname{sen}(\theta))^2} = \sqrt{1} = 1$$

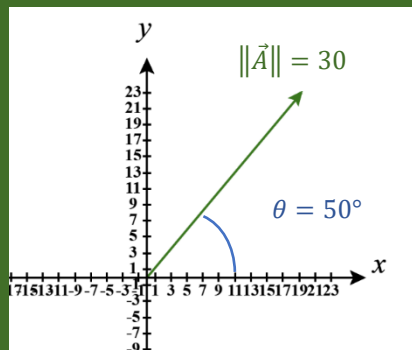
En base a lo anterior un vector puede ser expresado en función de su magnitud y dirección:

$$\vec{A} = \underbrace{\|\vec{A}\|}_{\text{Magnitud}} \underbrace{\langle \cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta) \rangle}_{\text{Dirección}}$$

EJEMPLO 8

Calcular las componentes en x y y de cada uno de los siguientes casos:

a)



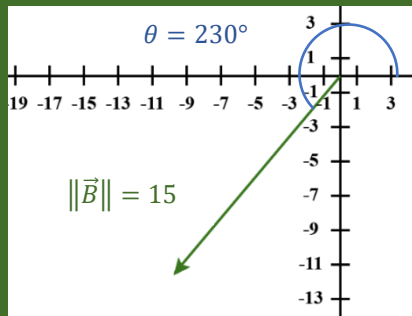
Solución:

$$a_x = \|\vec{A}\| \cos(\theta) = 30 \cos(50^\circ) = 19.28$$

$$a_y = \|\vec{A}\| \operatorname{sen}(\theta) = 30 \operatorname{Sen}(50^\circ) = 22.98$$

$$\vec{A} = \langle \mathbf{19.28}, \mathbf{22.98} \rangle$$

b)



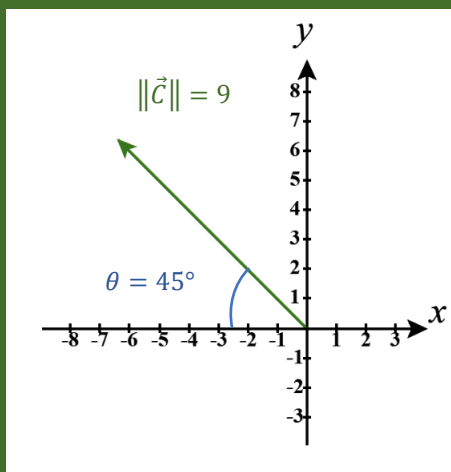
Solución:

$$b_x = \|\vec{B}\| \cos(\theta) = 15 \cos(230^\circ) = -9.64$$

$$b_y = \|\vec{B}\| \sin(\theta) = 15 \sin(230^\circ) = -11.49$$

$$\vec{B} = \langle -9.64, -11.49 \rangle$$

c)



Solución:

Considerando el ángulo con respecto a la horizontal (semieje x positivo):

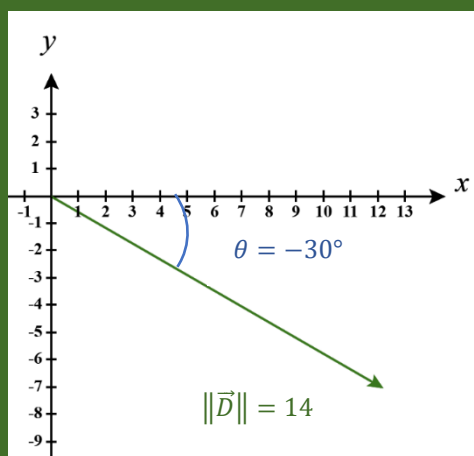
$$\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$c_x = \|\vec{C}\| \cos(\theta) = 9 \cos(135^\circ) = -6.36$$

$$c_y = \|\vec{C}\| \sin(\theta) = 9 \sin(135^\circ) = 6.36$$

$$\vec{C} = \langle -6.36, 6.36 \rangle$$

d)



Solución:

Considerando el ángulo con respecto a la horizontal (semieje x positivo):

$$\theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

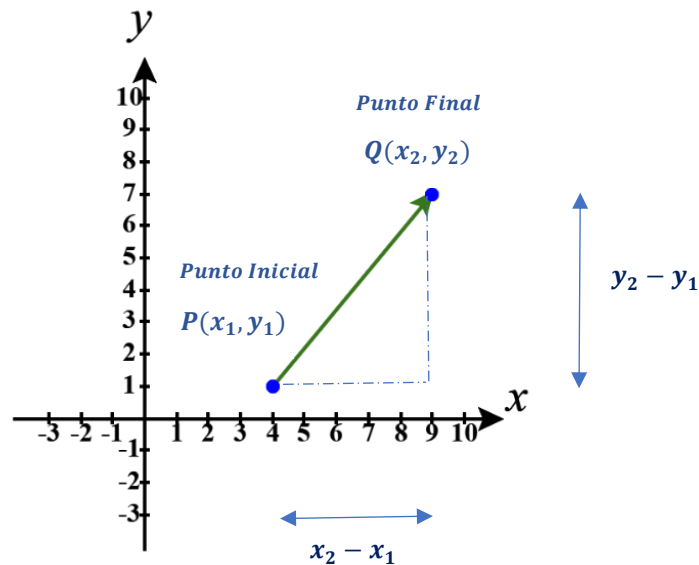
$$d_x = \|\vec{D}\| \cos(\theta) = 14 \cos(330^\circ) = 12.12$$

$$d_y = \|\vec{D}\| \sin(\theta) = 14 \sin(330^\circ) = -7$$

$$\vec{D} = \langle 12.12, -7 \rangle$$

Componentes de un vector dados punto inicial y punto final:

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ los puntos inicial y final del vector $\vec{V}$, entonces las componentes de $\vec{V}$ vienen dadas por:



$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{Punto final}} - \overrightarrow{\text{Punto inicial}}$$

$$\vec{V} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

EJEMPLO 9

Calcula las componentes, la magnitud y la dirección del vector que tiene como punto inicial $A(12, -7)$ y punto final $B(-2, -4)$:

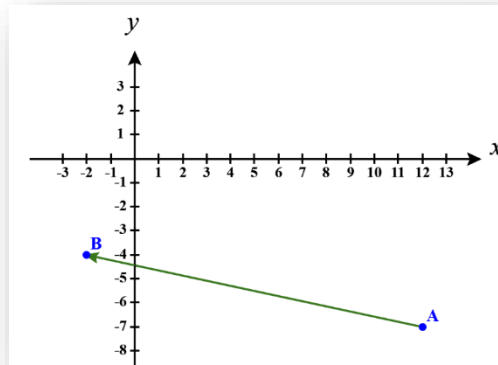
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - 12)\hat{i} + (-4 - (-7))\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = -14\hat{i} + 3\hat{j}$$

Realizando la gráfica en CalcPlot3D se tiene:



Como se observa en la gráfica la dirección del vector va del punto A (punto inicial) hacia el punto B (punto final).

La siguiente gráfica contiene al vector obtenido y al *vector de posición* correspondiente:

Vector de posición: Vector cuyo punto inicial se encuentra en el origen.

A continuación, se calcula la magnitud y dirección del vector $\overrightarrow{AB}$:

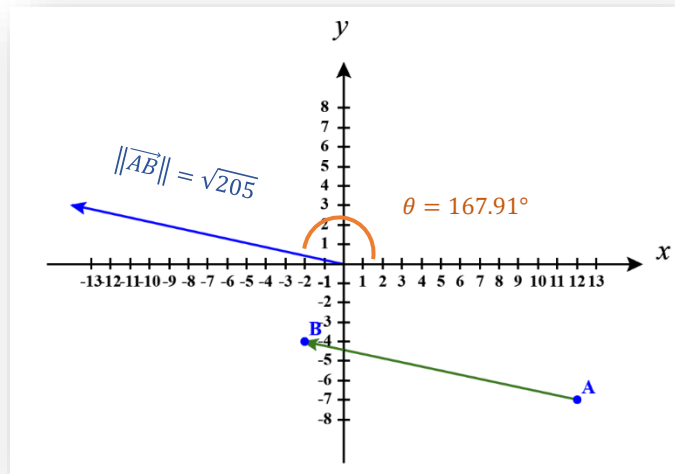
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-14)^2 + (3)^2} = \sqrt{196 + 9} = \sqrt{205}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{-14}\right) = -12.09^\circ$$

El valor correcto es: $\theta = 180^\circ - 12.09^\circ = 167.91^\circ$

Ya que el vector se encuentra en el segundo cuadrante.



EJEMPLO 10

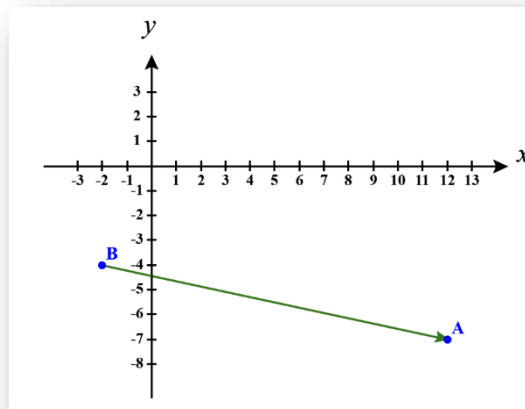
Con los datos del ejercicio anterior determina las componentes del vector $\overrightarrow{BA}$ y realiza la gráfica.

Solución:

$$\overrightarrow{BA} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{BA} = (12 - (-2))\hat{i} + (-7 - (-4))\hat{j}$$

$$\overrightarrow{BA} = 14\hat{i} - 3\hat{j}$$



A continuación, se calcula la magnitud y dirección del vector $\overrightarrow{BA}$:

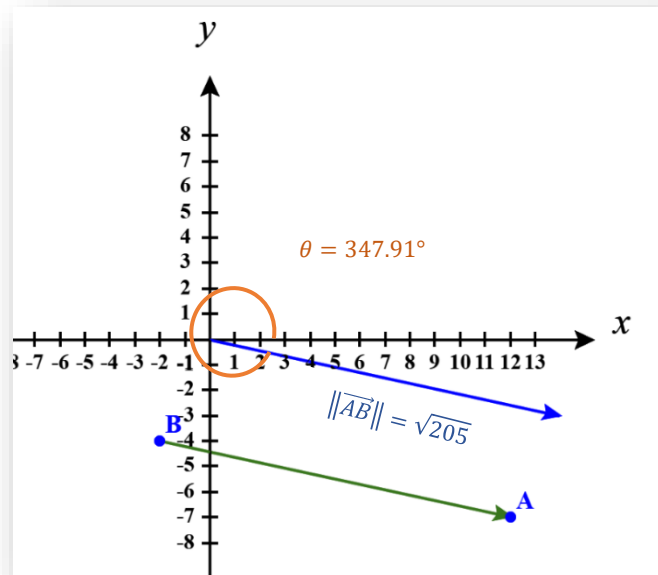
$$\|\vec{BA}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\|\vec{BA}\| = \sqrt{(14)^2 + (-3)^2} = \sqrt{196 + 9} = \sqrt{205}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{14}\right) = -12.09^\circ$$

El valor correcto es: $\theta = 360^\circ - 12.09^\circ = 347.91^\circ$

Ya que el vector se encuentra en el cuarto cuadrante.

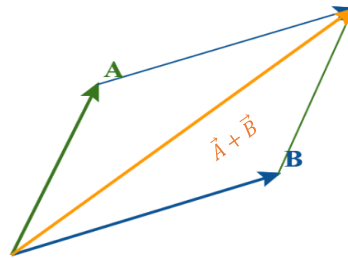


1.2 Operaciones básicas: ¹ suma de vectores y ² producto por un escalar.

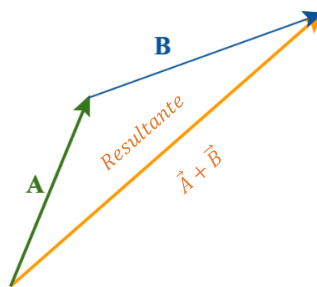
Suma de vectores en R^2 :

² Para calcular la suma de vectores se realiza la suma de componente a componente, es decir, se suman las componentes respectivamente:

³³ Sean $\vec{A} = \langle a_x, a_y \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_x, b_y \rangle$ entonces, $\vec{A} + \vec{B} = \langle a_x + b_x, a_y + b_y \rangle$



¹ De forma gráfica desplazamos el vector $\vec{B}$ al punto final del vector $\vec{A}$ y la suma será el vector que une el punto inicial de $\vec{A}$ y el punto final de $\vec{B}$, llamada también **resultante**.



Resta de vectores en R^2 :

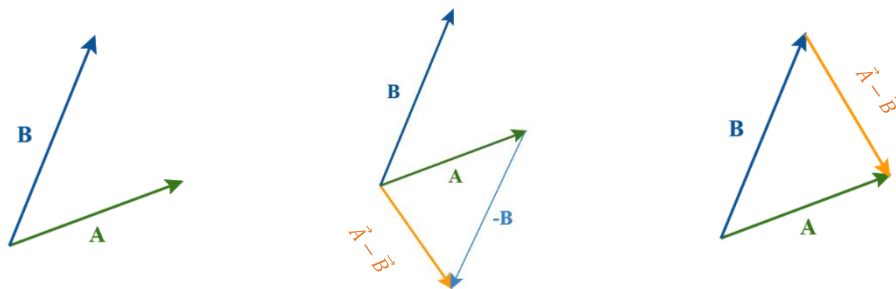
Para calcular la resta de vectores se realiza la diferencia de componente a componente, es decir, se restan las componentes respectivamente y respetando el orden de la resta:

Sean $\vec{A} = \langle a_x, a_y \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_x, b_y \rangle$ entonces:

$$\vec{A} - \vec{B} = \langle a_x - b_x, a_y - b_y \rangle$$

$$\vec{B} - \vec{A} = \langle b_x - a_x, b_y - a_y \rangle$$

En el caso de $\vec{A} - \vec{B}$, de forma gráfica desplazamos el vector $-\vec{B}$ al punto final del vector $\vec{A}$ y la resta será el vector que une el punto inicial de $\vec{A}$ y el punto final de $-\vec{B}$.



Multiplicación por escalar en R^2 :

Para realizar el producto de un vector por un escalar (se llama *escalar a cualquier cantidad real*), el producto se realiza multiplicando cada componente por el escalar.

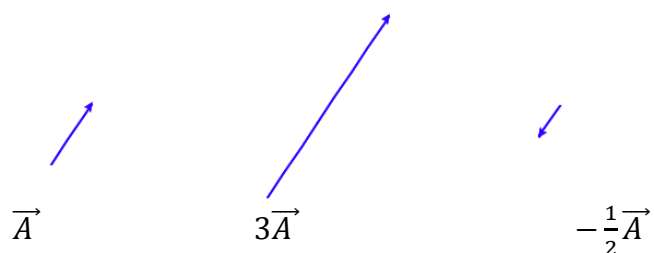
Sean el vector $\vec{A} = \langle a_x, a_y \rangle$ y el escalar α entonces:

$$\alpha(\vec{A}) = \alpha \langle a_x, a_y \rangle = \langle \alpha a_x, \alpha a_y \rangle$$

Al calcular la magnitud del producto se puede observar que afecta la magnitud del vector, pero no su dirección:

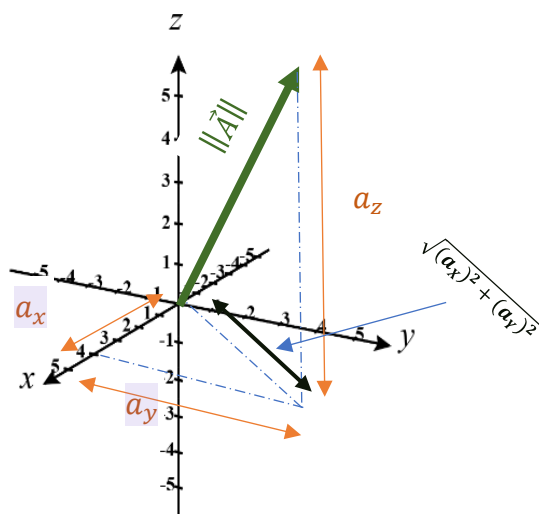
$$\|\alpha A\| = \sqrt{(\alpha a_x)^2 + (\alpha a_y)^2} = \sqrt{\alpha^2 a_x^2 + \alpha^2 a_y^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^2(a_x^2 + a_y^2)} = |\alpha| \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = |\alpha| \|\vec{A}\|$$



Magnitud de un vector en R^3 :

Para obtener la magnitud de un vector conocidas sus componentes simplemente aplicamos el teorema de Pitágoras como se muestra a continuación:



$$\|\vec{A}\|^2 = \left(\sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}\right)^2 + (a_z)^2$$

$$\|\vec{A}\|^2 = (a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$$

2

Suma de vectores en R^3 :

La suma de vectores se calcula sumando de componente a componente, es decir, se suman las componentes respectivamente:

Sean $\vec{A} = \langle a_x, a_y, a_z \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_x, b_y, b_z \rangle$ entonces:

$$\vec{A} + \vec{B} = \langle a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z \rangle$$

Resta de vectores en R^3 :

La resta de vectores se obtiene realizando la diferencia de componente a componente, es decir, se restan las componentes respectivamente y respetando el orden de la resta:

Sean $\vec{A} = \langle a_x, a_y, a_z \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_x, b_y, b_z \rangle$ entonces:

$$\vec{A} - \vec{B} = \langle a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z \rangle$$

$$\vec{B} - \vec{A} = \langle b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z \rangle$$

Multiplicación por escalar en R^3 :

El producto de un vector por un escalar se realiza multiplicando cada componente por el escalar (número real cualquiera).

Sean el vector $\vec{A} = \langle a_x, a_y, a_z \rangle$ y el escalar α entonces:

$$\alpha \vec{A} = \langle \alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z \rangle$$

Al calcular la magnitud del producto se puede observar que afecta la magnitud del vector, pero no su dirección:

$$\|\alpha \vec{A}\| = \sqrt{(\alpha a_x)^2 + (\alpha a_y)^2 + (\alpha a_z)^2} = \sqrt{\alpha^2 a_x^2 + \alpha^2 a_y^2 + \alpha^2 a_z^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)} = |\alpha| \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |\alpha| \|\vec{A}\|$$

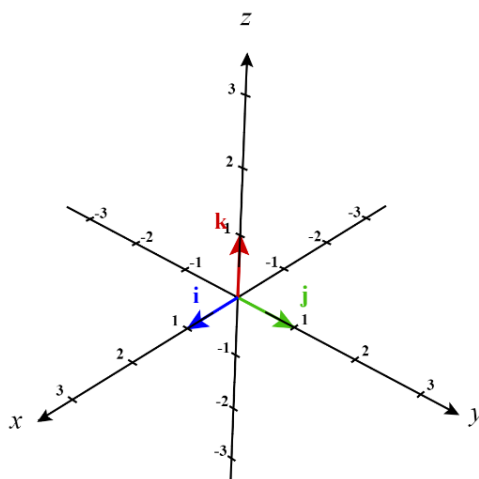
Vectores Canónicos

$$\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\|\hat{i}\| = \|\hat{j}\| = \|\hat{k}\| = 1$$



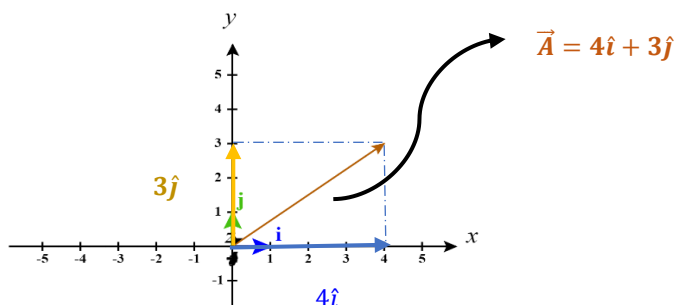
Un vector ¹ se puede expresar como combinación lineal de los vectores canónicos, esto se puede justificar aplicando el concepto de multiplicación por escalar y suma de vectores:

$$\vec{A} = \langle a_x, a_y, a_z \rangle$$

$$\vec{A} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

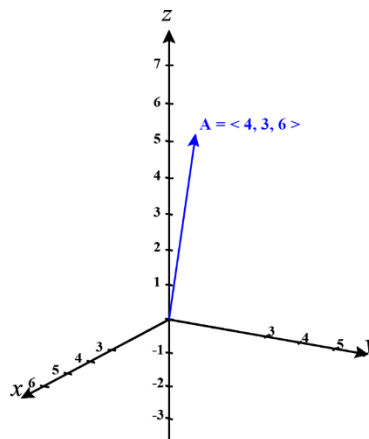
Ejemplo en R^2 :

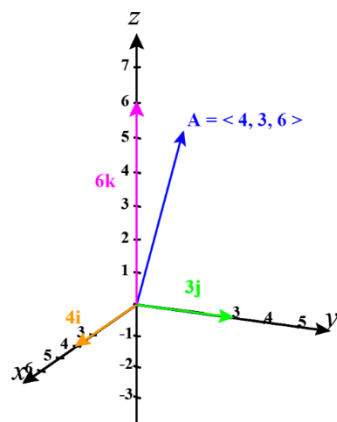
Sea $\vec{v} = \langle 4, 3 \rangle$



Ejemplo en R^3 :

$$\vec{A} = \langle 4, 3, 5 \rangle = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

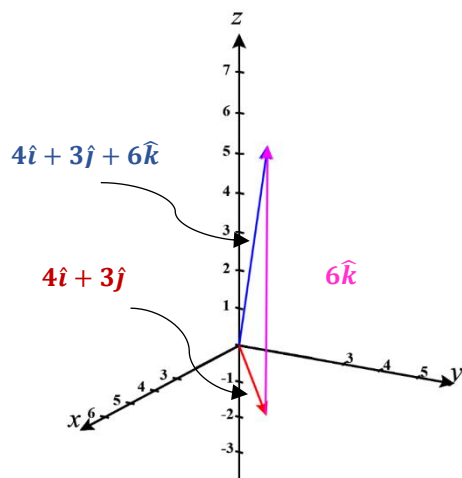
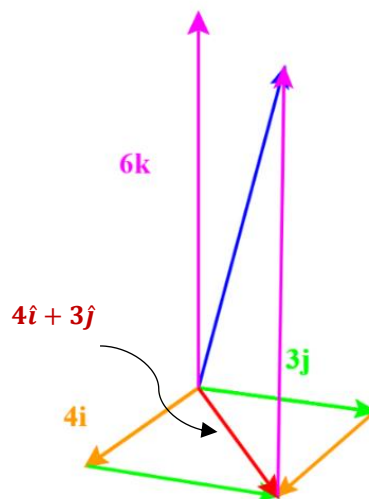




En la imagen se representan los vectores de dirección en cada uno de los ejes.

Al realizar la suma de $4\hat{i}$ con $3\hat{j}$, se tiene:

$$4\hat{i} + 3\hat{j}$$



Finalmente, al realizar la suma de $4\hat{i} + 3\hat{j}$ con $6\hat{k}$, se tiene:

$$4\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

Propiedades de los Vectores:

Sean $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ los vectores en el espacio y sean c y d escalares, entonces se cumple:

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ | <i>Propiedad Conmutativa</i> |
| 2. $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ | <i>Propiedad Asociativa</i> |
| 3. $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$ | <i>Neutro Aditivo</i> |
| 4. $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$ | <i>Inverso Aditivo</i> |
| 5. $c(d\vec{A}) = (cd)\vec{A} = d(c\vec{A})$ | |
| 6. $(c + d)\vec{A} = c\vec{A} + d\vec{A}$ | <i>Propiedad Distributiva</i> |
| 7. $c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B}$ | <i>Propiedad Distributiva</i> |
| 8. $1(\vec{A}) = \vec{A}, 0(\vec{A}) = \vec{0}$ | |

Vector Unitario:

Como el nombre lo indica es un vector de magnitud 1 y se puede considerar adimensional.

$$\vec{U}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

EJEMPLO 1

Sean los vectores $\vec{A} = 9\hat{i} - 2\hat{j}$ y $\vec{B} = -6\hat{i} - 7\hat{j}$, calcular:

a) $\vec{A} + \vec{B}$

b) $\vec{B} + \vec{A}$

c) $\vec{A} - \vec{B}$

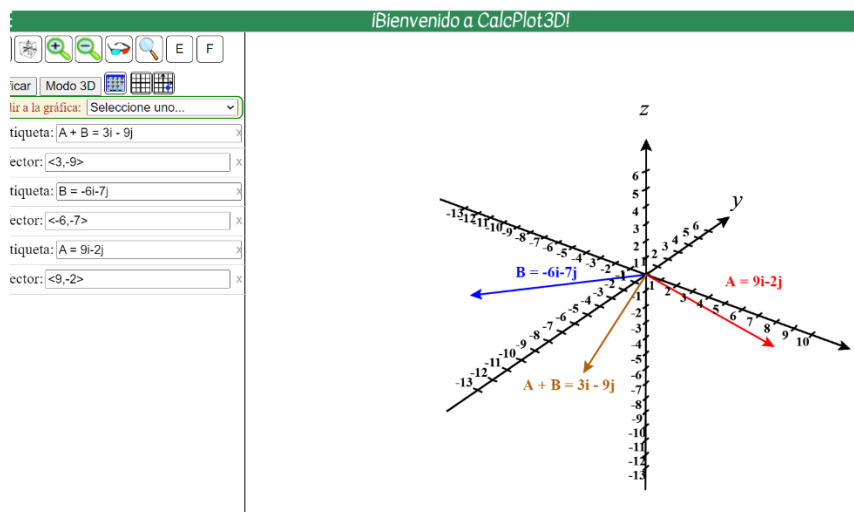
d) $\vec{B} - \vec{A}$

e) $2\vec{B}$

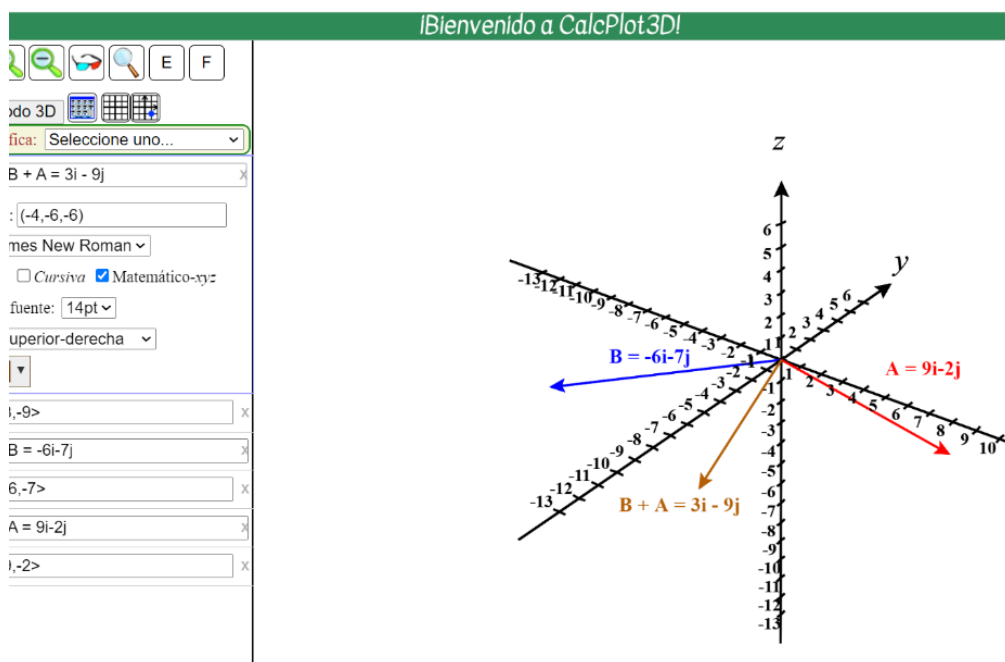
f) $-\frac{1}{2}\vec{A}$

Solución:

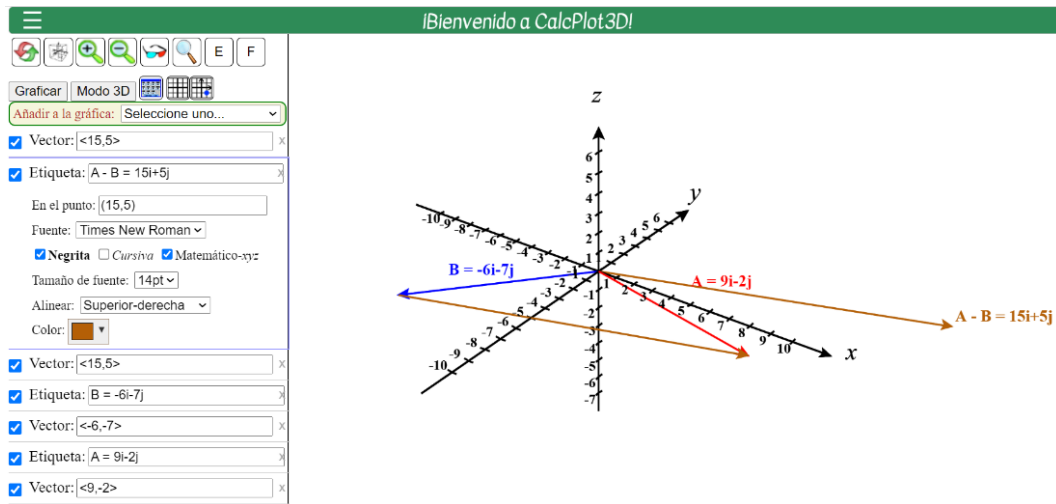
$$a) \vec{A} + \vec{B} = \langle 9, -2 \rangle + \langle -6, -7 \rangle = (9 + (-6))\hat{i} + (-2 + (-7))\hat{j} = 3\hat{i} - 9\hat{j}$$



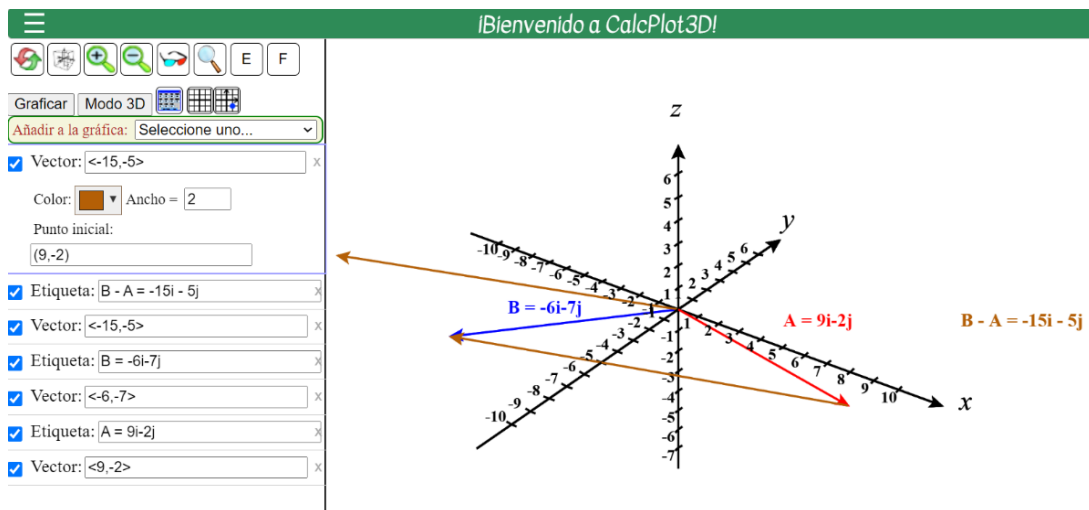
$$b) \vec{B} + \vec{A} = \langle -6, -7 \rangle + \langle 9, -2 \rangle = (-6 + 9)\hat{i} + (-7 + (-2))\hat{j} = 3\hat{i} - 9\hat{j}$$



c) $\vec{A} - \vec{B} = \langle 9, -2 \rangle - \langle -6, -7 \rangle = (9 - (-6))\hat{i} + (-2 - (-7))\hat{j} = \mathbf{15\hat{i} + 5\hat{j}}$



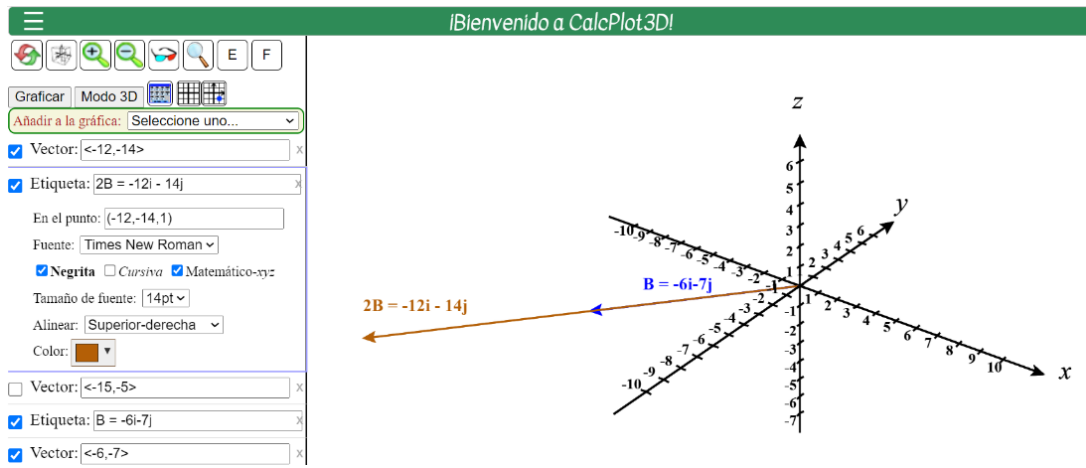
d) $\vec{B} - \vec{A} = (-6\hat{i} - 7\hat{j}) - (9\hat{i} - 2\hat{j}) = (-6 - 9)\hat{i} + (-7 - 2)\hat{j} = \mathbf{-15\hat{i} - 5\hat{j}}$



De lo anterior se puede observar que:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{A} - \vec{B} = -(\vec{B} - \vec{A})$$

$$e) 2\vec{B} = 2(-6\hat{i} - 7\hat{j}) = 2(-6)\hat{i} + 2(-7)\hat{j} = -12\hat{i} - 14\hat{j}$$

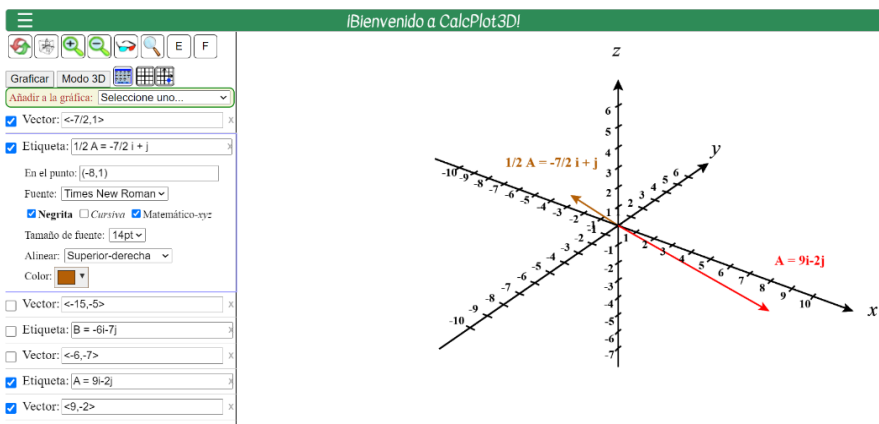


$$\vec{B} = -6\hat{i} - 7\hat{j} \rightarrow \|\vec{B}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-7)^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85}$$

$$2\vec{B} = -12\hat{i} - 14\hat{j} \rightarrow \|\vec{B}\| = \sqrt{(-12)^2 + (-14)^2} = \sqrt{340} = 2\sqrt{85}$$

Se verifica que al multiplicar un vector por un escalar modifica su magnitud más no su dirección.

$$f) -\frac{1}{2}\vec{A} = -\frac{1}{2}(9\hat{i} - 2\hat{j}) = -\frac{1}{2}(9)\hat{i} - \frac{1}{2}(-2)\hat{j} = -\frac{9}{2}\hat{i} + \hat{j}$$



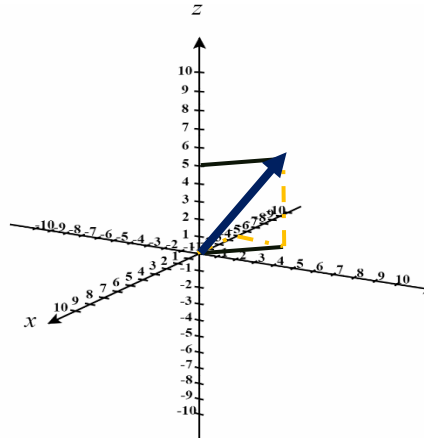
Al multiplicar por una cantidad negativa el vector cambia su sentido y magnitud, pero no su dirección.

EJEMPLO 2

Grafica cada uno de los vectores dados:

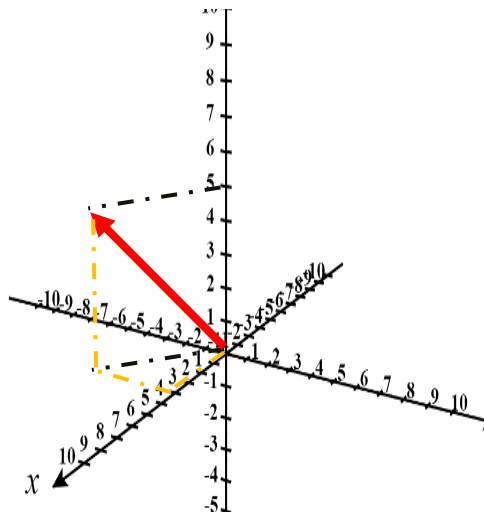
a) $\vec{A} = \langle -4, 3, 5 \rangle$

Solución:



b) $\vec{B} = \langle 4, -3, 5 \rangle$

Solución:



EJEMPLO 3

Sean $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$, determinar:

a) $\vec{A} + 2\vec{B}$

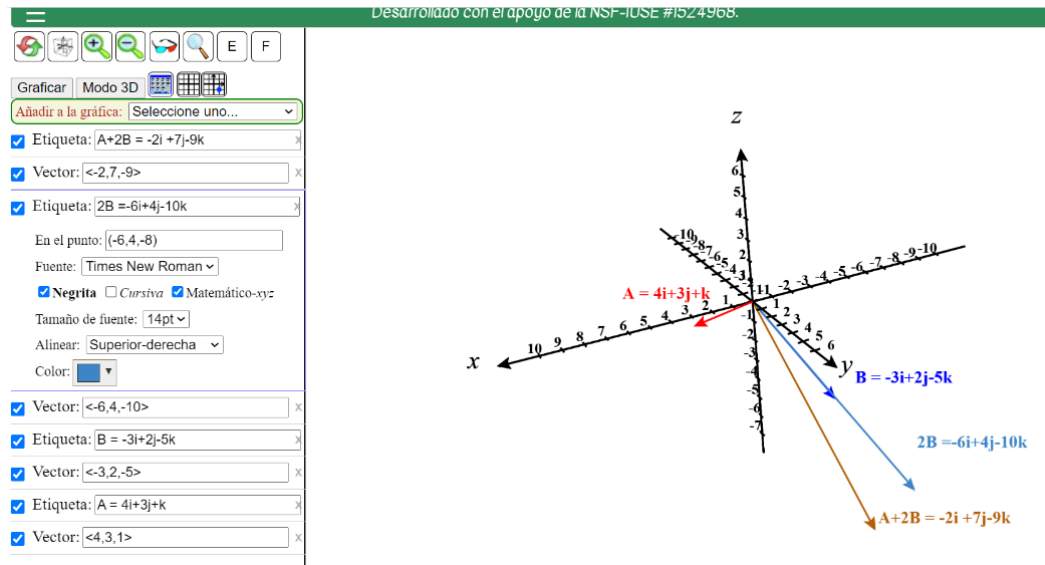
b) $\|3\vec{B} - 4\vec{A}\|$

c) $4\vec{A}$

d) $\frac{1}{3}\vec{B}$

Solución:

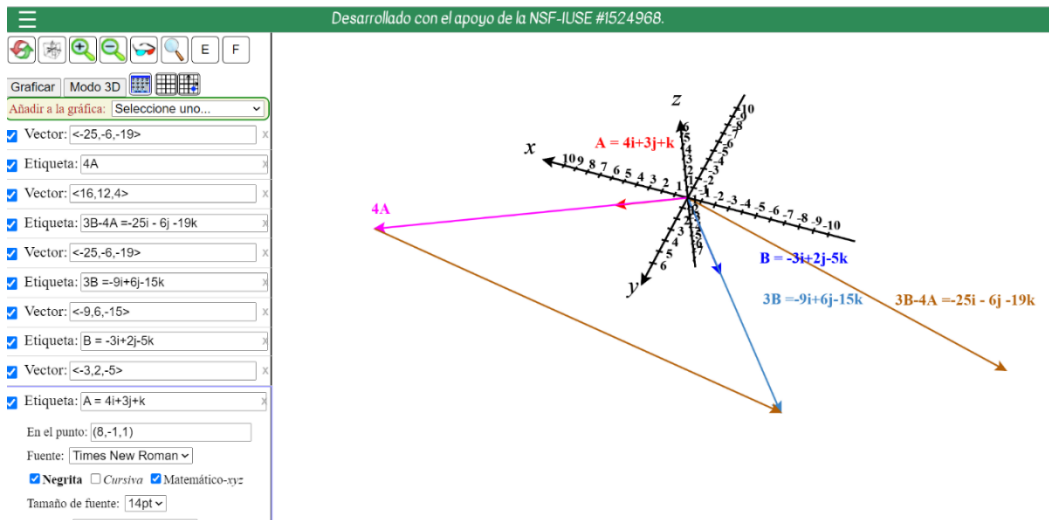
$$\begin{aligned}
 a) \vec{A} + 2\vec{B} &= (4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + 2(-3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) = (4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + (-6\hat{i} + 4\hat{j} - 10\hat{k}) \\
 &= (4 - 6)\hat{i} + (3 + 4)\hat{j} + (1 - 10)\hat{k} = -2\hat{i} + 7\hat{j} - 9\hat{k}
 \end{aligned}$$



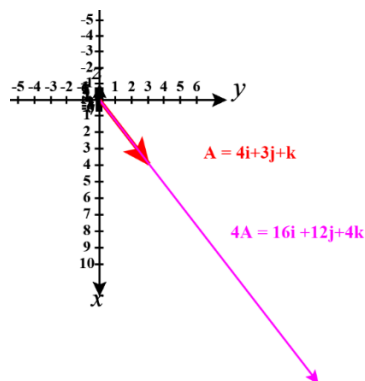
$$b) 3\vec{B} - 4\vec{A} =$$

$$\begin{aligned}
 &3(-3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) - 4(4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \\
 &= (-9\hat{i} + 6\hat{j} - 15\hat{k}) - (16\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}) \\
 &= (-9 - 16)\hat{i} + (6 - 12)\hat{j} + (-15 - 4)\hat{k} \\
 &= -25\hat{i} - 6\hat{j} - 19\hat{k}
 \end{aligned}$$

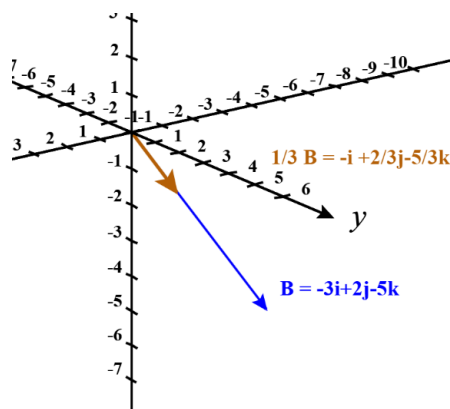
$$\begin{aligned}
 \|3\vec{B} - 4\vec{A}\| &= \sqrt{(-25)^2 + (-6)^2 + (-19)^2} \\
 &= \sqrt{625 + 36 + 361} = \sqrt{1022} = 31.97
 \end{aligned}$$



c) $4\vec{A} = 4(4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = 16\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$

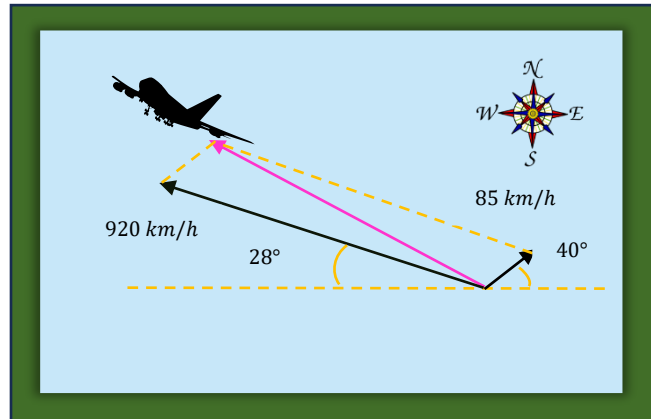


d) $\frac{1}{3}\vec{B} = \frac{1}{3}(-3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) = -\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{5}{3}\hat{k}$



EJEMPLO 4

3 Un avión vuela en dirección 32° , su velocidad con respecto al aire es de 900 km/h . El viento a la altitud del avión viene del suroeste a 100 km/h (ver figura). ¿Cuál es la verdadera dirección del avión y cuál es su velocidad respecto al suelo?



Solución:

$$\overrightarrow{v_{avión}} = 920 \cos(180^\circ - 28^\circ) \hat{i} + 920 \sin(180^\circ - 28^\circ) \hat{j}$$

$$\overrightarrow{v_{avión}} = 920 \cos(152^\circ) \hat{i} + 920 \sin(152^\circ) \hat{j}$$

$$\overrightarrow{v_{avión}} = -812.31 \hat{i} + 431.91 \hat{j}$$

$$\overrightarrow{v_{viento}} = 85 \cos(40^\circ) \hat{i} + 85 \sin(40^\circ) \hat{j}$$

$$\overrightarrow{v_{viento}} = 65.11 \hat{i} + 54.64 \hat{j}$$

$$\overrightarrow{v_{real \text{ del avión}}} = \overrightarrow{v_{avión}} + \overrightarrow{v_{viento}}$$

$$\overrightarrow{v_{real \text{ del avión}}} = (-812.31 \hat{i} + 431.91 \hat{j}) + (65.11 \hat{i} + 54.64 \hat{j})$$

$$\overrightarrow{v_{real \text{ del avión}}} = (-812.31 + 65.11) \hat{i} + (431.91 + 54.64) \hat{j}$$

$$\overrightarrow{v_{real \text{ del avión}}} = -747.2 \hat{i} + 486.55 \hat{j}$$

$$v_{real\ del\ avión} = \|\overrightarrow{v_{real\ del\ avión}}\| = \sqrt{(-747.2)^2 + (486.55)^2}$$

$$v_{real\ del\ avión} = \|\overrightarrow{v_{real\ del\ avión}}\| = 891. \frac{65km}{h}$$

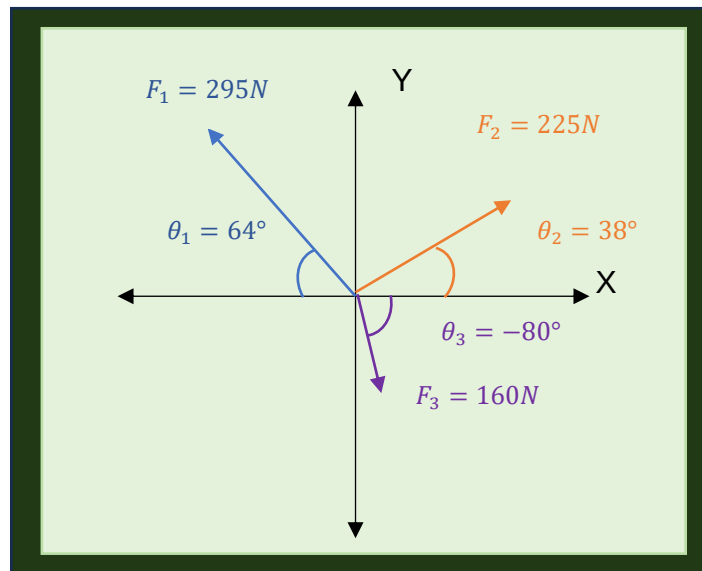
$$\theta_{real\ del\ avión} = \arctan\left(\frac{486.55}{-747.2}\right) = -33.07^\circ$$

$$\theta_{real\ del\ avión} = 180^\circ - 33.07^\circ$$

$$\theta_{real\ del\ avión} = 146.93^\circ$$

EJEMPLO 5

Calcula la **resultante** del siguiente sistema de fuerzas:



Solución:

Primero es necesario calcular las componentes de cada vector para poder realizar la suma de vectores:

Para $\overrightarrow{F_1}$:

Considerando los ángulos con respecto a la horizontal:

$$\theta_1 = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$$

$$F_{1x} = F_1 \cos(\theta) = 295 \cos(116^\circ) = -129.32N$$

$$F_{1y} = F_1 \sin(\theta) = 295 \sin(116^\circ) = 265.14N$$

$$\vec{F}_1 = -129.32\hat{i} + 265.14\hat{j}$$

Para $\vec{F}_2$:

$$\theta_2 = 38^\circ$$

$$F_{2x} = F_2 \cos(\theta) = 225 \cos(38^\circ) = 117.3N$$

$$F_{2y} = F_2 \sin(\theta) = 225 \sin(38^\circ) = 138.52N$$

$$\vec{F}_2 = 117.3\hat{i} + 138.52\hat{j}$$

Para $\vec{F}_3$:

$$\theta_3 = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$$

$$F_{3x} = F_3 \cos(\theta) = 160 \cos(280^\circ) = 27.78N$$

$$F_{3y} = F_3 \sin(\theta) = 160 \sin(280^\circ) = -157.57N$$

$$\vec{F}_3 = 27.78\hat{i} - 157.57\hat{j}$$

$$\sum F_x = -129.32N + 117.3N + 27.78N = 15.76N$$

$$\sum F_y = 265.14N + 138.52N - 157.57N = 246.09N$$

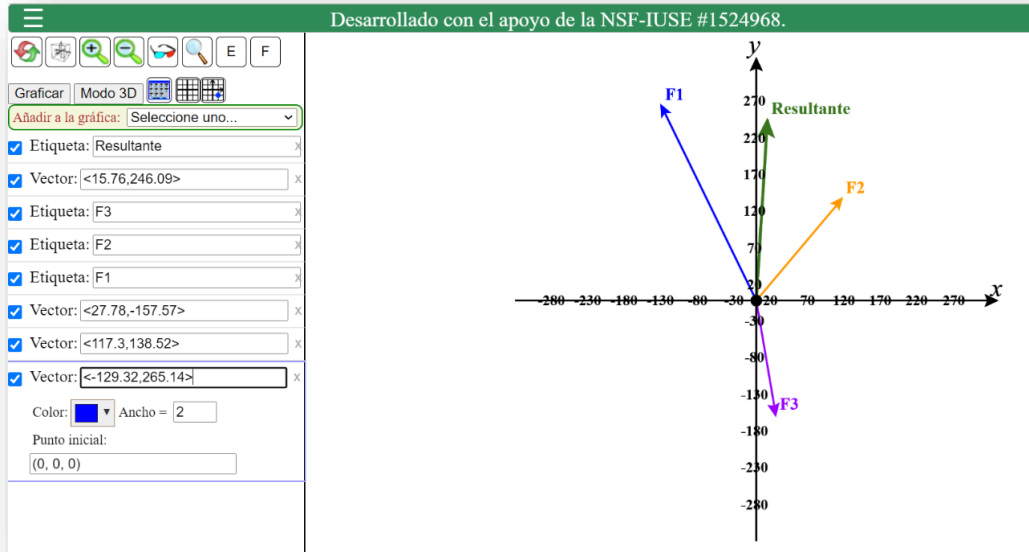
$$\vec{R} = 15.76\hat{i} + 246.09\hat{j}$$

$$R = \sqrt{(15.76)^2 + (246.09)^2} = 246.59$$

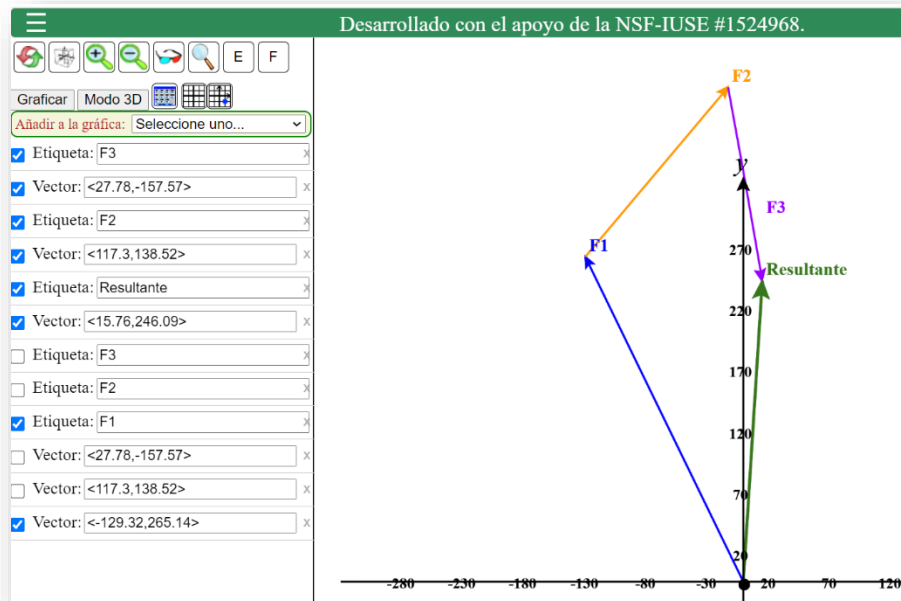
$$\theta = \arctan\left(\frac{246.09}{15.76}\right) = 86.34^\circ$$

$R = 246.59N$ (Vector color verde en la gráfica) y $\theta = 86.34^\circ$

Al realizar la gráfica en CalcPlot3D no hay que olvidar cambiar los rangos en los ejes, ver ANEXO A.



La siguiente gráfica muestra la suma de vectores y nos servirá para verificar el resultado obtenido:



Condiciones de equilibrio, primera condición de equilibrio.

Cuando la resultante de ¹ las fuerzas de acción que actúan sobre un cuerpo es nula (cero) el cuerpo se encuentra en equilibrio:

- ✓ Si está en reposo continuará en reposo.
- ✓ Si se halla en movimiento, continuará desplazándose en movimiento rectilíneo uniforme.

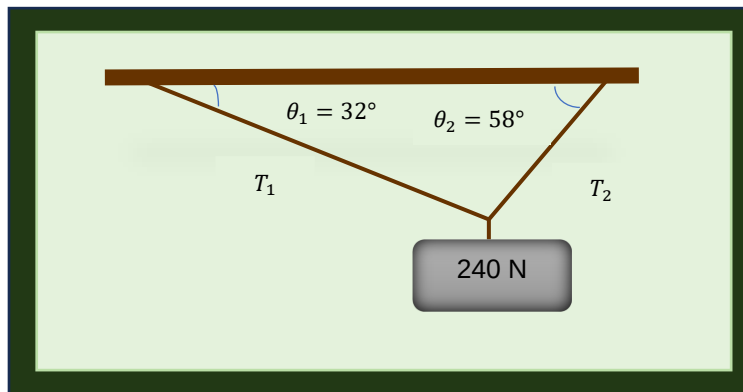
Para que una partícula esté en equilibrio es necesario que:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \text{esto es equivalente} \quad \sum F_x = 0 \quad \text{y} \quad \sum F_y = 0$$

Lo anterior lo llamamos *Primera condición de equilibrio*.

EJEMPLO 6

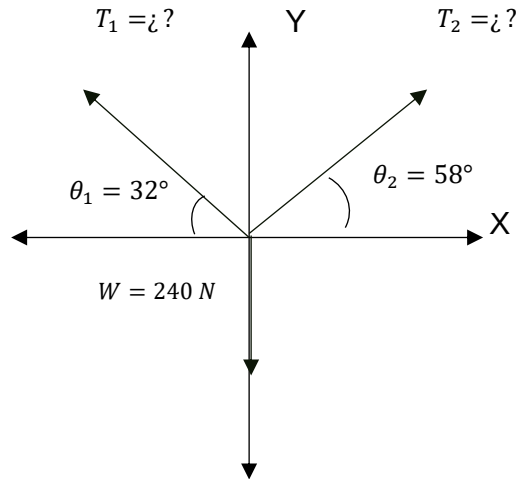
Encontrar la tensión que soporta cada una de las cuerdas que sostiene el peso mostrado en la siguiente figura:



Solución:

Como el sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio se debe cumplir la primera condición de equilibrio:

$\vec{R} = \vec{0}$ esto es equivalente $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$



$$\vec{T}_1 = T_1 \cos(180 - 32)^\circ \hat{i} + T_1 \sin(180 - 32)^\circ \hat{j}$$

$$\vec{T}_1 = T_1 \cos(148^\circ) \hat{i} + T_1 \sin(148^\circ) \hat{j}$$

$$\vec{T}_1 = -0.8481T_1 \hat{i} + 0.5299T_1 \hat{j}$$

$$\vec{T}_2 = T_2 \cos(58^\circ) \hat{i} + T_2 \sin(58^\circ) \hat{j}$$

$$\vec{T}_2 = 0.5299T_2 \hat{i} + 0.8481T_2 \hat{j}$$

$$\vec{W} = -240 \hat{j}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -0.8481T_1 + 0.5299T_2 + 0 = 0$$

$$-0.8481T_1 + 0.5299T_2 = 0 \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_2 \text{Sen}(54^\circ) + T_1 \text{Sen}(180 - 28^\circ) - 240 = 0$$

$$\mathbf{0.5299T_1 + 0.8481T_2 = 240..... (2)}$$

Despejamos T_1 en (1):

$$-0.8481T_1 + 0.5299T_2 = 0 \dots (1)$$

$$\frac{0.5299}{0.8481}T_2 = T_1 \quad \therefore \quad \mathbf{T_1 = 0.6248T_2}$$

Sustituimos T_1 en (2):

$$0.5299T_1 + 0.8481T_2 = 240 \dots (2)$$

$$0.5299(0.6248T_1) + 0.8481T_2 = 240$$

$$0.3311T_2 + 0.8481T_2 = 240$$

$$1.1792T_2 = 240$$

$$T_2 = \frac{240}{1.1792}$$

$$\mathbf{T_2 = 203.53N}$$

Para obtener T_1 sustituimos T_2 :

$$T_1 = 0.6248T_2 \quad \therefore \quad T_1 = 0.6248(203.53) = \mathbf{127.16N}$$

$$\mathbf{T_1 = 127.16N \quad y \quad T_2 = 203.53N}$$

Comprobación:

Con apoyo de CalcPlot3D se grafican los vectores tensiones y el vector peso, para ello es necesario expresarlos en forma de componentes:

$$\overrightarrow{T_1} = -\mathbf{0.8481T_1\hat{i} + 0.5299T_1\hat{j}}$$

$$T_1 = 127.16N$$

$$\vec{T}_1 = -0.8481(127.16)\hat{i} + 0.5299(127.16)\hat{j}$$

$$\vec{T}_1 = -107.84\hat{i} + 67.38\hat{j}$$

$$\vec{T}_2 = 0.5299T_2\hat{i} + 0.8481T_2\hat{j}$$

$$T_2 = 203.53N$$

$$\vec{T}_2 = 0.5299(203.53)\hat{i} + 0.8481(203.53)\hat{j}$$

$$\vec{T}_2 = 107.85\hat{i} + 172.61\hat{j}$$

$$\vec{W} = -240\hat{j}$$

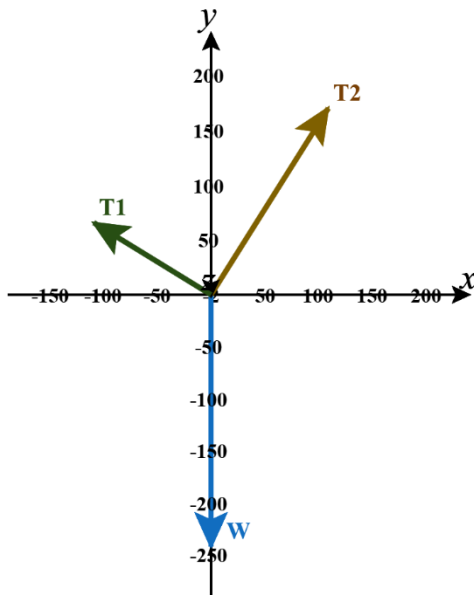
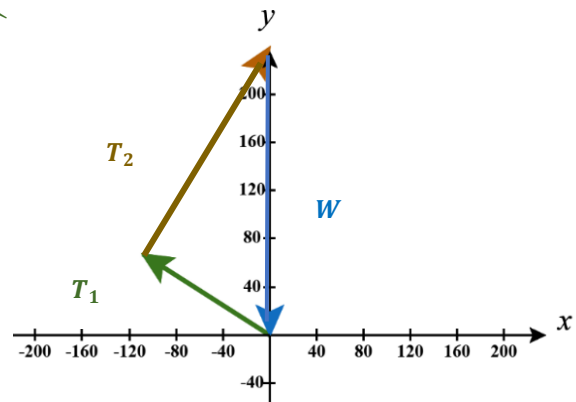


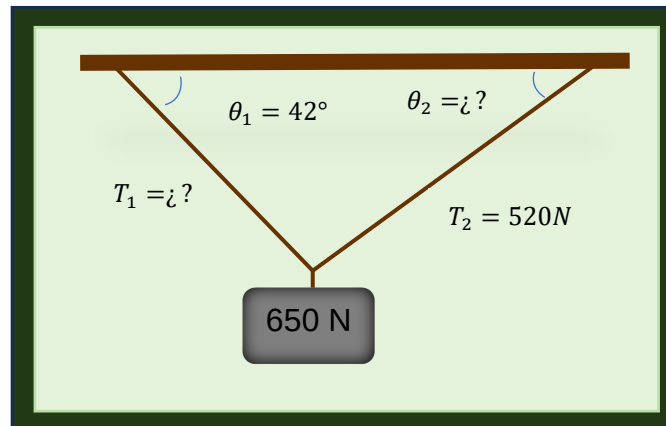
Diagrama de fuerzas



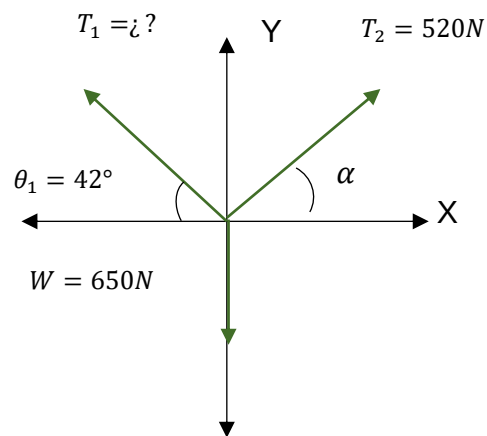
Suma de fuerzas donde se puede observar que efectivamente el sistema está en equilibrio. Se cierra formando un triángulo lo cual implica que la resultante es igual a cero.

EJEMPLO 7

Calcula la tensión 1 y el ángulo faltante que se muestran en la siguiente figura:



Solución:



$$\vec{T}_1 = T_1 \cos(180 - 42)^\circ \hat{i} + T_1 \sin(180 - 42)^\circ \hat{j}$$

$$\vec{T}_1 = T_1 \cos(138)^\circ \hat{i} + T_1 \sin(138)^\circ \hat{j}$$

$$\vec{T}_1 = -0.7431 T_1 \hat{i} + 0.6691 T_1 \hat{j}$$

$$\vec{T}_2 = T_2 \cos(\alpha) \hat{i} + T_2 \sin(\alpha) \hat{j}$$

$$\vec{T}_2 = 520 \cos(\alpha) \hat{i} + 520 \sin(\alpha) \hat{j}$$

$$\vec{W} = -650\hat{j}$$

Como $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ se tiene:

$$\sum F_x = -T_1 0.7431 + 520 \cos(\alpha) + 0 = 0$$

y

$$\sum F_y = T_1 0.6691 + 520 \sin(\alpha) - 650 = 0$$

$$-0.7431 T_1 + 520 \cos(\alpha) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$0.6691 T_1 + 520 \sin(\alpha) = 650 \quad \dots \quad (2)$$

Despejando T_1 de ecuación (1) se tiene:

$$T_1 = \frac{-520 \cos(\alpha)}{-0.7431} = 699.77 \cos(\alpha) = T_1$$

Sustituyendo T_1 en ecuación (2) se tiene:

$$0.6691 T_1 + 520 \sin(\alpha) - 650 = 0$$

$$(699.77 \cos(\alpha)) 0.6691 + 520 \sin(\alpha) - 650 = 0$$

$$468.2161 \cos(\alpha) + 520 \sin(\alpha) - 650 = 0$$

Aplicando la identidad:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \quad \text{de donde} \quad \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

$$468.2161\cos(\alpha) + 520\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} - 650 = 0$$

$$468.2161\cos(\alpha) - 650 = -520\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

$$(468.2161\cos(\alpha) - 650)^2 = (-520\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)})^2$$

$$219226.3229\cos^2(\alpha) - 608680.93\cos(\alpha) + 422500 = 270400(1 - \cos^2(\alpha))$$

$$219226.3229\cos^2(\alpha) - 608680.93\cos(\alpha) + 422500 - 270400(1 - \cos^2(\alpha)) = 0$$

$$489626.3229\cos^2(\alpha) - 608680.93\cos(\alpha) + 152100 = 0$$

Resolviendo con fórmula general:

$$\cos(\alpha) = \frac{-(-608680.93) \pm \sqrt{(-608680.93)^2 - 4(489626.3229)(152100)}}{2(489626.3229)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{608680.93 \pm 269450.9597}{979252.6458}$$

$$\cos(\alpha) = 0.8967 \quad \text{y} \quad \cos(\alpha) = 0.3464$$

$$\alpha_1 = 26.27^\circ \quad \text{y} \quad \alpha_2 = 69.73^\circ$$

$$\text{Para } \alpha_1 = 26.27^\circ \rightarrow T_1 = 699.77\cos(\alpha_1) = 627.497N$$

$$\text{Para } \alpha_2 = 69.73^\circ \rightarrow T_1 = 699.77\cos(\alpha_2) = 242.431N$$

Comprobación gráfica para α_1 :

$$\vec{T}_1 = -0.7431T_1\hat{i} + 0.6691T_1\hat{j}$$

$$\vec{T}_1 = -0.7431(627.5)\hat{i} + 0.6691(627.5)\hat{j}$$

$$\vec{T}_1 = -466.3\hat{i} + 419.86\hat{j}$$

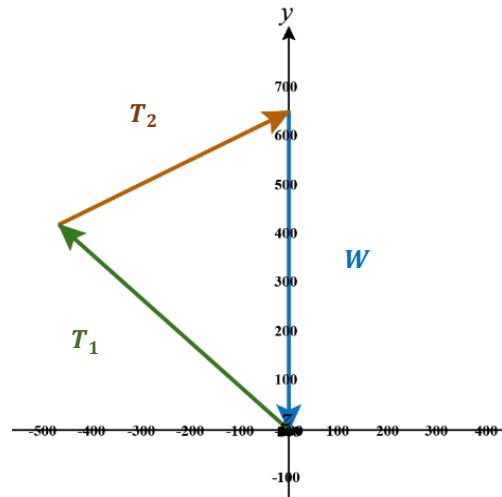
$$\vec{T}_2 = 520\cos(\alpha)\hat{i} + 520\sin(\alpha)\hat{j}$$

$$\vec{T}_2 = 520\cos(26.27^\circ)\hat{i} + 520\sin(26.27^\circ)\hat{j}$$

$$\vec{T}_2 = 466.3\hat{i} + 230.15\hat{j}$$

$$\vec{W} = -650\hat{j}$$

Suma de fuerzas donde se puede observar que efectivamente el sistema está en equilibrio. Se cierra formando un triángulo lo cual implica que la resultante es igual a cero.



Comprobación gráfica para α_2 :

$$\vec{T}_1 = -0.7431T_1\hat{i} + 0.6691T_1\hat{j}$$

$$\vec{T}_1 = -0.7431(242.43)\hat{i} + 0.6691(242.43)\hat{j}$$

$$\vec{T}_1 = -180.15\hat{i} + 162.2\hat{j}$$

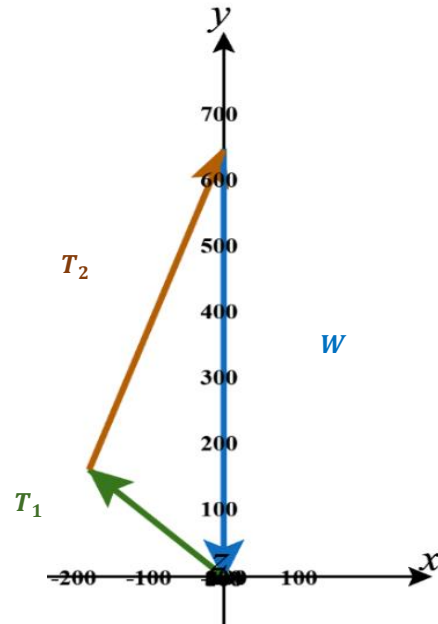
$$\vec{T}_2 = 520\cos(\alpha)\hat{i} + 520\sin(\alpha)\hat{j}$$

$$\vec{T}_2 = 520\cos(69.63^\circ)\hat{i} + 520\sin(69.63^\circ)\hat{j}$$

$$\vec{T}_2 = 181\hat{i} + 487.48\hat{j}$$

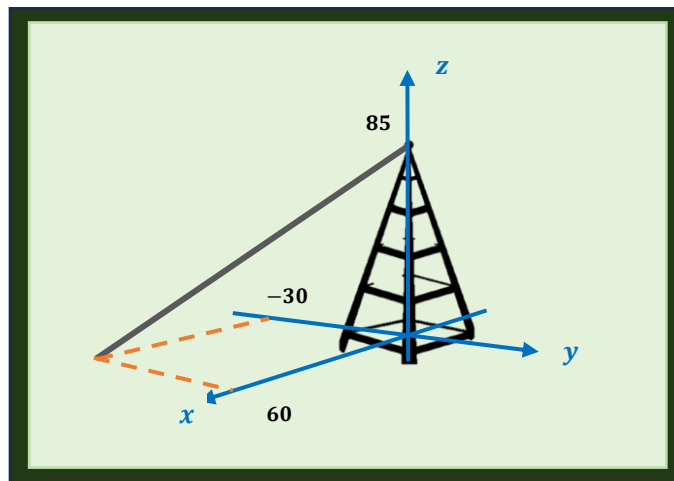
$$\vec{W} = -650\hat{j}$$

Suma de fuerzas donde se puede observar que efectivamente el sistema está en equilibrio. Se cierra formando un triángulo lo cual implica que la resultante es igual a cero.



EJEMPLO 8

- 1 El cable de sujeción de una torre de 85 pies tiene una tensión de 420 libras. Usar las distancias mostradas en la figura, y dar las componentes del vector $\vec{F}$ que represente la tensión del cable.



Solución:

Expresamos el vector cable ($\overrightarrow{V_{cable}}$) en sus componentes ya que éste nos proporciona la dirección del vector tensión del cable.

$$\overrightarrow{V_{cable}} = 60\hat{i} - 30\hat{j} - 85\hat{k}$$

Para que no afecte la magnitud de la tensión, se hace unitario al vector cable.

$$\overrightarrow{U_{v_{cable}}} = \frac{60\hat{i} - 30\hat{j} - 85\hat{k}}{\sqrt{60^2 + (-30)^2 + (-85)^2}}$$

$$\overrightarrow{U_{v_{cable}}} = \frac{60\hat{i} - 30\hat{j} - 85\hat{k}}{108.28}$$

Una vez que se tiene el vector cable en su forma unitaria se procede a calcular el vector tensión del cable, esto se logra multiplicando $\overrightarrow{U_{v_{cable}}}$ por la magnitud de la tensión del cable (420 libras):

$$\vec{F} = \overrightarrow{T_{cable}} = 420 \left(\frac{60\hat{i} - 30\hat{j} - 85\hat{k}}{108.28} \right) = 306.4\hat{i} - 204.3\hat{j} - 408.5\hat{k}$$

$$\vec{F} = \overrightarrow{T_{cable}} = 232.73\hat{i} - 116.35\hat{j} - 329.7\hat{k}$$

1.3 Producto escalar, trabajo efectuado por una fuerza, ángulo entre dos vectores, ecuación de la recta en el espacio.

Producto punto o producto escalar:

El producto punto entre dos vectores se expresa:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \rightarrow \text{A punto B}$$

Y se obtiene:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \langle a_x, a_y, a_z \rangle \cdot \langle b_x, b_y, b_z \rangle$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

EJEMPLO 1

Calcular $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y $\vec{B} \cdot \vec{A}$ si:

$$\vec{A} = 6\hat{i} - 8\hat{j} + \hat{k} \quad y \quad \vec{B} = -5\hat{i} + 10\hat{j} - 4\hat{k}$$

Solución:

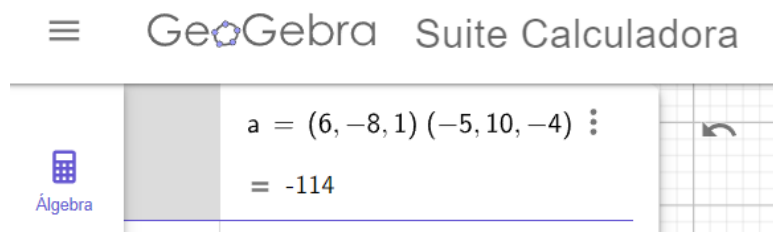
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (6)(-5) + (-8)(10) + (1)(-4)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -30 - 80 - 4 = -114$$

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = (-5)(6) + (10)(-8) + (-4)(1)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = -30 - 80 - 4 = -114$$

Comprobación con GeoGebra (Ver Anexo B):

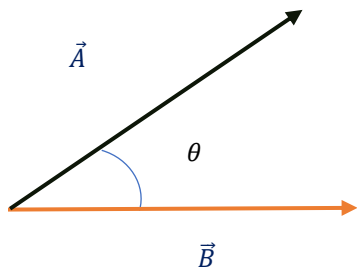


Propiedades del producto punto:

1. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
2. $\vec{A} \cdot \vec{0} = 0$
3. $\vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2$
4. $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

2 Ángulo entre dos vectores:

El ángulo entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ viene dado por:

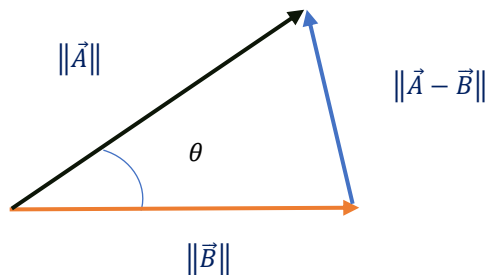


$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} \right)$$

donde $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ o bien, $0 \leq \theta \leq \pi$

A continuación, se deduce la fórmula ² para calcular el ángulo entre dos vectores:



Aplicando la Ley de cosenos se tiene:

$$\|\vec{A} - \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos \theta$$

Por otro lado, aplicando las propiedades del producto punto se tiene:

$$\|\vec{A} - \vec{B}\|^2 = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})$$

$$\|\vec{A} - \vec{B}\|^2 = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot \vec{A} - (\vec{A} - \vec{B}) \cdot \vec{B}$$

$$\|\vec{A} - \vec{B}\|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} - \vec{B} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B}$$

$$\|\vec{A} - \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 - \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{B} + \|\vec{B}\|^2$$

$$\|\vec{A} - \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \|\vec{B}\|^2$$

Igualando ambas expresiones se tiene:

$$\|\vec{A}\|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \|\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta$$

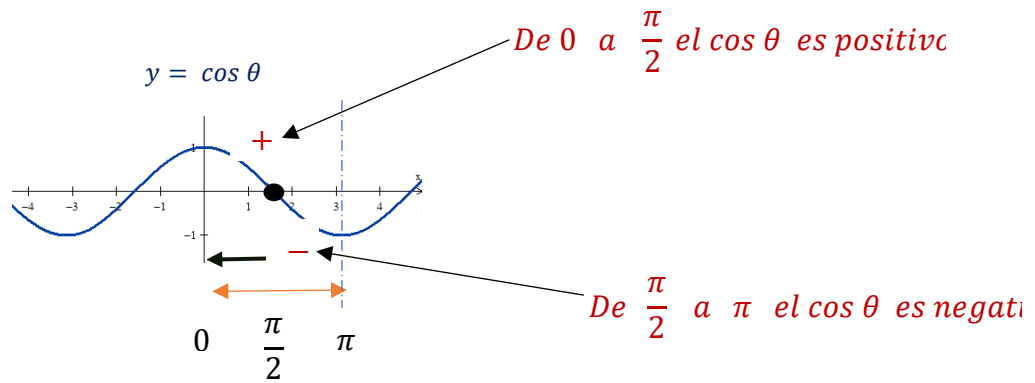
$$-2\vec{A} \cdot \vec{B} = -2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$$

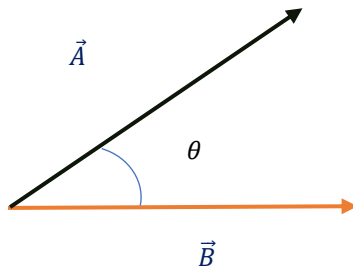
Analizando el signo del producto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta$$

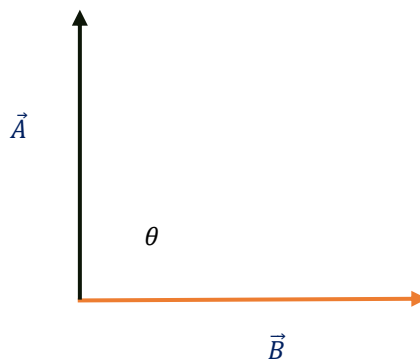


De la gráfica de coseno se observa que:

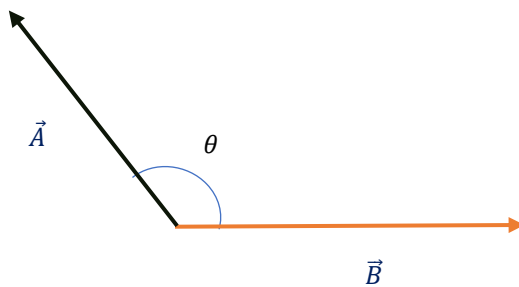
$$\text{Para } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \theta > 0 \quad \therefore \quad \vec{A} \cdot \vec{B} > 0$$



$$\text{Para } \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \theta = 0 \quad \therefore \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$



$$\text{Para } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \rightarrow \cos \theta < 0 \quad \therefore \quad \vec{A} \cdot \vec{B} < 0$$



Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) si y sólo si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

- Si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ entonces los vectores son ortogonales (perpendiculares).
- Si dos vectores son ortogonales (perpendiculares) entonces $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

EJEMPLO 1

Calcular el producto punto entre los vectores dados y el ángulo entre ellos:

- a) $\vec{A} = 4\hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{B} = 6\hat{i} + 10\hat{j}$
 b) $\vec{A} = 7\hat{i} - 2\hat{j}$ y $\vec{B} = 2\hat{i} + 7\hat{j}$
 c) $\vec{A} = 7\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$

Solución:

$$a) \vec{A} = 4\hat{i} - \hat{j} \quad y \quad \vec{B} = 6\hat{i} + 10\hat{j}$$

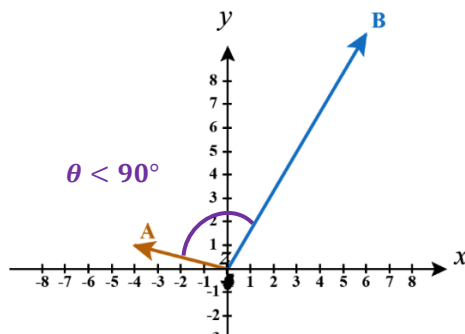
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (4)(6) + (-1)(10) = 24 - 10 = 14 > 0 \rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{36 + 100} = \sqrt{136}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{14}{\sqrt{17}\sqrt{136}}\right) = \mathbf{73.07^\circ}$$

¡Bienvenido a CalcPlot3D!



b) $\vec{A} = 7\hat{i} - 2\hat{j}$ y $\vec{B} = 2\hat{i} + 7\hat{j}$

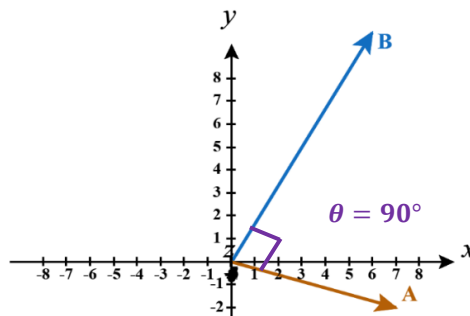
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (7)(2) + (-2)(7) = 14 - 14 = \mathbf{0} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{53}\sqrt{53}}\right) = \mathbf{90^\circ}$$

¡Bienvenido a CalcPlot3D!



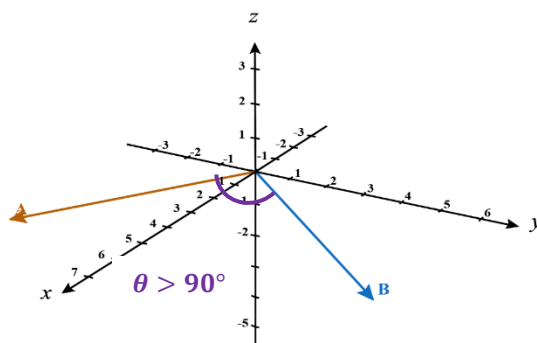
$$c) \vec{A} = 7\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} \quad y \quad \vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (7)(-3) + (-2)(2) + (1)(-5) = -21 - 4 - 5 = -30 \rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$\begin{aligned} \|\vec{A}\| &= \sqrt{49 + 4 + 1} = \sqrt{54} \\ \|\vec{B}\| &= \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38} \end{aligned}$$

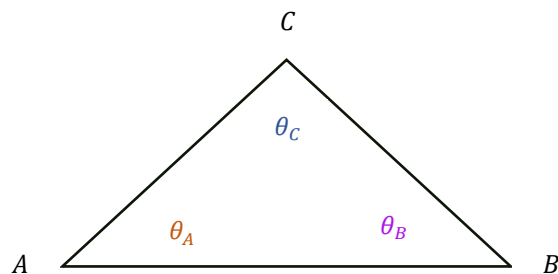
$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-30}{\sqrt{54}\sqrt{38}} \right) = 131.47^\circ$$

¡Bienvenido a CalcPlot3D!



Aplicaciones del producto punto o producto escalar

Ángulos internos de un triángulo:



Para el ángulo θ_A :

$$\theta_A = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\|} \right)$$

Para el ángulo θ_B :

$$\theta_B = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \|\vec{BC}\|} \right)$$

Para el ángulo θ_C :

$$\theta_C = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CA}\| \|\vec{CB}\|} \right)$$

La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°

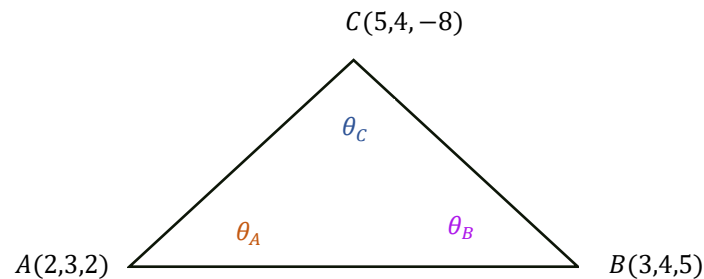
$$\theta_A + \theta_B + \theta_C = 180^\circ$$

En los casos anteriores se puede observar que los vectores inician con la letra del vértice del ángulo que se desea calcular.

EJEMPLO 2

Calcular los ángulos interiores y perímetro del triángulo que tiene como vértices los puntos $A(2, 3, 2)$, $B(3, 4, 5)$ y $C(5, 4, -8)$

Solución:



Para el ángulo θ_A :

$$\theta_A = \cos^{-1} \left(\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} \right)$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3 - 2, 4 - 3, 5 - 2 \rangle = \langle 1, 1, 3 \rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 5 - 2, 4 - 3, -8 - 2 \rangle = \langle 3, 1, -10 \rangle$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9 + 1 + 100} = \sqrt{110}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1)(3) + (1)(1) + (3)(-10) = 3 + 1 - 30 = -26$$

$$\theta_A = \cos^{-1} \left(\frac{-26}{\sqrt{11}\sqrt{110}} \right) = \cos^{-1}(-0.7474) = \mathbf{138.36^\circ}$$

Para el ángulo θ_B :

$$\theta_B = \cos^{-1} \left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \|\overrightarrow{BC}\|} \right)$$

$$\overrightarrow{BA} = \langle 2 - 3, 3 - 4, 2 - 5 \rangle = \langle -1, -1, -3 \rangle$$

$$\overrightarrow{BC} = \langle 5 - 3, 4 - 4, -8 - 5 \rangle = \langle 2, 0, -13 \rangle$$

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{4 + 0 + 169} = \sqrt{173}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1)(2) + (-1)(0) + (-3)(-13) = -2 + 0 + 39 = 37$$

$$\theta_B = \cos^{-1} \left(\frac{37}{\sqrt{11}\sqrt{173}} \right) = \cos^{-1}(0.8481) = \mathbf{31.98^\circ}$$

Para el ángulo θ_c :

$$\theta_c = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CA}\| \|\vec{CB}\|} \right)$$

$$\vec{CA} = \langle 2 - 5, 3 - 4, 2 - (-8) \rangle = \langle -3, -1, 10 \rangle$$

$$\vec{CB} = \langle 3 - 5, 4 - 4, 5 - (-8) \rangle = \langle -2, 0, 13 \rangle$$

$$\|\vec{CA}\| = \sqrt{9 + 1 + 100} = \sqrt{110}$$

$$\|\vec{CB}\| = \sqrt{4 + 0 + 169} = \sqrt{173}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (-3)(-2) + (-1)(0) + (10)(13) = 6 + 0 + 130 = 136$$

$$\theta_c = \cos^{-1} \left(\frac{136}{\sqrt{110}\sqrt{173}} \right) = \cos^{-1}(0.9858) = 9.64^\circ$$

La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°

$$\theta_A + \theta_B + \theta_c = 180^\circ$$

$$38.36^\circ + 31.98^\circ + 9.64^\circ = 79.98^\circ \approx 80^\circ$$

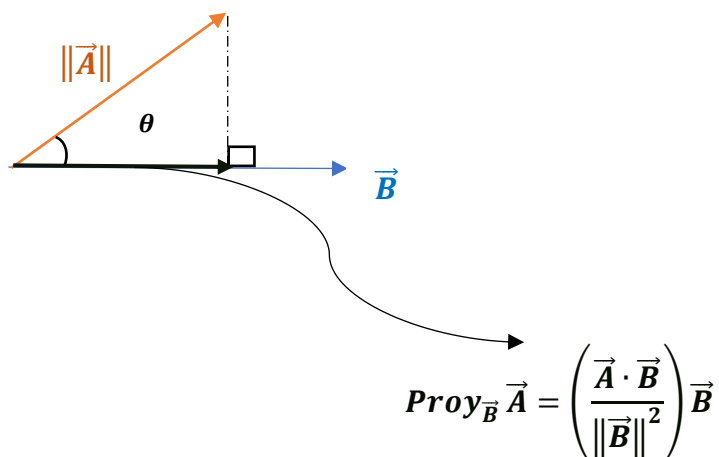
Por último, se calcula el perímetro del triángulo:

$$P = \|\vec{AB}\| + \|\vec{AC}\| + \|\vec{BC}\|$$

$$P = \sqrt{11} + \sqrt{110} + \sqrt{173} = 26.95 \text{ u}$$

Proyecciones:

La proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$, que se expresa como $\text{Proy}_{\vec{B}} \vec{A}$, viene dada por:



Para determinar el vector proyección (vector verde de la gráfica anterior) se calcula primero su magnitud, en el caso de la gráfica, desea calcular el cateto adyacente del triángulo rectángulo:

$$\cos \theta = \frac{ca}{h} \quad \cos \theta = \frac{|\text{Proy}_{\vec{B}} \vec{A}|}{|\vec{A}|} \quad \therefore \quad |\text{Proy}_{\vec{B}} \vec{A}| = |\vec{A}| \cos \theta$$

Sabemos que:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

Sustituyendo:

$$|\text{Proy}_{\vec{B}} \vec{A}| = |\vec{A}| \cos \theta = |\vec{A}| \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \right) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|}$$

Teniendo la magnitud del vector $Proy_{\vec{B}} \vec{A}$, la multiplicamos por el vector unitario en dirección de $\vec{B}$, lo cual nos dará el vector proyección deseado:

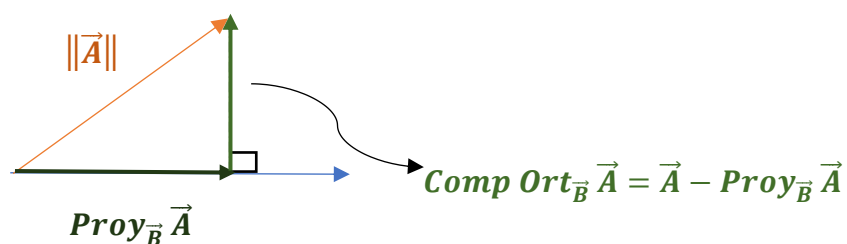
$$Proy_{\vec{B}} \vec{A} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|} \left(\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} \right) = \underbrace{\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2} \right)}_{\text{Magnitud}} \underbrace{\vec{B}}_{\text{Dirección}}$$

La magnitud de la proyección es:

$$\|Proy_{\vec{B}} \vec{A}\| = \left| \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|} \right|$$

Se agrega valor absoluto ya que es una magnitud de longitud y no puede ser negativa.

Componente ortogonal:



EJEMPLO 3

Calcular $Proy_{\vec{B}} \vec{A}$ y $Proy_{\vec{A}} \vec{B}$ para $\vec{A} = \langle 3, 2 \rangle$ y $\vec{B} = \langle 1, 6 \rangle$

Solución:

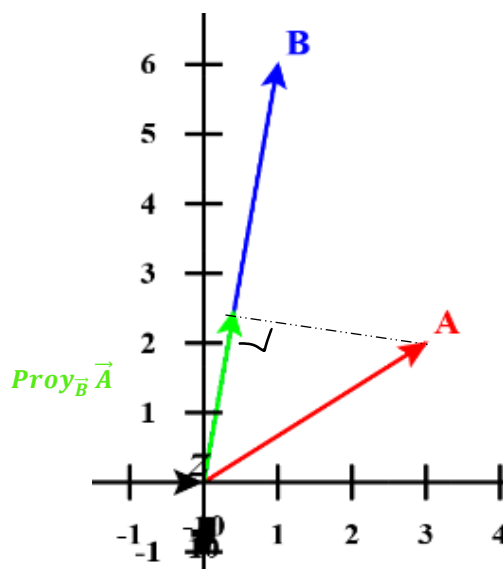
$$Proy_{\vec{B}} \vec{A} = \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2} \right) \vec{B}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (3)(1) + (2)(6) = 3 + 12 = 15$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$$

$$Proy_{\vec{B}} \vec{A} = \left(\frac{15}{(\sqrt{37})^2} \right) \langle 1, 6 \rangle$$

$$Proy_{\vec{B}} \vec{A} = \left\langle \frac{15}{37}, \frac{90}{37} \right\rangle$$



$$Proy_{\vec{A}} \vec{B} = \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2} \right) \vec{A}$$

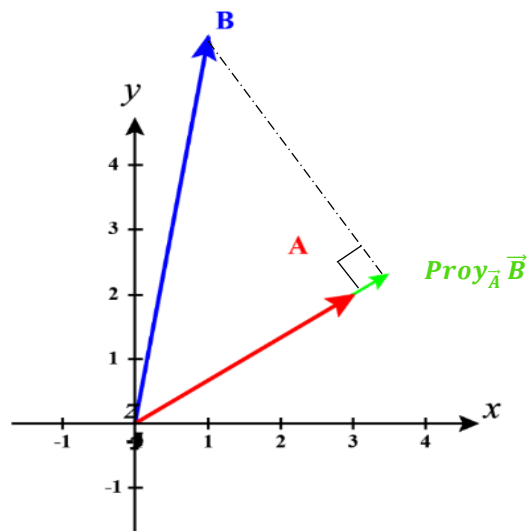
$$\vec{B} \cdot \vec{A} = 15$$

$$\vec{A} = \langle 3, 2 \rangle$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$Proy_{\vec{A}} \vec{B} = \left(\frac{15}{(\sqrt{13})^2} \right) \langle 3, 2 \rangle$$

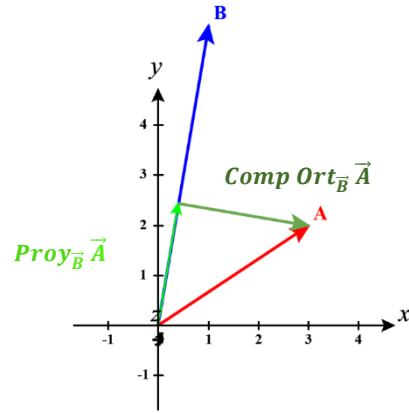
$$Proy_{\vec{A}} \vec{B} = \langle \frac{45}{13}, \frac{30}{13} \rangle$$



$$\text{Comp Ort}_{\vec{B}} \vec{A} = \vec{A} - \text{Proy}_{\vec{B}} \vec{A}$$

$$\text{Comp Ort}_{\vec{B}} \vec{A} = \langle 3, 2 \rangle - \langle \frac{15}{37}, \frac{90}{37} \rangle$$

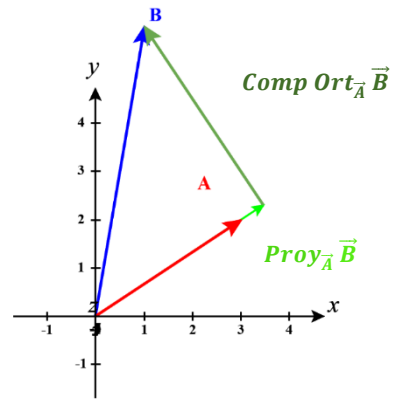
$$\text{Comp Ort}_{\vec{B}} \vec{A} = \langle \frac{96}{37}, -\frac{16}{37} \rangle$$



$$\text{Comp Ort}_{\vec{A}} \vec{B} = \vec{B} - \text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B}$$

$$\text{Comp Ort}_{\vec{A}} \vec{B} = \langle 1, 6 \rangle - \langle \frac{45}{13}, \frac{30}{13} \rangle$$

$$\text{Comp Ort}_{\vec{A}} \vec{B} = \langle -\frac{32}{13}, \frac{48}{13} \rangle$$



EJEMPLO 4

Calcular $\text{Proy}_{\vec{B}} \vec{A}$ y $\text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B}$ para $\vec{A} = \langle 3, 2, 5 \rangle$ y $\vec{B} = \langle 1, 6, -4 \rangle$

Solución:

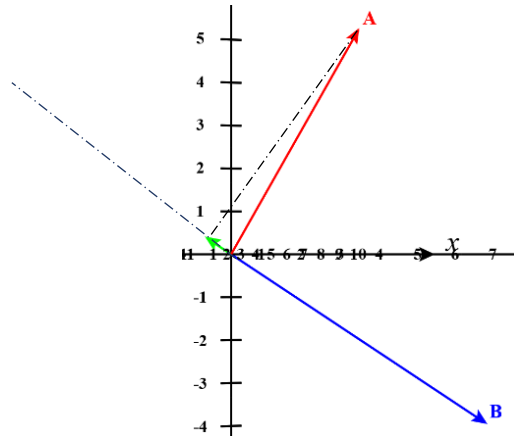
$$\text{Proy}_{\vec{B}} \vec{A} = \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2} \right) \vec{B}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (3)(1) + (2)(6) + (5)(-4) = 3 + 12 - 20 = -5$$

$$\|\vec{B}\|^2 = 1 + 36 + 16 = 53$$

$$Proy_{\vec{B}} \vec{A} = \left(\frac{-5}{53} \right) < 1, 6, -4 >$$

$$Proy_{\vec{B}} \vec{A} = < -\frac{5}{53}, -\frac{30}{53}, \frac{20}{53} >$$



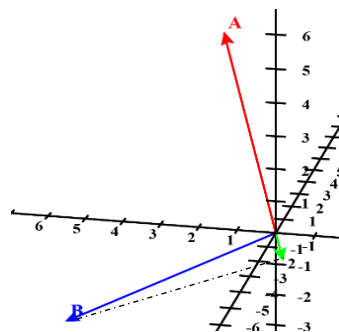
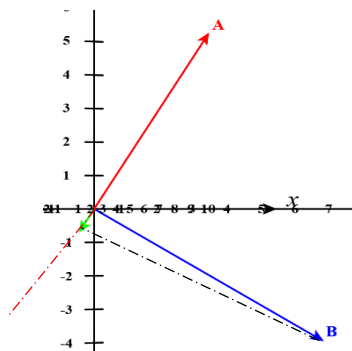
$$Proy_{\vec{A}} \vec{B} = \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2} \right) \vec{A}$$

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = -5$$

$$\|\vec{A}\|^2 = 9 + 4 + 25 = 38$$

$$Proy_{\vec{A}} \vec{B} = \left(\frac{-5}{38} \right) < 3, 2, 5 >$$

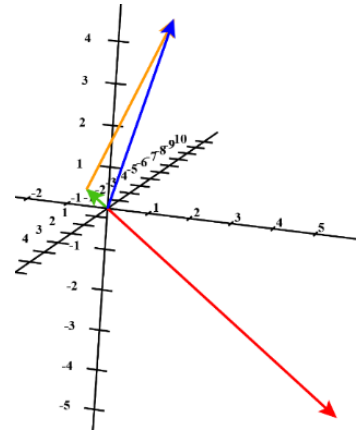
$$Proy_{\vec{A}} \vec{B} = < -\frac{15}{38}, -\frac{10}{38}, -\frac{25}{38} >$$



$$\text{Comp Ort}_{\vec{B}} \vec{A} = \vec{A} - \text{Proy}_{\vec{B}} \vec{A}$$

$$\text{Comp Ort}_{\vec{B}} \vec{A} = \langle 3, 2, 5 \rangle - \langle -\frac{5}{53}, -\frac{30}{53}, \frac{20}{53} \rangle$$

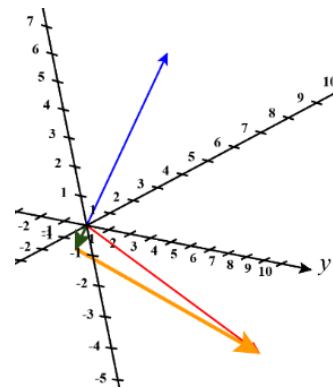
$$\text{Comp Ort}_{\vec{B}} \vec{A} = \langle \frac{164}{53}, \frac{136}{53}, \frac{245}{53} \rangle$$



$$\text{Comp Ort}_{\vec{A}} \vec{B} = \vec{B} - \text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B}$$

$$\text{Comp Ort}_{\vec{A}} \vec{B} = \langle 1, 6, -4 \rangle - \langle -\frac{15}{38}, -\frac{10}{38}, -\frac{25}{38} \rangle$$

$$\text{Comp Ort}_{\vec{A}} \vec{B} = \langle \frac{53}{38}, \frac{238}{38}, -\frac{127}{38} \rangle$$



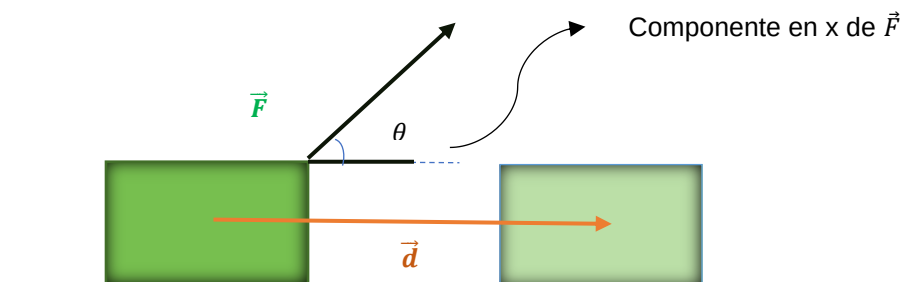
Trabajo

2

El trabajo efectuado al mover un objeto una distancia “ d ” aplicando una fuerza $\vec{F}$ viene dado por:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$$W = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta$$



Como la fuerza debe ser en la misma dirección del movimiento, entonces se considera la componente en x de la fuerza.

$$W = (\text{Fuerza})(\text{distancia})$$

La componente en x de la fuerza es la magnitud de la proyección de $\vec{F}$ sobre $\vec{d}$:

$$\cos \theta = \frac{ca}{h}$$

$$\cos \theta = \frac{F_x}{\|\vec{F}\|} \quad \therefore \quad F_x = \|\vec{F}\| \cos \theta$$

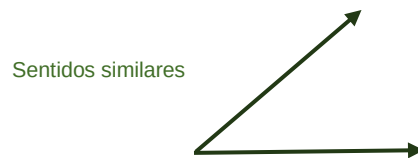
$$W = (F_x)(\|\vec{d}\|) = (\|\vec{F}\| \cos \theta)(\|\vec{d}\|) = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta$$

$$W = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

De lo anterior podemos observar que:

- Si $W > 0$, entonces $0^\circ < \theta < 90^\circ$



- Si $W = 0$, entonces $\theta = 90^\circ$



- Si $W < 0$, entonces $0^\circ < \theta < 90^\circ$



EJEMPLO 5

Un carro de mandado se empuja ³ ejerciendo una fuerza de 34 libras sobre una manivela que forma un ángulo de 30 grados con la horizontal (ver fig.) Calcular el trabajo realizado al jalar el carro 45 pies.



Solución:

$$W = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta$$

$$W = (34lb)(45pies) \cos 30^\circ = 1325.02lb \cdot pies$$

EJEMPLO 6

² Calcular el trabajo realizado al mover un objeto en la dirección de $P(1, -5, 4)$ a $Q(1, 1, 3)$ aplicando una fuerza constante $\vec{F} = 9\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$

Solución:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$$\vec{d} = \overrightarrow{PQ} = \langle 1 - 1, 1 - (-5), -3 - 4 \rangle$$

$$\vec{d} = \overrightarrow{PQ} = \langle 0, 6, -7 \rangle$$

$$\vec{F} = 9\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = (9)(0) + (-2)(6) + (5)(-7)$$

$$W = 0 - 12 - 35$$

$$W = -47$$

De otra forma:

$$W = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta$$

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{81 + 4 + 25} = \sqrt{110}$$

$$\|\vec{d}\| = \sqrt{0 + 36 + 49} = \sqrt{85}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\|\vec{F}\| \|\vec{d}\|}$$

$$\cos \theta = \frac{(0)(9) + (6)(-2) + (-7)(5)}{\sqrt{110}\sqrt{85}}$$

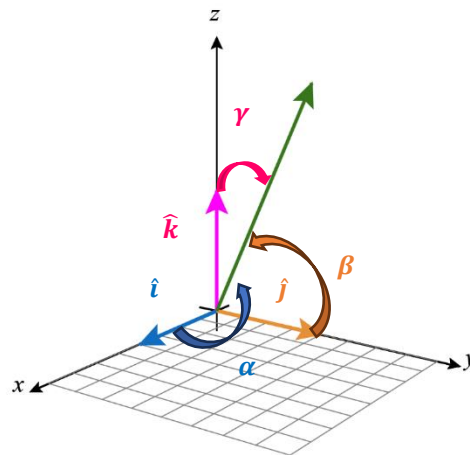
$$\cos \theta = \frac{0 - 12 - 35}{\sqrt{110}\sqrt{85}} = \frac{-47}{\sqrt{110}\sqrt{85}} = -0.4860$$

$$W = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta$$

$$W = \sqrt{110} \sqrt{85} (-0.4860)$$

$$W = -47$$

Cosenos directores:



$$\cos \alpha = \frac{\hat{i} \cdot \vec{v}}{\|\hat{i}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\langle 1, 0, 0 \rangle \cdot \langle v_x, v_y, v_z \rangle}{(1) \|\vec{v}\|} = \frac{v_x}{\|\vec{v}\|}$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{\|\vec{v}\|}$$

$$\cos \beta = \frac{\hat{j} \cdot \vec{v}}{\|\hat{j}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\langle 0, 1, 0 \rangle \cdot \langle v_x, v_y, v_z \rangle}{\|\vec{v}\|} = \frac{v_y}{\|\vec{v}\|}$$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{\|\vec{v}\|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\hat{k} \cdot \vec{v}}{\|\hat{k}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\langle 0, 0, 1 \rangle \cdot \langle v_x, v_y, v_z \rangle}{\|\vec{v}\|} = \frac{v_z}{\|\vec{v}\|}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_z}{\|\vec{v}\|}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Verificando:

$$\left(\frac{v_x}{\|\vec{v}\|} \right)^2 + \left(\frac{v_y}{\|\vec{v}\|} \right)^2 + \left(\frac{v_z}{\|\vec{v}\|} \right)^2 = 1$$

$$\frac{v_x^2}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{v_y^2}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{v_z^2}{\|\vec{v}\|^2} = 1$$

$$\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{\|\vec{v}\|^2} = 1$$

$$\frac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^2} = 1$$

$$1 = 1$$

EJEMPLO 7

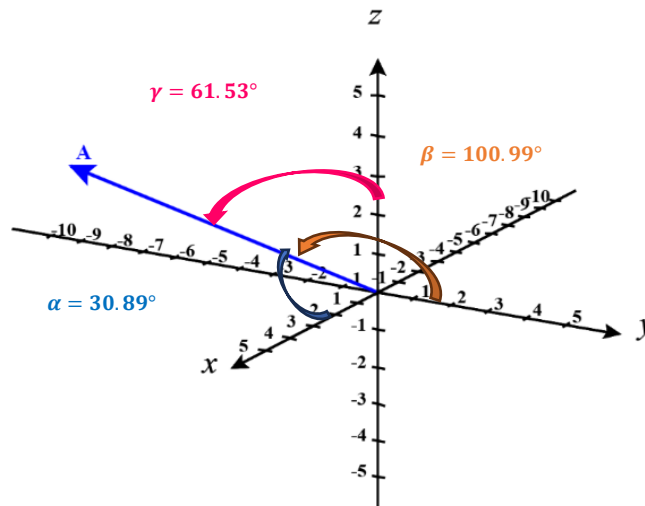
Calcular los ángulos directores del vector $\vec{M} = 9\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$

Solución:

$$\cos \alpha = \frac{m_x}{\|\vec{M}\|} = \frac{9}{\sqrt{81 + 4 + 25}} = \frac{9}{\sqrt{110}} \quad \therefore \quad \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{9}{\sqrt{110}} \right) = 30.89^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{m_y}{\|\vec{M}\|} = \frac{-2}{\sqrt{81+4+25}} = \frac{-2}{\sqrt{110}} \quad \therefore \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{110}}\right) = 100.99^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{m_z}{\|\vec{M}\|} = \frac{5}{\sqrt{81+4+25}} = \frac{5}{\sqrt{110}} \quad \therefore \quad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{110}}\right) = 61.53^\circ$$



Identidad:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

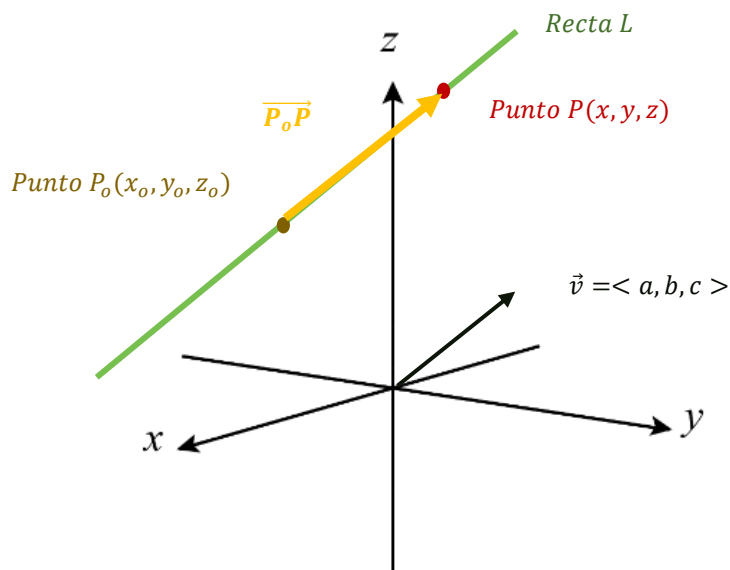
$$\left(\frac{9}{\sqrt{110}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{110}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{110}}\right)^2 = 1$$

$$\frac{81}{110} + \frac{4}{110} + \frac{25}{110} = \frac{110}{110} = 1$$

Ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta en el espacio

Para deducir las ecuaciones paramétricas de una recta se debe conocer un punto sobre la recta y un vector paralelo a ella ya que eso la hace única.

En la siguiente gráfica se muestra la recta de la cual se quiere conocer las ecuaciones que la representen, también se muestra el punto sobre la recta, el vector paralelo y la función vectorial que nos ayudará a determinar las ecuaciones:



Dado que la recta es paralela a $\vec{v}$ y el vector $\overrightarrow{P_0P}$ está sobre la recta, entonces $\overrightarrow{P_0P}$ y $\vec{v}$ son paralelos y, por lo tanto, *son múltiplos escalares* entre sí:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$$

$$\langle x, y, z \rangle - \langle x_0, y_0, z_0 \rangle = t \langle a, b, c \rangle$$

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \langle at, bt, ct \rangle$$

$$x - x_0 = at, \quad y - y_0 = bt, \quad z - z_0 = ct$$

Finalmente, las *ecuaciones paramétricas de la recta* vienen dadas por:

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

Si de las ecuaciones paramétricas se despeja t , se tiene:

$$x = x_0 + at \quad \rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{a}$$

$$y = y_0 + bt \rightarrow t = \frac{y - y_0}{b}$$

$$z = z_0 + ct \rightarrow t = \frac{z - z_0}{c}$$

Igualando las tres ecuaciones se tiene lo que se conoce como **Ecuaciones Simétricas de la Recta**:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

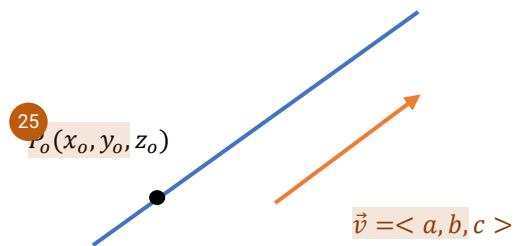
De lo anterior, se tiene:

- Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto perteneciente a la recta L y $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ un vector paralelo a la recta, entonces las ecuaciones paramétricas de la recta vienen dadas por:

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$



- Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto perteneciente a la recta L y $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ un vector paralelo a la recta, entonces las ecuaciones simétricas de la recta vienen dadas por:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Las gráficas que se presentan en los siguientes ejercicios se realizan en CalcPlot3D, ver ANEXO A

EJEMPLO 8

Determinar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es paralela a $\vec{v} = \langle -2, \frac{5}{2}, 1 \rangle$

Solución:

$$(0,0,0) = P_o(x_o, y_o, z_o) \quad y \quad \vec{v} = \langle -2, \frac{5}{2}, 1 \rangle = \langle a, b, c \rangle$$

Ecuaciones Paramétricas

$$x = x_o + at \quad x = 0 - 2t \quad x = -2t$$

$$y = y_o + bt \quad y = 0 + \frac{5}{2}t \quad y = \frac{5}{2}t$$

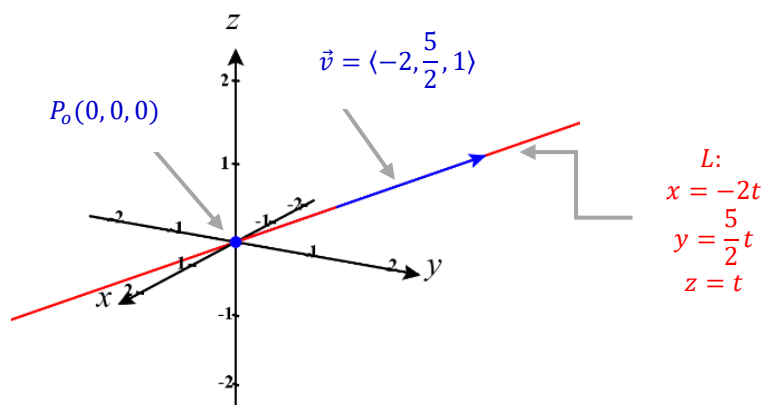
$$z = z_o + ct \quad z = 0 + 1t \quad z = t$$

Ecuaciones Simétricas

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

$$\frac{x - 0}{-2} = \frac{y - 0}{\frac{5}{2}} = \frac{z - 0}{1}$$

$$-\frac{x}{2} = \frac{y}{\frac{5}{2}} = z$$



EJEMPLO 9

Determinar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por $(-3, 0, 2)$ y es paralela a $\vec{v} = 6\hat{j} + 3\hat{k}$

Solución:

$$(-3, 0, 2) = P_0(x_0, y_0, z_0) \quad y \quad \vec{v} = \langle 0, 6, 3 \rangle = \langle a, b, c \rangle$$

Ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + at \quad x = -3 + 0t \quad \mathbf{x = -3}$$

$$y = y_0 + bt \quad y = 0 + 6t \quad \mathbf{y = 6t}$$

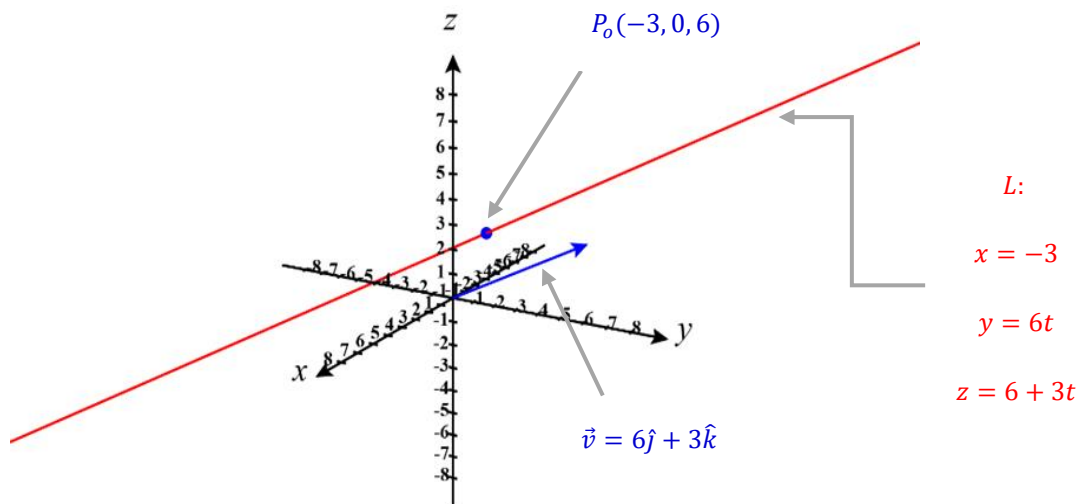
$$z = z_0 + ct \quad z = 2 + 3t \quad \mathbf{z = 2 + 3t}$$

Ecuaciones Simétricas

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x - (-3)}{0} = \frac{y - 0}{6} = \frac{z - 2}{3}$$

$$\frac{x + 3}{0} = \frac{y}{6} = \frac{z - 2}{3} \quad \text{No existen las ecs. simétricas}$$

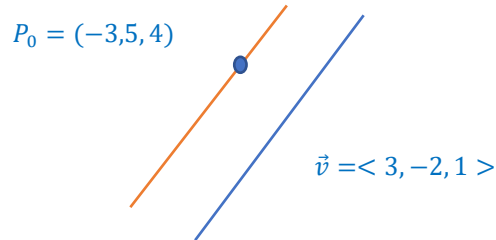


EJEMPLO 10

1 Determinar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por $(-3, 5, 4)$ y es paralela a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-3$

Solución:

2 De las ecuaciones simétricas de la recta conocida se puede obtener la siguiente información:



$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 1}{-2} = z - 3$$

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - (-1)}{-2} = \frac{z - 3}{1}$$

$$\vec{v} = \langle 3, -2, 1 \rangle$$

6 Por lo tanto, se puede conocer un punto sobre la recta conocida y un vector paralelo a ésta:

$$(1, -1, 3) = P_0(x_0, y_0, z_0) \quad y \quad \vec{v} = \langle 3, -2, 1 \rangle = \langle a, b, c \rangle$$

$$P(1, -1, 3) \quad \vec{v} = \langle 3, -2, 1 \rangle$$

$$x = x_0 + at \quad x = 1 + 3t$$

$$y = y_0 + bt \quad y = -1 - 2t$$

$$z = z_0 + ct \quad z = 3 + t$$

*Ecuaciones Paramétricas
de la recta conocida*

Como $\vec{v} \parallel \text{Recta conocida}$ y $\text{Recta conocida} \parallel \text{Recta por conocer}$, entonces $\vec{v} \parallel \text{Recta por conocer}$. Por lo tanto, los datos que se requieren para encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$(-3, 5, 4) = P_0(x_0, y_0, z_0) \quad y \quad \vec{v} = \langle 3, -2, 1 \rangle = \langle a, b, c \rangle$$

Ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + at \quad x = -3 + 3t$$

$$y = y_0 + bt \quad y = 5 - 2t$$

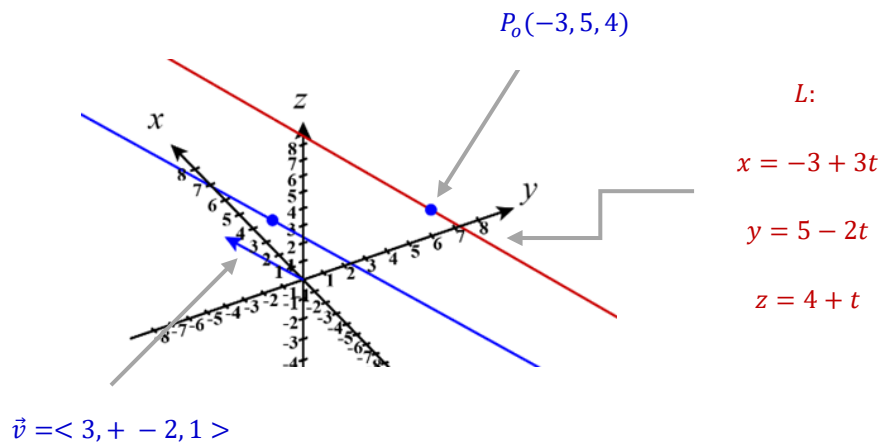
$$z = z_0 + ct \quad z = 4 + t$$

Ecuaciones Simétricas:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x - (-3)}{3} = \frac{y - 5}{-2} = \frac{z - 4}{1}$$

$$\frac{x + 3}{3} = \frac{y - 5}{-2} = z - 4$$



EJEMPLO 11

Determinar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos $(0, 4, 3)$ y $(-1, 2, 5)$

Solución:

Como se necesita un punto sobre la recta (seleccionamos cualquiera de los dos puntos) y un vector paralelo a la recta, por lo tanto, se calcula el vector que va del punto $A(0, 4, 3)$ al punto $B(-1, 2, 5)$

$$\overrightarrow{AB} = \langle -1 - 0, 2 - 4, 5 - 3 \rangle = \langle -1, -2, 2 \rangle = \langle a, b, c \rangle = \vec{v}$$

Como ya se tienen los datos necesarios, procedemos a determinar las ecuaciones:

$$A(0, 4, 3) = P_0(x_0, y_0, z_0) \quad y \quad \vec{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle = \langle a, b, c \rangle$$

Ecuaciones Paramétricas:

$$x = x_0 + at \quad x = -t$$

$$y = y_0 + bt \quad y = 4 - 2t$$

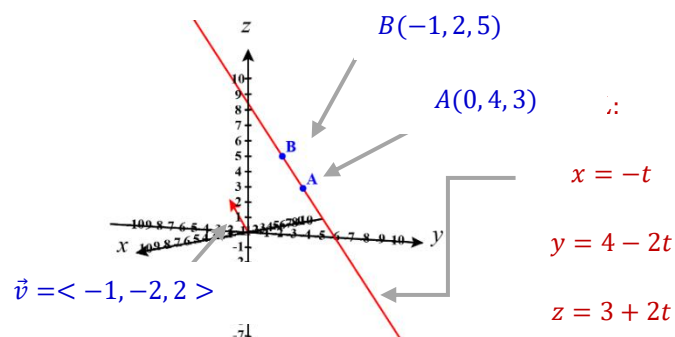
$$z = z_0 + ct \quad z = 3 + 2t$$

Ecuaciones simétricas:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x - 0}{-1} = \frac{y - 4}{-2} = \frac{z - 3}{2}$$

$$\frac{x}{-1} = \frac{y - 4}{-2} = \frac{z - 3}{2}$$

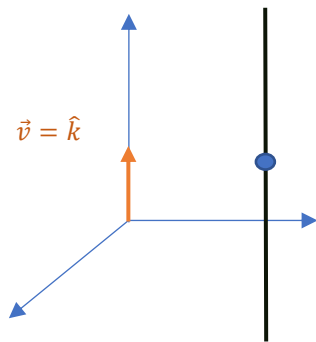


EJEMPLO 12

Determinar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto $(4, 3, 5)$ y es paralela al plano xz y al plano yz .

Solución:

Como se necesita un punto sobre la recta (ya se tiene) y un vector paralelo a la recta, por lo tanto, el vector más simple es:



$$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle = \langle a, b, c \rangle = \vec{v}$$

$$P_0(4, 3, 5)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + at \quad x = 4$$

$$y = y_0 + bt \quad y = 3$$

$$z = z_0 + ct \quad z = 5 + t$$

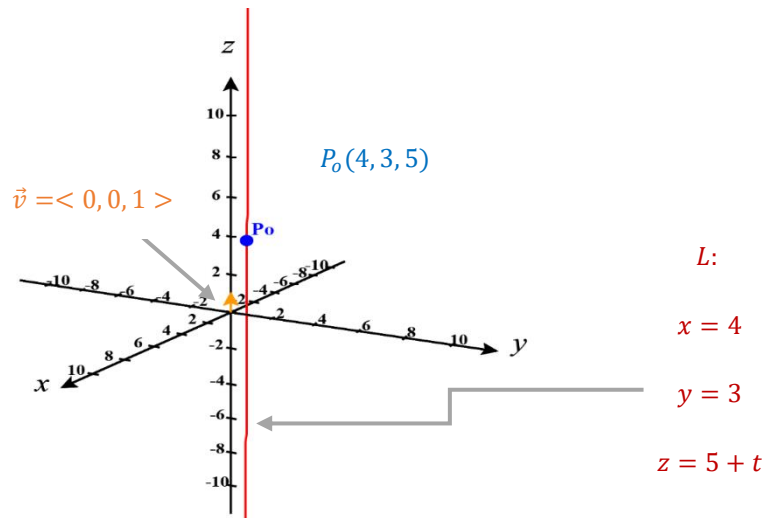
Ecuaciones simétricas:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x - 4}{0} = \frac{y - 3}{0} = \frac{z - 5}{1}$$

$$\frac{x+4}{0} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-2}{1}$$

NO existen las Ecuaciones Simétricas

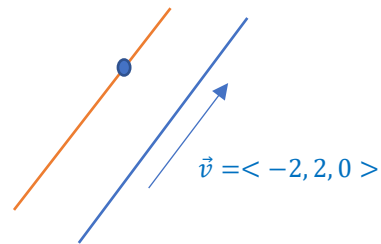


EJEMPLO 13

Determinar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto $(-6, 0, 8)$ y es paralela a la recta $x = 5 - 2t$, $y = -4 + 2t$ y $z = 0$.

Solución:

De la recta se puede obtener:



$$x = 5 - 2t$$

$$y = -4 + 2t$$

$$z = 0$$

$$\vec{v} = \langle -2, 2, 0 \rangle \quad P_0(-6, 0, 8)$$

Ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + at \quad x = -6 - 2t$$

$$y = y_0 + bt \quad y = 2t$$

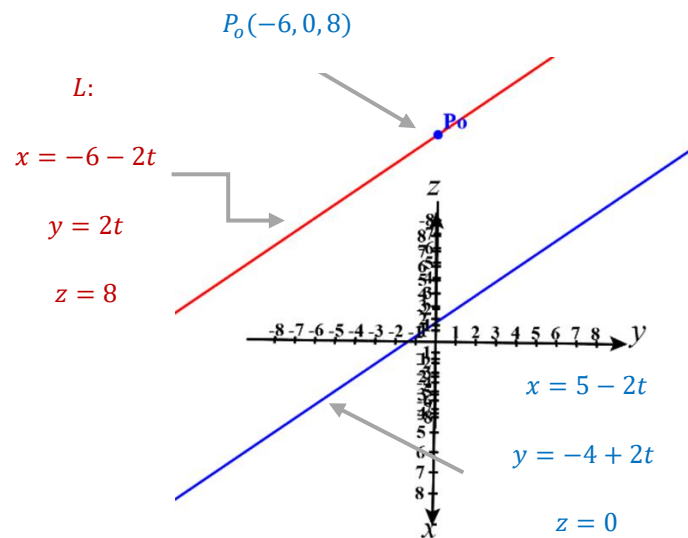
$$z = z_0 + ct \quad z = 8$$

Ecuaciones simétricas:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x - (-6)}{-2} = \frac{y - 0}{2} = \frac{z - 8}{0}$$

No existen



EJEMPLO 14

Determinar si el par de rectas dadas ² se cortan, y si es así, hallar el punto de intersección y el ángulo de intersección:

$$\begin{aligned} \text{a) } L_1: & \quad x = 4 + 3t, \quad y = -3 + t, \quad z = 9 - 2t \\ L_2: & \quad x = 5 - s, \quad y = 7 + 3s, \quad z = 1 - 4s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } L_1: \quad & \frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{6} = z-3 \\ L_2: \quad & \frac{x-3}{2} = y+5 = \frac{z+2}{4} \end{aligned}$$

Solución:

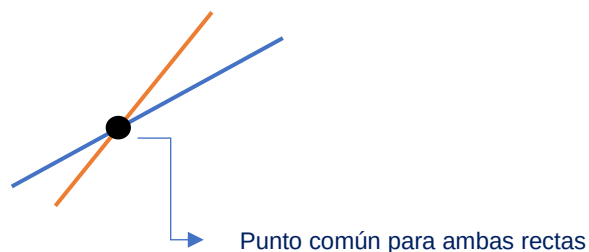
$$\begin{aligned} \text{a) } L_1: \quad & x = 4 + 3t, \quad y = -3 + t, \quad z = 9 - 2t \\ L_2: \quad & x = 5 - s, \quad y = 7 + 3s, \quad z = 1 - 4s \end{aligned}$$

Suponemos que las rectas se cortan en un punto, esto implica que x , y y z son iguales para ambas rectas:

$$4 + 3t = 5 - s \quad \rightarrow \quad 3t + s = 1$$

$$-3 + t = 7 + 3s \quad \rightarrow \quad t - 3s = 10$$

$$9 - 2t = 1 - 4s \quad \rightarrow \quad -2t + 4s = -8$$



Resolvemos:

$$3t + s = 1$$

$$t - 3s = 10$$

Resolviendo por eliminación:

$$\begin{array}{r} + \quad \downarrow \\ 3(3t + s = 1) \\ t - 3s = 10 \\ \hline 10t = 13 \end{array}$$

$$\therefore t = \frac{13}{10}$$

Sustituimos $t = \frac{13}{10}$ en cualquiera de las ecuaciones para obtener el valor de s :

$$3t + s = 1 \rightarrow s = 1 - 3t = 1 - 3\left(\frac{13}{10}\right) = 1 - \frac{39}{10} = -\frac{29}{10} = s$$

Para comprobar si existe solución, se sustituyen los valores encontrados de t y s en las ecuaciones dadas, si arroja el mismo punto se puede concluir que las rectas se cortan:

$$L_1: x = 4 + 3t, y = -3 + t \quad y \quad z = 9 - 2t$$

$$t = \frac{13}{10} \rightarrow x = 4 + 3\left(\frac{13}{10}\right) = \frac{79}{10}, y = -3 + \left(\frac{13}{10}\right) = -\frac{17}{10}$$

$$y \quad z = 9 - 2\left(\frac{13}{10}\right) = \frac{32}{5}$$

$$\therefore \left(\frac{79}{10}, -\frac{17}{10}, \frac{32}{5}\right)$$

$$L_2: x = 5 - s, y = 7 + 3s \quad y \quad z = 1 - 4s$$

$$s = -\frac{29}{10} \rightarrow x = 5 - \left(-\frac{29}{10}\right) = \frac{79}{10}, y = 7 + 3\left(-\frac{29}{10}\right) = -\frac{17}{10}$$

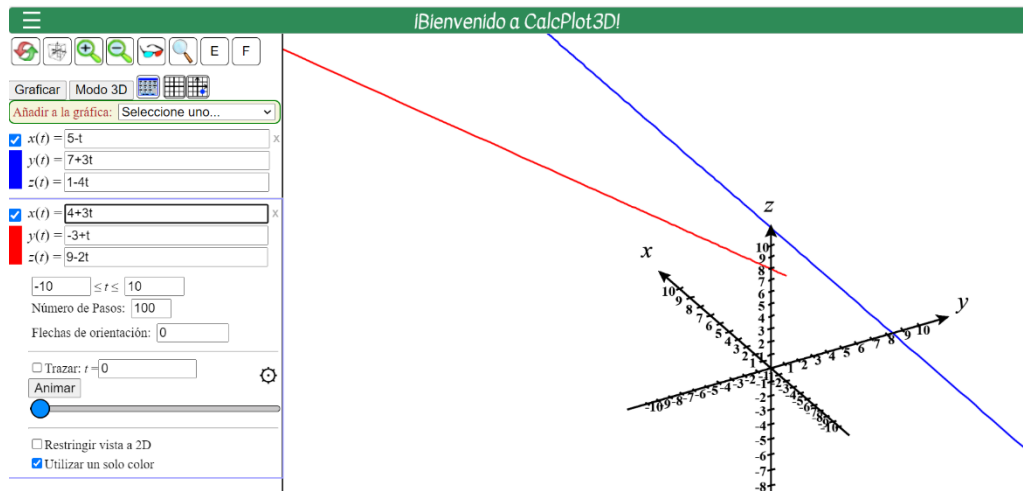
$$y \quad z = 1 - 4\left(-\frac{29}{10}\right) = \frac{41}{5}$$

$$\therefore \left(\frac{79}{10}, -\frac{17}{10}, \frac{41}{5}\right)$$

Como:

$$\left(\frac{79}{10}, -\frac{17}{10}, \frac{32}{5}\right) \neq \left(\frac{79}{10}, -\frac{17}{10}, \frac{41}{5}\right)$$

El sistema no tiene solución, por lo tanto, las rectas no se cortan.



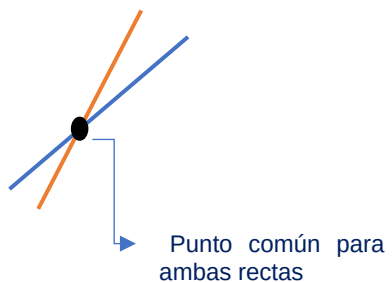
$$b) L_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{9}$$

$$L_2: \frac{x+6}{-7} = y-3 = \frac{z-1}{2}$$

Se escriben las ecuaciones en su forma paramétrica:

$$L_1: x = 1 + 4t, \quad y = 2 - 3t \quad y \quad z = -1 + 9t$$

$$L_2: x = -6 - 7s, \quad y = 3 + s \quad y \quad z = 1 + 2s$$



Igualando:

$$1 + 4t = -6 - 7s \quad \rightarrow \quad 4t + 7s = -7$$

$$2 - 3t = 3 + s \quad \rightarrow \quad -3t - s = 1$$

$$-1 + 9t = 1 + 2s \quad \rightarrow \quad 9t - 2s = 2$$

Resolviendo para:

$$-3t - s = 1$$

$$9t - 2s = 2$$

$$\begin{array}{r} + \quad \downarrow \\ 3(-3t - s = 1) \\ 9t - 2s = 2 \\ \hline -5s = 5 \end{array}$$

$$\therefore s = -1$$

Sustituyendo $s = -1$ en $-3t - s = 1$:

$$-3t - s = 1 \quad \rightarrow \quad -3t - (-1) = 1 \quad \therefore t = 0$$

Para determinar si las rectas se cortan sustituimos t y s en ambas ecuaciones paramétricas:

$$L_1: x = 1 + 4t, \quad y = 2 - 3t \quad y \quad z = -1 + 9t$$

$$x = 1 + 4(0) = 1 \quad y = 2 - 3(0) = 2 \quad z = -1 + 9(0) = -1$$

$$\therefore (1, 2, -1)$$

$$L_2: x = -6 - 7s, \quad y = 3 + s \quad y \quad z = 1 + 2s$$

$$x = -6 - 7(-1) = \mathbf{1} \quad y = 3 + (-1) = \mathbf{2} \quad z = 1 + 2(-1) = \mathbf{-1}$$

$$\therefore \quad \mathbf{(1, 2, -1)}$$

Como $\mathbf{(1, 2, -1)} = \mathbf{(1, 2, -1)}$ las rectas se cortan en ese punto.

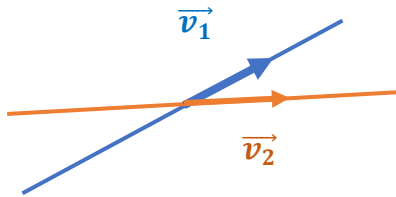
Dado que si existe intersección entre las rectas ahora hay que calcular el ángulo entre dichas rectas:

$$L_1: x = 1 + 4t, \quad y = 2 - 3t \quad y \quad z = -1 + 9t$$

$$\vec{v}_1 = \langle \mathbf{4, -3, 9} \rangle$$

$$L_2: x = -6 - 7s, \quad y = 3 + s \quad y \quad z = 1 + 2s$$

$$\vec{v}_2 = \langle \mathbf{-7, 1, 2} \rangle$$

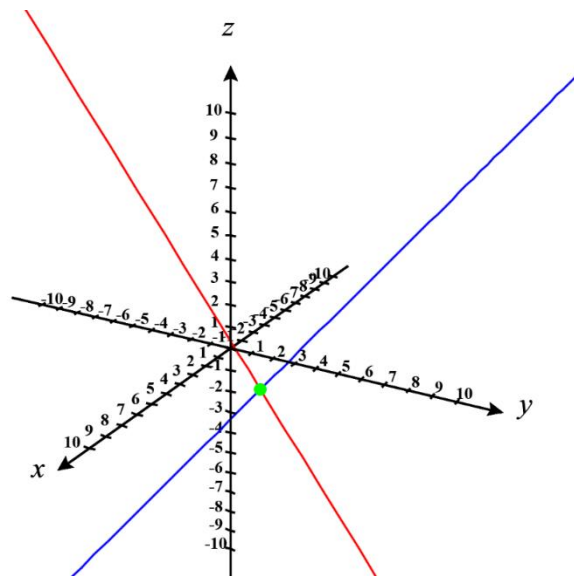


$$\cos \theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle 4, -3, 9 \rangle \cdot \langle -7, 1, 2 \rangle}{\sqrt{106} \sqrt{54}} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-13}{\sqrt{5724}} \right) = \mathbf{99.89^\circ}$$



1.4 Producto vectorial. Planos en el espacio, ecuación de un plano en el espacio, ángulo entre dos planos, cálculo de áreas de paralelogramos y triángulos.

Producto cruz o producto vectorial:

El producto cruz entre dos vectores se expresa:

$$\vec{A} \times \vec{B} = A \text{ cruz } B$$

Y se obtiene:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante por menores y cofactores:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

EJEMPLO 1

Calcular $\vec{A} \times \vec{B}$ y $\vec{B} \times \vec{A}$ si:

$$\vec{A} = 6\hat{i} - 8\hat{j} + \hat{k} \quad y \quad \vec{B} = -5\hat{i} + 10\hat{j} - 4\hat{k}$$

Solución:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -8 & 1 \\ -5 & 10 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = ((-8)(-4) - (10)(1))\hat{i} - ((6)(-4) - (-5)(1))\hat{j} + ((6)(10) - (-5)(-8))\hat{k}$$

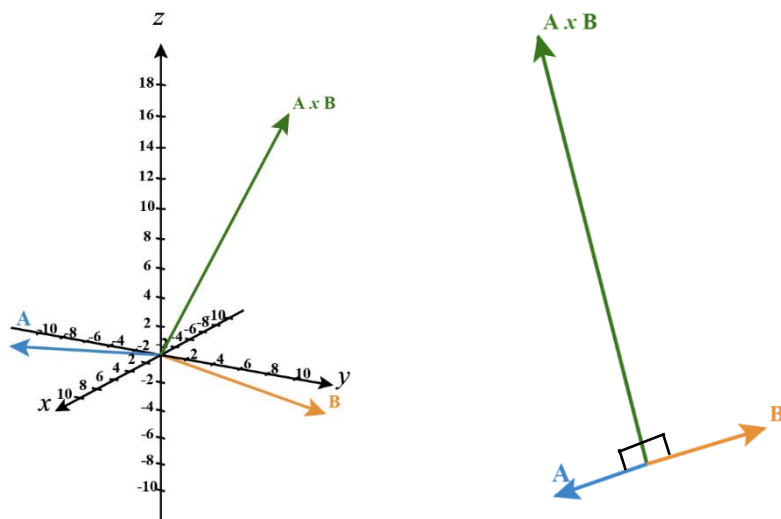
$$\vec{A} \times \vec{B} = (32 - 10)\hat{i} - (-24 + 5)\hat{j} + (60 - 40)\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 22\hat{i} + 19\hat{j} + 20\hat{k}$$

Comprobando en GeoGebra el resultado del producto vectorial (Ver Anexo A):

GeoGebra Suite Calculadora

$$\begin{aligned} A &= (6, -8, 1) \otimes (-5, 10, -4) \\ &= (22, 19, 20) \end{aligned}$$



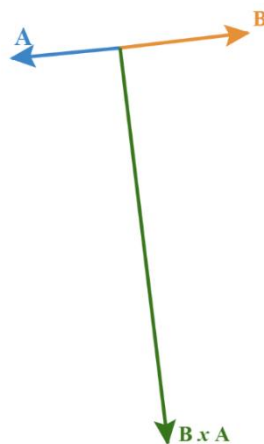
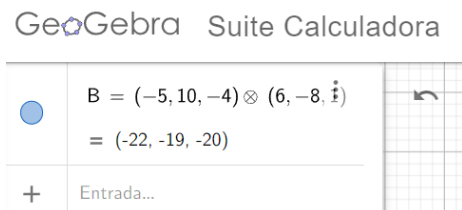
$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -5 & 10 & -4 \\ 6 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = ((10)(1) - (-8)(-4))\hat{i} - ((-5)(1) - (6)(-4))\hat{j} + ((-5)(-8) - (6)(10))\hat{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = (10 - 32)\hat{i} - (-5 + 24)\hat{j} + (40 - 60)\hat{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = -22\hat{i} - 19\hat{j} - 20\hat{k}$$

Comprobando en GeoGebra el resultado del producto vectorial:



Se observa que:

66 $\vec{A} \times \vec{B}$ es ortogonal a $\vec{A}$ y $\vec{A} \times \vec{B}$ es ortogonal a $\vec{B}$

Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = 0 \quad y \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = 0$$

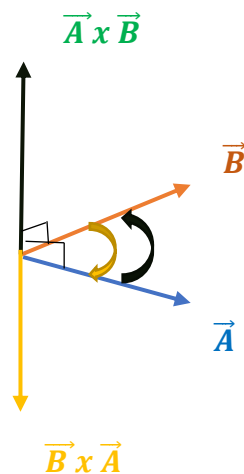
$$(22)(6) + (19)(-8) + (20)(1) = 0$$

$$132 - 152 + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0 \quad \therefore \text{Son ortogonales}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0$$

$$(-22)(-5) + (-19)(10) + (-20)(-4) = 0$$

$$110 - 190 + 80 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0 \quad \therefore \text{Son ortogonales}$$



EJEMPLO 2

Calcular $\vec{A} \times \vec{B}$ y $\vec{B} \times \vec{A}$ si:

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k} \quad y \quad \vec{B} = -4\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$$

Solución:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & 3 \\ -4 & 8 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (24 - 24)\hat{i} - (-12 + 12)\hat{j} + (16 - 16)\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & 8 & -6 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = (24 - 24)\hat{i} - (-12 + 12)\hat{j} + (16 - 16)\hat{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

En el ejercicio anterior el vector $\vec{A}$ es múltiplo escalar del vector $\vec{B}$ y se observa que el producto cruz es cero. Por lo tanto, se puede enunciar lo siguiente:

27 Dos vectores son paralelos si y sólo si el producto cruz es cero”

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \leftrightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$$

2 Dos vectores son paralelos si y sólo uno es múltiplo escalar del otro”

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \leftrightarrow \vec{A} = k \vec{B}$$

Propiedades:

1. $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$
2. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
3. $c(\vec{A} \times \vec{B}) = (c\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (c\vec{B})$
4. $\vec{A} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{A} = \vec{0}$

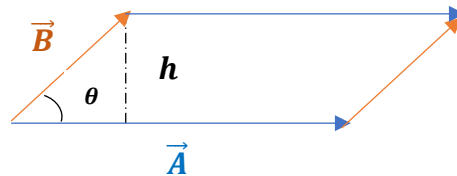
5. $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$
6. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ (Triple producto escalar)

Propiedades geométricas del producto vectorial:

1. $\vec{A} \times \vec{B}$ es ortogonal (perpendicular) tanto a $\vec{A}$ como a $\vec{B}$
2. $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \theta$
3. $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ sí y sólo sí $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son múltiplos escalares uno del otro (esto es, que son paralelos).
4. $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \text{área del paralelogramo que tiene } \vec{A} \text{ y } \vec{B} \text{ como lados adyacentes.}$

Aplicaciones del producto cruz o producto vectorial

Área de un paralelogramo:



Área del paralelogramo = base x altura

$$\text{base} = \|\vec{A}\|$$

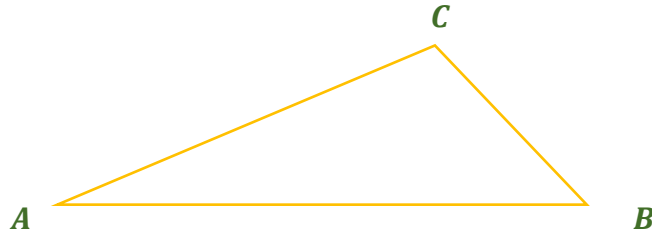
$$\text{altura} = \|\vec{B}\| \sin \theta$$

$$\text{Área del paralelogramo} = (\|\vec{A}\|)(\|\vec{B}\| \sin \theta)$$

$$\text{Área del paralelogramo} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \theta$$

$$\text{Área del paralelogramo} = \|\vec{A} \times \vec{B}\|$$

Área de un triángulo:



$$\text{Área del triángulo } ABC = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2}$$

EJEMPLO 3

1 Calcular el área del paralelogramo que tiene por lados adyacentes a

$$\vec{M} = \langle -1, 5, 7 \rangle \text{ y } \vec{N} = \langle 3, 10, -1 \rangle$$

Solución:

$$\vec{M} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 5 & 7 \\ 3 & 10 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M} \times \vec{N} = (-5 - 70)\hat{i} - (1 - 21)\hat{j} + (-10 - 15)\hat{k}$$

$$\vec{M} \times \vec{N} = -75\hat{i} + 20\hat{j} - 25\hat{k}$$

$$\|\vec{M} \times \vec{N}\| = \sqrt{5625 + 400 + 625} = \sqrt{6650} = 81.54$$

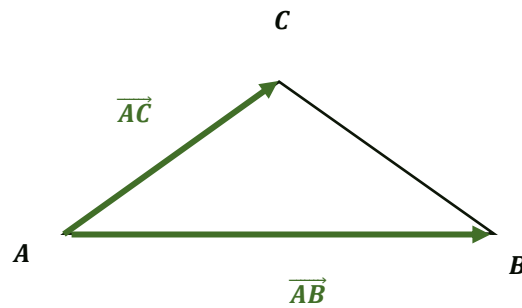
$$\text{Área del paralelogramo} = 81.54u^2$$

EJEMPLO 4

8

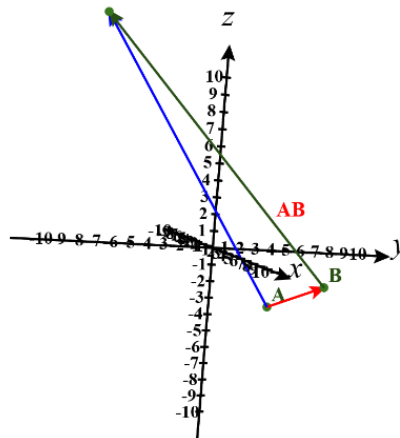
Calcular el área del triángulo que tiene por vértices a los puntos $A(-3, 5, -4)$, $B(1, 7, -2)$ y $C(5, -8, 12)$

Solución:



$$\overrightarrow{AB} = \langle 1 - (-3), 7 - 5, -2 - (-4) \rangle = \langle 4, 2, 2 \rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 5 - (-3), -8 - 5, 12 - (-4) \rangle = \langle 8, -13, 16 \rangle$$



$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & -13 & 16 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (32 + 26)\hat{i} - (64 - 16)\hat{j} + (-52 - 16)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 58\hat{i} - 48\hat{j} - 68\hat{k}$$

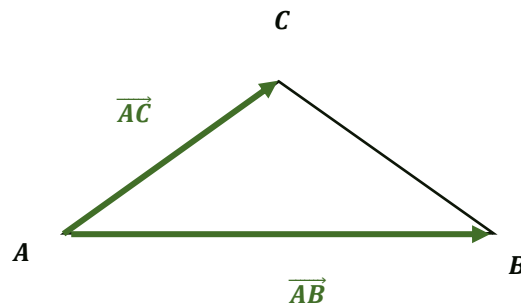
$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{58^2 + (-48)^2 + (-68)^2} = \mathbf{101.44}$$

Por lo tanto, el área del triángulo es $\text{Área} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{101.44}{2} = \mathbf{50.72u^2}$

Comprobación con la fórmula de Herón (60 a.C):

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{semiperímetro del triángulo}$$



$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{BC}\|}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 1 - (-3), 7 - 5, -2 - (-4) \rangle = \langle 4, 2, 2 \rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 5 - (-3), -8 - 5, 12 - (-4) \rangle = \langle 8, -13, 16 \rangle$$

$$\overrightarrow{BC} = \langle 5 - 1, -8 - 7, 12 - (-2) \rangle = \langle 4, -15, 14 \rangle$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{64 + 169 + 256} = \sqrt{489}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{16 + 225 + 196} = \sqrt{437}$$

$$s = \frac{\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{BC}\|}{2}$$

$$s = \frac{\sqrt{24} + \sqrt{489} + \sqrt{437}}{2} = 23.96$$

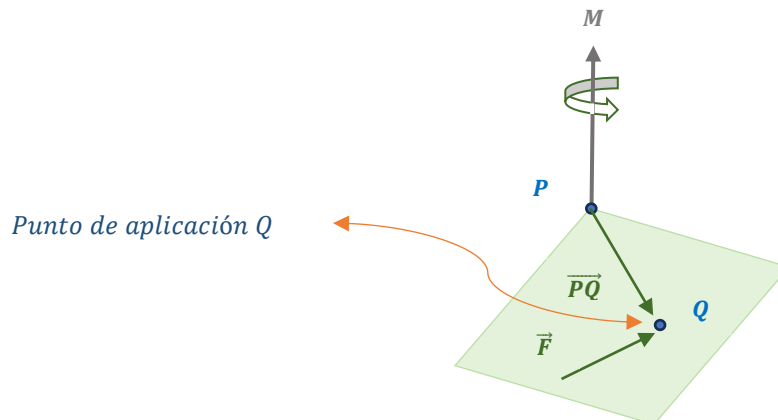
$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{Área} = \sqrt{s(s - \|\overrightarrow{AB}\|)(s - \|\overrightarrow{AC}\|)(s - \|\overrightarrow{BC}\|)}$$

$$\text{Área} = \sqrt{23.96(23.96 - \sqrt{24})(23.96 - \sqrt{489})(23.96 - \sqrt{437})}$$

$$\text{Área} = 50.76$$

Momento $\vec{M}$ de una fuerza $\vec{F}$ respecto a un punto P :



$$\vec{M} = \vec{PQ} \times \vec{F}$$

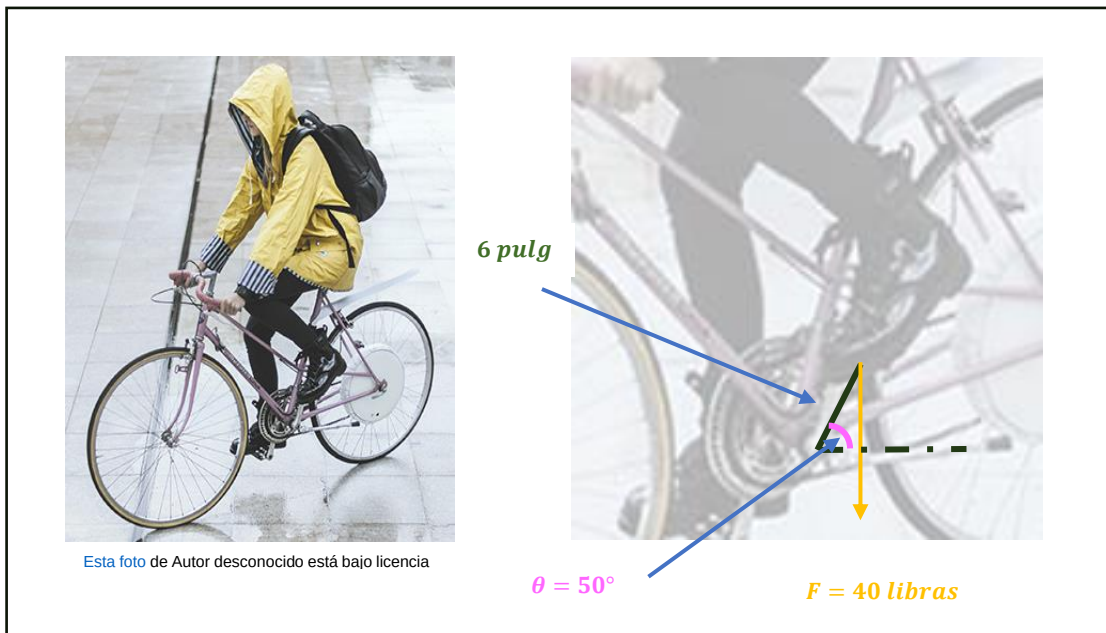
$$M = \|\vec{M}\| = \|\vec{PQ} \times \vec{F}\|$$

$$M = \|\vec{PQ} \times \vec{F}\| = \|\vec{PQ}\| \|\vec{F}\| \sin \theta_M$$

$$\theta_M = \text{ángulo entre } \vec{PQ} \text{ y } \vec{F}$$

EJEMPLO 5

Un joven irrena en una bicicleta aplicando una fuerza dirigida hacia abajo de 40 libras sobre el pedal cuando la manivela forma un ángulo de 50° con la horizontal. La manivela tiene 5 pulgadas de longitud. Calcular el momento respecto a P.

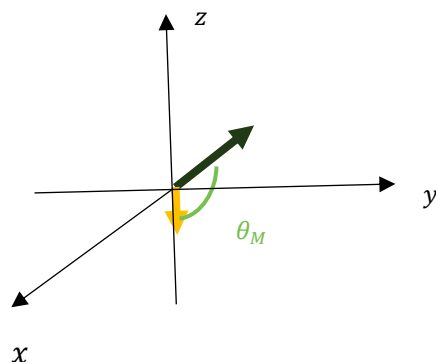


Solución FORMA 1:

$$M = \|\vec{PQ} \times \vec{F}\| = \|\vec{PQ}\| \|\vec{F}\| \sin \theta_M$$

$$\theta_M = \text{ángulo entre } \vec{PQ} \text{ y } \vec{F}$$

$$\theta_M = 50^\circ + 90^\circ = 140^\circ$$



$$M = \|\overrightarrow{PQ} \times \vec{F}\| = \left(\frac{5}{12} \text{pies}\right) (40 \text{lb}) \sin 140^\circ = \mathbf{10.71 \text{ lb} \cdot \text{pie}}$$

En caso de querer obtener el ángulo a través de fórmula es necesario calcular las componentes de los vectores y utilizar la fórmula:

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{5}{12} \langle 0, \cos 50^\circ, \sin 50^\circ \rangle = \langle \mathbf{0, 0.2678, 0.3192} \rangle$$

$$\vec{F} = \langle \mathbf{0, 0, -40} \rangle$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{F}}{\|\overrightarrow{PQ}\| \|\vec{F}\|} \right) = \arccos \left(\frac{0.3192(-40)}{\left(\frac{5}{12}\right)(40)} \right) = \mathbf{140^\circ}$$

Solución FORMA 2:

$$\overrightarrow{PQ} = \langle \mathbf{0, 0.2678, 0.3192} \rangle$$

$$\vec{F} = \langle \mathbf{0, 0, -40} \rangle$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0.2678 & 0.3192 \\ 0 & 0 & -40 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{F} = (-10.712 - 0)\hat{i} - (0 - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}$$

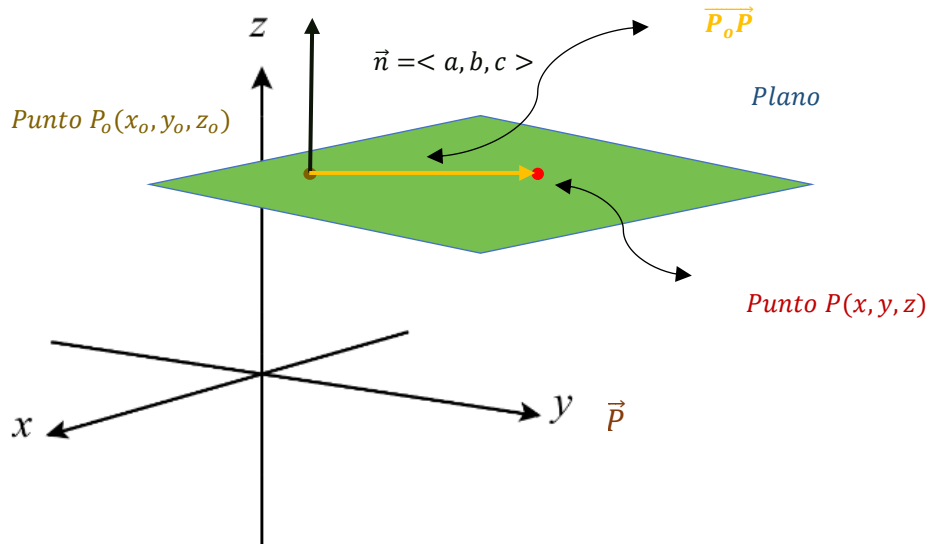
$$\vec{M} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{F} = \mathbf{-10.712\hat{i}}$$

$$\mathbf{M = 10.712 \text{ lb} \cdot \text{pie}}$$

Ecuación general del plano en el espacio:

Para deducir la ecuación general de un plano se debe conocer un punto sobre el plano y un vector normal (perpendicular) al plano ya que eso la hace único.

En la siguiente gráfica se muestra el plano del cual se quiere conocer la ecuación general que lo represente, también se muestra el punto sobre el plano, el vector paralelo y la función vectorial que nos ayudará a determinar la ecuación:



Como el vector $\overrightarrow{P_0P}$ está sobre el plano, por lo tanto, los vectores $\overrightarrow{P_0P}$ y $\vec{n}$ son ortogonales y se cumple que:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(\langle x, y, z \rangle - \langle x_0, y_0, z_0 \rangle) \cdot \langle a, b, c \rangle = 0$$

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle \cdot \langle a, b, c \rangle = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Ecuación General del Plano

Efectuando las operaciones y pasando del lado derecho los términos independientes, se tiene:

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz = ax_o + by_o + cz_o$$

$$ax + by + cz = \langle a, b, c \rangle \cdot \langle x_o, y_o, z_o \rangle$$

$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P}_o$$

Ecuación General del Plano

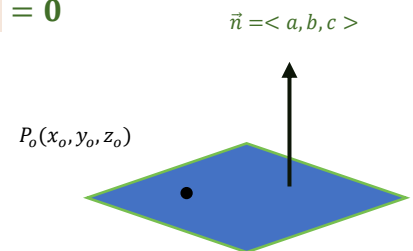
Finalmente, se tiene:

- Sea $P_o(x_o, y_o, z_o)$ un punto perteneciente al plano y $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ un vector normal (perpendicular) al plano, entonces la ecuación general del plano viene dada por:

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$$

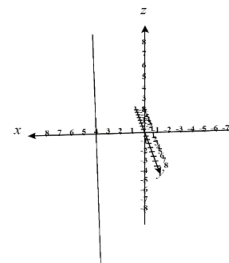
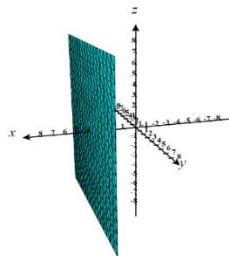
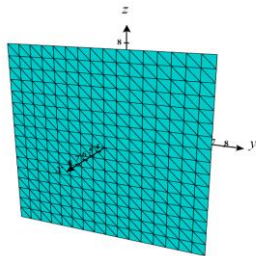
O bien,

$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P}_o$$

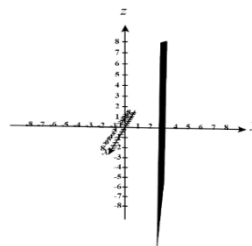
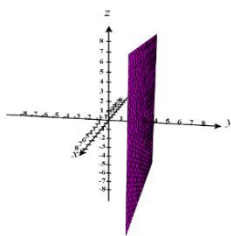
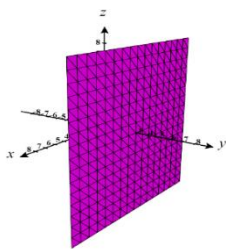


En caso de que la ecuación del plano solo contenga una variable el plano será paralelo al plano de las 2 variables faltantes, a continuación, se muestran las posibles gráficas:

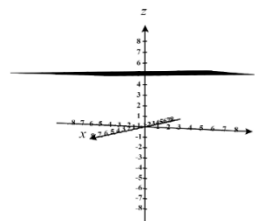
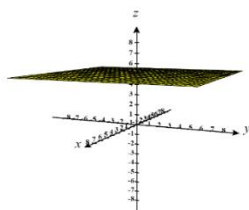
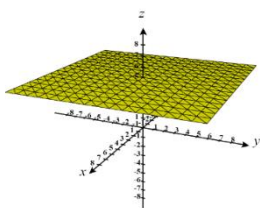
- $x = a$ se trata de un plano paralelo a yz :



- $y = b$ se trata de un plano paralelo a xz :

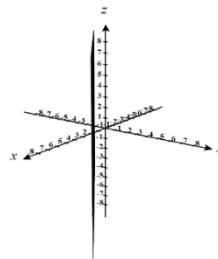
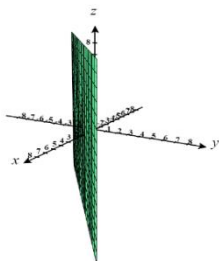
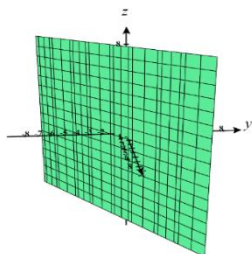


- $z = c$ se trata de un plano paralelo a xy :

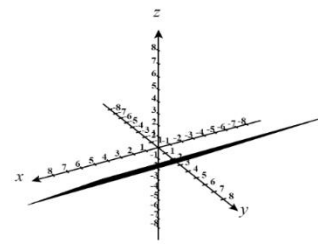
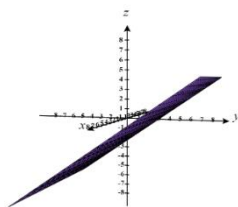
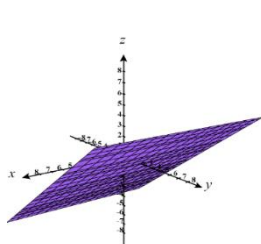


En caso de que la ecuación del plano solo contenga dos variables el plano será paralelo al eje de la variable faltante, a continuación, se muestran las posibles gráficas:

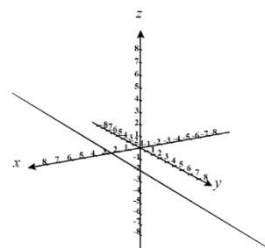
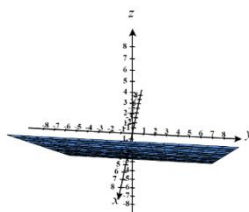
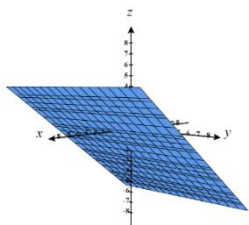
- $ax + by = d$ se trata de un plano paralelo al eje z :



- $by + cz = d$ se trata de un plano paralelo al eje x :



- $ax + cz = d$ se trata de un plano paralelo al eje y :



Las gráficas que se presentan en los siguientes ejercicios se realizan en CalcPlot3D, ver ANEXO

EJEMPLO 6

Determinar una ecuación del plano que pasa por el punto $(0, 2, -3)$ y es perpendicular a $\vec{n} = 5\hat{k}$

Solución:

Para determinar una ecuación del plano necesitamos un punto en el plano y un vector normal (perpendicular) al plano, por lo tanto, ya se tiene los datos necesarios:

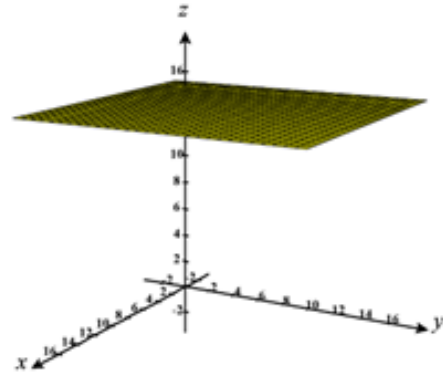
$$\vec{n} = \langle 0, 0, 5 \rangle \quad Po(0, 2, -3)$$

$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P_o}$$

$$0x + 0y + 5z = \langle 0, 0, 5 \rangle \cdot \langle 0, 2, -3 \rangle$$

$$5z = 0 + 0 - 15$$

$$z = -15$$



EJEMPLO 7

5 Determinar una ecuación del plano que pasa por el punto $(0, 0, 0)$ y es perpendicular a $\vec{n} = \langle -3, 0, 2 \rangle$

Solución:

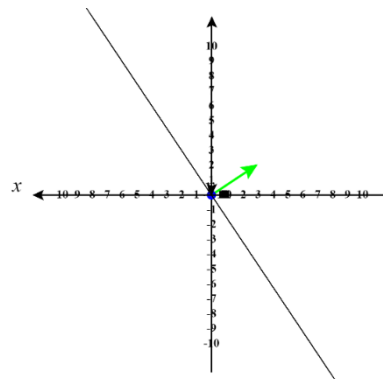
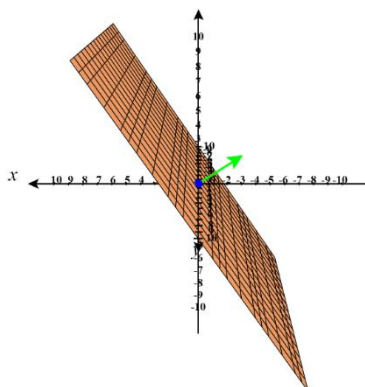
1 Para determinar una ecuación del plano se necesita conocer un punto en el plano y un vector normal (perpendicular) al plano, por lo tanto, ya se tiene los datos necesarios:

$$\vec{n} = \langle -3, 0, 2 \rangle \quad Po(0, 0, 0)$$

$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P_o}$$

$$-3x + 0y + 2z = \langle -3, 0, 2 \rangle \cdot \langle 0, 0, 0 \rangle$$

$$-3x + 2z = 0$$



EJEMPLO 8

Determinar una ecuación del plano que pasa por el punto $(3,2,2)$ y es perpendicular a $\frac{x-1}{4} = y+2 = \frac{z+3}{-3}$

Solución:

Para determinar una ecuación del plano necesitamos un punto en el plano y un vector normal (perpendicular) al plano, por lo tanto, ya se tiene los datos necesarios:

$$\vec{v} = \vec{n} = \langle 4, 1, -3 \rangle \quad Po(3,2,2)$$

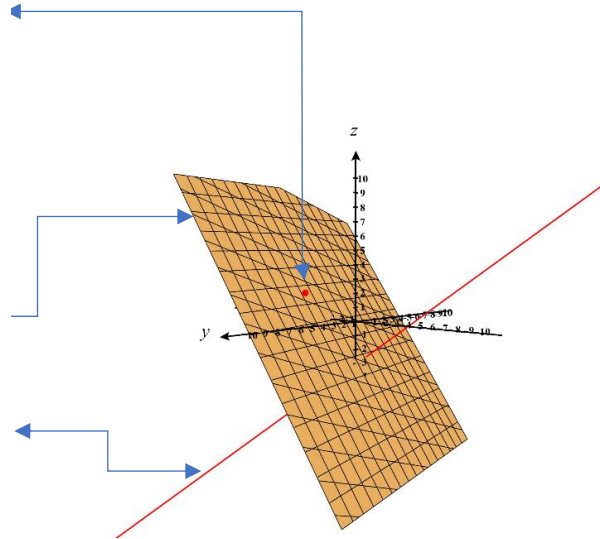
$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P}_o$$

$$4x + 1y - 3z = \langle 4, 1, -3 \rangle \cdot \langle 3, 2, 2 \rangle$$

$$4x + y - 3z = 12 + 2 - 6$$

$$4x + y - 3z = 8$$

$$\frac{x-1}{4} = y+2 = \frac{z+3}{-3}$$

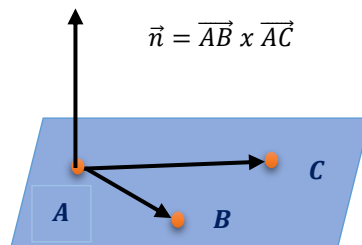


EJEMPLO 9

Determinar una ecuación del plano que pasa por $(3, -1, 2)$, $(2, 1, 5)$ y $(1, -2, -2)$

Solución:

Para determinar una ecuación del plano necesitamos un punto y un vector normal, para el punto en el plano seleccionamos cualquiera de los 3 puntos dados y el vector normal será el producto cruz con dos vectores obtenidos con los tres puntos pertenecientes al plano:



$$A(3, -1, 2), B(2, 1, 5) \text{ y } C(1, -2, -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 2 - 3, 1 - (-1), 5 - 2 \rangle = \langle -1, 2, 3 \rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 1 - 3, -2 - (-1), -2 - 2 \rangle = \langle -2, -1, -4 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \hat{i}(-8 + 3) - \hat{j}(4 + 6) + \hat{k}(1 + 4)$$

$$\vec{n} = -5\hat{i} - 10\hat{j} + 5\hat{k}$$

Seleccionamos el punto $B(2, 1, 5)$ y $\vec{n} = -5\hat{i} - 10\hat{j} + 5\hat{k}$

$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P}_o$$

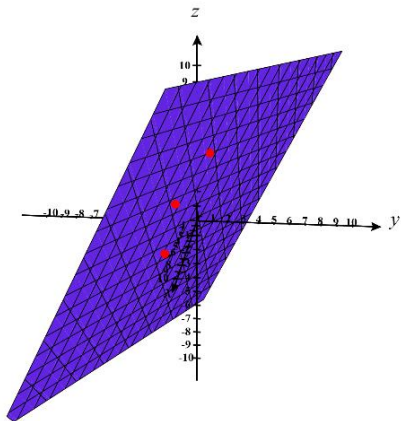
$$-5x - 10y + 5z = \langle -5, -10, 5 \rangle \cdot \langle 2, 1, 5 \rangle$$

$$-5x - 10y + 5z = -10 - 10 + 25$$

$$-5x - 10y + 5z = 5$$

Es posible simplificar la ecuación dividiendo entre -5

$$x + 2y - z = -1$$

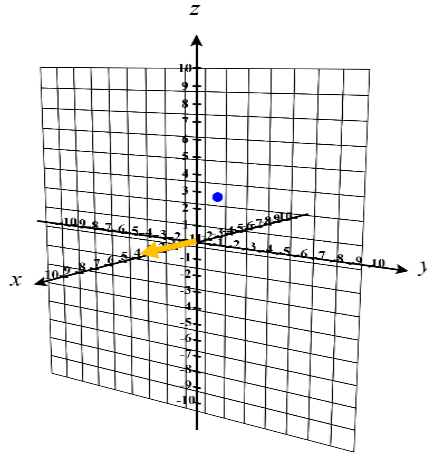


EJEMPLO 10

Determinar una ecuación del plano que pasa por (1,2,3) y es paralelo al plano yz

Solución:

Es importante primero trazar un bosquejo de los datos conocidos y lo que se pide obtener para tener un mejor panorama que facilite la solución del problema.



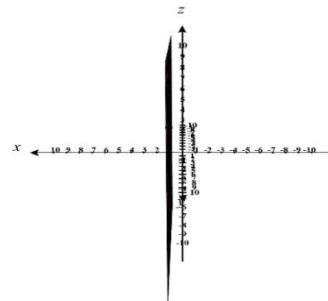
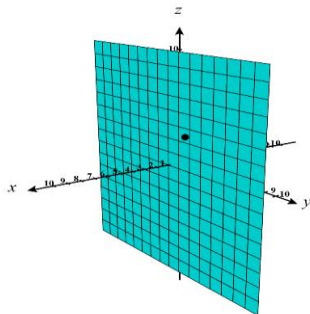
$$P_o(1,2,3) \text{ y } \vec{n} = \hat{i} = \langle 1,0,0 \rangle$$

$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P_o}$$

$$1x + 0y + 0z = \langle 1,0,0 \rangle \cdot \langle 1,2,3 \rangle$$

$$x = 1 + 0 + 0$$

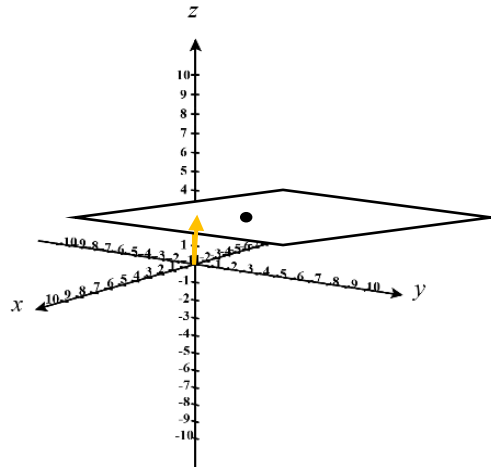
$$x = 1$$



EJEMPLO 11

Determinar una ecuación del plano que pasa por (1,2,3) y es perpendicular al eje z

Solución:



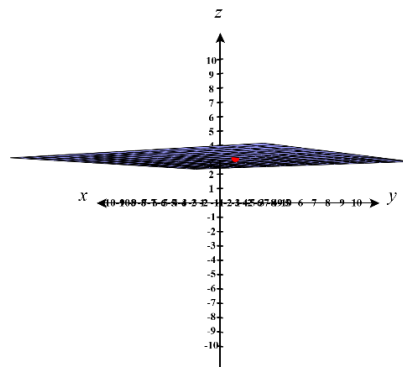
$$P_o(1,2,3) \text{ y } \vec{n} = \hat{k} = \langle 0,0,1 \rangle$$

$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot P_o$$

$$0x + 0y + 1z = \langle 0,0,1 \rangle \cdot \langle 1,2,3 \rangle$$

$$z = 0 + 0 + 3$$

$$z = 3$$



EJEMPLO 12

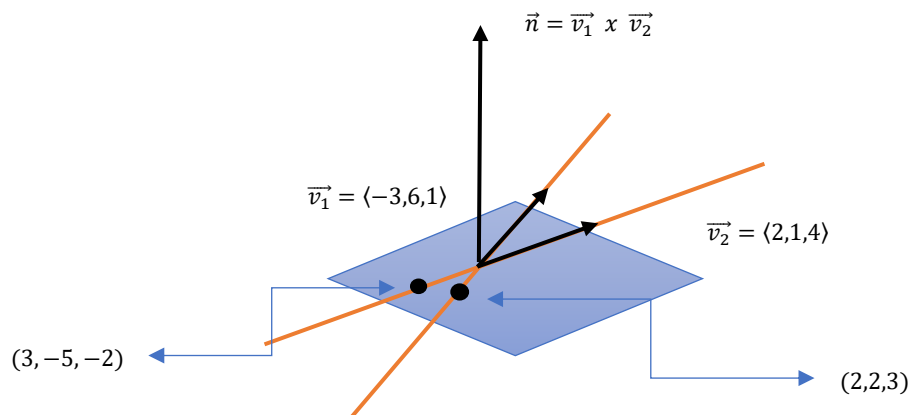
Determinar una ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$L_1: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{6} = z-3$$

$$L_2: \frac{x-3}{2} = y+5 = \frac{z+2}{4}$$

Solución:

De las rectas se obtiene la siguiente información:



$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(24 - 1) - \hat{j}(-12 - 2) + \hat{k}(-3 - 12)$$
$$\vec{n} = 23\hat{i} + 14\hat{j} - 15\hat{k}$$

Se selecciona cualquiera de los dos puntos:

$$(2, 2, 3) \text{ y } \vec{n} = 23\hat{i} + 14\hat{j} - 15\hat{k}$$

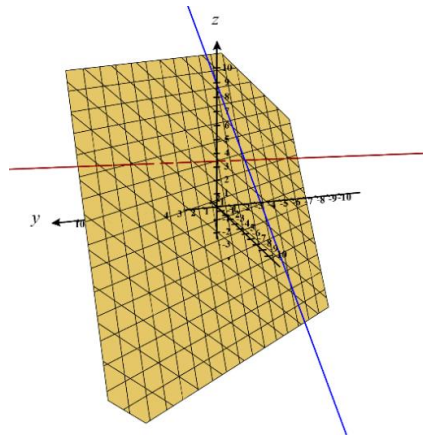
$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P}_o$$

$$23x + 14y - 15z = \langle 23, 14, -15 \rangle \cdot \langle 2, 2, 3 \rangle$$

$$23x + 14y - 15z = 46 + 28 - 45$$

$$23x + 14y - 15z = 29$$

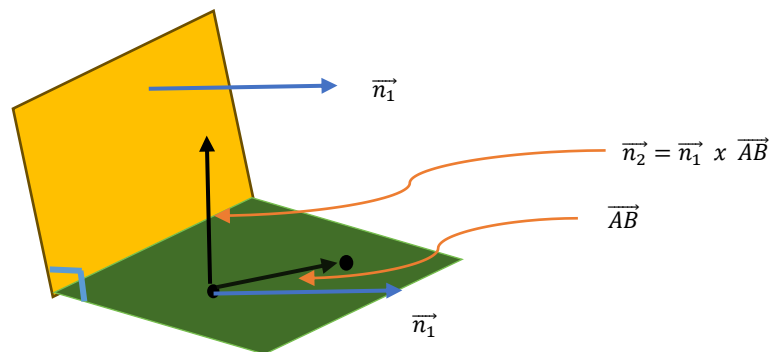
Para comprobar resultados se grafica en Calcplot3D o cualquier otro graficador.



EJEMPLO 13

Determinar una ecuación del plano que ⁶pasa por los puntos $(3, 2, 1)$ y $(3, 1, -5)$ y es perpendicular al plano $6x + 7y + 2z = 10$

Solución:



$$A(3,2,1) \text{ y } B(3,1,-5)$$

$$\vec{n}_1 = \langle 6, 7, 2 \rangle$$

$$\vec{AB} = \langle 3 - 3, 1 - 2, -5 - 1 \rangle = \langle 0, -1, -6 \rangle$$

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = \hat{i}(-42 + 2) - \hat{j}(-36 - 0) + \hat{k}(-6 - 0)$$

$$\vec{n}_2 = -40\hat{i} + 36\hat{j} - 6\hat{k}$$

Se selecciona uno de los puntos en el plano, para este caso se seleccionó el punto $(3,2,1)$ y con $\vec{n}_2 = -40\hat{i} + 36\hat{j} - 6\hat{k}$

$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P}_o$$

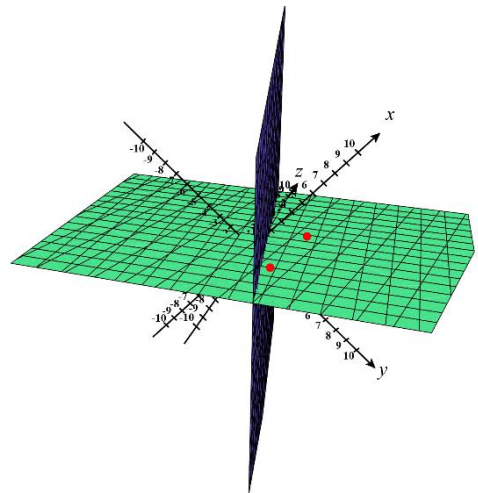
$$-40x + 36y - 6z = \langle -40, 36, -6 \rangle \cdot \langle 3, 2, 1 \rangle$$

$$-40x + 36y - 6z = -120 + 72 - 6$$

$$-40x + 36y - 6z = -54$$

Simplificando:

$$20x - 18y + 3z = 27$$



De la gráfica realizada con la ayuda de Calcplot3D se puede verificar el resultado observando que se cumplen las condiciones del problema.

EJEMPLO 14

3 Encontrar el ángulo entre los dos planos y hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos:

$$6x - 3y + z = 5$$

$$-x + y + 5z = 5$$

Solución:

Calculamos el ángulo entre los dos planos con los vectores normales:

$$\vec{n}_1 = 6\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k} \quad \rightarrow \quad \|\vec{n}_1\| = \sqrt{36 + 9 + 1} = \sqrt{46}$$

$$\vec{n}_2 = -\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k} \quad \rightarrow \quad \|\vec{n}_2\| = \sqrt{1 + 1 + 25} = \sqrt{27}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-6 - 3 + 5}{\sqrt{46}\sqrt{27}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-4}{\sqrt{46}\sqrt{27}} \right) = 96.51^\circ$$

Si se logra tener una ecuación que solo dependa de 2 variables, eso ayudará a liberar una de las variables y llamarla "t", de esa forma se obtendrán las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección. Por lo tanto, se elimina una variable de nuestro sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas:

$$\begin{array}{rcl} & & 6x - 3y + z = 5 \\ + & \downarrow & \\ & & 3(-x + y + 5z = 5) \\ \hline & & 3x + 16z = 20 \end{array}$$

Se libera cualquiera de las 2 variables, para este caso se libera z despejando x:

$$3x + 16z = 20$$

$$x = \frac{20 - 16z}{3}$$

$$x = \frac{20}{3} - \frac{16}{3}z$$

Se parametriza $z = t$

$$\therefore x = \frac{20}{3} - \frac{16}{3}t$$

Ahora se sustituye x y z en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$-x + y + 5z = 5$$

$$-\left(\frac{20}{3} - \frac{16}{3}t\right) + y + 5(t) = 5$$

$$-\frac{20}{3} + \frac{16}{3}t + y + 5t = 5$$

$$y = 5 + \frac{20}{3} - \frac{16}{3}t - 5t$$

$$y = \frac{35}{3} - \frac{31}{3}t$$

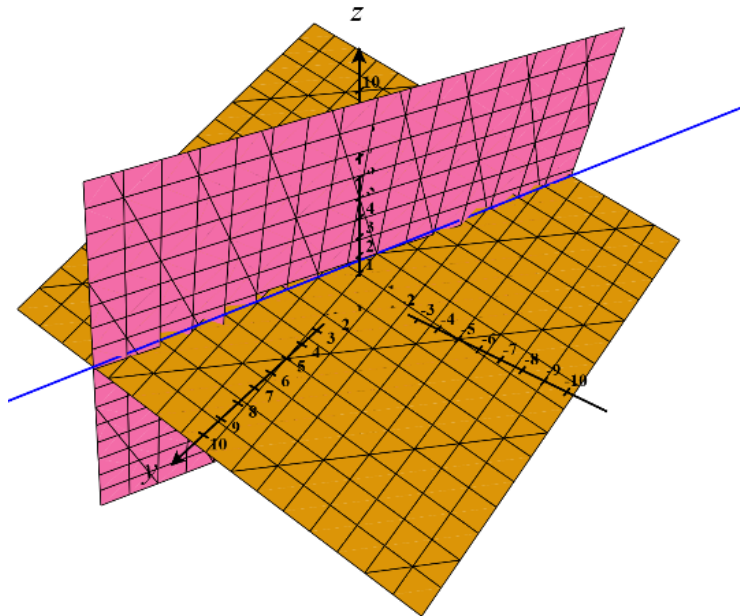
Por lo tanto, ¹² las ecuaciones simétricas de la recta de intersección de los dos planos son:

$$x = \frac{20}{3} - \frac{16}{3}t$$

$$y = \frac{35}{3} - \frac{31}{3}t$$

$$z = t$$

Finalmente, se realiza las gráficas para comprobar resultados:



Como se observa en la gráfica la recta esta sobre la intersección de ambos planos.

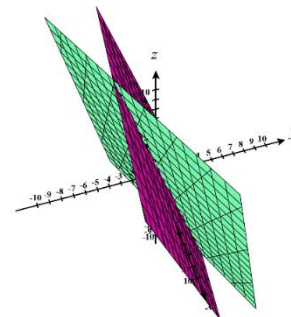
PARA TENER EN CUENTA:

- Si las ecuaciones de dos planos NO son múltiplo escalar una de la otra (ni el lado izquierdo de las ecuaciones), entonces los planos ni son paralelos ni idénticos.

Por ejemplo:

$$P_1: x + 9y + 3z = 5$$

$$P_2: -2x + 5y + z = 1$$

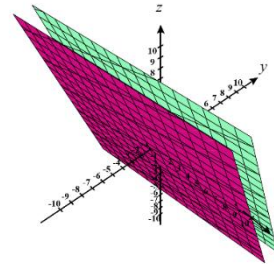


- Si las ecuaciones de dos planos son múltiplo escalar una de la otra excepto los términos independientes, entonces los planos son paralelos.

Por ejemplo:

$$P_1: -x + 9y + 3z = 5$$

$$P_2: 2x - 18y - 6z = 20$$

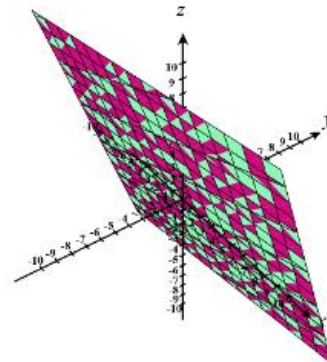


- Si las ecuaciones de dos planos son múltiplo escalar una de la otra, entonces los planos son idénticos.

Por ejemplo:

$$P_1: -x + 9y + 3z = 5$$

$$P_2: 2x - 18y - 6z = -10$$



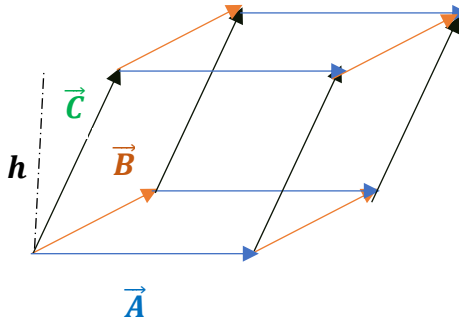
1.5 Triple producto escalar. Volumen de un paralelepípedo.

Triple producto escalar

El triple producto escalar viene dado por:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

Volumen de un paralelepípedo:



$$\text{Volumen del paralelepípedo} = (\text{Área}_{\text{base}})(\text{Altura})$$

$$\text{Área}_{\text{base}} = \|\vec{A} \times \vec{B}\|$$

$$\text{Altura} = \|\text{Proy}_{\vec{A} \times \vec{B}} \vec{C}\|$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = (\|\vec{A} \times \vec{B}\|)(\|\text{Proy}_{\vec{A} \times \vec{B}} \vec{C}\|)$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = (\|\vec{A} \times \vec{B}\|) \left(\left| \frac{\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})}{\|\vec{A} \times \vec{B}\|} \right| \right)$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = |\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})|$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 1

Calcular el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas adyacentes a los vectores:

$$\vec{A} = \langle -8, 2, 1 \rangle \quad \vec{B} = \langle -3, -5, 7 \rangle \quad \text{y} \quad \vec{C} = \langle 5, -1, -4 \rangle$$

Solución:

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = |\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})|$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -8 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= |(5)(14 + 5) - (-1)(-56 + 3) + (-4)(40 + 6)| = |95 - 53 - 184| = |-142|$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = 142u^3$$

2. Funciones vectoriales en una variable real

2.1 ⁶ Ecuaciones paramétricas. Definiciones. Curvas planas y trayectorias.

Ecuaciones paramétricas:

Las ecuaciones paramétricas son ecuaciones en las que tanto x como y dependen de una tercer variable t a la que se le llama parámetro.

Al parametrizar una función algebraica, se parametriza primero la variable independiente x , esto es $x = t$ y, como y depende de x entonces, también dependerá del parámetro t ., esto es:

$$x = x(t) \quad y \quad y = y(t)$$

Las gráficas que se presentan en los siguientes ejercicios se realizan en CalcPlot3D, ver ANEXO A

EJEMPLO 1

Parametrizar la siguiente función y elaborar su gráfica:

$$f(x) = 4x^2 - 1$$

Solución:

Se parametriza la variable dependiente:

$$x = t$$

Se sustituye x en la función:

$$y = 4t^2 - 1$$

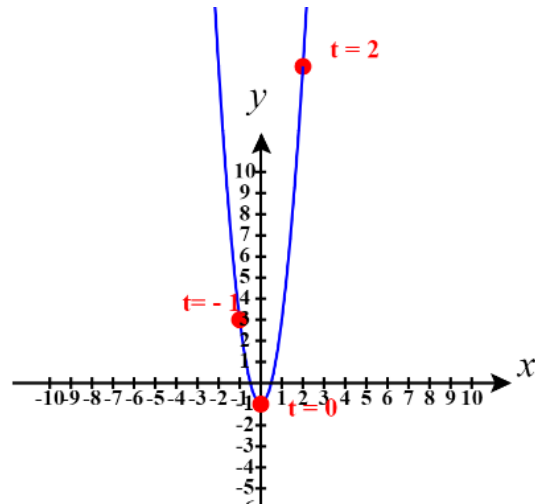
Por lo tanto, la parametrización es:

$$x = t$$

$$y = 4t^2 - 1$$

Tabulando, dando valores algunos valores a t , se tiene:

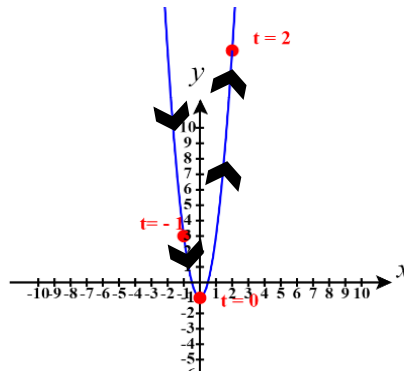
t	x	y
-3	-3	35
-1	-1	3
0	0	-1
2	2	15
4	4	63



2

Una de las ventajas al expresar una función en forma paramétrica es que se puede elegir la forma en que se realiza la trayectoria, esto es, puede ser de izquierda a derecha o viceversa. Para este ejemplo se presentan 2 parametrizaciones y se observa el cambio que se presenta en la trayectoria.

En la parametrización anterior la trayectoria se realiza de izquierda a derecha, esto se puede ver si consideramos el parámetro t como tiempo.



Ahora se analiza la siguiente parametrización:

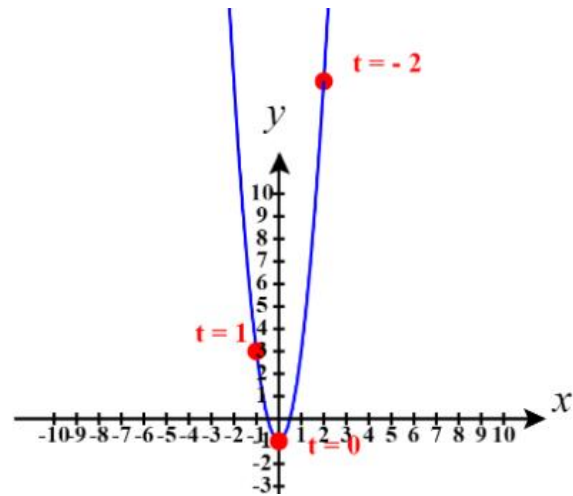
$$x = -t$$

$$y = 4(-t)^2 - 1$$

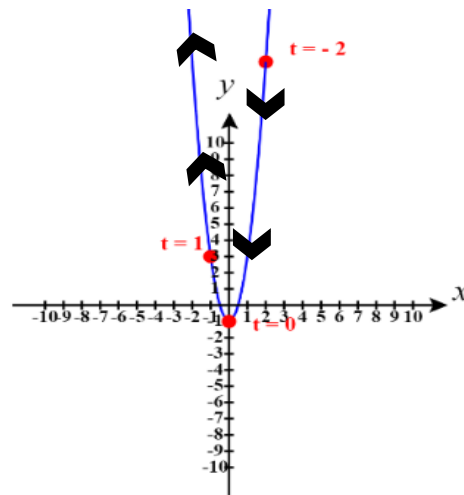
$$y = 4t^2 - 1$$

Tabulando, dando valores algunos valores a t , se tiene:

t	x	y
-2	2	15
-1	1	3
0	0	-1
1	-1	3
2	-2	15
4	-4	63



Con esta parametrización se observa que la trayectoria se realiza de derecha a izquierda, esto se puede apreciar mejor si consideramos el parámetro t como tiempo.



EJEMPLO 2:

Parametrizar la siguiente función y elaborar su gráfica:

$$f(x) = \sqrt{2x + 8}$$

Solución:

Parametrizando la variable dependiente:

$$x = t$$

Sustituyendo x en la función:

$$y = \sqrt{2t + 8}$$

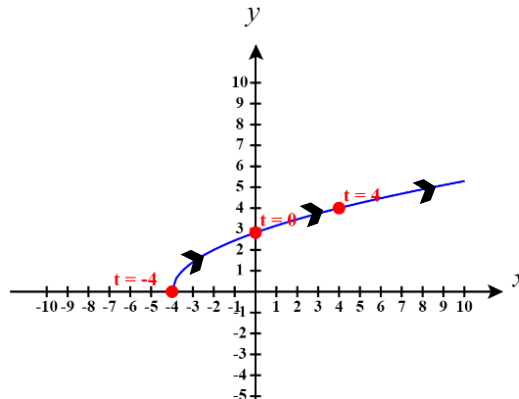
Por lo tanto, la parametrización es:

$$x = t$$

$$y = \sqrt{2t + 8}$$

Tabulando, dando valores algunos valores a t , se tiene:

t	x	y
-4	-4	0
-3	-3	$\sqrt{2}$
-1	-1	$\sqrt{7}$
0	0	$\sqrt{8}$
2	2	$\sqrt{12}$
4	4	4



EJEMPLO 3:

Parametrizar la siguiente función y elaborar su gráfica:

$$f(x) = 3e^x$$

Solución:

Parametrizando la variable dependiente:

$$x = t$$

Sustituyendo x en la función:

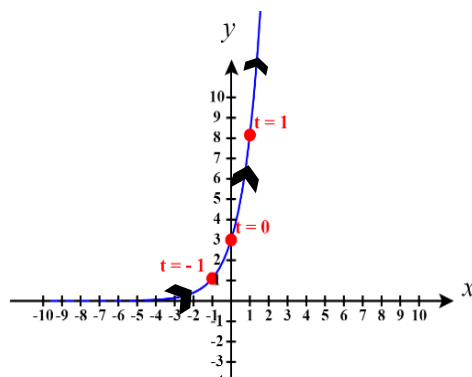
$$y = 3e^t$$

Por lo tanto, la parametrización es:

$$x = t$$

$$y = 3e^t$$

t	x	y
-3	-3	$3e^{-3}$
-1	-1	$3e^{-1}$
0	0	3
2	2	$3e^2$
4	4	$3e^4$

**EJEMPLO 4:**

Parametrizar la siguiente ²⁷circunferencia con centro en el origen y radio 4:

$$x^2 + y^2 = 16$$

Solución:

Como se trata de una circunferencia de radio 4, se utilizan las siguientes sustituciones:

$$x = r \cos(t) \quad \therefore \quad x = 4 \cos(t)$$

$$y = r \sin(t) \quad \therefore \quad y = 4 \sin(t)$$

A continuación, se verifica que es equivalente:

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$(4 \cos(t))^2 + (4 \sin(t))^2 = 16$$

$$16 \cos^2(t) + 16 \sin^2(t) = 16$$

$$16(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 16$$

$$16(1) = 16$$

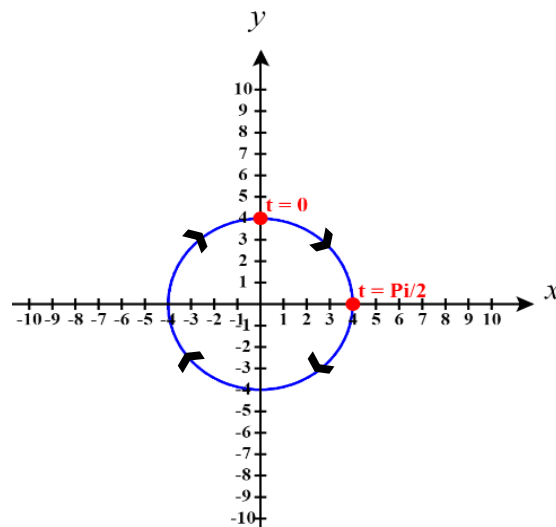
$$16 = 16$$

Por lo tanto si es correcta la parametrización dada

Esta parametrización hace que la trayectoria sea en sentido antihorario ↺ en caso de desear que el recorrido sea en sentido horario ↻ se intercambia de posición seno y coseno, o bien, se multiplica una de las coordenadas por “menos”, cada que se agrega un signo menos se estará cambiando el sentido de la trayectoria:

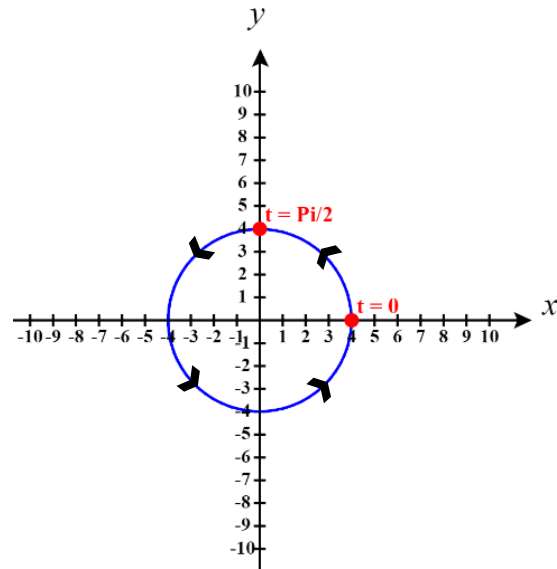
$$x = 4 \cos(t)$$

$$y = 4 \sin(t)$$



$$x = 4\text{sen}(t)$$

$$y = 4\cos(t)$$



EJEMPLO 5:

5 Parametrizar la circunferencia con centro en (3, -1) y radio 7 en sentido horario:

Solución:

2 Recordemos que la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

donde:

$$\text{Centro: } C(h, k)$$

$$\text{Radio: } r$$

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 49$$

La manera de parametrizarla es:

$$x = h + r\cos(t)$$

$$y = k + r\text{sen}(t)$$



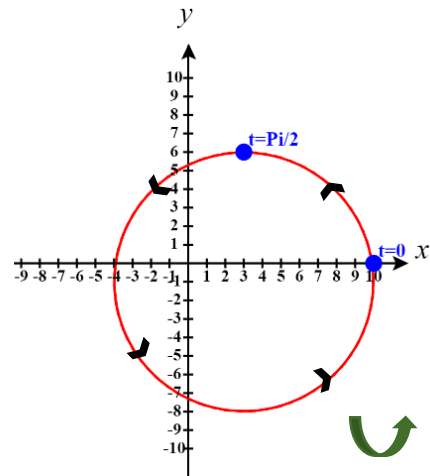
$$C(3, -1) \quad r = 7$$

$$(x - 3)^2 + (y - (-1))^2 = 7^2$$

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 49$$

$$x = h + r \cos(t) \quad \therefore \quad x = 3 + 7 \cos(t)$$

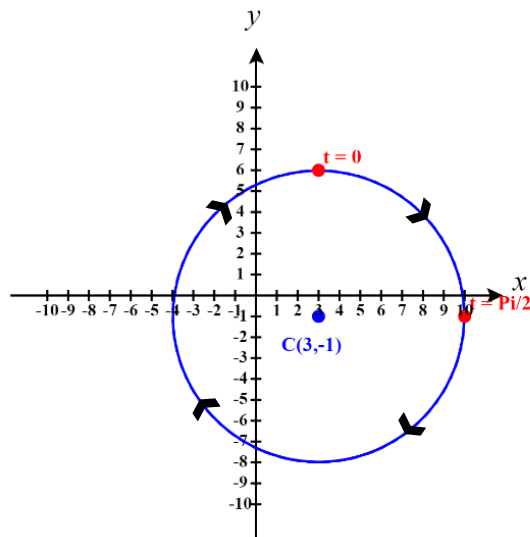
$$y = k + r \sin(t) \quad \therefore \quad y = -1 + 7 \sin(t)$$



Como se pide en sentido horario entonces, se intercambia de lugar seno y coseno:

$$x = h + r \sin(t) \quad \therefore \quad x = 3 + 7 \sin(t)$$

$$y = k + r \cos(t) \quad \therefore \quad y = -1 + 7 \cos(t)$$



EJEMPLO 6:

Parametrizar una elipse con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con centro en } (0,0)$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \text{semieje en el eje } x \\ b &= \text{semieje en el eje } y \end{aligned}$$

Solución:

La parametrización es similar al de la circunferencia solo que los coeficientes son, respectivamente, los valores de los semiejes:

$$x = a \cos(t) \quad y = b \sin(t)$$

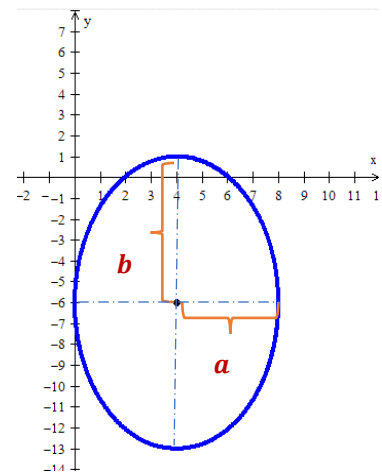
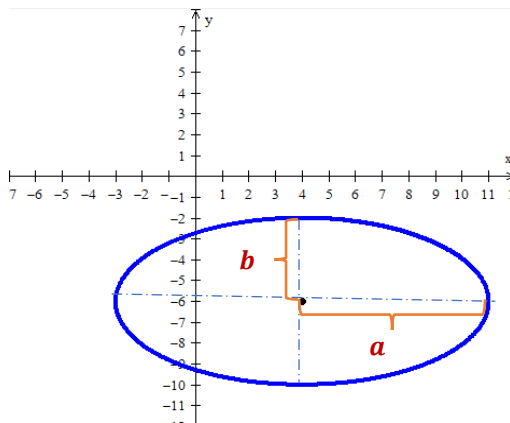
Parametrización de una elipse con centro fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{con centro en } (h,k)$$

donde:

$$a = \text{semieje en el eje } x$$

$$b = \text{semieje en el eje } y$$



$$a > b$$

$$a < b$$

La parametrización es similar al de la elipse con centro en el origen, solo se agrega, respectivamente las coordenadas del centro:

$$x = h + a \cos(t) \quad y = k + b \sin(t)$$



EJEMPLO 7:

Parametrizar la elipse con trayectoria en sentido antihorario:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$$

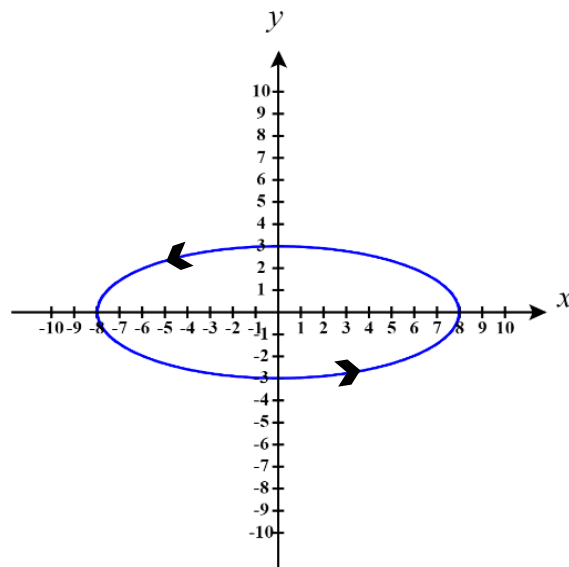
Solución:

$$a^2 = 64 \quad \therefore \quad a = 8$$

$$b^2 = 9 \quad \therefore \quad b = 3$$

$$x = a \cos(t) \quad y = b \sin(t)$$

$$x = 8 \cos(t) \quad y = 3 \sin(t)$$



EJEMPLO 8:

Parametrizar la elipse con trayectoria en sentido horario:

$$\frac{(x+5)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{100} = 1$$

Solución:

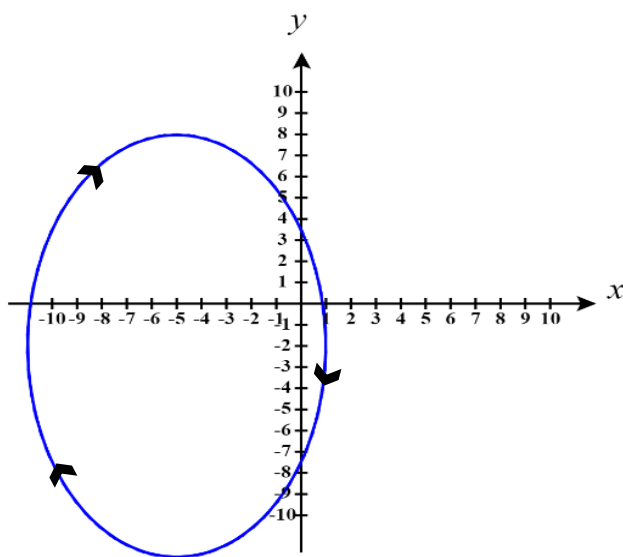
$$a^2 = 36 \quad \therefore \quad a = 6$$

$$b^2 = 100 \quad \therefore \quad b = 10$$

$$C(-5, -2)$$

$$x = h + a \operatorname{sen}(t) \quad x = -5 + 6 \operatorname{sen}(t)$$

$$y = k + b \cos(t) \quad y = -2 + 10 \cos(t)$$



Representación gráfica de las Ecuaciones Paramétricas:

Para poder representar gráficamente un conjunto de ecuaciones paramétricas se cambia a una función algebraica despejando el parámetro t en la ecuación $x = x(t)$ y posteriormente sustituyéndolo en $y = y(t)$, esto con el objetivo de tener una expresión de la forma $y = y(x)$, la cual ya se sabe graficar.

EJEMPLO 9:

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica y determina el dominio:

$$x = 6t + 8$$

$$y = t^2 + 1$$

Solución:

Para determinar el dominio de la función es necesario analizar cada ecuación:

$$\text{Para } x: \quad 6t + 8 \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Para } y: \quad t^2 + 1 \quad t \in \mathbb{R}$$

Como se tiene que cumplir ambas, entonces el dominio para t es:

$$-\infty < t < \infty \quad \rightarrow \quad (-\infty, \infty)$$

Despejando t de x :

$$x = 6t + 8$$

$$t = \frac{x - 8}{6}$$

Sustituyendo t en y :

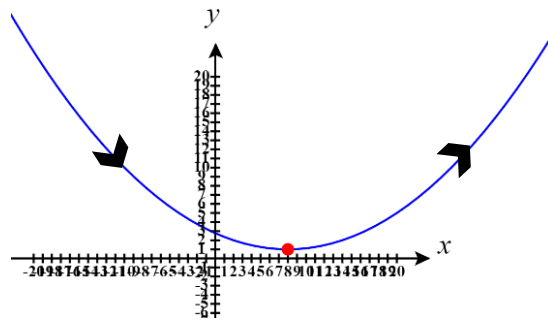
$$y = t^2 + 1 \quad y = \left(\frac{x - 8}{6}\right)^2 + 1 \quad y = \frac{1}{36}(x - 8)^2 + 1$$

$$\text{Recordando el abc:} \quad y = a f(x - c) + b$$

a abre o cierra la gráfica ya que hace que crezca más rápido o más lento

b la desplaza hacia arriba ($b > 0$) o hacia abajo ($b < 0$)

c la desplaza hacia la derecha ($c > 0$) o hacia la izquierda ($c < 0$)



EJEMPLO 10:

Determina el dominio de la función dada y realiza un bosquejo de la curva:

$$x = \sqrt{2t + 10} \quad x \geq 0$$

$$y = t + 4$$

Solución:

Para determinar el dominio de la función es necesario analizar cada ecuación:

$$\text{Para } x: \quad 2t + 10 \geq 0 \quad t \geq -5$$

$$\text{Para } y: \quad t + 4 \quad t \in \mathbb{R}$$

Como se tiene que cumplir ambas, entonces el dominio para t es:

$$t \geq -5 \quad \rightarrow \quad [-5, \infty)$$

Ahora para realizar la gráfica, se despeja t:

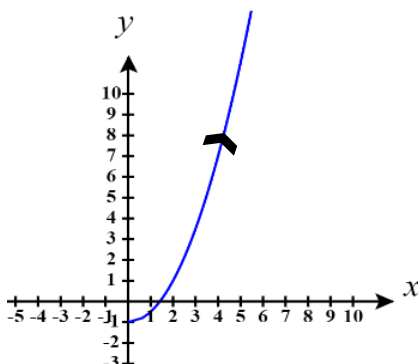
$$x = \sqrt{2t + 10} \rightarrow x^2 = 2t + 10 \rightarrow t = \frac{x^2 - 10}{2}$$

Se sustituye t en y:

$$y = t + 4 \quad \therefore \quad y = \frac{x^2 - 10}{2} + 4 \rightarrow y = \frac{x^2}{2} - 5 + 4 \rightarrow y = \frac{x^2}{2} - 1$$

Como $x = \sqrt{2t + 10}$, esto implica que $x \geq 0$

Por lo que solo tenemos la mitad derecha de la parábola.



EJEMPLO 11:

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica y determina el dominio:

$$x = t^2 + 7$$

$$y = t + 2$$

Solución:

Para determinar el dominio de la función es necesario analizar cada ecuación:

$$\text{Para } x: \quad t^2 + 7 \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Para } y: \quad t + 2 \quad t \in \mathbb{R}$$

Como se tiene que cumplir ambas, entonces el dominio para t es:

$$-\infty < t < \infty \quad \rightarrow \quad (-\infty, \infty)$$

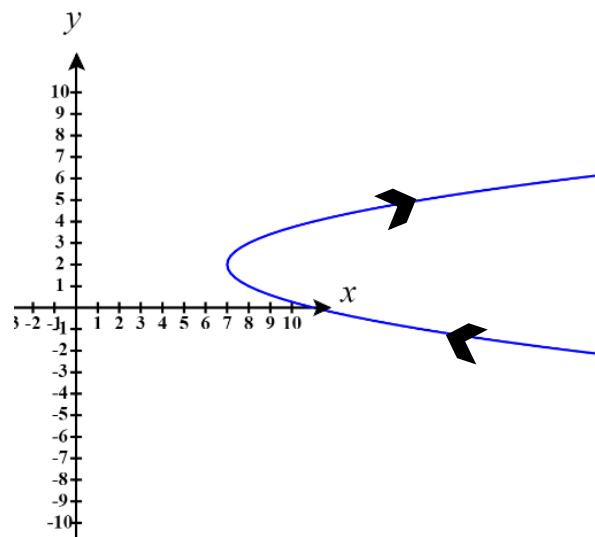
Despejando t :

$$x = t^2 + 7 \quad x \geq 7$$

$$t = \pm\sqrt{x-7}$$

Sustituyendo t en y :

$$y = t + 2 \quad y = \pm\sqrt{x-7} + 2$$



EJEMPLO 12:

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica y determina su dominio:

$$x = \ln(t + 5)$$

$$y = t - 3$$

Solución:

El dominio de la función se determina analizando cada ecuación:

$$\text{Para } x: \ln(t+5) \rightarrow t+5 > 0 \quad t > -5$$

$$\text{Para } y: \quad t-3 \quad t \in \mathbb{R}$$

Como se tiene que cumplir ambas, entonces el dominio para t es:

$$t > -5 \rightarrow (-5, \infty)$$

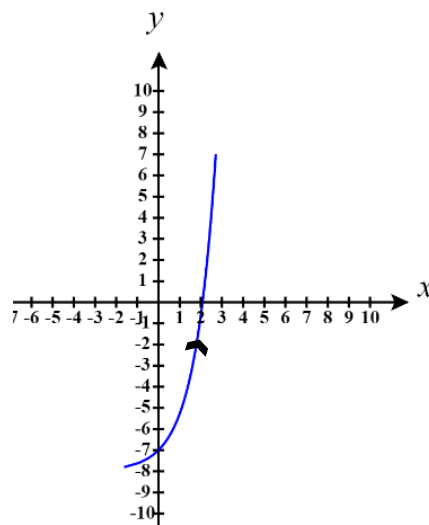
Despejando t de x :

$$x = \ln(t+5) \quad \therefore \quad t \in (-5, \infty)$$

$$e^x = e^{\ln(t+5)} \quad \therefore \quad e^x = t+5 \rightarrow t = e^x - 5$$

Sustituyendo t en y :

$$y = t - 3 \quad y = (e^x - 5) - 3 \quad y = e^x - 8$$



EJEMPLO 13

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica y determina el dominio:

$$x = \ln(t + 4) - 1$$

$$y = t + 3$$

Solución:

Para determinar el dominio de la función es necesario analizar cada ecuación:

$$\text{Para } x: \quad \ln(t + 4) \rightarrow t + 4 > 0 \quad t > -4$$

$$\text{Para } y: \quad t + 3 \quad t \in \mathbb{R}$$

Como se tiene que cumplir ambas, entonces el dominio para t es:

$$t > -4 \rightarrow (-4, \infty)$$

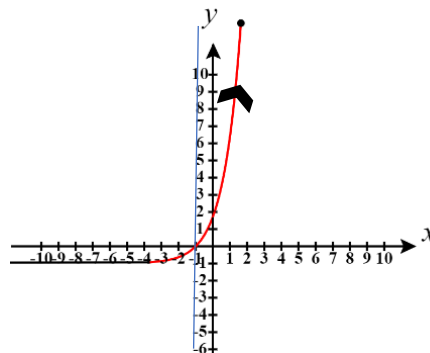
Despejando t de x :

$$x = \ln(t + 4) - 1 \quad \therefore \quad t \in (-4, \infty)$$

$$x + 1 = \ln(t + 4) \quad e^{x+1} = e^{\ln(t+4)} \quad \therefore \quad e^{x+1} = t + 4 \rightarrow t = e^{x+1} - 4$$

Sustituyendo t en y :

$$y = t + 3 \quad y = (e^{x+1} - 4) + 3 \quad y = e^{x+1} - 1$$



EJEMPLO 14

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica determina el dominio:

$$\begin{aligned}x &= e^{4t+1} \\ y &= t + 5\end{aligned}$$

Solución:

Para determinar el dominio de la función es necesario analizar cada ecuación:

$$\text{Para } x: \quad e^{4t+1} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Para } y: \quad t + 5 \quad t \in \mathbb{R}$$

Como se tiene que cumplir ambas, entonces el dominio para t es:

$$-\infty < t < \infty \quad \rightarrow \quad (-\infty, \infty)$$

Despejando t de x :

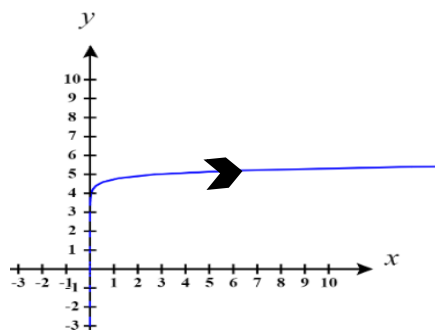
$$x = e^{4t+1} \quad \therefore \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$x = e^{4t+1} \quad \rightarrow \quad \ln(x) = \ln(e^{4t+1}) \quad \rightarrow \quad \ln(x) = 4t + 1$$

$$t = \frac{\ln(x) - 1}{4}$$

Sustituyendo t en y :

$$y = t + 5 \quad y = \left(\frac{\ln(x) - 1}{4} \right) + 5 \quad y = \frac{\ln(x)}{4} + \frac{19}{4}$$



EJEMPLO 15

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica:

$$\begin{aligned}x &= e^{t+1} - 3 \\ y &= 2t + 5\end{aligned}$$

Solución:

Para determinar el dominio de la función es necesario analizar cada ecuación:

$$\text{Para } x: \quad e^{t+1} - 3 \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Para } y: \quad 2t + 5 \quad t \in \mathbb{R}$$

Como se tiene que cumplir ambas, entonces el dominio para t es:

$$-\infty < t < \infty \quad \rightarrow \quad (-\infty, \infty)$$

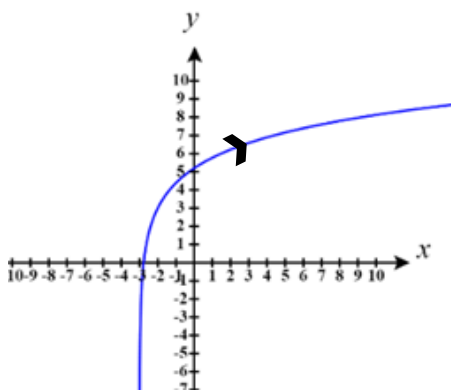
Despejando t en x :

$$x = e^{t+1} - 3 \quad \therefore \quad t \in (-5, \infty)$$

$$x + 3 = e^{t+1} \quad e^{x+3} = e^{\ln(t+1)} \quad \therefore \quad e^{x+3} = t + 1 \quad \rightarrow \quad t = e^{x+3} - 1$$

Sustituyendo t en y :

$$y = 2t + 5 \quad y = 2(e^{x+3} - 1) + 5 \quad y = 2e^{x+3} + 3$$



EJEMPLO 16

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica y determina el dominio:

$$x = \frac{4}{2t+6} - 3 \quad y \quad y = t + 2$$

Solución:

Para determinar el dominio de la función es necesario analizar cada ecuación:

$$\text{Para } x: \quad \frac{4}{2t+6} - 3 \quad \rightarrow \quad 2t+6 \neq 0 \quad t \neq -3$$

$$\text{Para } y: \quad t + 2 \quad t \in \mathbb{R}$$

Como se tiene que cumplir ambas, entonces el dominio para t es:

$$t \in \mathbb{R} - \{-3\} \quad \rightarrow \quad (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$$

Despejando t en x:

$$x = \frac{4}{2t+6} - 3$$

$$x + 3 = \frac{4}{2t+6}$$

$$2t + 6 = \frac{4}{x+3}$$

$$2t = \frac{4}{x+3} - 6$$

Dividiendo entre 2:

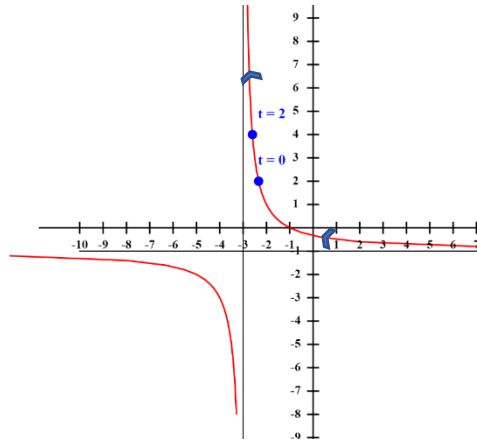
$$t = \frac{2}{x+3} - 3$$

Sustituyendo t en y:

$$y = t + 2$$

$$\left(\frac{2}{x+3} - 3\right) + 2$$

$$y = \frac{2}{x+3} - 1$$



EJEMPLO 17

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica:

$$x = -2 + 8\cos(t)$$

$$y = 5 - 2\sin(t)$$

Solución:

De las ecuaciones paramétricas se puede observar que se trata de una elipse con centro en $(-2, 5)$ con recorrido antihorario:

$$x = h + a\cos(t) \quad \therefore \quad h = -2 \quad y \quad a = 8$$

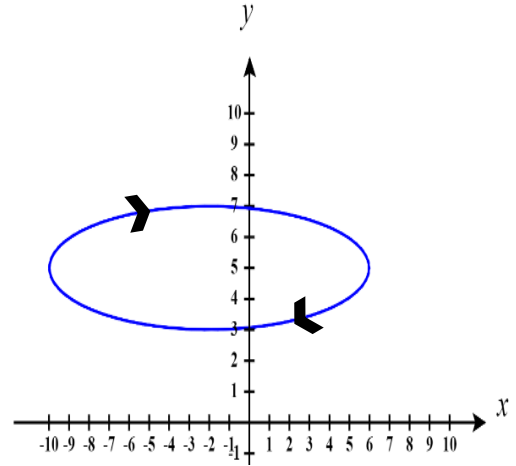
$$y = k + b\sin(t) \quad \therefore \quad k = 5 \quad y \quad b = -2$$



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - (-2))^2}{8^2} + \frac{(y - 5)^2}{(-2)^2} = 1$$

$$\frac{(x + 2)^2}{64} + \frac{(y - 5)^2}{4} = 1$$



EJEMPLO 18

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica:

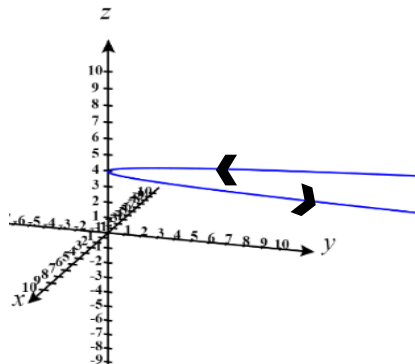
$$x = t, \quad y = t^2 \quad y \quad z = 4$$

Solución:

Al despejar t y sustituir en x , se tiene que:

$$y = x^2$$

Como $z = 4$ esto significa que cada punto en el plano xy lo elevamos 4 unidades:



EJEMPLO 19

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica:

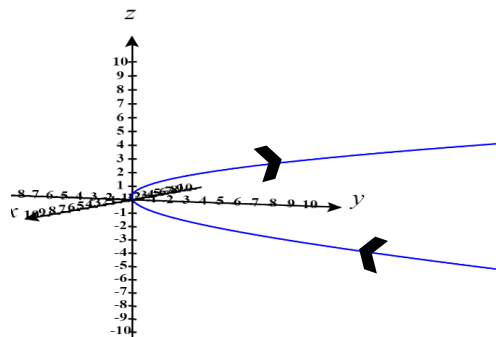
$$x = t, \quad y = t^2 \quad y \quad z = t$$

Solución:

Al despejar t y sustituir en x , se tiene que:

$$y = x^2$$

Como $z = t$ esto significa que la curva irá aumentando su altura conforme t varía:



EJEMPLO 20

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica:

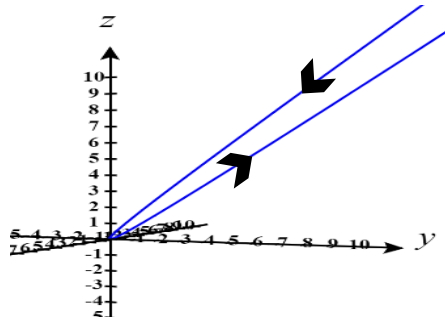
$$x = t, \quad y = t^2 \quad y \quad z = t^2$$

Solución:

Al despejar t y sustituirlo en x , se tiene que:

$$y = x^2$$

Como $z = t$ esto significa que la curva va bajando conforme t varía de $-\infty$ a cero y posteriormente sube conforme t varía de cero a ∞ :



EJEMPLO 21

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica:

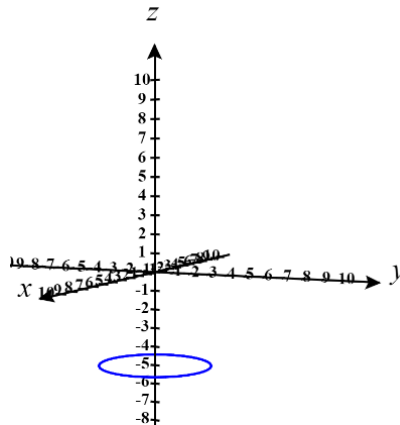
$$x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t \quad y \quad z = -5$$

Solución:

1 En el plano xy se grafica un círculo de radio 3 en sentido antihorario:

$$x^2 + y^2 = 9$$

Como $z = -5$ esto significa que cada punto en el plano xy baja 5 unidades:



EJEMPLO 22

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica:

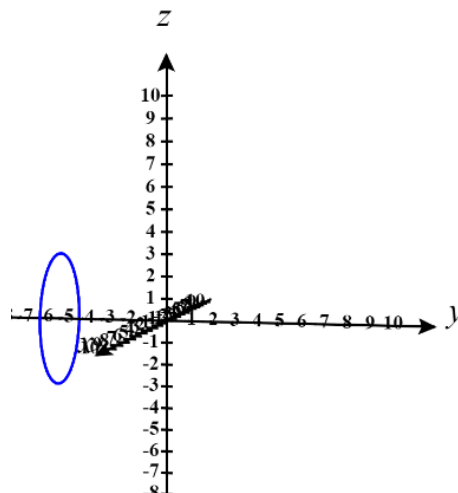
$$x = 3\cos t, \quad y = -5 \quad y \quad z = 3\sin t$$

Solución:

En el plano xz se grafica un círculo de radio 3 en sentido antihorario:

$$x^2 + z^2 = 9$$

Como $y = -5$ esto significa que cada punto en el plano xz se desplaza 5 unidades a la izquierda en y:



EJEMPLO 23

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica:

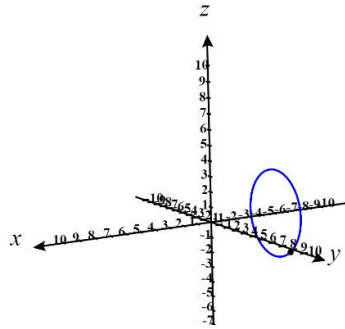
$$x = -5, \quad y = 3\cos t \quad y \quad z = 3\sin t$$

Solución:

En el plano xz se grafica un círculo de radio 3 en sentido antihorario:

$$y^2 + z^2 = 9$$

Como $x = -5$ esto significa que cada punto en el plano yz se desplaza 5 unidades a la izquierda en x:

**EJEMPLO 24**

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica:

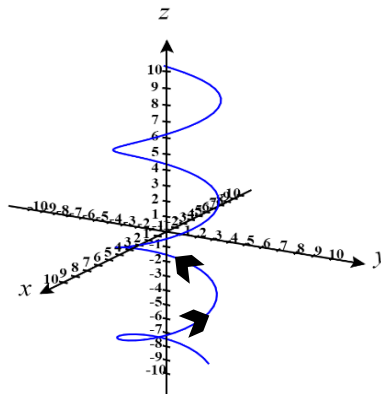
$$x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t \quad y \quad z = t$$

Solución:

En el plano xz se grafica un círculo de radio 3 en sentido antihorario:

$$x^2 + y^2 = 9$$

Como $z = t$ esto significa que la curva irá aumentando su altura conforme t varía:



EJEMPLO 25

Realiza un bosquejo de la siguiente función dada en forma paramétrica:

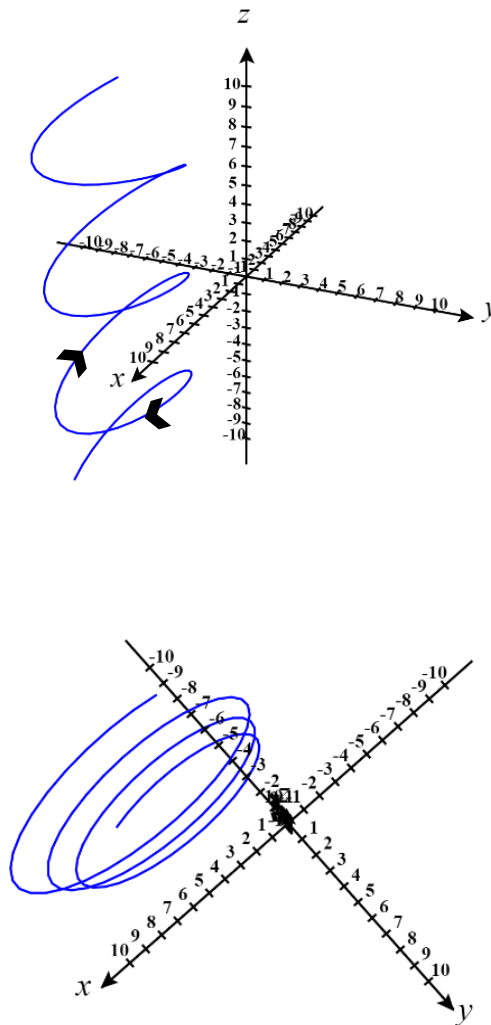
$$x = 4 + 6\operatorname{sen} t, \quad y = -5 + 2\cos t \quad y \quad z = t$$

Solución:

En el plano xz se grafica una elipse con centro en (4, -5) en sentido horario:

$$\frac{(x - 4)^2}{36} + \frac{(y + 5)^2}{4} = 1$$

Como $z = t$ esto significa que la curva irá aumentando su altura conforme t varía:



Derivada de una función dada en ecuaciones paramétricas

La derivada de una función expresada como $x = x(t)$ y $y = y(t)$ viene dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

EJEMPLO 26

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el valor de t indicado:

$$x = t^2 + 4 \quad y = 2t + 1 \quad t = 1$$

Solución:

Para determinar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado necesitamos un punto y la pendiente, que viene siendo la primera derivada ($m = \frac{dy}{dx}$):

$$t = 1 \quad \rightarrow \quad x = (1)^2 + 4 = 5 \quad y = 2(1) + 1 = 3$$
$$\therefore (5, 3)$$

Calculando la derivada:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$x = t^2 + 4 \quad x' = 2t$$

$$y = 2t + 1 \quad y' = 2$$

$$m = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

$$m(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Una vez obtenido el punto y la pendiente se procede a calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en $t = 1$

$$(5, 3) \quad y \quad m = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 1(x - 5)$$

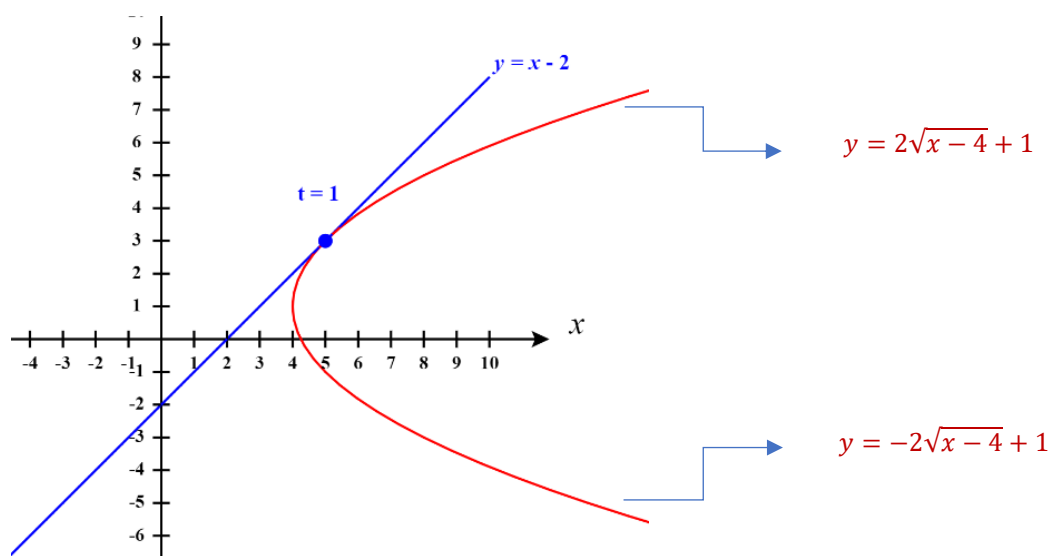
$$y = x - 5 + 3$$

$$y = x - 2$$

Ahora se obtiene la función $y = f(x)$ para trazar la gráfica:

$$x = t^2 + 4 \quad t = \pm\sqrt{x - 4}$$

$$y = 2t + 1 \quad \rightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{x - 4} + 1$$



EJEMPLO 27

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado:

$$x = 4t + 3 \quad y = \frac{1}{t} + 5 \quad (11, 5.5)$$

Solución:

Primero determinamos el valor de t en el punto dado, esto para poder evaluar la pendiente en ese punto:

$$\text{Si } x = 11 \text{ y } x = 4t + 3 \quad \therefore 11 = 4t + 3 \quad \therefore t = \frac{11 - 3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$t = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$x = 4t + 3 \quad x' = 4$$

$$y = \frac{1}{t} + 5 \quad y' = -\frac{1}{t^2}$$

$$m = \frac{-\frac{1}{t^2}}{4} = -\frac{1}{4t^2}$$

$$m(2) = -\frac{1}{4(2)^2} = -\frac{1}{4(4)} = -\frac{1}{16}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(11, 5.5) \quad y - 5.5 = -\frac{1}{16}(x - 11)$$

$$y - 5.5 = -\frac{1}{16}(x - 11)$$

$$y = -\frac{1}{16}(x - 11) + 5.5$$

$$y = -\frac{1}{16}x + \frac{11}{16} + \frac{11}{2}$$

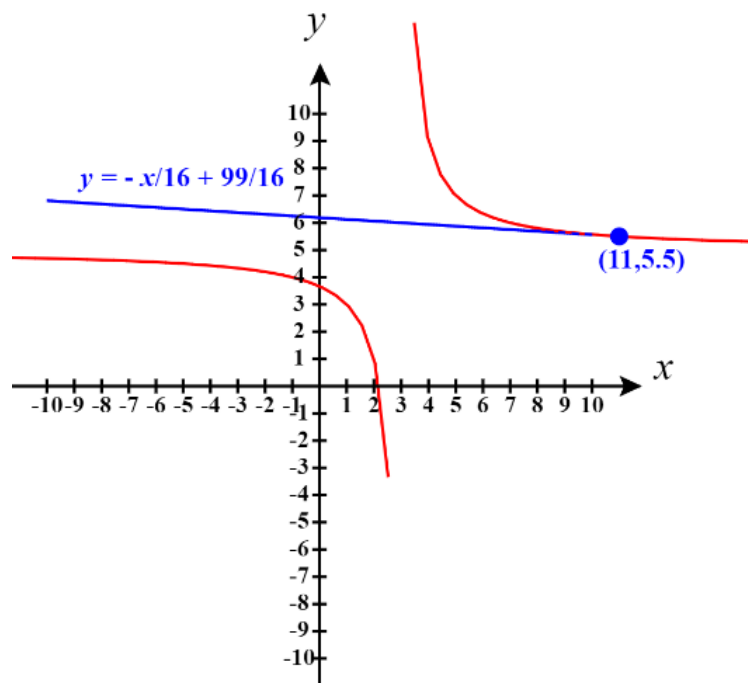
$$y = -\frac{1}{16}x + \frac{11}{16} + \frac{88}{16}$$

$$y = -\frac{1}{16}x + \frac{99}{16}$$

Ahora obtengamos la función $y = f(x)$ para trazar la gráfica:

$$x = 4t + 3 \quad t = \frac{x-3}{4}$$

$$y = \frac{1}{t} + 5 \quad y = \frac{1}{\frac{x-3}{4}} + 5 \quad y = \frac{4}{x-3} + 5$$



Segunda derivada:

La segunda derivada de una función nos indica la concavidad de la curva:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{u}{v}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) \begin{array}{l} \longrightarrow u \\ \longrightarrow v \end{array}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v u' - u v'}{v^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{\frac{dx}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right) - \frac{dy}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dx} \right) \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right) - \frac{dy}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dx} \right) \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right) - \frac{dy}{dt} \left(\frac{d}{dt} (1) \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right) - \frac{dy}{dt} (0)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Por ejemplo:

$$y = x^2 \quad y' = 2x \quad y'' = 2 > 0 \text{ Por lo tanto, es cóncava hacia arriba}$$

$$y = x^2 \text{ representada en paramétricas: } x = t \quad y = t^2$$

$$x = t \quad y = t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(2t)}{1} = 2 > 0 \text{ Por lo tanto, es cóncava hacia arriba}$$

EJEMPLO 28

Sean $x(t) = \sqrt{2t+8}$ $y(t) = t - 4$ calcular:

- La pendiente de la gráfica de la función para $t = 4$
- La ecuación de la recta tangente a la curva en $t = 4$
- Determina la concavidad de la curva en $t = 4$
- Traza la gráfica, tanto de la curva como de la recta tangente.

Solución:

- a) La pendiente de la gráfica de la función para $t = 4$

$$x(t) = \sqrt{2t+8} \quad y(t) = t - 4$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{\frac{du}{dt}}{2\sqrt{u}}$$

$$x'(t) = \frac{2}{2\sqrt{2t+8}} = \frac{1}{\sqrt{2t+8}} \quad y'(t) = 1$$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{2t+8}} = \sqrt{2t+8}$$

$$m = \sqrt{2t+8}$$

$$m(4) = \sqrt{2t+8} = \sqrt{2(4)+8} = \sqrt{16} = 4$$

$$m(4) = 4$$

1
b) La ecuación de la recta tangente a la curva en $t = 4$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = 4$$

$$\text{Como } t = 4 \rightarrow x = \sqrt{2t+8} = \sqrt{2(4)+8} = 4$$

$$y(t) = t - 4 \rightarrow y(4) = (4) - 4 = 0$$

$$\therefore (4, 0)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 4(x - 4)$$

$$y = 4x - 16$$

c) Determina la concavidad de la curva en $t = 4$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

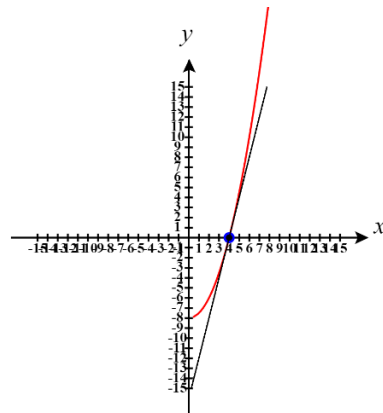
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\sqrt{2t+8})}{\frac{1}{\sqrt{2t+8}}} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2t+8}}}{\frac{1}{\sqrt{2t+8}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2t+8}}}{\frac{1}{\sqrt{2t+8}}} = 1 > 0 \quad C \uparrow$$

d) Traza la gráfica, tanto de la curva como de la recta tangente.

$$x(t) = \sqrt{2t+8} \geq 0 \quad x^2 = 2t+8 \quad t = \frac{x^2-8}{2} = \frac{x^2}{2} - 4$$

$$y = t - 4 \quad \therefore y = \left(\frac{x^2}{2} - 4\right) - 4$$

$$y = \frac{x^2}{2} - 8 \quad x \geq 0$$



2.2 Definición de función vectorial, función vectorial y gráficas.

Función Vectorial:

En el tema anterior se vio que una función se puede expresar en forma de ecuaciones paramétricas, al utilizar las ecuaciones como componentes de un vector obtendremos una función vectorial:

Ecuaciones Paramétricas:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Función Vectorial:

$$\overrightarrow{r(t)} = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle \quad \mathbb{R} \rightarrow V$$

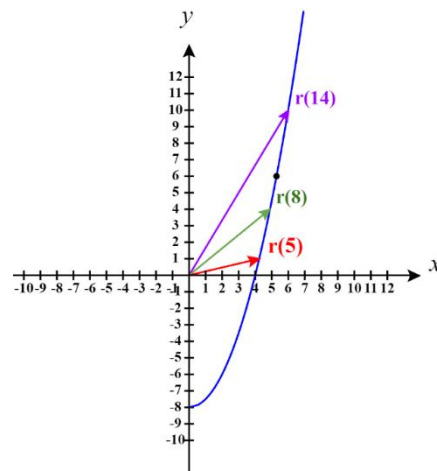
Al dar valores a t , obtendremos un vector para cada valor de t dado:

$$\overrightarrow{r(t)} = \langle \sqrt{2t+8}, t-4 \rangle$$

$$\overrightarrow{r(5)} = \langle \sqrt{18}, 1 \rangle$$

$$\overrightarrow{r(8)} = \langle \sqrt{24}, 4 \rangle$$

$$\overrightarrow{r(14)} = \langle 6, 10 \rangle$$



Los puntos finales de los vectores nos describen la trayectoria, es decir, nos dibujan la gráfica correspondiente a la función vectorial.

EJEMPLO 1

Graficar la siguiente función vectorial:

$$\overrightarrow{r(t)} = \langle 3t - 6, t^2 + 1, t \rangle$$

Primero se expresan las ecuaciones paramétricas, de esa forma se aplica lo visto en el tema anterior para la traza de gráficas:

$$x(t) = 3t - 6$$

$$y(t) = t^2 + 1$$

$$z(t) = t$$

Despejando t de x:

$$x(t) = 3t - 6$$

$$t = \frac{x + 6}{3}$$

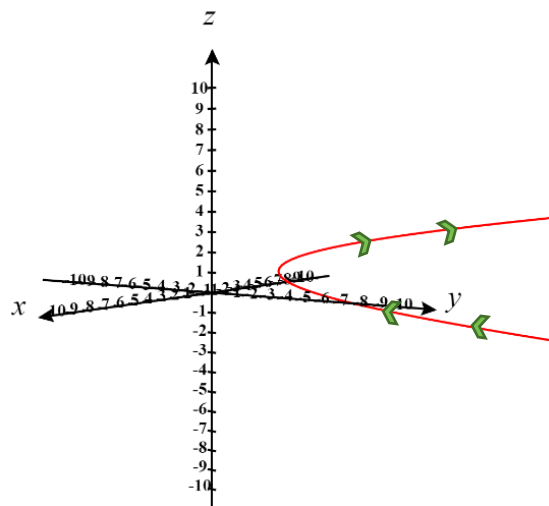
Sustituyendo en y:

$$y(t) = t^2 + 1$$

$$y(x) = \left(\frac{x + 6}{3}\right)^2 + 1$$

$$y(x) = \frac{(x + 6)^2}{9} + 1$$

La curva es una parábola y, como $z = t$, la parábola viene subiendo desde $-\infty$ hasta ∞ :



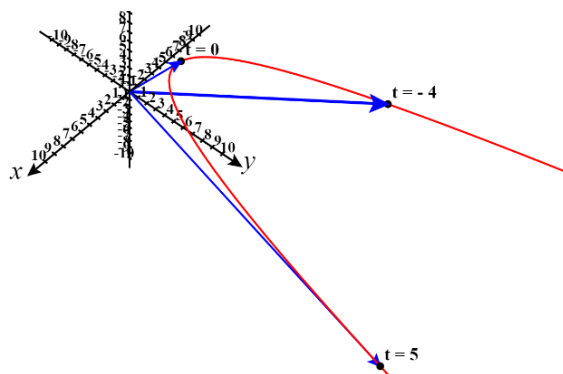
$$\overrightarrow{r(t)} = \langle 3t - 6, t^2 + 1, t \rangle$$

A continuación, se asignan algunos valores a t para graficar los vectores y comprobar que efectivamente el punto final cae sobre la curva:

$$\overrightarrow{r(-4)} = \langle -18, 17, -4 \rangle$$

$$\overrightarrow{r(0)} = \langle -6, 1, 0 \rangle$$

$$\overrightarrow{r(5)} = \langle 9, 26, 5 \rangle$$



2.3 Límites y continuidad ¹ de una función vectorial.

Dominio y límite de una función vectorial

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow a} \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = \langle \lim_{t \rightarrow a} x(t), \lim_{t \rightarrow a} y(t), \lim_{t \rightarrow a} z(t) \rangle$$

¹² Dominio de una función vectorial

El dominio de una función vectorial es el conjunto de valores que se le pueden asignar al parámetro t para que cada una de sus componentes esté definida.

Continuidad

² Una función vectorial es continua en un punto solo si todas sus componentes son continuas en dicho punto.

⁸ EJEMPLO 1

Determinar el dominio de la función vectorial:

$$\vec{r}(t) = \langle \ln(7t - 9), \sqrt{t}, t + 7 \rangle$$

Solución:

⁸ Para determinar el dominio de la función necesitamos analizar cada componente ya que los valores de t deben satisfacer a todas las componentes:

$$x = \ln(7t - 9)$$

$$7t - 9 > 0$$

$$t > \frac{9}{7}$$

$$t \in \left(\frac{9}{7}, \infty\right)$$

$$y = \sqrt{t}$$

$$t \in [0, \infty)$$

$$z = t + 7$$

$$t \in (-\infty, \infty)$$

Como t debe cumplir con los 3, entonces el dominio de la función vectorial es:

$$t \in \left(\frac{9}{7}, \infty\right)$$

EJEMPLO 2

Determinar el dominio de la función vectorial:

$$\vec{r}(t) = \left\langle 10t + 5, \frac{4}{\sqrt{t^2 - 6t - 16}}, \frac{1}{(t + 7)^2} \right\rangle$$

Solución:

Para determinar el dominio de la función es necesario analizar cada componente ya que los valores de t deben satisfacer a todas las componentes:

$$x = 10t + 5$$

No hay restricción

$$t \in (-\infty, \infty)$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{t^2 - 6t - 16}}$$

$$t^2 - 6t - 16 > 0$$

$$(t - 8)(t + 2) > 0$$

$t - 8$	-		-		+
$t + 2$	-		+		+
		$t = -2$			$t = 8$
	+		-		+

$$t \in (-\infty, -2) \cup (8, \infty)$$

$$z = \frac{1}{(t + 7)^2}$$

$$t + 7 \neq 0$$

$$t \neq -7$$

Como t debe cumplir con los 3, entonces el dominio de la función vectorial es:

$$x: (-\infty, \infty) \quad y: (-\infty, -2) \cup (8, \infty) \quad z: t \neq -7$$

$$t \in (-\infty, -7) \cup (-7 - 2) \cup (8, \infty)$$

$$t \in (-\infty, -2) \cup (8, \infty) - 7$$

EJEMPLO 3

Determinar el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow a} \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = \langle \lim_{t \rightarrow a} x(t), \lim_{t \rightarrow a} y(t), \lim_{t \rightarrow a} z(t) \rangle$$

a) $\vec{r}(t) = \left(\frac{4t+3}{5t-1}\right)\hat{i} + e^{4t}\hat{j} - (t^2 - 6)\hat{k}$ Calcular $\lim_{t \rightarrow 5} \vec{r}(t)$

Solución:

$$\lim_{t \rightarrow 5} \vec{r}(t) = ?$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 5} \vec{r}(t) &= \lim_{t \rightarrow 5} \left[\left(\frac{4t+3}{5t-1}\right)\hat{i} + e^{4t}\hat{j} - (t^2 - 6)\hat{k} \right] \\ &= \left(\frac{4(5)+3}{5(5)-1}\right)\hat{i} + e^{4(5)}\hat{j} - ((5)^2 - 6)\hat{k} = \frac{23}{24}\hat{i} + e^{20}\hat{j} - 19\hat{k} \end{aligned}$$

b) $\vec{r}(t) = \left(\frac{7t+1}{\sqrt{t}-3}\right)\hat{i} + \frac{t-9}{t^2-81}\hat{j} - (t^2 + 1)\hat{k}$ Calcular $\lim_{t \rightarrow 9} \vec{r}(t)$

Solución:

$$\lim_{t \rightarrow 9} \overrightarrow{r(t)} = ?$$

$$\lim_{t \rightarrow 9} \overrightarrow{r(t)} = \lim_{t \rightarrow 9} \left[\left(\frac{7t+1}{\sqrt{t}-3} \right) \hat{i} + \frac{t-9}{t^2-81} \hat{j} - (t^2+1) \hat{k} \right]$$

$$= \left(\frac{7(9)+1}{\sqrt{9}-3} \right) \hat{i} + \frac{9-9}{9^2-81} \hat{j} - (9^2+1) \hat{k}$$

$$= \left(\frac{64}{0} \right) \hat{i} + \frac{0}{0} \hat{j} - 82 \hat{k}$$

$\therefore = \boxed{\text{Indeterminación}}$
 EL LÍMITE NO EXISTE

c) $\vec{r}(t) = \left(\frac{7t-63}{\sqrt{t}-3} \right) \hat{i} + \frac{t-9}{t^2-81} \hat{j} - (t^2+1) \hat{k}$ Calcular $\lim_{t \rightarrow 9} \overrightarrow{r(t)}$

Solución:

$$\lim_{t \rightarrow 9} \overrightarrow{r(t)} = ?$$

$$\lim_{t \rightarrow 9} \overrightarrow{r(t)} = \lim_{t \rightarrow 9} \left[\left(\frac{7t-63}{\sqrt{t}-3} \right) \hat{i} + \frac{t-9}{t^2-81} \hat{j} - (t^2+1) \hat{k} \right]$$

$$= \left(\frac{7(9)-63}{\sqrt{9}-3} \right) \hat{i} + \frac{9-9}{9^2-81} \hat{j} - (9^2+1) \hat{k}$$

Indet. Indet.

$$= \left(\frac{0}{0} \right) \hat{i} + \frac{0}{0} \hat{j} - (82) \hat{k}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

Cuando se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right) = \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{f'(t)}{g'(t)} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 9} \left(\frac{7t - 63}{\sqrt{t} - 3} \right) = \lim_{t \rightarrow 9} \left(\frac{7}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} \right) = \lim_{t \rightarrow 9} (14\sqrt{t}) = 14\sqrt{9} = 42$$

$$\lim_{t \rightarrow 9} \left(\frac{t - 9}{t^2 - 81} \right) = \lim_{t \rightarrow 9} \left(\frac{1}{2t} \right) = \frac{1}{2(9)} = \frac{1}{18}$$

$$\lim_{t \rightarrow 9} (t^2 + 1) = 9^2 + 1 = 82$$

$$\lim_{t \rightarrow 9} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow 9} \left[\left(\frac{7t - 63}{\sqrt{t} - 3} \right) \hat{i} + \frac{t - 9}{t^2 - 81} \hat{j} - (t^2 + 1) \hat{k} \right] = 42\hat{i} + \frac{1}{18}\hat{j} - 82\hat{k}$$

d) $\vec{r}(t) = \left(\frac{8t^2 - 5t + 1}{2t^2 - 10t + 9} \right) \hat{i} + \frac{9t^2 - 5t + 6}{-3t^2 - 8} \hat{j} - (e^{-7t} + 14) \hat{k}$ Calcular $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{r}(t) =$

Solución:

23 $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{r}(t) = ?$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{8t^2 - 5t + 1}{2t^2 - 10t + 9} \right) \hat{i} + \frac{9t^2 - 5t + 6}{-3t^2 - 8} \hat{j} - (e^{-7t} + 14) \hat{k} \right]$$

$$= \overbrace{\left(\frac{8(\infty)^2 - 5(\infty) + 1}{2(\infty)^2 - 10(\infty) + 9} \right)}^{\text{Indeterminación}} \hat{i} + \overbrace{\frac{9(\infty)^2 - 5(\infty) + 6}{-3(\infty)^2 - 8}}^{\text{Indeterminación}} \hat{j} - (e^{-7(\infty)} + 14) \hat{k}$$

Se selecciona el término de mayor grado tanto del numerado como del denominador para obtener los límites de la primer y segunda componente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{8t^2}{2t^2} \right) \hat{i} + \frac{9t^2}{-3t^2} \hat{j} - (e^{-7t} + 14) \hat{k} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} [(4) \hat{i} - 3 \hat{j} - (e^{-7(\infty)} + 14) \hat{k}]$$

$$= 4\hat{i} - 3\hat{j} - \overbrace{(e^{-\infty} + 14)}^0 \hat{k}$$

$$= 4\hat{i} - 3\hat{j} - 14\hat{k}$$

EJEMPLO 4

Determina para qué valor o valores la siguiente función vectorial es continua:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{4t + 3}{5t - 1} \right) \hat{i} + e^{4t} \hat{j} - (t^2 - 6) \hat{k}$$

Solución:

Se analiza cada una de las componentes para determinar su respectiva continuidad:

$$x = \frac{4t + 3}{5t - 1}$$

La componente en x es continua en todos los reales excepto cuando $t = \frac{1}{5}$ que es el valor para el cual el denominador es cero.

$$y = e^{4t}$$

La componente en y es continua en todos los reales. Finalmente, analizamos la componente z :

$$z = -(t^2 - 6)$$

La componente en z es continua en todos los reales.

Por lo tanto, la función vectorial es continua en:

$$t \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\}$$

2.4 ¹ Derivada de una función vectorial, vector tangente a una curva y velocidad.

Derivada de una función vectorial

$$\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t)) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

EJEMPLO 1

Calcular $\vec{r}'(t)$:

$$\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t)) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

a) $\vec{r}(t) = \left(\frac{4t+3}{5t-1}\right)\hat{i} + e^{4t}\hat{j} - (t^2-6)\hat{k}$ $\vec{r}'(t) = ?$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$\vec{r}'(t) = \left(\frac{(5t-1)(4) - (4t+3)(5)}{(5t-1)^2}\right)\hat{i} + 4e^{4t}\hat{j} - (2t)\hat{k}$$

$$\vec{r}'(t) = -\frac{19}{(5t-1)^2}\hat{i} + 4e^{4t}\hat{j} - 2t\hat{k}$$

Interpretación geométrica de la derivada

29 La derivada de una función vectorial en un punto t es un vector tangente a la curva, además nos indica el sentido de la trayectoria.

EJEMPLO 2

$$\vec{r}(t) = \langle t^2, t \rangle; \quad t = 2$$

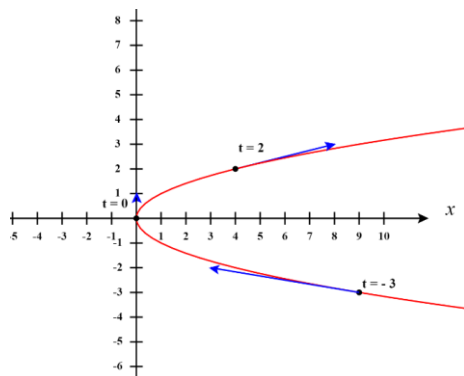
Solución:

$$\vec{r}'(t) = \langle 2t, 1 \rangle \quad \text{Vector tangente a } \vec{r}(t)$$

Gráfica:

$$\vec{r}'(-3) = \langle -6, 1 \rangle$$

$$\vec{r}'(0) = \langle 0, 1 \rangle$$



EJEMPLO 3

2 Calcular un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva:

$$\vec{r}(t) = \langle \frac{1}{2}t^2, t, t^2 \rangle \quad \text{en } t = 1$$

Solución:

8 Para determinar las ecuaciones paramétricas de la recta es necesario un punto sobre la recta y un vector paralelo a la recta, por lo tanto, se evalúa $\vec{r}(1)$ para obtener el punto sobre la recta y se deriva $\vec{r}(t)$ para obtener el vector tangente, esto es, $\vec{v} = \vec{r}'(1)$ 5

$$\vec{r}(1) = \left\langle \frac{1^2}{2}, 1, 1^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, 1, 1 \right\rangle$$

Por lo tanto, el punto de tangencia es: $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$

Ahora calculamos $\vec{v} = \vec{r}'(1)$:

$$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{1}{2}t^2, t, t^2 \right\rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle t, 1, 2t \rangle$$

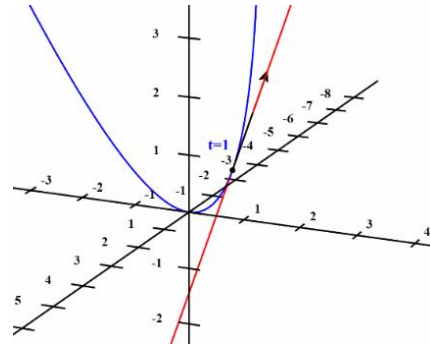
$$\vec{r}'(1) = \langle 1, 1, 2 \rangle$$

Ya podemos obtener un conjunto de ecuaciones para recta:

$$x = x_0 + at \quad x = \frac{1}{2} + t$$

$$y = y_0 + bt \quad y = 1 + t$$

$$z = z_0 + ct \quad z = 1 + 2t$$



Velocidad y aceleración:

$$\text{Velocidad:} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t)$$

$$\text{Aceleración:} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}''(t)$$

$$\text{Rapidez:} \quad \|\vec{v}\| = \|\vec{r}'(t)\|$$

2.5 Segunda derivada, aceleración, segunda Ley de Newton.

La segunda derivada de una función vectorial se obtiene derivando dos veces la función y se puede interpretar como la aceleración.

$$\text{Aceleración:} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}''(t)$$

EJEMPLO 1

Un móvil se mueve a través de la trayectoria $\vec{r}(t) = \langle \frac{1}{2}t^2, t, t^2 \rangle$. Determina la aceleración en $t = 2$

Solución:

$$\vec{r}(t) = \langle \frac{1}{2}t^2, t, t^2 \rangle$$

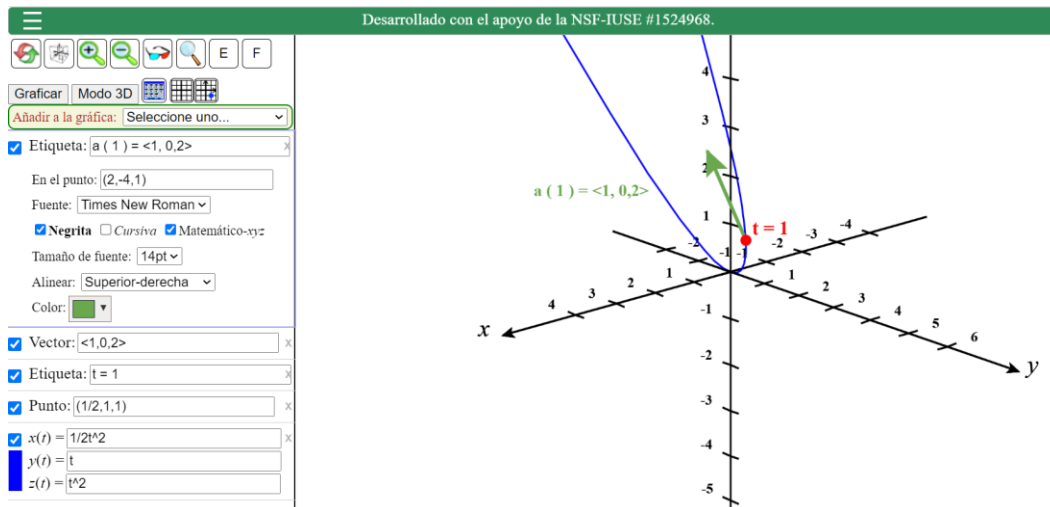
$$\vec{r}'(t) = \langle t, 1, 2t \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle 1, 0, 2 \rangle$$

Por lo tanto, $\vec{a}(1)$ es:

$$\vec{a}(1) = \langle 1, 0, 2 \rangle$$

A continuación, se muestra la gráfica correspondiente realizada en CalcPlot3D (Ver ANEXO A)



2.6 Integración de una función vectorial y longitud de arco en coordenadas cartesianas. (Áreas se verá con menor importancia)

Integral de una función vectorial

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \int_a^b \langle x(t), y(t), z(t) \rangle dt = \left\langle \int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right\rangle$$

EJEMPLO 1

Calcular la siguiente integral:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{4}{5t-1}\right)\hat{i} + e^{4t}\hat{j} - (t^2 - 6)\hat{k} \quad \int \vec{r}(t) dt = ?$$

Solución:

$$\int \vec{r}(t) dt = \int \left(\frac{4}{5t-1} dt\right)\hat{i} + \int (e^{4t} dt)\hat{j} - \int ((t^2 - 6) dt)\hat{k}$$

$$\int \vec{r}(t) dt = \frac{4}{5} \int \left(\frac{5}{5t-1} dt\right)\hat{i} + \frac{1}{4} \int (e^{4t} 4 dt)\hat{j} - \int ((t^2 - 6) dt)\hat{k}$$

$$\int \vec{r}(t) dt = \left(\frac{4}{5} \ln|5t-1| + C_x\right)\hat{i} + \left(\frac{e^{4t}}{4} + C_y\right)\hat{j} - \left(\frac{t^3}{3} - 6t + C_z\right)\hat{k}$$

$$\int \vec{r}(t) dt = \frac{4}{5} \ln|5t-1|\hat{i} + \frac{e^{4t}}{4}\hat{j} - \left(\frac{t^3}{3} - 6t\right)\hat{k} + (C_x\hat{i} + C_y\hat{j} - C_z\hat{k})$$

$$\int \vec{r}(t) dt = \frac{4}{5} \ln|5t-1| \hat{i} + \frac{e^{4t}}{4} \hat{j} - \left(\frac{t^3}{3} - 6t \right) \hat{k} + \vec{C}$$

EJEMPLO 2

Calcular la $\vec{r}(t)$ si se sabe que:

$$\vec{a} = \langle 2t, 3, t^3 \rangle, \quad \vec{v}(1) = \langle 6, 2, 3 \rangle \text{ y } \vec{r}(2) = \langle 10, 5, -2 \rangle$$

Solución:

Sabemos que: $\vec{a} = \vec{v}'(t)$

$$\vec{v} = \int \vec{a} dt = \int \langle 2t, 3, t^3 \rangle dt = \langle t^2, 3t, \frac{t^4}{4} \rangle + \vec{C}_1$$

$$\vec{v}(t) = \langle t^2, 3t, \frac{t^4}{4} \rangle + \vec{C}_1$$

Para determinar el valor de $\vec{C}_1$ se utiliza, respectivamente, una de las condiciones dadas:

$$\vec{v}(1) = \langle 6, 2, 3 \rangle$$

$$\vec{v}(1) = \langle 1^2, 3(1), \frac{1^4}{4} \rangle + \vec{C}_1 = \langle 6, 2, 3 \rangle$$

$$\vec{C}_1 = \langle 6, 2, 3 \rangle - \langle 1^2, 3(1), \frac{1^4}{4} \rangle$$

$$\overrightarrow{C_1} = \langle 6, 2, 3 \rangle - \langle 1, 3, \frac{1}{4} \rangle$$

$$\overrightarrow{C_1} = \langle 5, -1, \frac{11}{4} \rangle$$

$$\vec{v}(t) = \langle t^2, 3t, \frac{t^4}{4} \rangle + \overrightarrow{C_1}$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \langle t^2, 3t, \frac{t^4}{4} \rangle + \langle 5, -1, \frac{11}{4} \rangle$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \langle t^2 + 5, 3t - 1, \frac{t^4}{4} + \frac{11}{4} \rangle$$

Sabemos que $\overrightarrow{v(t)} = \vec{r}'(t)$:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt = \int \langle t^2 + 5, 3t - 1, \frac{t^4}{4} + \frac{11}{4} \rangle dt$$

$$\overrightarrow{r(t)} = \langle \frac{t^3}{3} + 5t, \frac{3t^2}{2} - t, \frac{t^5}{20} + \frac{11}{4}t \rangle + \overrightarrow{C_2}$$

Para determinar el valor de $\overrightarrow{C_2}$ se utiliza la otra condición dada:

$$\vec{r}(2) = \langle 10, 5, -2 \rangle$$

$$\vec{r}(2) = \langle \frac{2^3}{3} + 5(2), \frac{3(2)^2}{2} - (2), \frac{(2)^5}{20} + \frac{11}{4}(2) \rangle + \overrightarrow{C_2}$$

$$\vec{r}(2) = \langle \frac{38}{3}, 4, \frac{71}{10} \rangle + \overrightarrow{C_2} = \langle 10, 5, -2 \rangle$$

$$\vec{C}_2 = \langle 10, 5, -2 \rangle - \langle \frac{38}{3}, 4, \frac{71}{10} \rangle$$

$$\vec{C}_2 = \langle -\frac{8}{3}, 1, -\frac{91}{10} \rangle$$

$$\vec{r}(t) = \langle \frac{t^3}{3} + 5t, \frac{3t^2}{2} - t, \frac{t^5}{20} + \frac{11}{4}t \rangle + \vec{C}_2$$

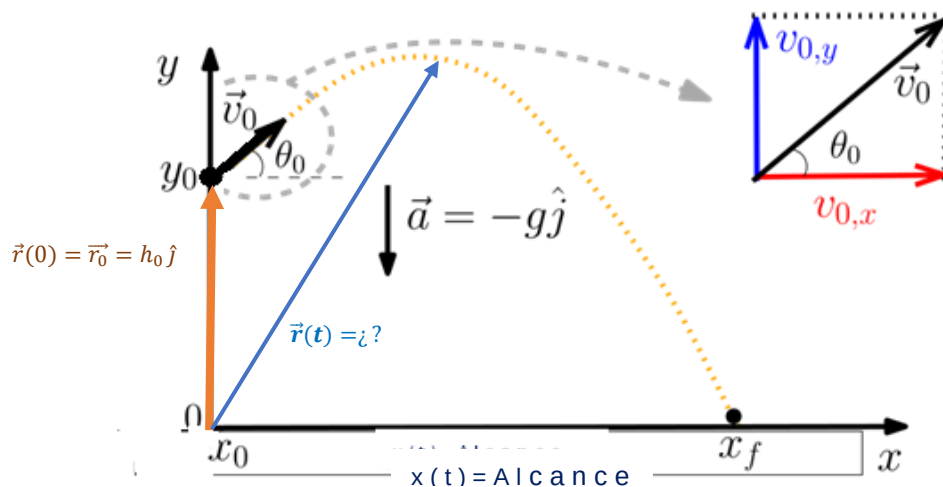
$$\vec{r}(t) = \langle \frac{t^3}{3} + 5t, \frac{3t^2}{2} - t, \frac{t^5}{20} + \frac{11}{4}t \rangle + \langle -\frac{8}{3}, 1, -\frac{91}{10} \rangle$$

$$\vec{r}(t) = \langle \frac{t^3}{3} + 5t - \frac{8}{3}, \frac{3t^2}{2} - t + 1, \frac{t^5}{20} + \frac{11}{4}t - \frac{91}{10} \rangle$$

Tiro Parabólico

Un cuerpo que es lanzado en tiro parabólico con velocidad inicial v_0 y con un ángulo de elevación θ va disminuyendo su *velocidad en y* hasta llegar a cero y alcanzar su altura máxima e inmediatamente inicia su descenso para llegar al suelo con un alcance x .

2. A continuación, se deducen las fórmulas o componentes de la función vectorial que describe la trayectoria, utilizando la segunda ley de Newton y aplicando la integración de la función vectorial.



Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia [CC BY-SA](#)

Componentes de la Velocidad Inicial (Velocidad de lanzamiento):

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{i} + v_0 \sin \theta \hat{j}$$

Condiciones Iniciales:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = h_0 \hat{j}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{i} + v_0 \sin \theta \hat{j}$$

Utilizamos la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{neta} = \text{Peso}$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{W}$$

$$\vec{F}_{neta} = -mg\hat{j}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$-mg\hat{j} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = -g\hat{j}$$

$$\vec{a} = \vec{v}'(t)$$

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a} dt = \int -g\hat{j} dt$$

$$\vec{v}(t) = -gt\hat{j} + \vec{C}_1$$

$$\overrightarrow{v(0)} = \overrightarrow{v_0} = v_0 \cos \theta \hat{i} + v_0 \sin \theta \hat{j}$$

$$\overrightarrow{v(0)} = -g(0)\hat{j} + \overrightarrow{C_1} = v_0 \cos \theta \hat{i} + v_0 \sin \theta \hat{j}$$

$$\overrightarrow{C_1} = v_0 \cos \theta \hat{i} + v_0 \sin \theta \hat{j}$$

$$\overrightarrow{v(t)} = -gt\hat{j} + \overrightarrow{C_1}$$

$$\overrightarrow{v(t)} = -gt\hat{j} + (v_0 \cos \theta \hat{i} + v_0 \sin \theta \hat{j})$$

$$\overrightarrow{v(t)} = v_0 \cos \theta \hat{i} + (-gt + v_0 \sin \theta) \hat{j}$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{r'(t)}$$

$$\overrightarrow{r(t)} = \int \vec{v} dt = \int (v_0 \cos \theta \hat{i} + (-gt + v_0 \sin \theta) \hat{j}) dt$$

$$\overrightarrow{r(t)} = v_0 \cos \theta t \hat{i} + \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \theta t \right) \hat{j} + \overrightarrow{C_2}$$

$$\overrightarrow{r(0)} = \overrightarrow{r_0} = h_0 \hat{j}$$

$$\overrightarrow{r(0)} = v_0 \cos \theta(0) \hat{i} + \left(-\frac{g(0)^2}{2} + v_0 \sin \theta(0) \right) \hat{j} + \overrightarrow{C_2} = h_0 \hat{j}$$

$$\overrightarrow{C_2} = h_0 \hat{j}$$

$$\overrightarrow{r(t)} = v_0 \cos \theta t \hat{i} + \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \theta t \right) \hat{j} + \overrightarrow{C_2}$$

$$\overrightarrow{r(t)} = v_0 \cos \theta t \hat{i} + \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \theta t \right) \hat{j} + h_0 \hat{j}$$

$$\overrightarrow{r(t)} = v_0 \cos \theta t \hat{i} + \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \theta t + h_0 \right) \hat{j}$$

$$x(t) = v_0 \cos \theta t$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \theta t + h_0$$

$$x'(t) = v_x(t) = v_0 \cos \theta \rightarrow \text{Constante}$$

Formulas a utilizar:

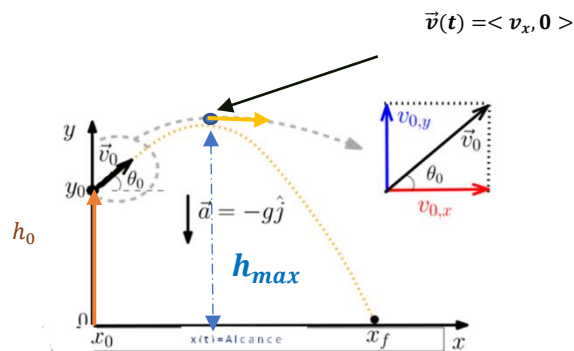
$$x = (v_0 \cos \theta)t$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin \theta)t + h_0$$

$$t_{\max} = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \quad \text{tiempo en alcanzar la altura máxima}$$

$$y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} + h_0 \quad \text{altura máxima}$$

Deduciendo expresiones para tiempo en alcanzar la altura máxima y altura máxima:



Como en el máximo de la curva $y' = v_y = 0$, se tiene:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin \theta)t + h_0$$

$$y' = 0$$

$$y' = -gt + v_0 \sin \theta = 0$$

$$t = \frac{v_o \operatorname{sen} \theta}{g} \quad \text{Tiempo en alcanzar la altura máxima}$$

Por lo tanto, la altura máxima se obtiene sustituyendo el tiempo en y:

$$y_{\max} = y(t_{\max}) = y\left(\frac{v_o \operatorname{sen} \theta}{g}\right)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + (v_o \operatorname{sen} \theta)t + h_o$$

$$y = -\frac{g\left(\frac{v_o \operatorname{sen} \theta}{g}\right)^2}{2} + (v_o \operatorname{sen} \theta)\left(\frac{v_o \operatorname{sen} \theta}{g}\right) + h_o$$

$$y = -\frac{(v_o \operatorname{sen} \theta)^2}{2g} + \frac{(v_o \operatorname{sen} \theta)^2}{g} + h_o$$

$$y_{\max} = \frac{(v_o \operatorname{sen} \theta)^2}{2g} + h_o \quad \text{Altura máxima}$$

EJEMPLO 3

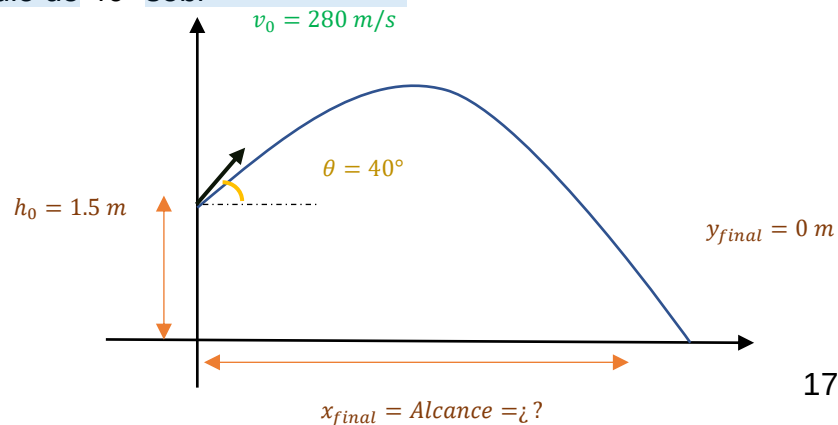
- 1 Determinar la altura máxima y el alcance de un proyectil disparado desde una altura de 1.5 metros sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 280 metros por segundo y con un ángulo de 40° sobre la horizontal

Solución:

Se tiene que:

$$h_o = 1.5 \text{ m}$$

$$\theta = 40^\circ$$



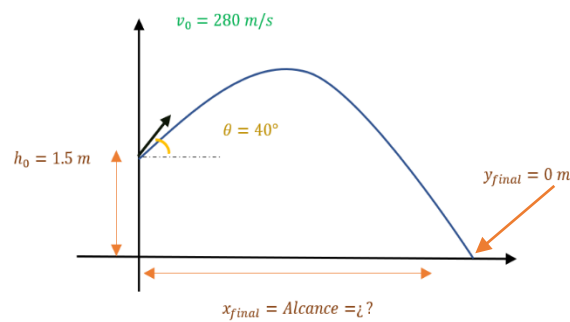
$$v_0 = 280 \frac{m}{s}$$

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

Para altura máxima:

$$y_{max} = \frac{(v_0 \sen \theta)^2}{2g} + h_o = \frac{(280 \sen 40^\circ)^2}{2 \left(\frac{9.81 m}{s^2} \right)} + 1.5 = \mathbf{1652.52 m}$$

Para alcance máximo:



Primero es necesario calcular el tiempo en el que el proyectil choca con el piso, esto es cuando $y = 0 \text{ m}$:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sen \theta)t + h_o = 0$$

$$-\frac{\frac{9.81 m}{s^2} t^2}{2} + (280 \sen 40^\circ)t + 1.5 = 0$$

$$-4.905 t^2 + 179.98 t + 1.5 = 0$$

Resolviendo:

$$t = \frac{-179.98 \pm \sqrt{(179.98)^2 - 4(-4.905)(1.5)}}{2(4.905)}$$

$$t = \frac{-179.98 \pm 180.06}{2(-4.905)}$$

Descartando el resultado negativo de t , se tiene el tiempo en que el proyectil tarda en chocar con el piso:

$$t = \frac{-179.98 - 180.06}{2(-4.905)}$$

$$t = 36.7s$$

Finalmente, se calcula el alcance sustituyendo el tiempo que el objeto permanece en el aire:

$$x = (v_o \cos \theta)t = (280 \cos 40^\circ)(36.7)$$

$$x = 7871.87m$$

Ejemplo 4:

Un objeto es lanzado con una velocidad de 980 pies/s hacia un blanco a 2500 pies de distancia. Determine el ángulo mínimo de elevación del arma.

Solución:

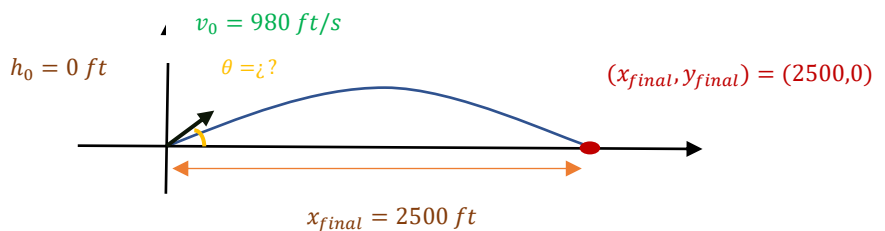
Se tiene que:

$$v_o = 980 \frac{\text{pies}}{s}$$

$$h_o = 0 \text{ pies}$$

$$y_{final} = 0 \text{ pies}$$

$$x_{final} = 2500 \text{ pies}$$



$$g = 32 \frac{\text{pies}}{\text{s}^2}$$

Con los datos anteriores que tenemos:

$$x = (v_o \cos \theta)t = (980 \cos \theta)t$$

$$x = (980 \cos \theta)t = -\frac{gt^2}{2} + (v_o \sin \theta)t + h_o = -\frac{32t^2}{2} + (980 \sin \theta)t + 0$$

$$y = -16t^2 + (980 \sin \theta)t$$

Cuando el proyectil pega en el blanco $x_{\text{final}} = 2500 \text{ pies}$ y $y_{\text{final}} = 0 \text{ pies}$

$$x_{\text{final}} = 2500 \text{ pies}$$

$$x = (980 \cos \theta)t \quad \text{esto es} \quad 2500 = (980 \cos \theta)t \text{ despejando } t:$$

$$t = \frac{2500}{980 \cos \theta}$$

$$y_{\text{final}} = 0 \text{ pies}$$

$$y = -16t^2 + (980 \sin \theta)t \quad \text{esto es} \quad 0 = -16t^2 + (980 \sin \theta)t \text{ al sustituir } t \text{ se tiene:}$$

$$-16 \left(\frac{2500}{980 \cos \theta} \right)^2 + (980 \sin \theta) \left(\frac{2500}{980 \cos \theta} \right) = 0$$

$$\frac{-104.12}{(\cos \theta)^2} + 2500 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 0$$

$$\left(\frac{-104.12}{(\cos \theta)^2} + 2500 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 0 \right) (\cos \theta)^2$$

$$-104.12 + 2500 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$2500\text{sen}\theta\cos\theta = 104.12$$

$$2 * 1250\text{sen}\theta\cos\theta = 104.12$$

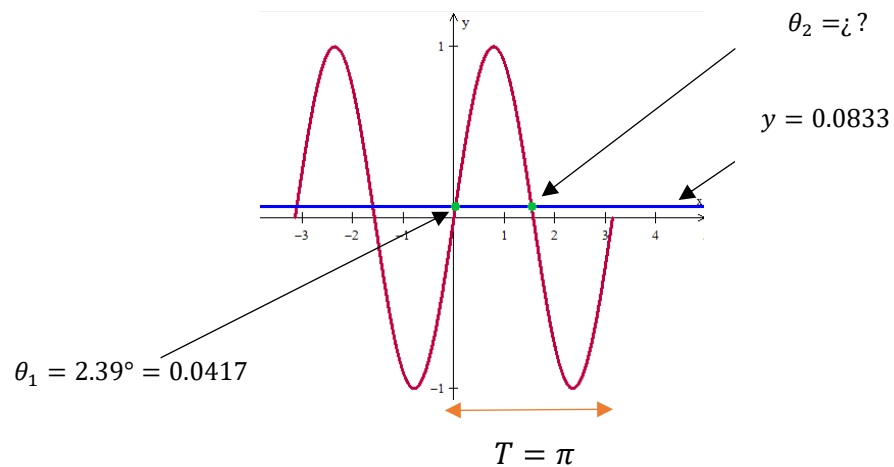
$$2\text{sen}\theta\cos\theta = \frac{104.12}{1250} = 0.0833$$

Aplicamos la identidad $2\text{sen}\theta\cos\theta = \text{sen}(2\theta)$ $\text{sen}(2\theta) = 0.0833$

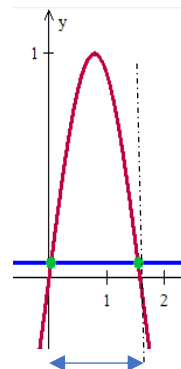
$$2\theta = \arcsen(0.0833)$$

$$\theta = \frac{\arcsen(0.0833)}{2} = 2.39^\circ$$

A continuación, se analiza si es el único ángulo ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) que cumpla con las condiciones del problema:



Para obtener el valor de θ_2 se resta a medio periodo $\left(\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}\right)$ $\theta_1 = 0.0417$ aprovechando la simetría:



$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - 0.0417 = 1.529 = \mathbf{87.61^\circ}$$

Como no se pide el ángulo mínimo, entonces respuesta es:

$$\mathbf{\theta = 2.39^\circ}$$

Otra forma de resolverlo es:

$$\frac{-104.12}{(\cos\theta)^2} + 2500 \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0$$

$$-104.12 + 2500\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \quad \therefore \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$-104.12 + 2500 \left(\sqrt{1 - \cos^2\theta} \right) \cos\theta = 0$$

$$2500\sqrt{1 - \cos^2\theta}\cos\theta = 104.12$$

$$\left(2500\sqrt{1 - \cos^2\theta}\cos\theta = 104.12 \right)^2$$

$$6250000(1 - \cos^2\theta)\cos^2\theta = 10840.97$$

$$6250000\cos^2\theta - 6250000\cos^4\theta = 10840.97$$

$$0 = 6250000\cos^4\theta - 6250000\cos^2\theta + 10840.97$$

$$\cos^2\theta = \frac{-(-6250000) \pm \sqrt{(-6250000)^2 - 4(6250000)(10840.97)}}{2(6250000)}$$

$$\cos^2\theta = \frac{6250000 \pm 6228280.32}{12500000}$$

$$\cos^2\theta = \frac{6250000 + 6228280.32}{12500000} = 0.9983$$

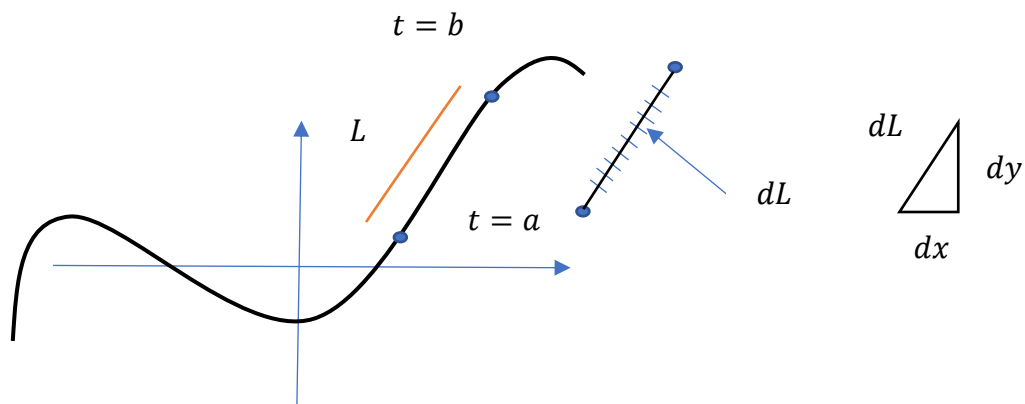
$$\cos\theta = \sqrt{0.9983} = 0.9991 \quad \therefore \quad \theta = \arccos(0.9991) = 2.34^\circ$$

$$\cos^2\theta = \frac{6250000 - 6228280.32}{12500000} = 0.0017$$

$$\cos\theta = \sqrt{0.0017} = 0.0417 \quad \therefore \quad \theta = \arccos(0.0417) = 87.61^\circ \text{ or lo tanto, el ángulo mínimo de elevación del arma es } 1.91^\circ$$

1 Longitud de Arco:

Una forma de aproximar la longitud de arco es construir triángulos rectángulos y calcular la hipotenusa, al sumar las hipotenusas estaremos aproximando el valor de la longitud de arco:



$$dL^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\sum dL = L$$

$$L = \int_a^b dL = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} \frac{dt}{dt}$$

$$L = \int_a^b dL = \int_a^b \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}} dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}} dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$

$$L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_a^b \|\vec{v}\| dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad \text{en } \mathbb{R}^3$$

$$L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_a^b \|\vec{v}\| dt$$

De forma similar podemos obtener la fórmula utilizada en Cálculo Integral:

$$L = \int_a^b dL = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} \frac{dx}{dx} = \int_a^b \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}} dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$

Las gráficas de los siguientes ejercicios fueron realizadas con winplot (Ver ANEXO C)

EJEMPLO 5

Calcular la longitud de arco para $x(t) = t^{3/2} + 4$ y $y(t) = 9t$ $1 \leq t \leq 4$

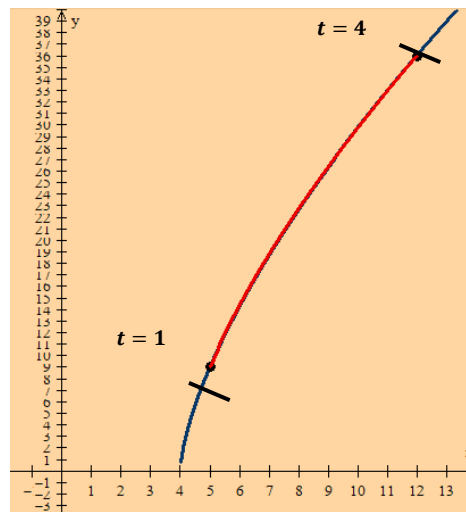
Solución:

$$x'(t) = \frac{3}{2}t^{1/2} \quad y'(t) = 9$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right)^2 + (9)^2} dt = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}t + 81} dt$$

$$= \frac{4}{9} \int_1^4 \left(\frac{9}{4}t + 81 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{9}{4} dt = \frac{4}{9} \left(\frac{9}{4}t + 81 \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} \right) \Big|_1^4 = \frac{8}{27} \left(\frac{9}{4}t + 81 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4$$

$$= \frac{8}{27} \left(\frac{9}{4}(4) + 81 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} \left(\frac{9}{4}(1) + 81 \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27} \left(90^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{333}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \mathbf{27.92 \text{ u}}$$



Utilizando la fórmula vista en cálculo integral:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

$$x(t) = t^{3/2} + 4 \quad y(t) = 9t$$

$$t = (x - 4)^{\frac{2}{3}} \quad \therefore \quad y = 9(x - 4)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6(x - 4)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\text{Si } 1 \leq t \leq 4$$

$$x(t) = t^{3/2} + 4 \quad y(t) = 9t$$

$$x(1) = (1)^{3/2} + 4 = \mathbf{5}$$

$$x(4) = (4)^{3/2} + 4 = \mathbf{12}$$

$$\therefore \mathbf{5 < x < 12}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$L = \int_5^{12} \sqrt{1 + \left(6(x-4)^{-\frac{1}{3}}\right)^2} dx$$

$$L = \int_5^{12} \sqrt{1 + 36(x-4)^{-\frac{2}{3}}} dx$$

$$L = \int_5^{12} \sqrt{1 + \frac{36}{(x-4)^{\frac{2}{3}}}} dx$$

$$L = \int_5^{12} \sqrt{\frac{(x-4)^{\frac{2}{3}} + 36}{(x-4)^{\frac{2}{3}}}} dx$$

$$L = \int_5^{12} \frac{\sqrt{(x-4)^{\frac{2}{3}} + 36}}{(x-4)^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$u = (x-4)^{2/3} + 36$$

$$du = \frac{2}{3}(x-4)^{-1/3} dx = \frac{2}{3(x-4)^{1/3}} dx$$

$$L = \frac{3}{2} \int_5^{12} \left((x-4)^{\frac{2}{3}} + 36 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3(x-4)^{\frac{1}{3}}} dx \right)$$

$$L = \frac{3}{2} \left((x-4)^{\frac{2}{3}} + 36 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Big|_5^{12}$$

$$L = \left((x - 4)^{\frac{2}{3}} + 36 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_5^{12}$$

$$L = \left((12 - 4)^{\frac{2}{3}} + 36 \right)^{\frac{3}{2}} - \left((5 - 4)^{\frac{2}{3}} + 36 \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$L = (40)^{\frac{3}{2}} - (37)^{\frac{3}{2}} = 27.92 \text{ u}$$

Otra forma de resolverlo es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

$$x(t) = t^{3/2} + 4 \quad y(t) = 9t$$

$$x'(t) = \frac{3}{2} t^{1/2} \quad y'(t) = 9$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{\frac{3}{2} t^{1/2}} = \frac{6}{t^{1/2}}$$

$$x(t) = t^{3/2} + 4$$

$$x'(t) = \frac{3}{2} t^{1/2}$$

$$dx = \frac{3}{2} t^{1/2} dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{9}{\frac{3}{2} t^{1/2}} \right)^2} \left(\frac{3}{2} t^{1/2} dt \right)$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{6}{t^{1/2}}\right)^2} \left(\frac{3}{2}t^{1/2}dt\right)$$

$$L = \frac{3}{2} \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{36}{t}} (t^{1/2}dt)$$

$$L = \frac{3}{2} \int_1^4 \sqrt{\left(1 + \frac{36}{t}\right) (t^{1/2})^2} dt$$

$$L = \frac{3}{2} \int_1^4 \sqrt{\left(1 + \frac{36}{t}\right) (t)} dt$$

$$L = \frac{3}{2} \int_1^4 \sqrt{t + 36} dt$$

$$L = \frac{3}{2} \int_1^4 (t + 36)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$L = \frac{3}{2} (t + 36)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Big|_1^4$$

$$L = (4 + 36)^{\frac{3}{2}} - (1 + 36)^{\frac{3}{2}}$$

$$L = 40^{\frac{3}{2}} - 37^{\frac{3}{2}} = \mathbf{27.92 \text{ u}}$$

EJEMPLO 6

Calcular la longitud de arco para $x(t) = 2t^2 + 7$ y $y(t) = 25t$ $0 \leq t \leq 3$

Solución:

$$\overset{46}{x'(t)} = 4t \quad y' (t) = 25$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^3 \sqrt{(4t)^2 + (25)^2} dt = \frac{1}{4} \int_0^3 \sqrt{16t^2 + 25^2} 4dt$$

$$u^2 = 16t^2 \quad a^2 = 25^2$$

$$u = 4t \quad a = 25$$

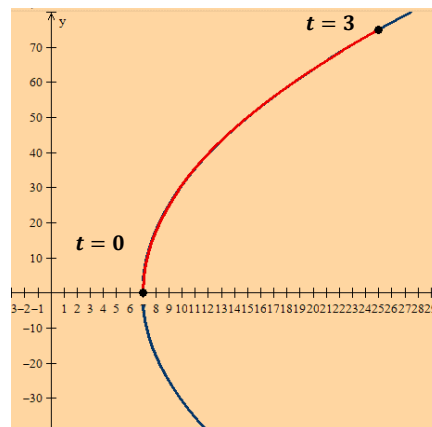
$$du = 4dt$$

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$L = \frac{1}{4} \left(\frac{4t}{2} \sqrt{16t^2 + 25^2} + \frac{25^2}{2} \ln |4t + \sqrt{16t^2 + 25^2}| \right) \Big|_0^3$$

$$L = \frac{1}{4} \left(\frac{4(3)}{2} \sqrt{16(3)^2 + 25^2} + \frac{25^2}{2} \ln |4(3) + \sqrt{16(3)^2 + 25^2}| \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{4(0)}{2} \sqrt{16(0)^2 + 25^2} + \frac{25^2}{2} \ln |4(0) + \sqrt{16(0)^2 + 25^2}| \right)$$

$$L = \frac{1}{4} \left(6\sqrt{769} + \frac{625}{2} \ln |12 + \sqrt{769}| \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{625}{2} \ln |25| \right) = 77.79 \text{ u}$$



EJEMPLO 7

Calcular la longitud de arco para $x(t) = \frac{4}{3}t^3 + 5$ y $y(t) = \frac{1}{2}t^2$ $-1 \leq t \leq 1$

Solución:

$$x'(t) = 4t^2 \quad y' \quad y'(t) = t$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{(4t^2)^2 + (t)^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{16t^4 + t^2} dt$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{t^2(16t^2 + 1)} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{t^2} \sqrt{16t^2 + 1} dt = \int_{-1}^1 t \sqrt{16t^2 + 1} dt$$

$$L = \frac{1}{32} \int_{-1}^1 32t (16t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{32} (16t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{48} (16t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1$$

$$L = \frac{1}{48} (16(1)^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{48} (16(-1)^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad \text{NO puede ser CERO}$$

Hay que tener en cuenta el concepto de valor absoluto:

$$\sqrt{t^2} = |t|$$

$$|t| = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$|-5| = -(-5) = 5$$

$$|12| = 12$$

Una vez teniendo presente el concepto de valor absoluto se calculará de nuevo la integral sin cometer el error del desarrollo anterior:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{t^2} \sqrt{16t^2 + 1} dt = \int_{-1}^1 |t| \sqrt{16t^2 + 1} dt$$

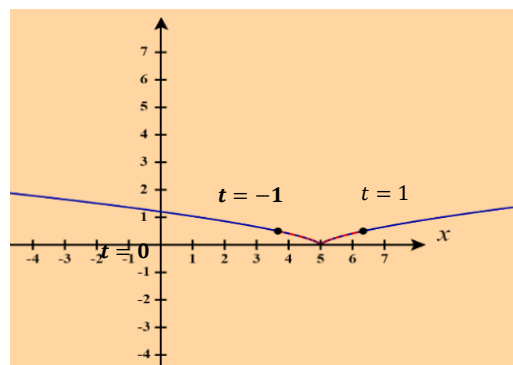
$$L = \int_{-1}^0 -t \sqrt{16t^2 + 1} dt + \int_0^1 t \sqrt{16t^2 + 1} dt$$

$$L = -\frac{1}{32} \int_{-1}^0 32t (16t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dt + \frac{1}{32} \int_0^1 32t (16t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$L = -\frac{1}{48} (16t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{48} (16t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1$$

$$L = \left(-\frac{1}{48} (16(0)^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{48} (16(-1)^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right) + \left(\frac{1}{48} (16(1)^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{48} (16(0)^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$L = -\frac{1}{48} + \frac{1}{48} (17)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{48} (17)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{48} = \frac{2}{48} (17)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{48} = \frac{1}{24} (17)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{24} = 2.88 u$$



EJEMPLO 8

Calcular la longitud de arco para $x(t) = \text{sen}(4t)$ y $y(t) = 9$ $0 \leq t \leq \pi$

Solución:

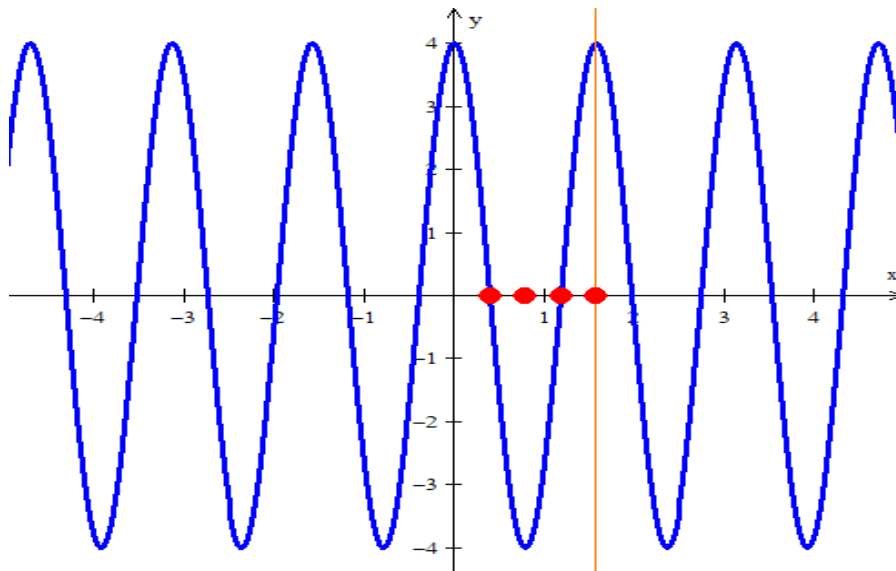
$$x'(t) = 4\cos(4t) \quad y' (t) = 0$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^\pi \sqrt{(4\cos(4t))^2 + 0^2} dt = \int_0^\pi 4\cos(4t) dt$$

$$L = \text{sen}(4t) \Big|_0^\pi = \text{sen}(4\pi) - \text{sen}(0) = 0 \quad \text{NO puede ser CERO}$$

A continuación, se realiza el análisis de la gráfica para tratar de entender que es lo que está causando el resultado cero:

$$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

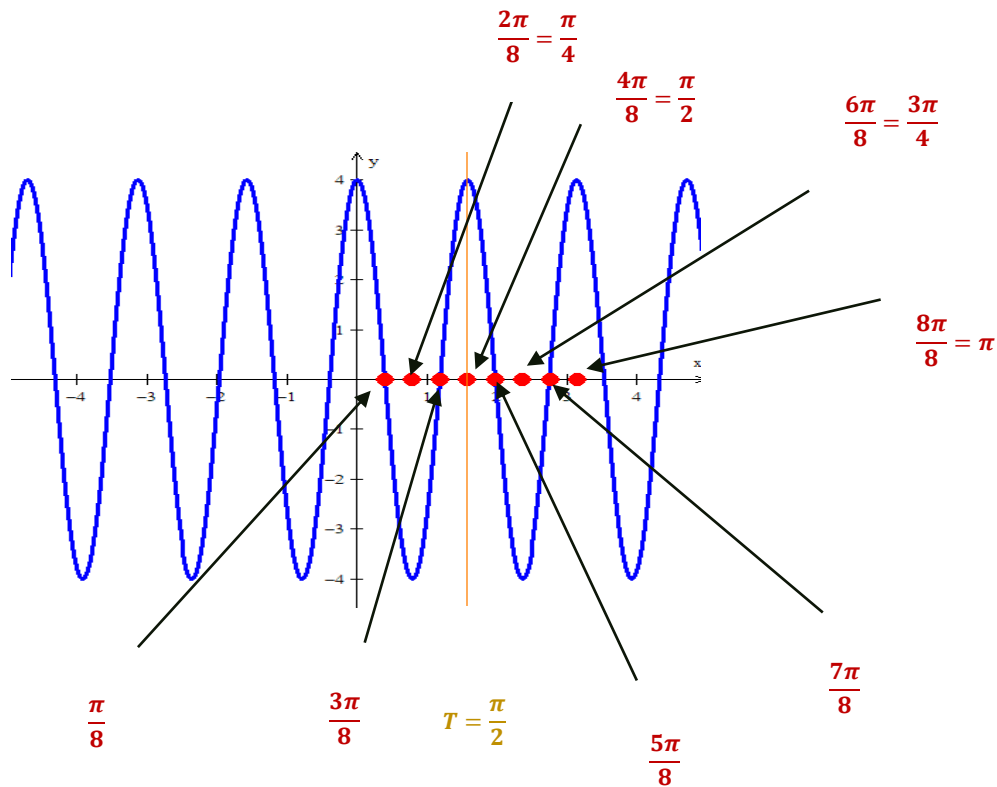


Nuevamente se aprecia que hay valores para los cuales la función está por debajo del eje x, por lo tanto, nuevamente se aplica el concepto de valor absoluto:

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(4 \cos(4t))^2 + 0} dt = \int_0^{\pi} |4 \cos(4t)| dt$$

En un ciclo se tienen 4 valores críticos para ubicarlos dividimos el periodo entre 4, esto con el objetivo de definir los límites de integración ya que $4\cos(4x)$ tiene valores positivos y negativos y esto hace que tengamos que plantear varias integrales:

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{8}$$



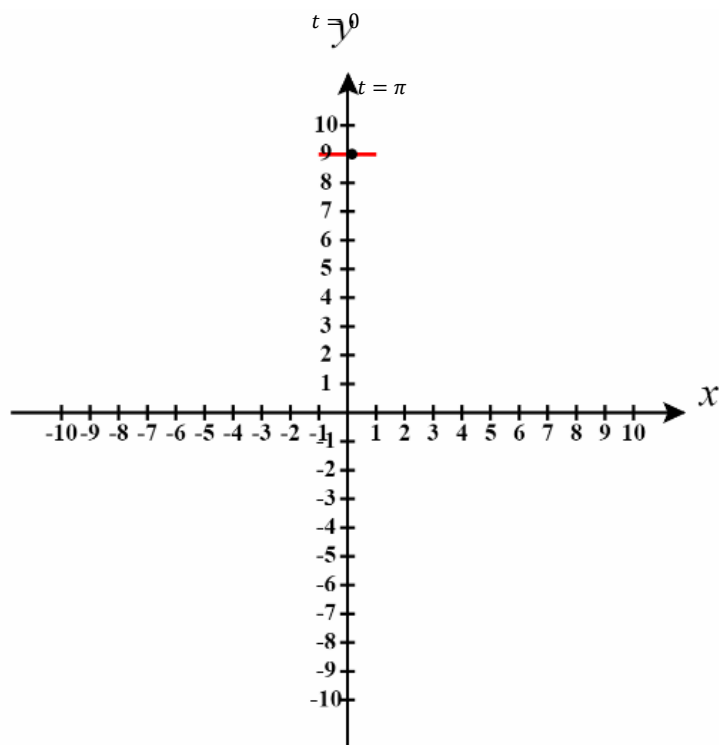
Como $f(x) = 4 \cos(4x)$ toma valores positivos y negativos de $(0, \pi)$, entonces el resultado correcto es:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} 4 \cos(4t) dt + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} -4 \cos(4t) dt + \int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} 4 \cos(4t) dt + \int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} -4 \cos(4t) dt \\ + \int_{\frac{7\pi}{8}}^{\pi} 4 \cos(4t) dt$$

O bien, se calcula la primera sección positiva que es la correspondiente al intervalo de $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ y la multiplicamos por 8 ya que de la gráfica podemos observar que la longitud de arco que se desea calcular contiene 8 veces a la primera sección positiva:

$$L = 8 \int_0^{\frac{\pi}{8}} 4 \cos(4t) dt = 8 \sin(4t) \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = 8 \sin\left(4\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) - 8 \sin(4(0)) \\ = 8 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 8 \sin(0)$$

$$L = 8u$$



EJEMPLO 9

Calcular la longitud de arco para $x(t) = t$ y $y(t) = \frac{t^5}{10} + \frac{1}{6t^3}$ $1 \leq t \leq 2$

Solución:

$$x(t) = t \quad y(t) = \frac{t^5}{10} + \frac{1}{6}t^{-3}$$

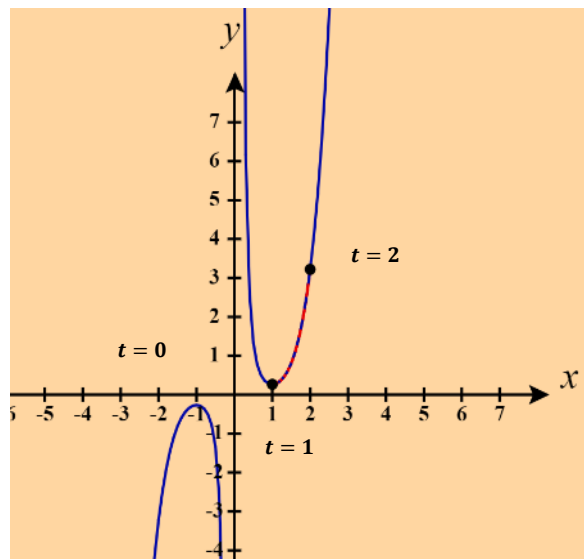
$$x'(t) = 1 \quad y'(t) = \frac{t^4}{2} - \frac{t^{-4}}{2} = \frac{t^4}{2} - \frac{1}{2t^4}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{t^4}{2} - \frac{1}{2t^4}\right)^2 = \frac{t^8}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4t^8} = \frac{t^{16} - 2t^8 + 1}{4t^8}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_1^2 \sqrt{(1) + \left(\frac{t^{16} - 2t^8 + 1}{4t^8}\right)} dt \\ &= \int_1^2 \sqrt{\frac{4t^8 + t^{16} - 2t^8 + 1}{4t^8}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \int_1^2 \sqrt{\frac{t^{16} + 2t^8 + 1}{4t^8}} dt = \int_1^2 \sqrt{\frac{(t^8 + 1)^2}{4t^8}} dt = \int_1^2 \left| \frac{(t^8 + 1)}{2t^4} \right| dt \\
 &= \int_1^2 \frac{(t^8 + 1)}{2t^4} dt \\
 L &= \int_1^2 \left(\frac{t^4}{2} + \frac{1}{2t^4} \right) dt = \int_1^2 \left(\frac{t^4}{2} + \frac{t^{-4}}{2} \right) dt = \frac{t^5}{10} - \frac{t^{-3}}{6} \Big|_1^2 = \frac{t^5}{10} - \frac{1}{6t^3} \Big|_1^2 \\
 L &= \left(\frac{(2)^5}{10} - \frac{1}{6(2)^3} \right) - \left(\frac{(1)^5}{10} - \frac{1}{6(1)^3} \right) = \frac{16}{5} - \frac{1}{48} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{779}{240} = 3.25u
 \end{aligned}$$



1 Área de una superficie de revolución

Teorema:

Giro alrededor de x:

Supongamos que $f(x)$ es una función suave no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Entonces, el área de la superficie de revolución que se forma al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x viene dada por:

$$S = \int_{t_a}^b 2\pi f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Giro alrededor de y:

Supongamos que $g(y)$ es una función suave no negativa sobre el intervalo $[c,d]$. Entonces, el área de la superficie de revolución que se forma al girar el gráfico de $g(y)$ alrededor del eje x viene dada por:

$$S = \int_{t_c}^d 2\pi g(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

EJEMPLO 10

Calcular el área de la superficie que se genera al girar alrededor del eje x la función dada en el intervalo indicado:

$$f(x) = \sqrt{x+4} \quad [0, 5]$$

Solución:

Como el giro es alrededor de x, se utiliza la fórmula:

$$S = \int_{t_a}^b 2\pi f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Se parametriza la función,

$$x(t) = t \quad y(t) = \sqrt{t+4}$$

$$x'(t) = 1 \quad y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+4}}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{t+4}}\right)^2}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4(t+4)}}$$

Ahora se obtienen los valores para el parámetro t:

$$0 \leq x \leq 5$$

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow x = t \quad \therefore x = 0$$

$$\text{Si } x = 5 \rightarrow x = t \quad \therefore x = 5$$

$$0 \leq t \leq 5$$

$$S = \int_{t_a}^{t_b} 2\pi f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

$$S = \int_0^5 2\pi \sqrt{t+4} \sqrt{1 + \frac{1}{4(t+4)}} dt = \int_0^5 2\pi \sqrt{t+4} \sqrt{\frac{4(t+4)+1}{4(t+4)}} dt$$

$$= \int_0^5 2\pi \sqrt{t+4} \frac{\sqrt{4(t+4)+1}}{\sqrt{4(t+4)}} dt$$

$$= \int_0^5 2\pi \sqrt{t+4} \frac{\sqrt{4t+17}}{2\sqrt{t+4}} dt$$

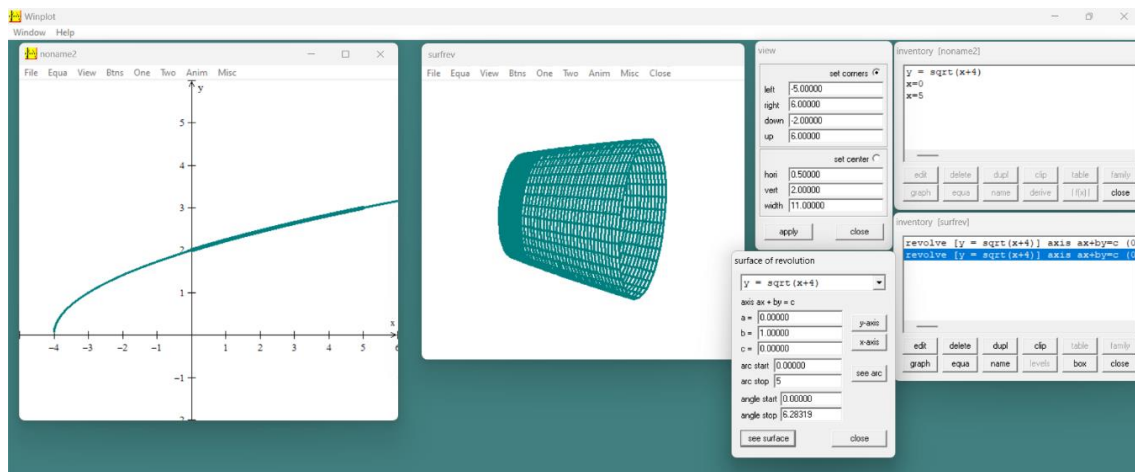
$$= \int_0^5 \pi \sqrt{4t+17} dt = \frac{\pi}{4} \int_0^5 (4t+17)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{\pi}{4} (4t+17)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right) \Big|_0^5 = \frac{\pi}{6} (4t+17)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^5$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[(4(5) + 17)^{\frac{3}{2}} - (4(0) + 17)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[(37)^{\frac{3}{2}} - (17)^{\frac{3}{2}} \right] u^2$$

La siguiente imagen muestra la porción de superficie a la que se le calculó su valor:



EJEMPLO 11

Calcular el área de la superficie que se genera al girar alrededor del eje y la función dada en el intervalo indicado:

$$g(y) = y^2 \quad [-1, 2]$$

Solución:

Como el giro es alrededor de y, se utiliza la fórmula:

$$S = \int_{t_c}^{t_d} 2\pi g(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Se parametriza la función,

$$y(t) = t \quad x(t) = t^2$$

$$y'(t) = 1 \quad x'(t) = 2t$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(1)^2 + (2t)^2}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

Ahora se obtienen los valores para el parámetro t:

$$-1 \leq y \leq 2$$

$$\text{Si } y = -1 \rightarrow y = t \quad \therefore t = -1$$

$$\text{Si } y = 2 \rightarrow y = t \quad \therefore t = 2$$

$$-1 \leq t \leq 2$$

$$S = \int_{t_c}^{t_d} 2\pi g(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

$$S = \int_0^5 2\pi t^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt = 2\pi \int_0^5 t^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

Integrando por partes:

$$= 2\pi \int_0^5 t^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

$$= 2\pi \int_0^5 t t \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} u &= t \\ du &= dt \\ dv &= t\sqrt{1+4t^2} dt \\ v &= \int t\sqrt{1+4t^2} dt \\ v &= \frac{1}{8} \int 8t(1+4t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ v &= \frac{1}{8} (1+4t^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right) \\ v &= \frac{1}{12} (1+4t^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

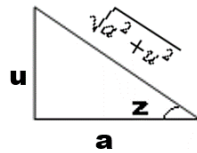
$$= 2\pi \left[t \left(\frac{1}{12} (1+4t^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 \frac{1}{12} (1+4t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

$$= 2\pi \left[t \left(\frac{1}{12} (1+4t^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right]_{-1}^2 - \frac{1}{12} \int_{-1}^2 (1+4t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

Integrando por sustitución trigonométrica:

$$= 2\pi \left[t \left(\frac{1}{12} (1+4t^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right]_{-1}^2 - \frac{1}{12} \int_{-1}^2 (1+4t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + u^2} : \\ u &= a \tan z \\ \sqrt{a^2 + u^2} &= a \sec z \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Cambio de límite inferior:} \\ t &= -1 \\ \text{Sustituyendo el valor de t:} \\ 2t &= \tan z \\ -2 &= \tan z \\ z &= \arctan(-2) \\ z &= -63.43^\circ = -1.107 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cambio de límite superior:} \\ t &= 2 \\ \text{Sustituyendo el valor de t:} \\ 2t &= \tan z \\ 4 &= \tan z \\ z &= \arcsenz(4) \\ z &= 75.96^\circ = 1.326 \end{aligned}$$

$$u^2 = 4t^2 \quad a^2 = 1$$

$$u = 2t \quad a = 1$$

$$2t = \tan z \quad \sqrt{1+x^2} = \sec z \quad z$$

$$dt = \frac{1}{2} \sec^2 z dz$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \left[t \left(\frac{1}{12} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right]_{-1}^2 - \frac{1}{12} \int_{-1}^2 (\sqrt{1 + 4t^2})^3 dt \\
&= 2\pi \left[t \left(\frac{1}{12} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right]_{-1}^2 - \frac{1}{12} \int_{-1.107}^{1.326} (\sec z)^3 \frac{1}{2} \sec^2 z dz \\
&= 2\pi \left[t \left(\frac{1}{12} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right]_{-1}^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} \right) \int_{-1.107}^{1.326} \sec^5 z dz \\
&= 2\pi \left[\frac{t}{12} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^2 - \frac{1}{24} \int_{-1.107}^{1.326} \sec^5 z dz
\end{aligned}$$

$$\int \sec^5 z dz = \int \sec^2 z \sec^3 z dz = \int \sec^3 z \sec^2 z dz$$

Por partes:

$$\int \sec^5 z dz = \sec^3 z \left(\int \sec^2 z dz \right) - \int \left(\int \sec^2 z dz \right) (3\sec^2 z \sec z \tan z dz)$$

$$\int \sec^5 z dz = \sec^3 z \tan z - \int \tan z (3\sec^2 z \sec z \tan z dz)$$

$$\int \sec^5 z dz = \sec^3 z \tan z - \int 3\sec^3 z \tan^2 z dz$$

$$\int \sec^5 z dz = \sec^3 z \tan z - 3 \int \sec^3 z (\sec^2 z - 1) dz$$

$$\int \sec^5 z dz = \sec^3 z \tan z - 3 \int \sec^5 z dz + 3 \int \sec^3 z dz$$

$$\int \sec^5 z dz + 3 \int \sec^5 z dz = \sec^3 z \tan z + 3 \int \sec^3 z dz$$

$$4 \int \sec^5 z dz = \sec^3 z \tan z + 3 \int \sec^3 z dz$$

$$\int \sec^5 z dz = \frac{1}{4} \sec^3 z \tan z + \frac{3}{4} \int \sec^3 z dz$$

$$\int \sec^3 z \, dz = \int \sec z \sec^2 z \, dz$$

Por partes:

$$\int \sec^3 z \, dz = \sec z \left(\int \sec^2 z \, dz \right) - \int \tan z (\sec z \tan z) \, dz$$

$$\int \sec^3 z \, dz = \sec z \tan z - \int \tan^2 z \sec z \, dz$$

$$\int \sec^3 z \, dz = \sec z \tan z - \int (\sec^2 z - 1) \sec z \, dz$$

$$\int \sec^3 z \, dz = \sec z \tan z - \int \sec^3 z \, dz + \int \sec z \, dz$$

$$\int \sec^3 z \, dz + \int \sec^3 z \, dz = \sec z \tan z + \int \sec z \, dz$$

$$2 \int \sec^3 z \, dz = \sec z \tan z + \ln|\sec z + \tan z| + C$$

$$\int \sec^3 z \, dz = \frac{1}{2} \sec z \tan z + \frac{1}{2} \ln|\sec z + \tan z| + C$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\int \sec^5 z \, dz = \frac{1}{4} \sec^3 z \tan z + \frac{3}{4} \int \sec^3 z \, dz$$

$$\int \sec^5 z \, dz = \frac{1}{4} \sec^3 z \tan z + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \sec z \tan z + \frac{1}{2} \ln|\sec z + \tan z| + C \right)$$

$$\int \sec^5 z \, dz = \frac{1}{4} \sec^3 z \tan z + \frac{3}{8} \sec z \tan z + \frac{3}{8} \ln|\sec z + \tan z| + C$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \left[\frac{t}{12} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{2}{-1} - \frac{1}{24} \int_{-1.107}^{1.326} \sec^5 z \, dz \right] \right] \\
&= 2\pi \left[\frac{t}{12} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{2}{-1} - \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4} \sec^3 z \tan z + \frac{3}{8} \sec z \tan z + \frac{3}{8} \ln |\sec z + \tan z| \right) \right]_{-1.107}^{1.326} \right] \\
&= 2\pi \left[\frac{t}{12} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{2}{-1} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4} \sec^3 z \tan z + \frac{3}{8} \sec z \tan z + \frac{3}{8} \ln |\sec z + \tan z| \right) \right]_{-1.107}^{1.326} \\
&= 2\pi \left(\frac{2}{12} \right) \left[(1 + 4(2)^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + 4(-1)^2)^{\frac{3}{2}} \right] \\
&\quad - \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4} \sec^3(1.326) \tan(1.326) + \frac{3}{8} \sec(1.326) \tan(1.326) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} \ln |\sec(1.326) + \tan(1.326)| \right) \\
&\quad - \left(-\frac{1}{24} \left(\frac{1}{4} \sec^3(-1.107) \tan(-1.107) + \frac{3}{8} \sec(-1.107) \tan(-1.107) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3}{8} \ln |\sec(-1.107) + \tan(-1.107)| \right) \right) \\
&= \frac{\pi}{12} \left[(17)^{\frac{3}{2}} - (5)^{\frac{3}{2}} \right] \\
&\quad - \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4} \sec^3(1.326) \tan(1.326) + \frac{3}{8} \sec(1.326) \tan(1.326) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} \ln |\sec(1.326) + \tan(1.326)| \right) \\
&\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4} \sec^3(-1.107) \tan(-1.107) + \frac{3}{8} \sec(-1.107) \tan(-1.107) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} \ln |\sec(-1.107) + \tan(-1.107)| \right) = \mathbf{57.04 \, u^2}
\end{aligned}$$

El resultado se puede comprobar con WolframAlpha en línea:

[https://www.wolframalpha.com/input?i=integrate+2*Pi*t^2*sqrt\(4t^2+1\)%5E2B1%29+from+-1+to+2](https://www.wolframalpha.com/input?i=integrate+2*Pi*t^2*sqrt(4t^2+1)%5E2B1%29+from+-1+to+2)



WolframAlpha computational intelligence

integrate $2\pi t^2 \sqrt{4t^2 + 1}$ from -1 to 2

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

EXTENDED KEYBOARD

EXAMPLES

UPLOAD

RANDOM

Definite integral

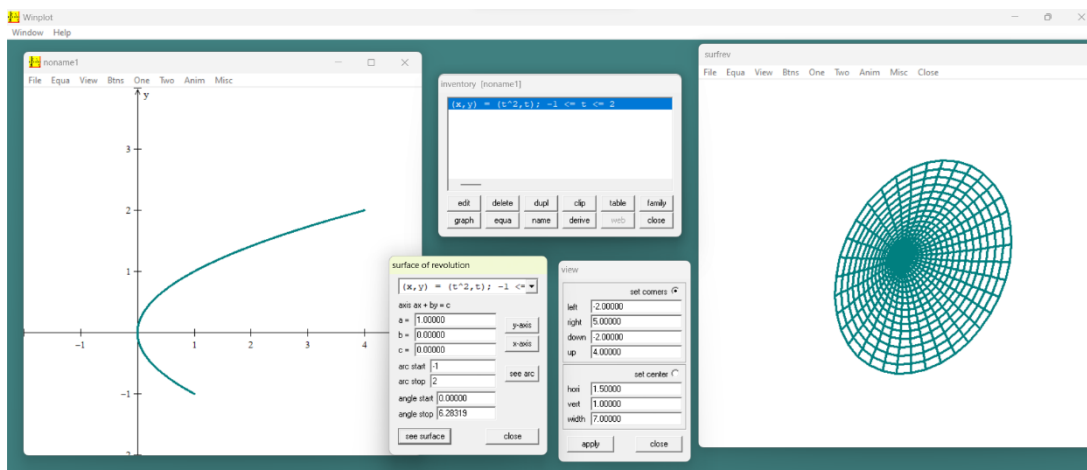
More digits

Step-by-step solution

$$\int_{-1}^2 2\pi t^2 \sqrt{4t^2 + 1} dt = \frac{1}{32} \pi (18\sqrt{5} + 132\sqrt{17} - \sinh^{-1}(2) - \sinh^{-1}(4)) \approx 57.036$$

$\sinh^{-1}(x)$ is the inverse hyperbolic sine function

La siguiente imagen ⁵ muestra la porción de superficie a la que se le calculó su valor:

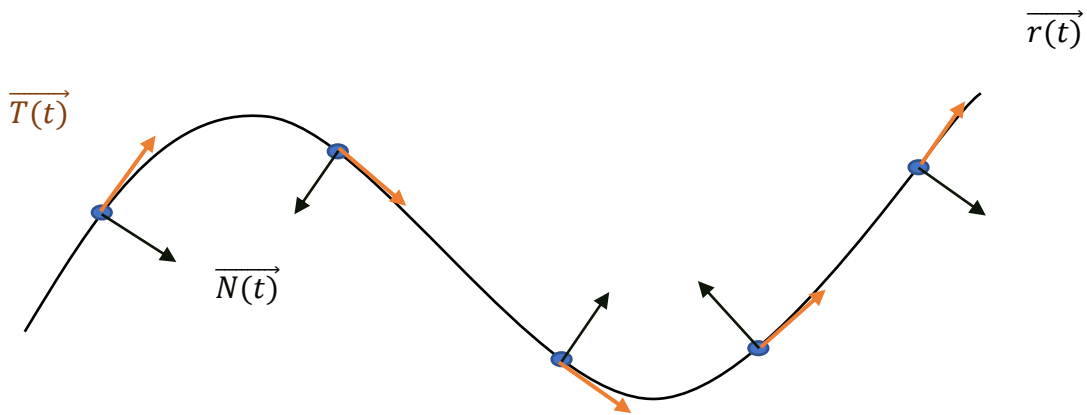


2.7 Tangente, normal y binormal unitarios, representación gráfica.

5 **Vector Tangente unitario y vector normal principal unitario**

El **vector tangente unitario** ($\vec{T}(t)$), como el nombre lo indica es un **vector tangente** a la curva y de magnitud 1.

El **vector normal principal unitario** ($\vec{N}(t)$) es un vector ortogonal al vector tangente que apunta hacia la concavidad de la curva y tiene magnitud



$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \quad \vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$$

EJEMPLO 1:

Sea $\vec{r}(t) = \langle 4t, -2, t^3 \rangle$ determina para $t = 1$

- El Vector Tangente Unitario
- El Vector Normal Principal Unitario

Solución:

a) El Vector Tangente Unitario.

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\overrightarrow{r'(t)}}{\|\overrightarrow{r'(t)}\|}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\langle 4, 0, 3t^2 \rangle}{\sqrt{(4)^2 + (3t^2)^2}} = \frac{\langle 4, 0, 3t^2 \rangle}{\sqrt{16 + 9t^4}}$$

$$\vec{T}(1) = \frac{\langle 4, 0, 3(1)^2 \rangle}{\sqrt{16 + 9(1)^4}} = \frac{\langle 4, 0, 3 \rangle}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{\langle 4, 0, 3 \rangle}{5}$$

$$\vec{T}(1) = \left\langle \frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right\rangle$$

b) Vector Normal Principal Unitario.

$$\overrightarrow{N(t)} = \frac{\overrightarrow{T'(t)}}{\|\overrightarrow{T'(t)}\|}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\langle 4, 0, 3t^2 \rangle}{\sqrt{16 + 9t^4}} = \frac{1}{\sqrt{16 + 9t^4}} \langle 4, 0, 3t^2 \rangle = (16 + 9t^4)^{-\frac{1}{2}} \langle 4, 0, 3t^2 \rangle$$

$$\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\vec{T}'(t) = (16 + 9t^4)^{-\frac{1}{2}} \langle 0, 0, 6t \rangle + \langle 4, 0, 3t^2 \rangle \left(-\frac{1}{2} (16 + 9t^4)^{-\frac{3}{2}} (36t^3) \right)$$

$$\vec{T}'(t) = (16 + 9t^4)^{-\frac{1}{2}} \langle 0, 0, 6t \rangle - 18t^3(16 + 9t^4)^{-\frac{3}{2}} \langle 4, 0, 3t^2 \rangle$$

Sustituyendo $t = 1$:

$$\vec{T}'(1) = (16 + 9(1)^4)^{-\frac{1}{2}} \langle 0, 0, 6(1) \rangle - 18(1)^3(16 + 9(1)^4)^{-\frac{3}{2}} \langle 4, 0, 3(1)^2 \rangle$$

$$\vec{T}'(1) = \frac{1}{5} \langle 0, 0, 6 \rangle - \frac{18}{125} \langle 4, 0, 3 \rangle$$

$$\vec{T}'(1) = \langle 0, 0, \frac{6}{5} \rangle - \langle \frac{72}{125}, 0, \frac{54}{125} \rangle$$

$$\vec{T}'(1) = \langle -\frac{72}{125}, 0, \frac{96}{125} \rangle$$

$$\|\vec{T}'(1)\| = \left\| \langle -\frac{72}{125}, 0, \frac{96}{125} \rangle \right\|$$

$$\|\vec{T}'(1)\| = \sqrt{\left(-\frac{72}{125}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{96}{125}\right)^2} = \frac{24}{25}$$

$$\overrightarrow{N(1)} = \frac{\overrightarrow{T'(1)}}{\|\overrightarrow{T'(1)}\|} = \frac{\langle -\frac{72}{125}, 0, \frac{96}{125} \rangle}{\frac{24}{25}}$$

$$\overrightarrow{N(1)} = \frac{25}{24} \langle -\frac{72}{125}, 0, \frac{96}{125} \rangle$$

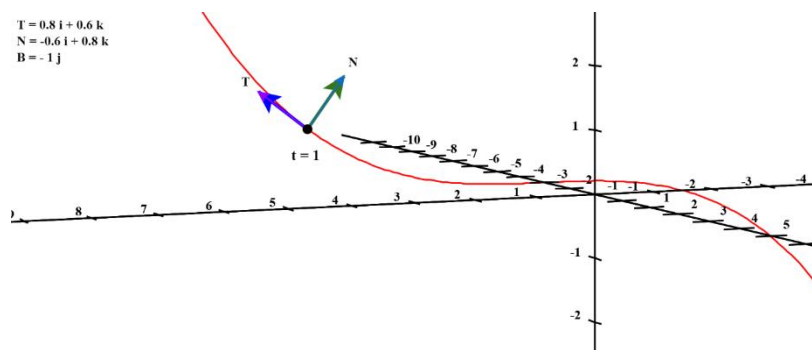
$$\overrightarrow{N(1)} = \left\langle -\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle$$

Comprobación de resultados:

$$\overrightarrow{T(1)} \cdot \overrightarrow{N(1)} = 0$$

$$\left\langle \frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right\rangle \cdot \left\langle -\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle = -\frac{12}{25} + \frac{12}{25} = 0$$

Por lo tanto, hemos comprobado los resultados.



EJEMPLO 2:

Sea $\vec{r}(t) = \langle 7t, 5t^2, 2t^3 \rangle$ determinar:

- 5 a) El Vector Tangente Unitario
- b) El Vector Normal Principal Unitario

Solución:

- a) El Vector Tangente Unitario

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\overrightarrow{r'(t)}}{\|\overrightarrow{r'(t)}\|}$$

$$\vec{r}(t) = \langle 7t, 5t^2, 2t^3 \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 7, 10t, 6t^2 \rangle$$

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\langle 7, 10t, 6t^2 \rangle}{\|\langle 7, 10t, 6t^2 \rangle\|}$$

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\langle 7, 10t, 6t^2 \rangle}{\sqrt{49 + 100t^2 + 36t^4}}$$

Vector Normal Principal Unitario.

$$\overrightarrow{N(t)} = \frac{\overrightarrow{T'(t)}}{\|\overrightarrow{T'(t)}\|}$$

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{1}{\sqrt{49 + 100t^2 + 36t^4}} \langle 7, 10t, 6t^2 \rangle$$

$$\overrightarrow{T(t)} = (49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{1}{2}} \langle 7, 10t, 6t^2 \rangle$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\overrightarrow{T'(t)} = (49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{1}{2}} \langle 0, 10, 12t \rangle + \langle 7, 10t, 6t^2 \rangle$$

$$> \left(-\frac{1}{2} (49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{3}{2}} (200t + 144t^3) \right)$$

$$\overrightarrow{T'(t)} = (49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{1}{2}} \langle 0, 10, 12t \rangle - (100t + 72t^3)(49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\langle 7, 10t, 6t^2 \rangle$$

$$\overrightarrow{T'(t)} = (49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{3}{2}} [(49 + 100t^2 + 36t^4)^1 \langle 0, 10, 12t \rangle - (100t + 72t^3)$$

$$\langle 7, 10t, 6t^2 \rangle]$$

$$\overrightarrow{T'(t)} = (49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{3}{2}} [\langle 0, 10(49 + 100t^2 + 36t^4), 12t(49 + 100t^2 + 36t^4) \rangle -$$

$$\langle 7(100t + 72t^3), 10t(100t + 72t^3), 6t^2(100t + 72t^3) \rangle]$$

$$\overrightarrow{T'(t)} = (49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{3}{2}} [\langle 0, 490 + 1000t^2 + 360t^4, 588t + 1200t^3 + 432t^5 \rangle -$$

$$\langle 700t + 504t^3, 1000t^2 + 720t^4, 600t^3 + 432t^5 \rangle]$$

$$\overrightarrow{T'(t)} = (49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{3}{2}} \langle -700t - 504t^3, 490 - 360t^4, 588t + 600t^3 \rangle$$

$$\| \alpha \vec{A} \| = |\alpha| \| \vec{A} \|$$

$$\| \overrightarrow{T'(t)} \| = \left| (49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{3}{2}} \right| \sqrt{(-700t - 504t^3)^2 + (490 - 360t^4)^2 + (588t + 600t^3)^2}$$

$$\| \overrightarrow{T'(t)} \| = (49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{(-700t - 504t^3)^2 + (490 - 360t^4)^2 + (588t + 600t^3)^2}$$

$$\overrightarrow{N(t)} = \frac{\overrightarrow{T'(t)}}{\| \overrightarrow{T'(t)} \|}$$

$$\overrightarrow{N(t)} = \frac{(49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{3}{2}} \langle -700t - 504t^3, 490 - 360t^4, 588t + 600t^3 \rangle}{(49 + 100t^2 + 36t^4)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{(-700t - 504t^3)^2 + (490 - 360t^4)^2 + (588t + 600t^3)^2}}$$

$$\overrightarrow{N(t)} = \frac{\langle -700t - 504t^3, 490 - 360t^4, 588t + 600t^3 \rangle}{\sqrt{(-700t - 504t^3)^2 + (490 - 360t^4)^2 + (588t + 600t^3)^2}}$$

Comprobación de resultados:

$$\overrightarrow{T(t)} \cdot \overrightarrow{N(t)} = 0$$

$$\frac{\langle 7, 10t, 6t^2 \rangle}{\sqrt{49 + 100t^2 + 36t^4}} \cdot \frac{\langle -700t - 504t^3, 490 - 360t^4, 588t + 600t^3 \rangle}{\sqrt{(-700t - 504t^3)^2 + (490 - 360t^4)^2 + (588t + 600t^3)^2}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{49 + 100t^2 + 36t^4} \sqrt{(-700t - 504t^3)^2 + (490 - 360t^4)^2 + (588t + 600t^3)^2}} \langle 7, 10t, 6t^2 \rangle \cdot \langle -700t - 504t^3, 490 - 360t^4, 588t + 600t^3 \rangle \geq 0$$

$$\langle 7, 10t, 6t^2 \rangle \cdot \langle -700t - 504t^3, 490 - 360t^4, 588t + 600t^3 \rangle \geq 0$$

$$7(-700t - 504t^3) + 10t(490 - 360t^4) + 6t^2(588t + 600t^3) = 0$$

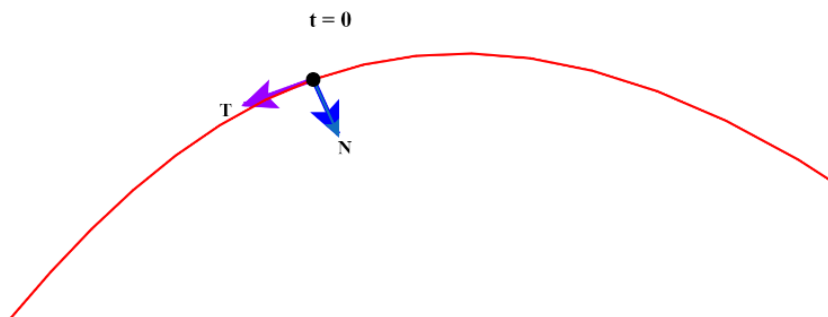
$$-4900t - 3528t^3 + 4900t - 3600t^5 + 3528t^3 + 3600t^5 = 0$$

$$0 = 0$$

Por lo tanto, nuestro resultado es correcto.

Damos cierto valor a t , para observar la gráfica:

$$\overrightarrow{T(0)} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad y \quad \overrightarrow{N(0)} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

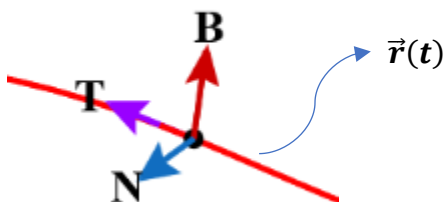


Vector binormal y plano osculador

Vector binormal:

Es el vector que es ortogonal a los vectores $\vec{T}$ y $\vec{N}$. Por lo tanto, para calcularlo simplemente se efectúa el producto cruz entre ambos vectores:

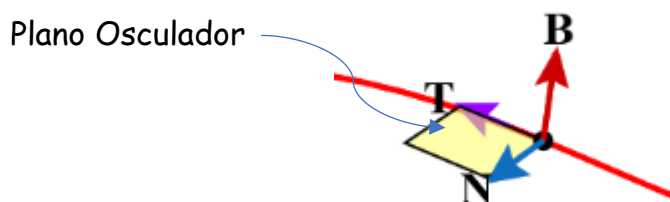
$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$



Plano osculador:

5 Es el PLANO que contiene a los vectores $\vec{T}$ y $\vec{N}$. Por lo tanto, este plano es normal al vector Binormal $\vec{B}$, éste vector lo utilizaremos para encontrar la ecuación del PLANO OSCULADOR:

$$B_x x + B_y y + B_z z = \vec{B} \cdot \vec{P}_0$$



EJEMPLO 3

Sea $\vec{r}(t) = \langle 4t - t^2, \sqrt{t}, t^3 - 2 \rangle$ determina el vector Binormal y el plano osculador para $t = 1$

Solución:

5 Para calcular el vector Binormal es necesario el vector Tangente Unitario y el vector Normal Principal Unitario ya que el Binormal es el producto cruz:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 4 - 2t, \frac{1}{2}t^{-1/2}, 3t^2 \rangle \rightarrow \vec{r}'(1) = \vec{v}(1) = \langle 2, \frac{1}{2}, 3 \rangle$$

Vector Tangente Unitario:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\langle 4 - 2t, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 3t^2 \rangle}{\sqrt{(4 - 2t)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2 + (3t^2)^2}}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{(4 - 2t)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2 + (3t^2)^2}} \langle 4 - 2t, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 3t^2 \rangle$$

$$\vec{T}(1) = \frac{\vec{r}'(1)}{\|\vec{r}'(1)\|} = \frac{\langle 2, \frac{1}{2}, 3 \rangle}{\sqrt{(2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (3)^2}} = \frac{\langle 2, \frac{1}{2}, 3 \rangle}{\sqrt{4 + \frac{1}{4} + 9}}$$

$$\vec{T}(1) = \frac{\langle 2, \frac{1}{2}, 3 \rangle}{\sqrt{\frac{53}{4}}} = \frac{\langle 2, \frac{1}{2}, 3 \rangle}{\frac{\sqrt{53}}{2}}$$

$$\vec{T}(1) = \frac{2}{\sqrt{53}} \langle 2, \frac{1}{2}, 3 \rangle = \langle \frac{4}{\sqrt{53}}, \frac{1}{\sqrt{53}}, \frac{6}{\sqrt{53}} \rangle$$

Vector Normal Principal Unitario:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{16 - 16t + 4t^2 + \frac{1}{4t} + 9t^4}} \langle 4 - 2t, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 3t^2 \rangle$$

$$\vec{T}(t) = \left(16 - 16t + 4t^2 + \frac{1}{4t} + 9t^4\right)^{-\frac{1}{2}} \left\langle 4 - 2t, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 3t^2 \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \vec{T}'(t) &= \left(16 - 16t + 4t^2 + \frac{1}{4t} + 9t^4\right)^{-\frac{1}{2}} \left\langle -2, -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}, 6t \right\rangle + \left\langle 4 - 2t, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 3t^2 \right\rangle \\ &> \left[-\frac{1}{2} \left(16 - 16t + 4t^2 + \frac{1}{4t} + 9t^4\right)^{-\frac{3}{2}} \left(-16 + 8t - \frac{1}{4t^2} + 36t^3\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{T}'(t) &= \left(16 - 16t + 4t^2 + \frac{1}{4t} + 9t^4\right)^{-\frac{1}{2}} \left\langle -2, -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}, 6t \right\rangle + \left\langle 4 - 2t, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 3t^2 \right\rangle \\ &> \left[\left(16 - 16t + 4t^2 + \frac{1}{4t} + 9t^4\right)^{-\frac{3}{2}} \left(8 - 4t + \frac{1}{8t^2} - 18t^3\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{T}'(t) &= \left(16 - 16t + 4t^2 + \frac{1}{4t} + 9t^4\right)^{-\frac{1}{2}} \left\langle -2, -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}, 6t \right\rangle \\ &> + \left(16 - 16t + 4t^2 + \frac{1}{4t} + 9t^4\right)^{-\frac{3}{2}} \left(8 - 4t + \frac{1}{8t^2} - 18t^3\right) \left\langle 4 - 2t, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 3t^2 \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{T}'(t) &= \left(16 - 16t + 4t^2 + \frac{1}{4t} + 9t^4\right)^{-\frac{3}{2}} \left[\left(16 - 16t + 4t^2 + \frac{1}{4t} + 9t^4\right) \left\langle -2, -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}, 6t \right\rangle + \left(8 - 4t + \frac{1}{8t^2} - 18t^3\right) \right. \\ &\quad \left. \left\langle 4 - 2t, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 3t^2 \right\rangle \right] \end{aligned}$$

39 Como se pide el vector normal principal unitario en

$t = 1$, evaluamos antes de calcular la magnitud.

$$\vec{T}'(1) = \left(\frac{53}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{53}{4}\right) \left\langle -2, -\frac{1}{4}, 6 \right\rangle + \left(-\frac{111}{8}\right) \left\langle 2, \frac{1}{2}, 3 \right\rangle \right]$$

$$\vec{T}'(1) = \left(\frac{53}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \left[\left\langle -\frac{53}{2}, -\frac{53}{16}, \frac{159}{2} \right\rangle + \left\langle -\frac{111}{4}, -\frac{111}{16}, -\frac{333}{8} \right\rangle \right]$$

$$\vec{T}'(1) = \left(\frac{53}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \left\langle -\frac{217}{4}, -\frac{41}{4}, \frac{303}{8} \right\rangle$$

$$\|\vec{T}'(1)\| = \left\| \left(\frac{53}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \left\langle -\frac{217}{4}, -\frac{41}{4}, \frac{303}{8} \right\rangle \right\|$$

$$\|\vec{T}'(1)\| = \left| \left(\frac{53}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \right| \sqrt{\left(-\frac{217}{4}\right)^2 + \left(-\frac{41}{4}\right)^2 + \left(\frac{303}{8}\right)^2}$$

$$\|\vec{T}'(1)\| = \left(\frac{53}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{286889}{64}}$$

$$\|\vec{T}'(1)\| = \left(\frac{53}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{286889}}{8}$$

$$\vec{N}(1) = \frac{\vec{T}'(1)}{\|\vec{T}'(1)\|}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\left(\frac{53}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \left\langle -\frac{217}{4}, -\frac{41}{4}, \frac{303}{8} \right\rangle}{\left(\frac{53}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{286889}}{8}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\left\langle -\frac{217}{4}, -\frac{41}{4}, \frac{303}{8} \right\rangle}{\frac{\sqrt{286889}}{8}}$$

$$\vec{N}(1) = \frac{8}{\sqrt{286889}} \left\langle -\frac{217}{4}, -\frac{41}{4}, \frac{303}{8} \right\rangle$$

$$\vec{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{286889}} \langle -434, -82, 303 \rangle$$

Comprobación:

$$\vec{T}(1) \cdot \vec{N}(1) = 0$$

$$\vec{T}(1) \cdot \vec{N}(1) = \left(\frac{\langle 2, \frac{1}{2}, 3 \rangle}{\sqrt{53}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{286889}} \langle -434, -82, 303 \rangle \right)$$

$$\vec{T}(1) \cdot \vec{N}(1) = \left(\frac{2}{\sqrt{53}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{286889}} \right) \left(\langle 2, \frac{1}{2}, 3 \rangle \cdot \langle -434, -82, 303 \rangle \right)$$

$$\vec{T}(1) \cdot \vec{N}(1) = \left(\frac{2}{\sqrt{53}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{286889}}\right) (-868 - 41 + 909)$$

$$\vec{T}(1) \cdot \vec{N}(1) = \left(\frac{2}{\sqrt{53}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{286889}}\right) (0)$$

$$\vec{T}(1) \cdot \vec{N}(1) = 0$$

Para obtener el vector BINORMAL, se calcula el producto cruz:

$$\vec{T}(1) = \frac{2}{\sqrt{53}} < 2, \quad \frac{1}{2}, 3 > \geq \frac{1}{\sqrt{53}} < 4, 1, 6 >$$

$$\vec{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{286889}} < -434, -82, 303 >$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \left(\frac{1}{\sqrt{53}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{286889}}\right) \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 1 & 6 \\ -434 & -82 & 303 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{53}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{286889}}\right) [(303 + 492)\hat{i} - (1212 + 2604)\hat{j} + (-328 + 434)\hat{k}]$$

$$\vec{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{53}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{286889}}\right) (795\hat{i} - 3816\hat{j} + 106\hat{k}) \text{ *Vector Binormal*}$$

Plano Osculador

Para calcular la ecuación del plano es necesario un Punto en el plano (P_0) y un vector normal al plano ($\vec{B}$), ya que el plano osculador contiene tanto a $\vec{T}$ como a $\vec{N}$, como ya se había comentado $\vec{B}$ es un vector normal tanto a $\vec{T}$ como a $\vec{N}$)

$$\vec{r}(t) = \langle 4t - t^2, \sqrt{t}, t^3 - 2 \rangle$$

$$\vec{r}(1) = \langle 4(1) - (1)^2, \sqrt{1}, (1)^3 - 2 \rangle = \langle 3, 1, -1 \rangle \quad \therefore \quad P_0 = (3, 1, -1)$$

$$\vec{n} = \vec{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{53}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{286889}} \right) (795\hat{i} - 3816\hat{j} + 106\hat{k})$$

Por lo tanto, la ecuación del Plano Osculador es:

$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P}_0$$

O bien,

$$B_x x + B_y y + B_z z = \vec{B} \cdot \vec{P}_0$$

Nos conviene, para evitar simplificaciones, utilizar como vector normal a:

$$\vec{n} = 795\hat{i} - 3816\hat{j} + 106\hat{k} \quad P_0 = (3, 1, -1)$$

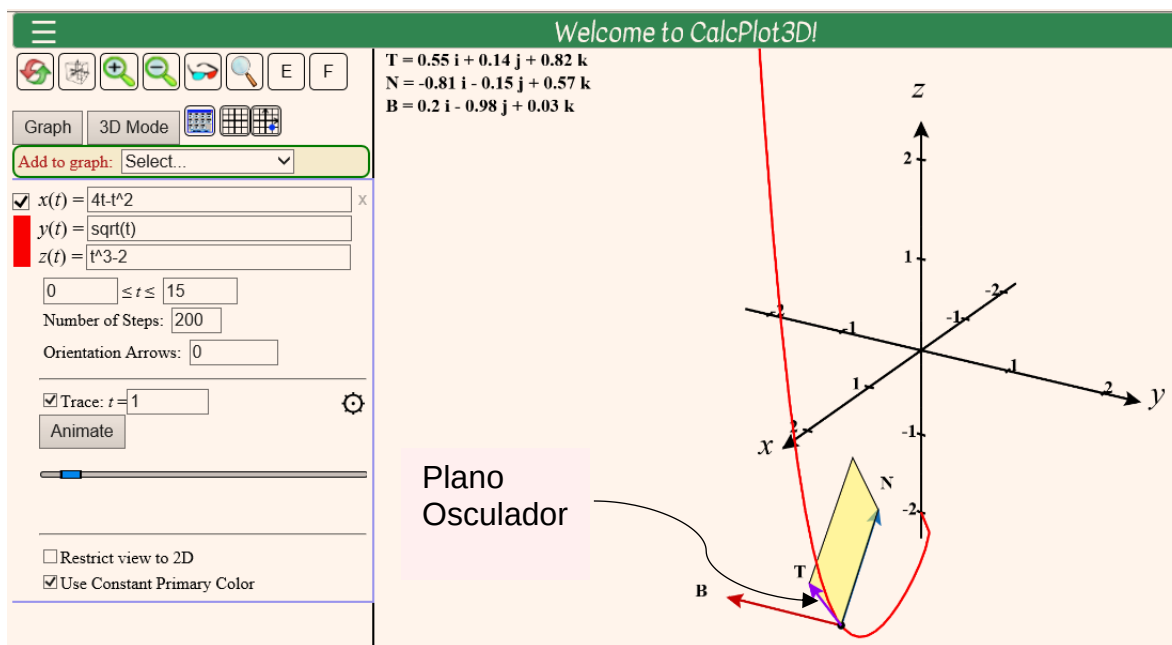
$$795x - 3816y + 106z = (795)(3) + (-3816)(1) + (106)(-1)$$

$$795x - 3816y + 106z = (795)(3) + (-3816)(1) + (106)(-1)$$

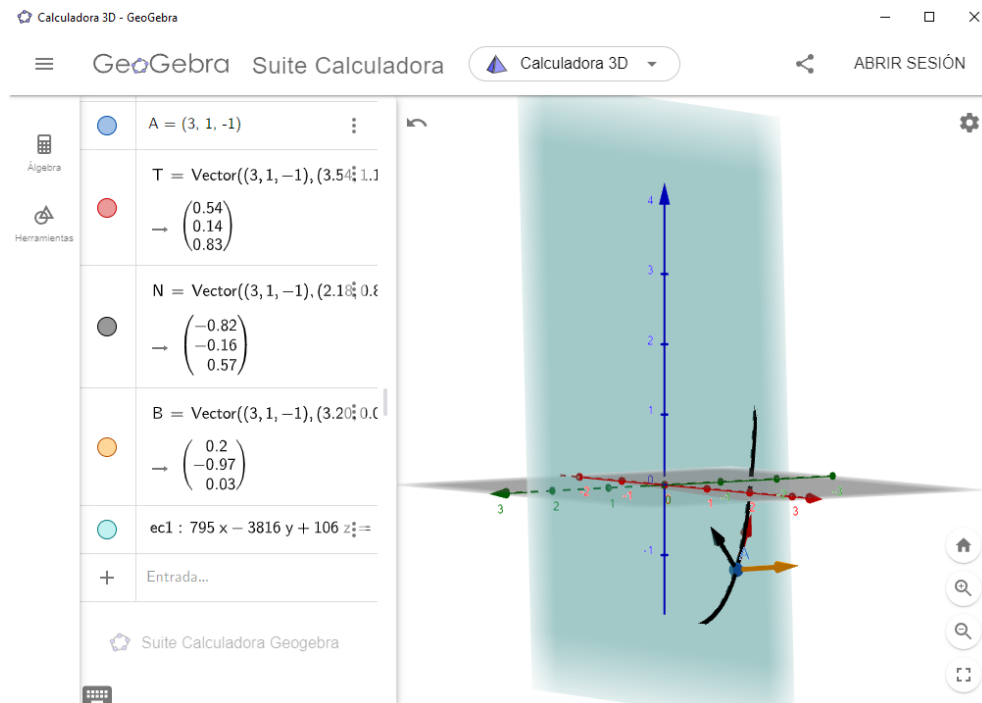
$$795x - 3816y + 106z = 2385 - 3816 - 106$$

$$795x - 3816y + 106z = -1537 \quad \text{Plano Osculador}$$

Enseguida se muestra la gráfica realizada con **CalcPlot3D (Ver ANEXO A)**



Enseguida se muestra la gráfica realizada con **Geogebra (Ver ANEXO B)**



EJEMPLO 4

Sea $\vec{r}(t) = \langle \cos(2t), \sin(2t), 4t \rangle$ determina el vector Binormal y plano osculador para $t = \frac{\pi}{3}$

Solución:

$$\vec{r}'(t) = \langle -2\sin(2t), 2\cos(2t), 4 \rangle$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\langle -2\sin(2t), 2\cos(2t), 4 \rangle}{\sqrt{4\sin^2(2t) + 4\cos^2(2t) + 16}}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\langle -2\sin(2t), 2\cos(2t), 4 \rangle}{\sqrt{4(\sin^2(2t) + \cos^2(2t)) + 16}}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\langle -2\sin(2t), 2\cos(2t), 4 \rangle}{\sqrt{4(1) + 16}}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\langle -2\sin(2t), 2\cos(2t), 4 \rangle}{2\sqrt{5}}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -\sin(2t), \cos(2t), 2 \rangle$$

$$\vec{T}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -\sin\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \cos\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), 2 \rangle$$

$$\vec{T}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 2 \rangle$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -\sin(2t), \cos(2t), 4 \rangle$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -2\cos(2t), -2\sin(2t), 0 \rangle$$

$$\vec{T}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -2\cos\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), -2\sin\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), 0 \rangle$$

$$\vec{T}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -2\left(-\frac{1}{2}\right), -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), 0 \rangle$$

$$\vec{T}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 1, -\sqrt{3}, 0 \rangle$$

$$\left\| \vec{T}'\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1+3}$$

$$\left\| \vec{T}'\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{N}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\vec{T}'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\left\| \vec{T}'\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\|}$$

$$\vec{N}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, -\sqrt{3}, 0 \rangle}{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\vec{N}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\langle 1, -\sqrt{3}, 0 \rangle$$

$$\vec{T}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 2 \rangle \geq \frac{1}{2\sqrt{5}}\langle -\sqrt{3}, -1, 4 \rangle$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sqrt{3} & -1 & 4 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{5}}(4\sqrt{3}\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \text{ Vector Binormal}$$

Plano Osculador

Para calcular la ecuación del plano es necesario un Punto en el plano (P_0) y un vector normal al plano ($\vec{B}$), ya que el plano osculador contiene tanto a $\vec{T}$ como a $\vec{N}$, como ya se había comentado $\vec{B}$ es un vector normal tanto a $\vec{T}$ como a $\vec{N}$)

$$\vec{r}(t) = \langle \cos(2t), \sin(2t), 4t \rangle$$

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \langle \cos\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \sin\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), 4t \rangle = \langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4\pi}{3} \rangle$$

$$\therefore P_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\vec{n} = \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

Por lo tanto, la ecuación del Plano Osculador es:

$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P_0}$$

O bien,

$$B_x x + B_y y + B_z z = \vec{B} \cdot \vec{P_0}$$

Nos conviene, para evitar simplificaciones, utilizar como vector normal a:

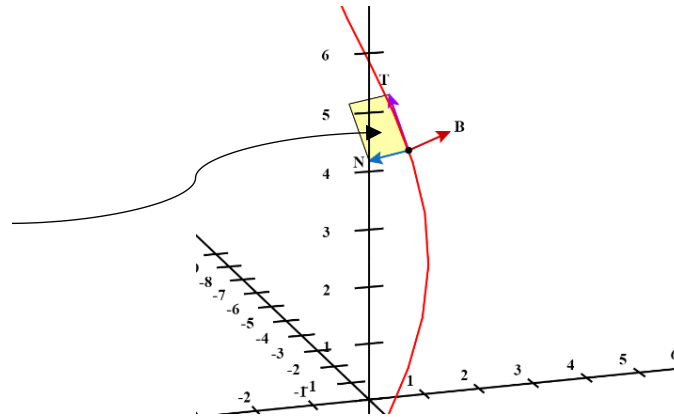
$$\vec{n} = \sqrt{3}\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \quad y \quad P_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{3}x + y + z = \left(-\frac{1}{2}\right)(\sqrt{3}) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1) + \left(\frac{4\pi}{3}\right)(1)$$

$$\sqrt{3}x + y + z = \frac{4\pi}{3}$$

Enseguida se muestra la gráfica realizada con **CalcPlot3D**

Plano
Osculador



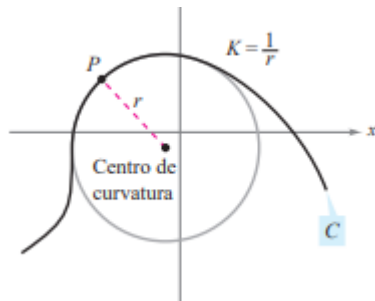
2.8 Curvatura, descomposición de la aceleración en sus componentes normal y tangencial.

Curvatura y torsión

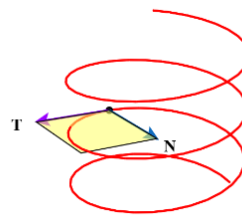
Torsión τ

Mientras la curvatura k mide la rapidez con la que la curva $\vec{r}(t)$ se aleja de la recta tangente en el punto P_0 (en otras palabras, nos indica que tanto se dobla una curva sin salir del plano), la torsión τ mide la velocidad con que la curva $\vec{r}(t)$ se aleja del Plano Osculador en el punto P_0 (nos indica que tanto se tuerce una curva)

Curvatura k



Torsión τ



Curvatura:

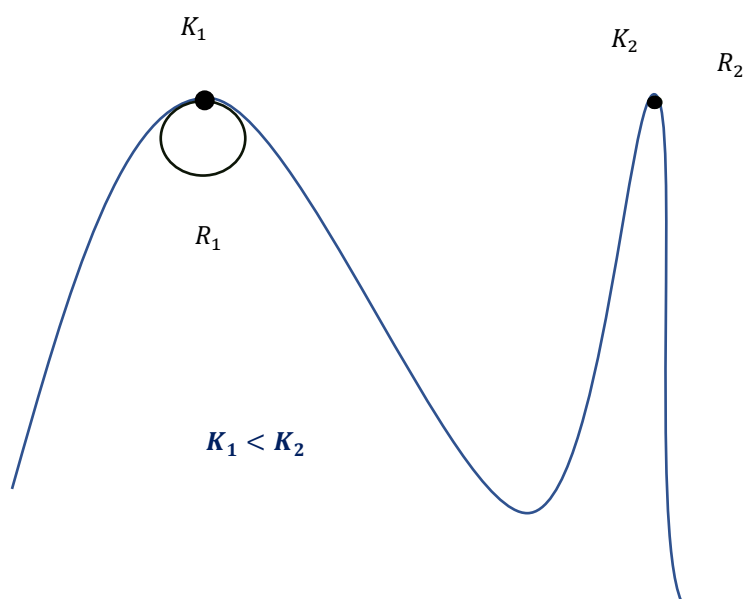
$$k = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{v}\|^3}$$

Radio de curvatura:

$$R = \frac{1}{K}$$

Para calcular la torsión τ , utilizamos la siguiente fórmula:

$$\tau = \frac{\|(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \vec{r}'''\|}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix}}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2}$$



A continuación, se desarrolla los cálculos para obtener ² la curvatura, el radio de curvatura y la torsión τ . Todo lo anterior para el ejercicio que se trabajó en el tema de VECTOR TANGENTE Y VECTOR NORMAL.

EJEMPLO 1

Sea $\vec{r}(t) = \langle 4t - t^2, \sqrt{t}, t^3 - 2 \rangle$ determina para $t = 1$

a) Curvatura.

$$\vec{r}(t) = \langle 4t - t^2, \sqrt{t}, t^3 - 2 \rangle$$

$$\vec{r}(1) = \langle 4(1) - (1)^2, \sqrt{1}, (1)^3 - 2 \rangle = \langle \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{-1} \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 4 - 2t, \frac{1}{2}t^{-1/2}, 3t^2 \rangle \quad \rightarrow \quad \vec{r}'(1) = \vec{v}(1) = \langle \mathbf{2}, \mathbf{\frac{1}{2}}, \mathbf{3} \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle -2, -\frac{1}{4}t^{-3/2}, 6t \rangle \quad \rightarrow \quad \vec{r}''(1) = \vec{a}(1) = \langle \mathbf{-2}, \mathbf{-\frac{1}{4}}, \mathbf{6} \rangle$$

$$k = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{v}\|^3}$$

$$\overrightarrow{v(1)} \times \overrightarrow{a(1)} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ -2 & -\frac{1}{4} & 6 \end{vmatrix} = \frac{15}{4}\hat{i} - 18\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}$$

$$\|\overrightarrow{v(1)} \times \overrightarrow{a(1)}\| = \sqrt{\frac{225}{16} + 324 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5413}}{4} = \mathbf{18.39}$$

$$\|\overrightarrow{v(1)}\| = \sqrt{4 + \frac{1}{4} + 9} = \frac{\sqrt{53}}{2} = \mathbf{3.64}$$

$$k = \frac{18.39}{(3.64)^3} = \mathbf{0.3813}$$

b) Radio de curvatura.

$$R = \frac{1}{K} \quad \therefore \quad R = \frac{1}{0.3813} = \mathbf{2.62}$$

c) Torsión τ .

$$\tau = \frac{\|(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \vec{r}'''\|}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix}}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2}$$

Como nos piden la torsión para $t = 1$, sustituimos el valor de t y aplicamos la fórmula:

$$\vec{r}'''(t) = \left\langle 0, \frac{3}{8}t^{-5/2}, 6 \right\rangle \rightarrow \vec{r}'''(1) = \left\langle \mathbf{0}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}, \mathbf{6} \right\rangle$$

$$\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ -2 & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & \frac{3}{8} & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \left| 2 \left[\left(-\frac{1}{4} \right) (6) - \left(\frac{3}{8} \right) (6) \right] - \frac{1}{2} [(-2)(6) - (0)(6)] + 3 \left[(-2) \left(\frac{3}{8} \right) - (0) \left(-\frac{1}{4} \right) \right] \right|$$

$$= \left| 2 \left[-\frac{3}{2} - \frac{9}{4} \right] - \frac{1}{2} [-12] + 3 \left[-\frac{3}{4} \right] \right| = \left| -\frac{15}{4} \right| = \frac{15}{4}$$

Sabemos que:

$$\left\| \overrightarrow{v(1)} \times \overrightarrow{a(1)} \right\| = 18.39$$

$$\tau = \frac{\left| \begin{vmatrix} x'(1) & y'(1) & z'(1) \\ x''(1) & y''(1) & z''(1) \\ x'''(1) & y'''(1) & z'''(1) \end{vmatrix} \right|}{\|\vec{r}'(1) \times \vec{r}''(1)\|^2} = \frac{\frac{15}{4}}{18.39^2} = 0.011$$

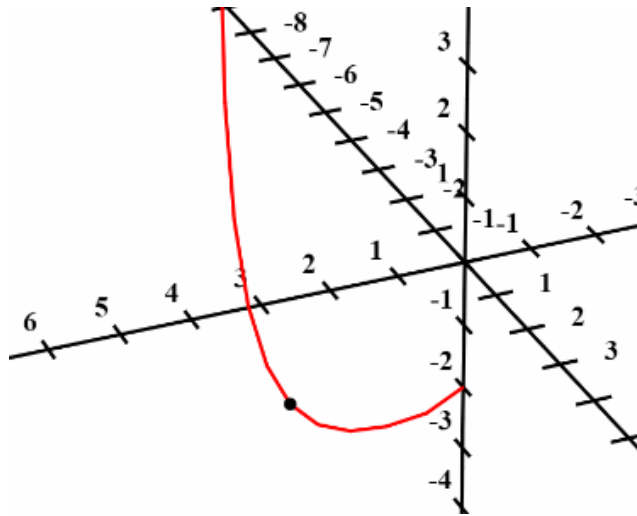
$$\tau = 0.011$$

O bien:

$$\tau = \frac{|\vec{v} \times \vec{a} \cdot \vec{r}''|}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|^2} = \frac{\left| \left(\frac{15}{4} \hat{i} - 18 \hat{j} + \frac{1}{2} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{3}{8} \hat{j} + 6 \hat{k} \right) \right|}{18.39^2}$$

$$\tau = \frac{\left| \left(\frac{15}{4} \right) (0) + (-18) \left(\frac{3}{8} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) (6) \right|}{18.39^2}$$

$$\tau = \frac{\left| 0 - \frac{27}{4} + 3 \right|}{18.39^2} = \frac{\left| -\frac{15}{4} \right|}{18.39^2} = \frac{\frac{15}{4}}{18.39^2} = 0.011$$



8 Componentes normal y tangencial de la aceleración

Las componentes normal y tangencial de la aceleración vienen dadas por:

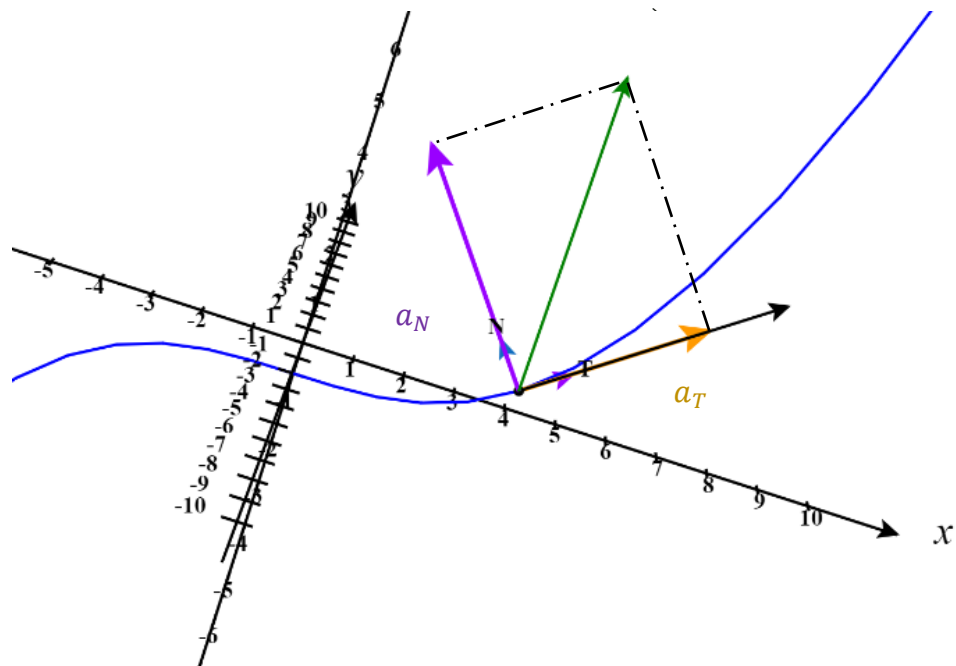
- **Componente Tangencial:** Es magnitud de la proyección del vector aceleración sobre el vector Tangente Unitario:

$$a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{v}\|}$$

- **Componente Normal:** Es magnitud de la proyección del vector aceleración sobre el vector Normal Principal Unitario:

$$a_N = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{v}\|}$$

$$a_N = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 - a_T^2}$$



$$a_T = \|Proy_{\vec{T}} \vec{a}\|$$

$$a_N = \|Proy_{\vec{N}} \vec{a}\|$$

De la gráfica se puede observar que:

$$\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$$

Despejando $\vec{N}$ se tiene:

$$\vec{N} = \frac{\vec{a} - a_T \vec{T}}{a_N} \quad a_N \neq 0$$

EJEMPLO 2

Sea $\vec{r}(t) = \langle 4t, -2, t^3 \rangle$ determina la componente tangencial, la componente normal de la aceleración y el vector normal principal unitario para $t = 1$

Solución:

$$\vec{r}(t) = \langle 4t, -2, t^3 \rangle$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle 4, 0, 3t^2 \rangle \rightarrow \vec{v}(1) = \langle 4, 0, 3 \rangle$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = \langle 0, 0, 6t \rangle \rightarrow \vec{a}(1) = \langle 0, 0, 6 \rangle$$

$$\|\vec{v}(1)\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = 5$$

$$\|\vec{a}(1)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2} = 6$$

- Componente escalar tangencial de la aceleración.

$$a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\langle 4, 0, 3 \rangle \cdot \langle 0, 0, 6 \rangle}{5} = \frac{18}{5}$$

- Componente escalar normal de la aceleración.

$$a_N = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 - a_T^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{18}{5}\right)^2} = \sqrt{36 - \frac{324}{25}} = \sqrt{\frac{576}{25}} = \frac{24}{5}$$

Vector Normal Principal Unitario.

Para el vector Normal Principal Unitario, como se vio en clase es más sencillo calcularlo con la fórmula de la aceleración a través de sus componentes normal y tangencial.

$$\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N} \quad \rightarrow \quad \vec{N} = \frac{\vec{a} - a_T \vec{T}}{a_N}$$

$$\vec{T}(1) = \frac{\langle 4, 0, 3 \rangle}{5} = \langle \frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \rangle$$

$$\vec{N} = \frac{\overbrace{\langle 0, 0, 6 \rangle}^{\vec{a}} - \underbrace{\frac{18}{5}}_{a_T} \overbrace{\langle \frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \rangle}^{\vec{T}}}{\underbrace{\frac{24}{5}}_{a_N}}$$

$$\vec{N} = \frac{\langle -\frac{72}{25}, 0, \frac{96}{25} \rangle}{\frac{24}{5}} = \frac{\frac{24}{5} \langle -\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \rangle}{\frac{24}{5}}$$

$$\vec{N} = \langle -\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \rangle$$

Para visualizar gráficamente, calculemos las proyecciones de la aceleración sobre los vectores **tangente unitario** y **normal principal unitario**:

$$Proy_{\vec{T}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{T}}{\|\vec{T}\|^2} \right) \vec{T}$$

$$Proy_{\vec{T}} \vec{a} = \left(\frac{\langle 0, 0, 6 \rangle \cdot \langle \frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \rangle}{1} \right) \langle \frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \rangle = \langle \frac{72}{25}, 0, \frac{54}{25} \rangle$$

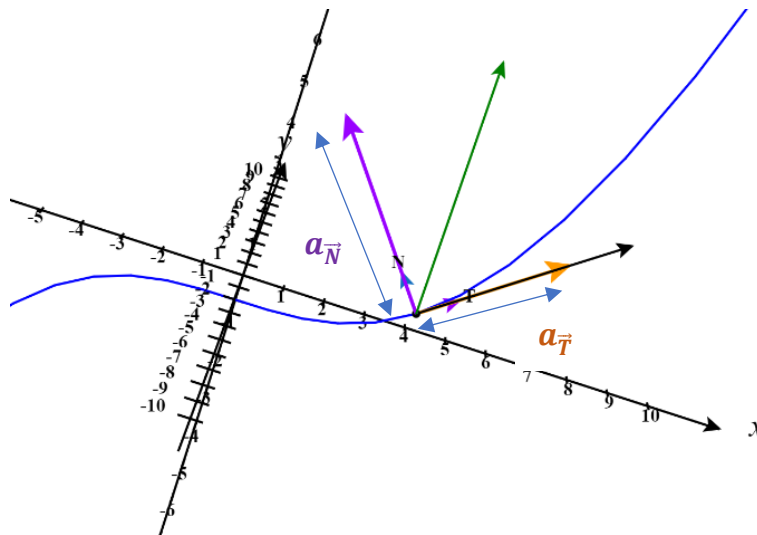
$$\|Proy_{\vec{T}} \vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{72}{25}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{54}{25}\right)^2} = \frac{18}{5} = a_T$$

$$Proy_{\vec{N}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|^2} \right) \vec{N}$$

$$Proy_{\vec{N}} \vec{a} = \left(\frac{\langle 0, 0, 6 \rangle \cdot \langle -\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \rangle}{1} \right) \langle -\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \rangle = \langle -\frac{72}{25}, 0, \frac{96}{25} \rangle$$

$$Proy_{\vec{N}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|^2} \right) \vec{N}$$

$$\|Proy_{\vec{N}} \vec{a}\| = \sqrt{\left(-\frac{72}{25}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{96}{25}\right)^2} = \frac{24}{5} = a_N$$



$$\vec{a_T} = Proj_{\vec{T}} \vec{a} = \langle \frac{72}{25}, 0, \frac{54}{25} \rangle$$

$$a_T = \|Proj_{\vec{T}} \vec{a}\| = \frac{18}{5}$$

$$\vec{a_N} = Proj_N \vec{a} = \langle -\frac{72}{25}, 0, \frac{96}{25} \rangle$$

$$a_N = \|Proj_N \vec{a}\| = \frac{24}{5}$$

3. Funciones de varias variables

3.1 Definiciones y ejemplos.

Función de varias variables

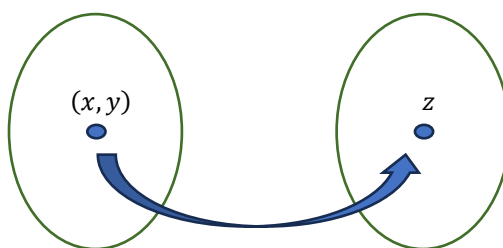
En los cursos previos de cálculo diferencial e integral se trabajó con funciones de una variable, esto es, funciones de la forma $y = f(x)$. Ahora en este curso se trabajará con funciones que dependen de dos o más variables:

$$z = f(x, y)$$

$$w = f(x, y, z)$$

Definición:

Una función de dos variables $z = f(x, y)$ aplica cada par ordenado (x, y) en un subconjunto D del plano real $\mathbb{R}^2$ a un único número real z . El conjunto D se llama dominio de la función. El rango de f es el conjunto de todos los números reales z que tienen al menos un par ordenado $(x, y) \in D$ de forma que $f(x, y) = z$



Un ejemplo que puede representarse por medio de una función de varias variables es el caso de la temperatura en una habitación ya que ésta dependerá del tiempo que tenga funcionando la refrigeración o calefacción, ya que al encenderla conforme pasa el tiempo la temperatura va cambiando hasta estabilizarse, pero no solo depende del tiempo ya que también depende de la posición, la temperatura en una habitación es diferente en los puntos bajos que en los altos y lógicamente será más alta o más baja cerca de los ductos o rejillas de salida.

$$T = T(t, x, y, z)$$

Hay funciones explícitas e implícitas, como se muestra a continuación:

$$f(x, y) = 9x^3y + 14x^2y^3 + 3x - 2y + 7 \quad \rightarrow \quad \textit{Función Explícita}$$

$$f(x, y) = 9(x + 2y)^3 + \frac{3x^4y^3 + 3}{x - 2y + 7} \quad \rightarrow \quad \textit{Función Explícita}$$

$$9xy^2z - 2y^3z^5 + 7x = z^3 - 4y + 9 \quad \rightarrow \quad \textit{Función Implícita}$$

$$\sqrt{4 + 9y - 2z} = 7xyz^3 - 14x^2y + 9z \quad \rightarrow \quad \textit{Función Implícita}$$

3.2 Representación geométrica de funciones de dos variables. Curvas y superficies de nivel.

Para graficar una función de varias variables puede ser útil analizar las gráficas que se generan en cada uno de los planos (plano xy, plano yz, plano xz), una vez analizados se procederá a intentar dibujarlos sobre el espacio $\mathbb{R}^3$. Es importante resaltar que la tabulación no ayudará de mucho ya que será difícil saber como unir los puntos, además de que se necesitarían infinitud de puntos para poder trazar la superficie. En la siguiente figura podemos observar la dificultad que presenta intentar por medio de tabulación:

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$

$$f(-2, -2) = 2(-2)^2 + 3(-2)^2 = 8 + 12 = 20 \quad \rightarrow \quad (-2, -2, 20)$$

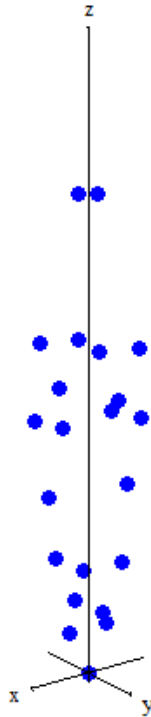
$$f(-1, -2) = 2(-1)^2 + 3(-2)^2 = 2 + 12 = 14 \quad \rightarrow \quad (-1, -2, 14)$$

$$f(0, -2) = 2(0)^2 + 3(-2)^2 = 0 + 12 = 12 \quad \rightarrow \quad (0, -2, 12)$$

.
.
.

$$f(2, 2) = 2(2)^2 + 3(2)^2 = 8 + 12 = 20 \quad \rightarrow \quad (2, 2, 20)$$

$\begin{array}{c} x \\ y \end{array}$	-2	-1	0	1	2
-2	20	14	12	14	20
-1	11	5	3	5	11
0	8	2	0	2	8
1	11	5	3	5	11
2	20	14	12	14	20



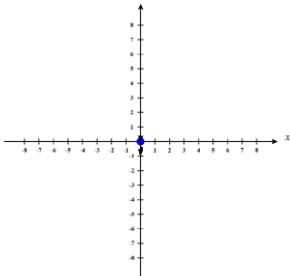
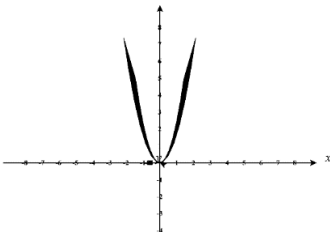
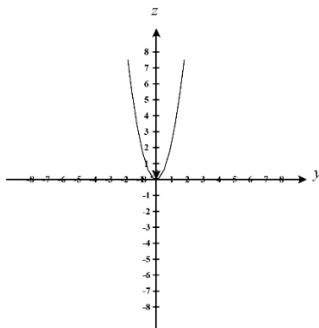
De la gráfica anterior se aprecia que no es sencillo determinar la forma de unir los puntos y, más aún, lograr una visualización cercana a la superficie que se debe graficar.

Enseguida se muestran unos ejemplos de graficación de funciones de varias variables analizando cada uno de los planos y posteriormente uniéndolos.

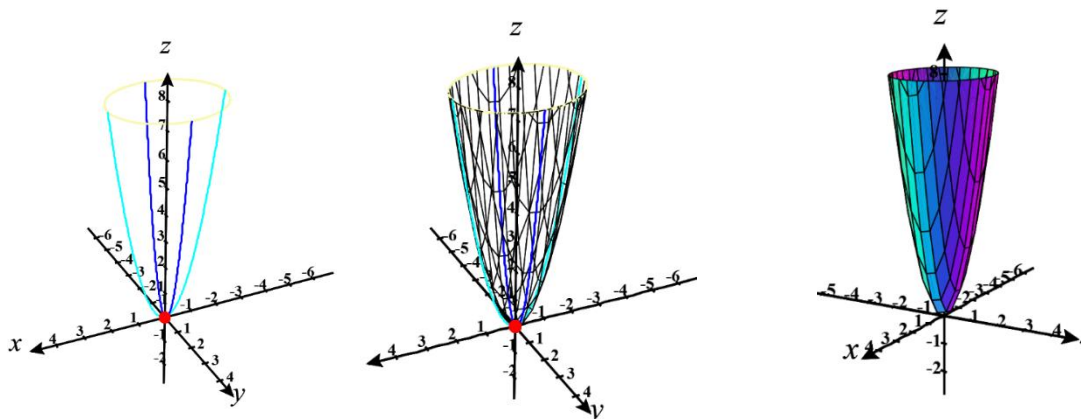
EJEMPLO 1

Graficar $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$

Solución:

Plano xy	Plano xz	Plano yz
$f(x, y) = z$ $z = 0$ $z = 2x^2 + 3y^2$ $0 = 2x^2 + 3y^2$ Los únicos valores reales que cumplen la igualdad son: $x = 0 \quad y = 0$ $(0, 0, 0)$ Por lo tanto, en el plano xy solo se dibuja un punto: 	$f(x, y) = z$ $y = 0$ $z = 2x^2 + 3y^2$ $z = 2x^2$ Por lo tanto, en el plano xz se dibuja una parábola: 	$f(x, y) = z$ $x = 0$ $z = 2x^2 + 3y^2$ $z = 3y^2$ Por lo tanto, en el plano yz se dibuja una parábola: 

Juntando las gráficas anteriores en una sola gráfica se tiene:

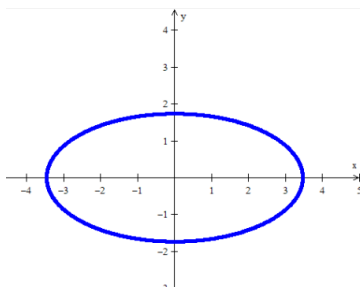
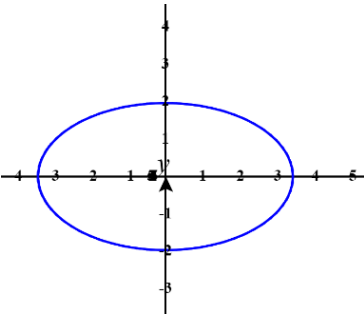
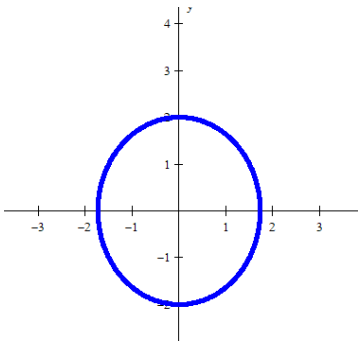


Es necesario parametrizar las curvas de traza para graficarlas en CalcPlot3D.

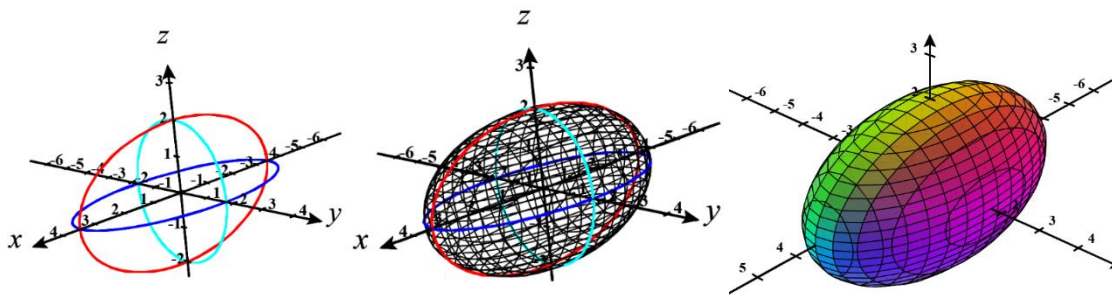
EJEMPLO 2

Graficar $3x^2 + 12y^2 + 9z^2 = 36$

Solución:

Plano xy	Plano xz	Plano yz
$z = 0$ $3x^2 + 12y^2 = 36$ La expresión representa una elipse con centro en el origen. Dividimos entre 36 para dar la forma de elipse: $\frac{3x^2}{36} + \frac{12y^2}{36} = \frac{36}{36}$ $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 	$y = 0$ $3x^2 + 9z^2 = 36$ La expresión representa una elipse con centro en el origen. Dividimos entre 36 para dar la forma de elipse: $\frac{3x^2}{36} + \frac{9z^2}{36} = \frac{36}{36}$ $\frac{x^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ 	$x = 0$ $12y^2 + 9z^2 = 36$ La expresión representa una elipse con centro en el origen. Dividimos entre 36 para dar la forma de elipse: $\frac{12y^2}{36} + \frac{9z^2}{36} = \frac{36}{36}$ $\frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1$ 

Juntando las gráficas anteriores en una sola gráfica se tiene:



Es necesario parametrizar las curvas de traza para graficarlas en CalcPlot3D.

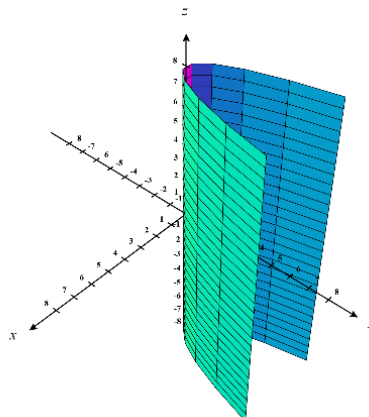
En el caso de que no aparezca una de las variables en la ecuación se dice que la variable faltante está libre, esto es, nos enfocamos en el plano de las otras dos variables y la curva graficada se desplaza en la dirección de la variable faltante, la estela de puntos va formando la superficie.

EJEMPLO 3

Graficar la función $y = x^2$

Solución:

En el plano xy se forma una parábola, al desplazar la parábola en dirección del eje z (ya que la variable z no aparece en la ecuación dada) entonces, se forma una especie de canaleta vertical como se muestra en la siguiente figura:

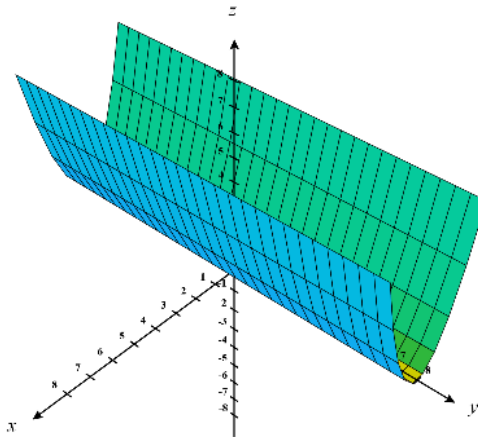


EJEMPLO 4

Graficar la función $z = x^2$

Solución:

En el plano xz se forma una parábola, al desplazar la parábola en dirección del eje y (ya que no aparece la variable y en la ecuación dada) entonces, se forma una especie de canaleta horizontal:

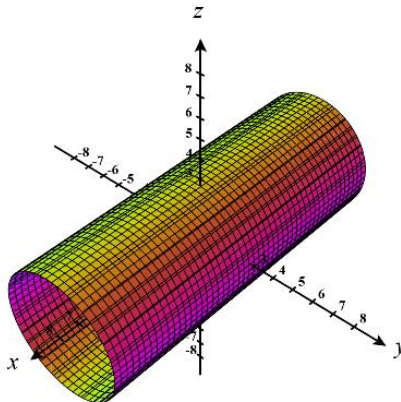


EJEMPLO 5

Graficar $y^2 + z^2 = 9$

Solución:

En el plano yz se forma un círculo de radio 3, al desplazar el círculo en dirección del eje x (ya que no aparece la variable x en la ecuación dada) entonces, se forma un cilindro cuyo eje central descansa sobre el eje "x":

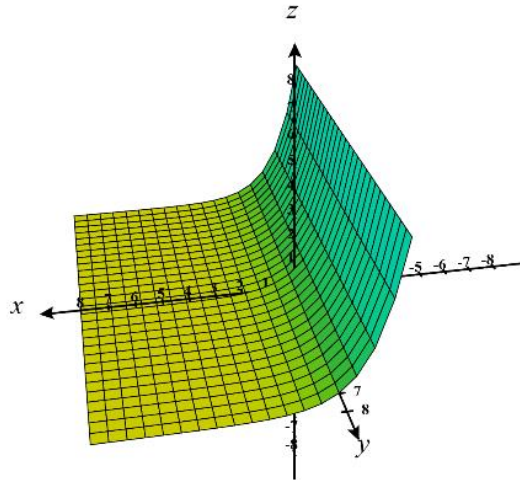


EJEMPLO 6

Graficar $z = e^{-x}$

Solución:

En el plano xz se forma un exponencial, al desplazar la exponencial en dirección del eje y entonces, se formará una especie de rampa.

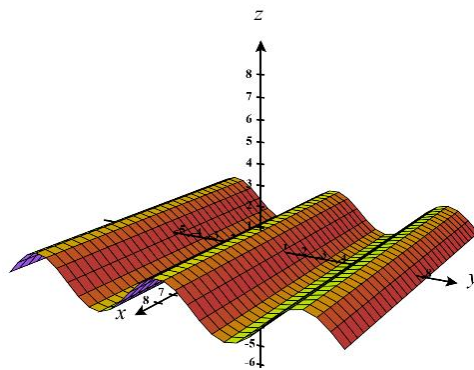


EJEMPLO 7

Graficar la función $z = \cos(y)$

Solución:

En el plano yz se forma la gráfica de coseno, al desplazar la gráfica en dirección del eje x entonces, se formará una especie lámina galvanizada.



3.3 ¹ Límites y continuidad de una función de varias variables.

Límites

En este tema solo se enfocará en los límites directos, el interés es tener una noción de los límites en funciones de varias variables.

Definición de límite de una función de varias variables:

Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0) , excepto posiblemente en (x_0, y_0) , y sea L un número real. Entonces:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Si para $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

EJEMPLO 1

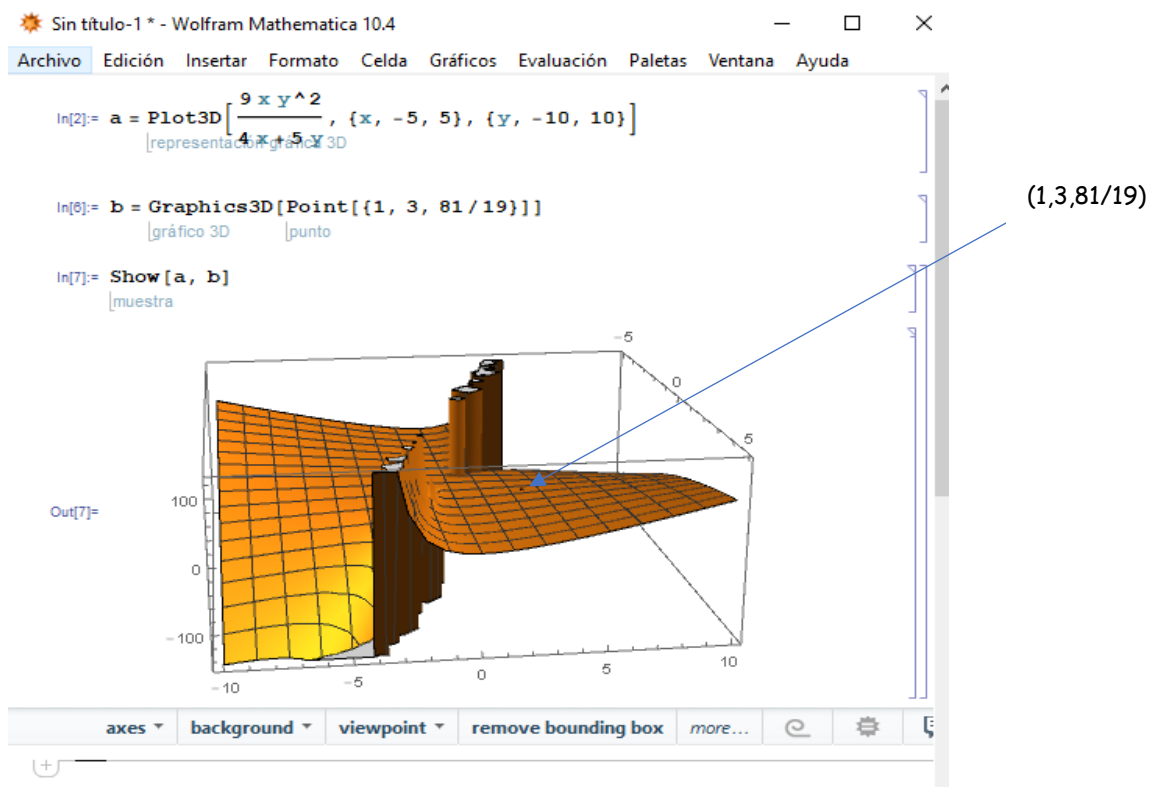
Calcular:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{9xy^2}{4x + 5y}$$

Solución:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{9xy^2}{4x + 5y} = \frac{9(1)(3)^2}{4(1) + 5(3)} = \frac{81}{19}$$

Se puede comprobar el resultado graficando la función y el punto (1, 3, 81/19).



EJEMPLO 2

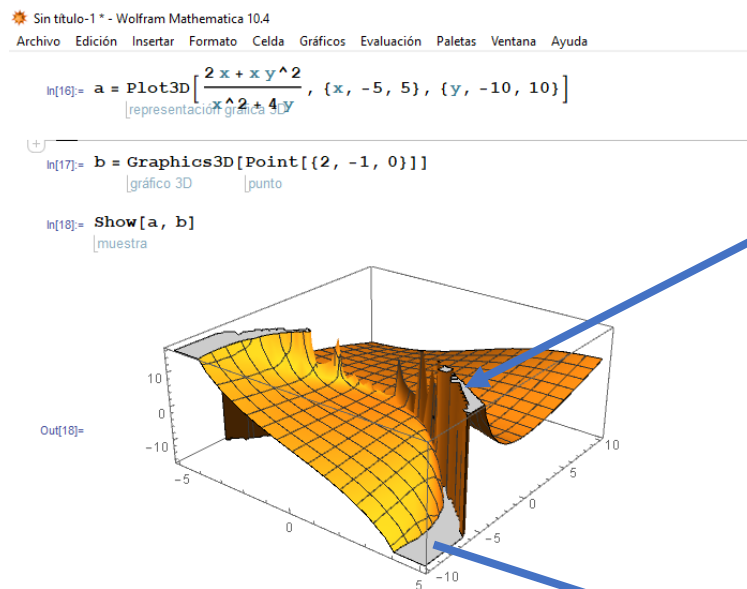
Calcular:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{2x + xy^2}{x^2 + 4y}$$

Solución:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{2x + xy^2}{x^2 + 4y} = \frac{2(2) + (2)(-1)^2}{2^2 + 4(-1)} = \frac{6}{0} = \pm\infty$$

Se puede comprobar el resultado graficando la función:



Por un lado, la función tiende a infinito.

Por otro lado, la función tiende a menos infinito.

EJEMPLO 3

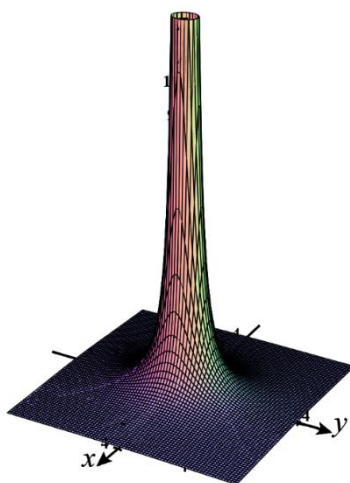
Calcular:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Solución:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4}{3x^2 + 2y^2} = \frac{1}{3(0)^2 + 2(0)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Se puede comprobar el resultado graficando la función.



Continuidad

1 Definición de continuidad de una función de dos variables

Una función f de dos variables es continua en un punto (x_0, y_0) de una región abierta R si $f(x_0, y_0)$ es igual al límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Esto es,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

1 La función f es continua en la región abierta R si es continua en todo punto de R .

1 Funciones continuas de dos variables

Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0, y_0) , entonces las funciones son continuas en (x_0, y_0) .

1. kf (múltiplo escalar)
2. $f \pm g$ (suma y diferencia)
3. fg (producto)
4. $\frac{f}{g}$, si $g(x_0, y_0) \neq 0$ (cociente)

EJEMPLO 4

Analiza la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = \frac{3x + 5y}{4x^2 + 9y^2}$$

$$b) f(x, y) = \frac{12}{y - 2x^2}$$

Solución:

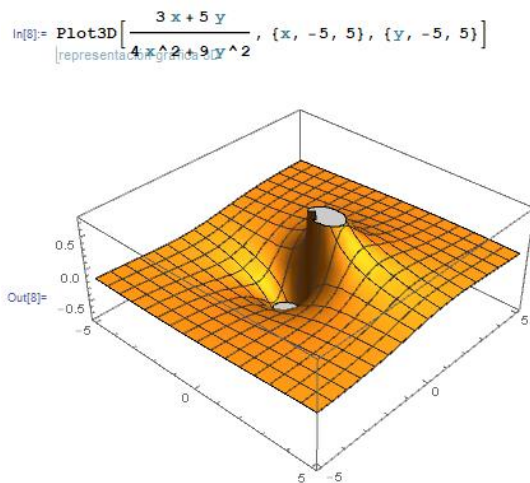
$$a) f(x, y) = \frac{3x + 5y}{4x^2 + 9y^2}$$

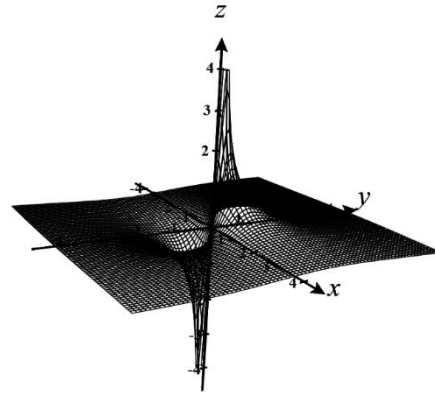
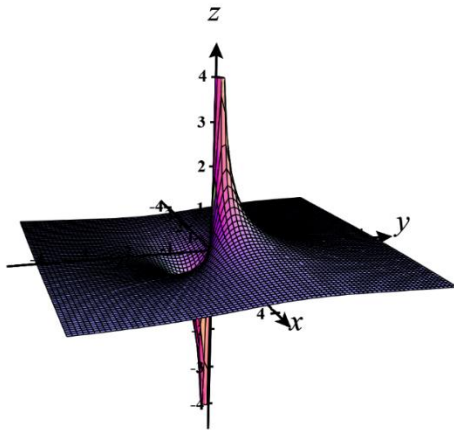
Para que la función sea continua el denominador debe ser distinto de cero:

$$4x^2 + 9y^2 \neq 0 \quad \text{los únicos valores que hacen cero el denominador son } x = y = 0$$

Por lo tanto, **la función es discontinua en (0, 0)**

Graficando:





$$b) f(x, y) = \frac{12}{y - 2x^2}$$

Los valores para los cuales la función no existe o es discontinua son para:

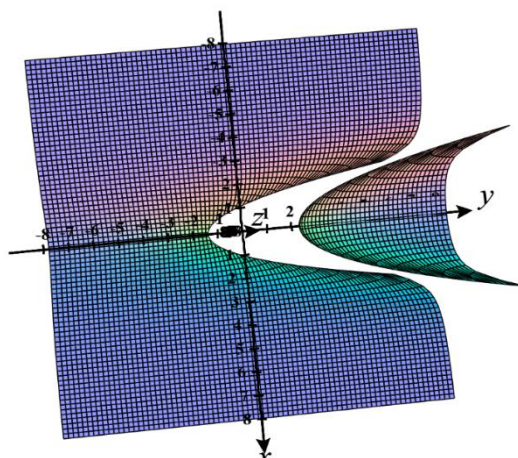
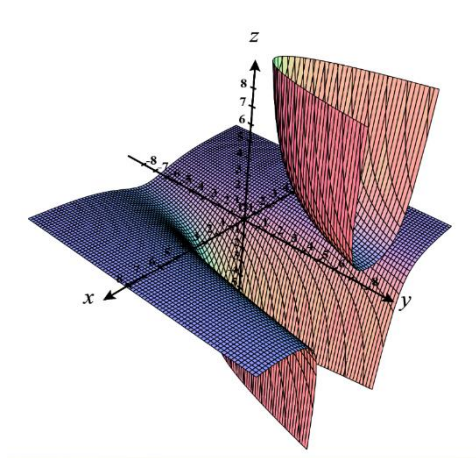
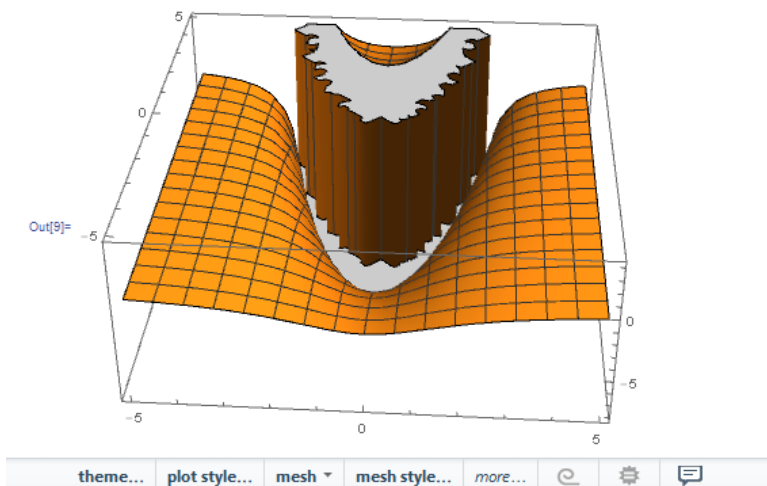
$$y - 2x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 2x^2 \quad \therefore \quad (x, 2x^2)$$

Por lo tanto, ¹ la función es discontinua para todos los puntos que están sobre la parábola $y = 2x^2$. En otras palabras, ¹ la función es continua para todos los puntos, excepto para los que se encuentran sobre la parábola $y = 2x^2$.

Graficando:

```
In[9]:= Plot3D[ $\frac{12}{x^2}$ , {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```

[representación gráfica 3D]



3.4 Derivadas parciales, incrementos y diferenciales, diferencial total.

Derivadas parciales

Hasta ahora en los cursos previos de cálculo se había trabajado las **derivadas ordinarias**, esto es, la derivada de una función de **una variable**, la forma de representarla es por medio de la letra “**d**” de nuestro alfabeto latino:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La **derivada parcial** se representa por medio de la letra “**∂**” y consiste en derivar a una función de dos o más variables respecto a una o más variables. La notación es la siguiente:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y) = z_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y) = z_y$$

Entonces, cuando aparece una derivada donde aparece la letra “**d**”, la función que se está derivando depende solo de una variable y cuando aparece la letra “**∂**”, la función que se está derivando depende de 2 o más variables.

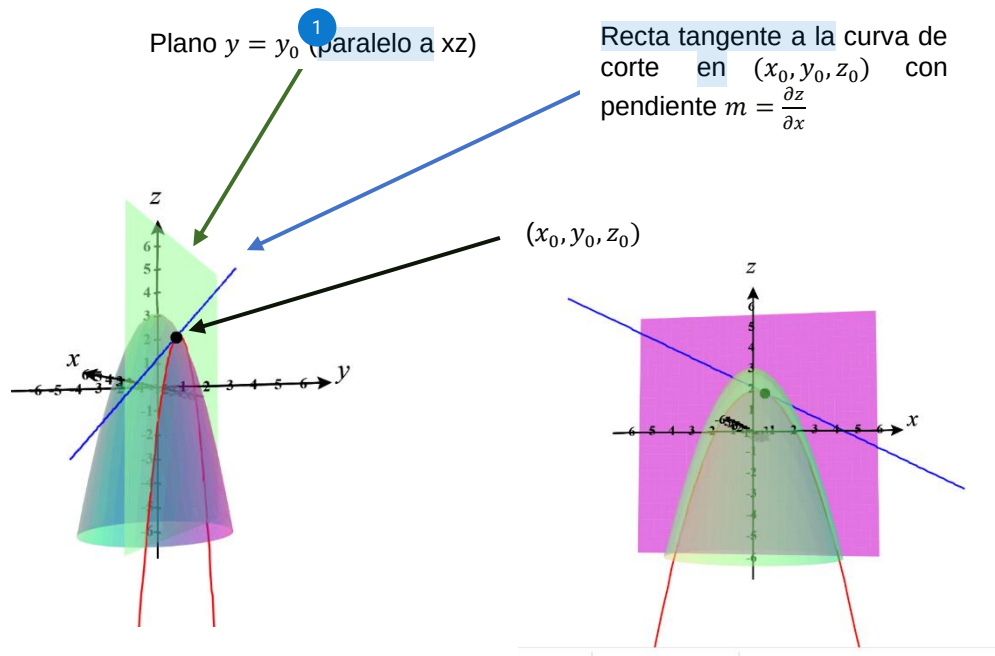
La definición de la derivada parcial se presenta a continuación:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

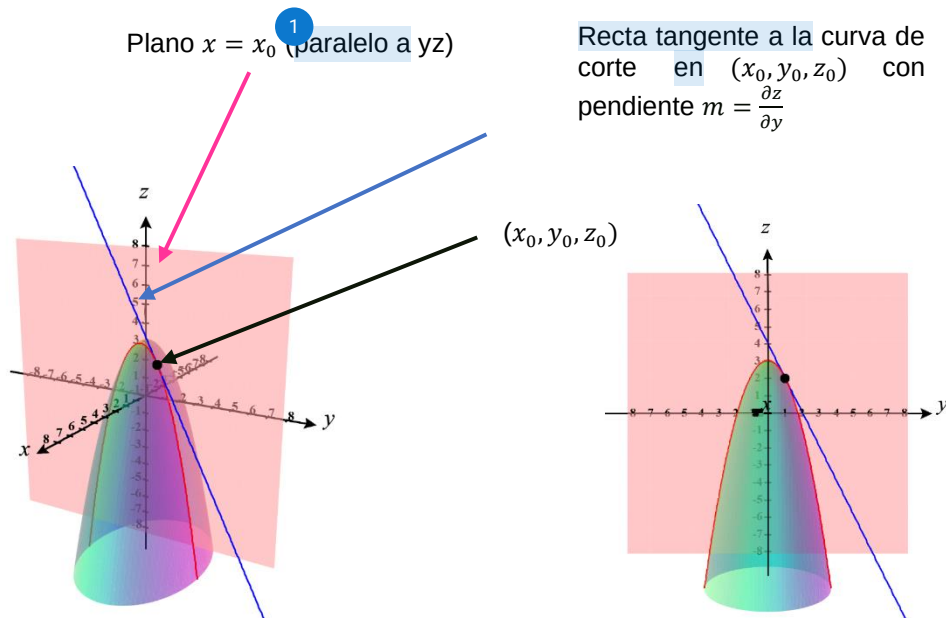
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Geoméricamente, la derivada parcial representa la pendiente de la recta tangente a la curva de corte entre la superficie $f(x,y)$ y un plano, ¿qué plano? este dependerá si se está derivando con respecto de "x" o con respecto de "y". Por ejemplo, si se está derivando con respecto de x, entonces dicho plano será paralelo al plano xz mientras que, si se está derivando respecto a y, entonces el plano será paralelo al plano yz. Lo anterior se puede visualizar en las siguientes imágenes:

Derivada parcial respecto a x:



Derivada parcial respecto a y:



Cuando se realiza una derivada parcial a la variable respecto a la cual se está derivando se considera VARIABLE, las demás se consideran constantes. Veamos a continuación unos ejemplos:

Ejemplo 1 Sea $f(x, y) = 9x^4y^3 + 5xy^2 + 2x^3 - 8y^2$ calcular las primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (9x^4y^3 + 5xy^2 + 2x^3 - 8y^2)$$

└─ La "x" se considera variable y "y" constante

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (9x^4y^3) + \frac{\partial}{\partial x} (5xy^2) + \frac{\partial}{\partial x} (2x^3) - \frac{\partial}{\partial x} (8y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9y^3 \frac{\partial}{\partial x} (x^4) + 5y^2 \frac{\partial}{\partial x} (x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} (x^3) - 8y^2 \frac{\partial}{\partial x} (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9y^3(4x^3) + 5y^2(1) + 2(3x^2) - 8y^2(0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 36x^3y^3 + 5y^2 + 6x^2 - 0 = 36x^3y^3 + 5y^2 + 6x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (9x^4y^3 + 5xy^2 + 2x^3 - 8y^2)$$

└─ La "y" se considera variable y "x" constante

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 27x^4y^2 + 10xy + 0 - 16y = 27x^4y^2 + 10xy - 16y$$

Fórmula empleada:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 2

Sea $f(x, y) = \text{Sen}(3x^2y)$ calcular las primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\text{Sen}(3x^2y))$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Sen } u) = \text{Cos } u \frac{du}{dx}$$

$$u = 3x^2y \quad \therefore \quad \frac{du}{dx} = 6xy$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Sen } (3x^2y)) = \text{Cos}(3x^2y)(6xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy \text{Cos}(3x^2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\text{Sen}(3x^2y))$$

$$\frac{d}{dy}(\text{Sen } u) = \text{Cos } u \frac{du}{dy}$$

$$u = 3x^2y \quad \therefore \quad \frac{du}{dy} = 3x^2$$

$$\frac{d}{dy}(\text{Sen } (3x^2y)) = \text{Cos}(3x^2y)(3x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 \cos(3x^2 y)$$

Fórmulas empleadas:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx} \quad \frac{d}{dx}(\text{Sen}(u)) = \cos(u) \frac{du}{dx} \quad \frac{d}{dx}(\cos(u)) = -\text{Sen}(u) \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 3

Sea $f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2 y}{x - y}\right)$ calcular las primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Solución:

Antes de iniciar las derivadas es conveniente aplicar propiedades de los logaritmos:

$$\ln(A^n) = n \ln(A) \quad \ln(AB) = \ln A + \ln B \quad \ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$$

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2 y}{x - y}\right) = \ln(x^2 y) - \ln(x - y) \rightarrow \ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$$

$$f(x, y) = \ln(x^2) + \ln(y) - \ln(x - y) \rightarrow \ln(AB) = \ln A + \ln B$$

$$f(x, y) = 2 \ln(x) + \ln(y) - \ln(x - y) \rightarrow \ln(A^n) = n \ln(A)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2 \ln(x) + \ln(y) - \ln(x - y))$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(u)) = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} + 0 - \frac{1}{x-y} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-y}$$

La "x" se considera variable y "y" constante

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2\ln(x) + \ln(y) - \ln(x-y))$$

$$\frac{d}{dy}(\ln(u)) = \frac{\frac{du}{dy}}{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{1}{y} - \frac{-1}{x-y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x-y}$$

La "y" se considera variable y "x" constante

Fórmulas empleadas:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = \frac{-c \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \frac{d}{dx}(\ln(u)) = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

Ejemplo 4

1 Hallar las pendientes en las direcciones de "x" y de "y" de la superficie dada y sus respectivas rectas:

$$f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

en el punto $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$.

Solución:

Pendiente en dirección de "x":

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x - 0 + 0 = -x$$

$$m \left| \left(\frac{1}{2}, 1, 2 \right) \right. = \frac{\partial f}{\partial x} \left| \left(\frac{1}{2}, 1, 2 \right) \right. = -\left(\frac{1}{2} \right)$$

La pendiente en el punto indicado, en la dirección de “x” es:

$$m = -\frac{1}{2}$$

Pendiente en dirección de “y”:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -0 - 2y + 0 = -2y$$

$$m \left| \left(\frac{1}{2}, 1, 2 \right) \right. = \frac{\partial f}{\partial y} \left| \left(\frac{1}{2}, 1, 2 \right) \right. = -2(1) = -2$$

La pendiente en el punto indicado, en la dirección de “y” es:

$$m = -2$$

6

Ecuaciones de las rectas tangentes en el punto dado:

En dirección de x:

$$\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right) = (x_1, y, z_1)$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

Como se está trabajando paralelo al plano xz, entonces la ecuación de la recta es:

$$z - z_1 = m(x - x_1)$$

$$z - 2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$z = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2$$

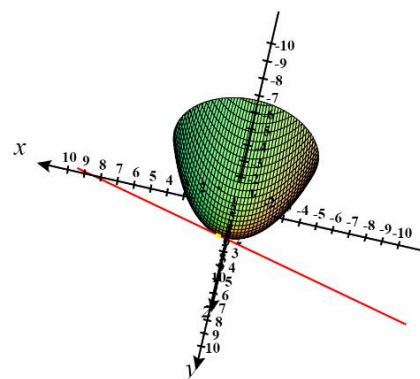
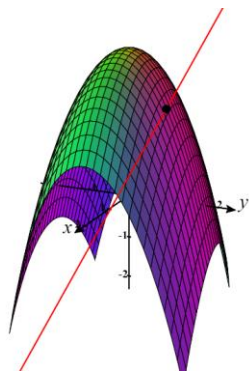
$$z = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = t$$

$$y = 1$$

$$z = -\frac{1}{2}t + \frac{9}{4}$$



Para encontrar la curva de intersección se tiene:

$$z = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

$$y = 1$$

Sustituyendo y en z:

$$z = -\frac{x^2}{2} - (1)^2 + \frac{25}{8}$$

$$z = -\frac{x^2}{2} + \frac{17}{8}$$

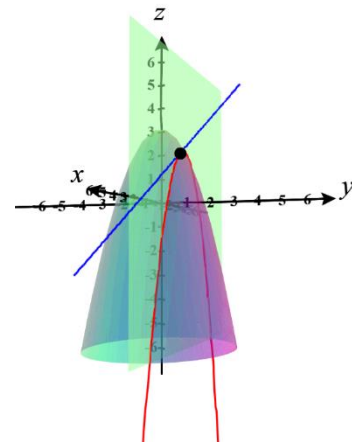
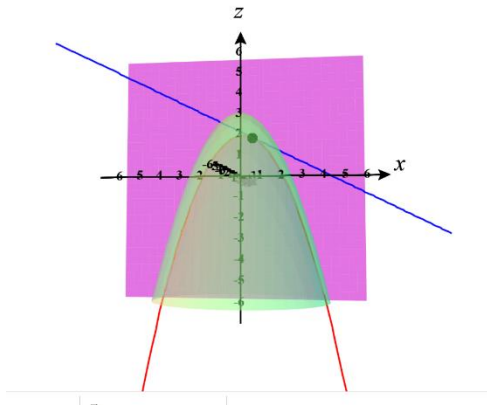
Parametrizando la curva:

$$x = t$$

$$y = 1$$

$$z = -\frac{t^2}{2} + \frac{17}{8}$$

En la gráfica es la curva roja:



En dirección de y:

$$\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right) = (x, y_1, z_1)$$

$$m = -2$$

Como se está trabajando paralelo al plano yz, entonces la ecuación de la recta es:

$$z - z_1 = m(y - y_1)$$

$$z - 2 = -2(y - 1)$$

$$z = -2(y - 1) + 2$$

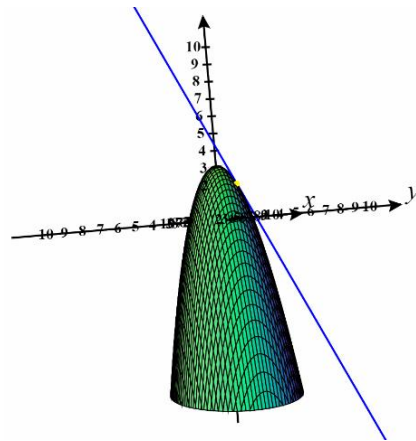
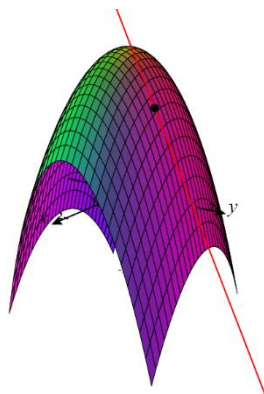
$$z = -2y + 4$$

Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = t$$

$$z = -2t + 4$$



Para encontrar la curva de intersección se tiene:

$$z = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo x en z:

$$z = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

$$z = -\frac{1}{8} - y^2 + \frac{25}{8}$$

$$z = -y^2 + \frac{24}{8}$$

$$z = -y^2 + 3$$

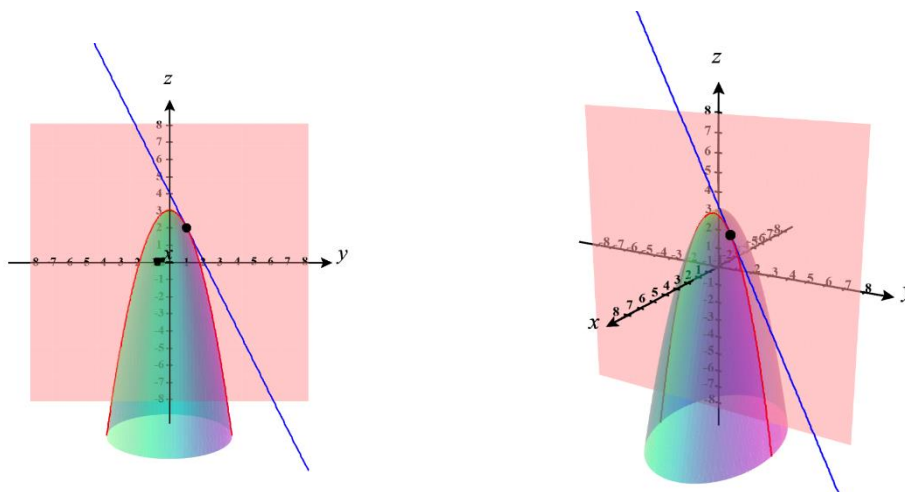
Parametrizamos la curva:

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = t$$

$$z = -t^2 + 3$$

En la gráfica la curva amarilla es la curva de intersección entre el plano de dirección y la superficie:



Incrementos, diferenciales y diferencial total

Para calcular el diferencial total de una función aplicamos la siguiente fórmula:

Sea $f(x, y, z)$ el diferencial total es $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

EJEMPLO 5

Calcular el diferencial total de:

$$f(x, y, z) = 2xye^{4z} + 5x^4y^2z + \cos(4x + 3y)$$

Solución:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ye^{4z} + 20x^3y^2z - 4\text{sen}(4x + 3y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{4z} + 10x^4yz - 3\text{sen}(4x + 3y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 8xye^{4z} + 5x^4y^2$$

$$\begin{aligned} df &= \left(2ye^{4z} + 20x^3y^2z - 4\text{sen}(4x + 3y) \right) dx \\ &+ \left(2xe^{4z} + 10x^4yz - 3\text{sen}(4x + 3y) \right) dy \\ &+ (8xye^{4z} + 5x^4y^2) dz \end{aligned}$$

EJEMPLO 6

Calcular el diferencial total de:

$$f(x, y) = 7x^3y + 2x^2y^4$$

Solución:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 21x^2y + 4xy^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 7x^3 + 8x^2y^3$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$df = (21x^2y + 4xy^4)dx + (7x^3 + 8x^2y^3)dy$$

EJEMPLO 7

- 1 a) Evaluar $f(2,1)$ y $f(2.1, 1.05)$ y calcular Δz .
- b) Usar el diferencial total dz para aproximar Δz .

$$f(x, y) = x \cos(y)$$

Solución:

- a) Evaluar $f(2,1)$ y $f(2.1,1.05)$ y calcular Δz

$$f(2,1) = 2 \cos(1) = 2 \cos\left(\frac{1 \text{ rad} * 180^\circ}{\pi \text{ rad}}\right) = 2 \cos\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = \mathbf{1.08}$$

$$f(2.1,1.05) = 2.1 \cos(1.05) = 2.1 \cos\left(\frac{1.05 \text{ rad} * 180^\circ}{\pi \text{ rad}}\right) = 2.1 \cos\left(\frac{189^\circ}{\pi}\right) \\ = \mathbf{1.04}$$

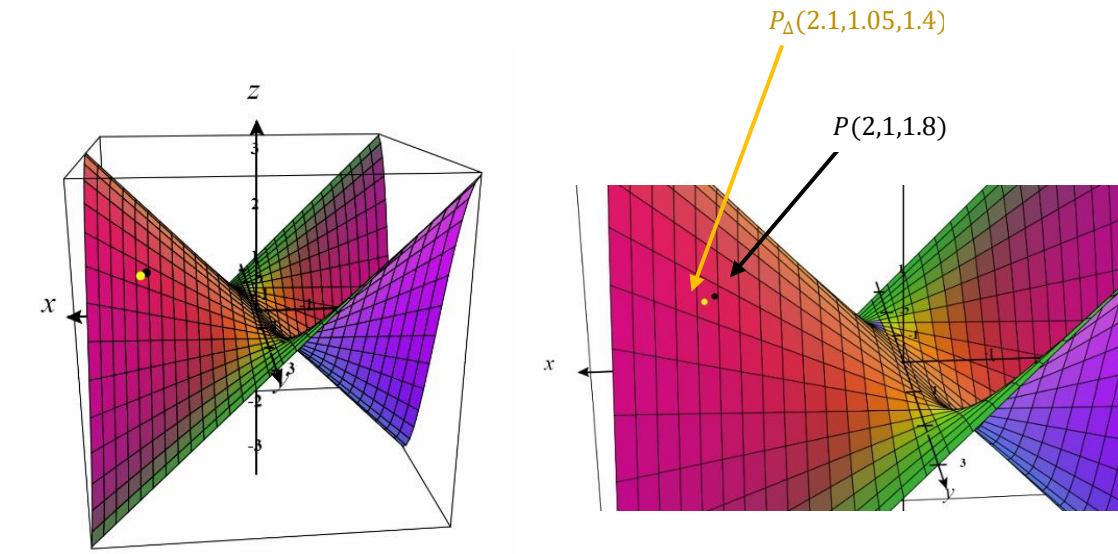
$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\begin{array}{llll} x = 2 & \rightarrow & 2.1 & \therefore \Delta x = 0.1 \\ y = 1 & \rightarrow & 1.05 & \therefore \Delta y = 0.05 \end{array}$$

$$\Delta z = f(2 + 0.1, 1 + 0.05) - f(2, 1)$$

$$\Delta z = f(2.1, 1.05) - f(2, 1)$$

$$\Delta z = 1.04 - 1.08 = \mathbf{-0.04}$$



b) Usar el diferencial total dz para aproximar Δz .

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$f(x, y) = x \cos(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin(y)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = \cos(y) dx - x \sin(y) dy$$

$$dx = \Delta x = 0.1 \quad y \quad dy = \Delta y = 0.05$$

$$dz = \cos(1) (0.1) - 2 \sin(1) (0.05) = -0.03$$

$$-0.04 \approx -0.03$$

$$\Delta z \approx dz$$

EJEMPLO 8

3 En un triángulo, dos lados adyacentes miden 3 y 4 pulgadas de longitud y entre ellos forman un ángulo de $\frac{\pi}{4}$. Los posibles errores de medición son $\frac{1}{16}$ pulgadas en los lados y 0.02 radianes en el ángulo. Aproximar el máximo error posible al calcular el área.

Solución:

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \Delta\theta = 0.02$$

$$a = 3 \quad \Delta a = \frac{1}{16}$$

$$b = 4 \quad \Delta b = \frac{1}{16}$$

$$h = a \operatorname{sen} \theta$$

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial b} db + \frac{\partial A}{\partial h} dh$$

$$dA = \frac{h}{2} db + \frac{b}{2} dh$$

$$h = a \operatorname{sen} \theta \quad \therefore \quad dh = \frac{\partial h}{\partial a} da + \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta$$

$$dh = \operatorname{sen} \theta da + a \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} dA &= \frac{a \operatorname{sen} \theta}{2} db + \frac{b}{2} (\operatorname{sen} \theta da + a \cos \theta d\theta) \\ &= \frac{3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right)}{2} \left(\frac{1}{16} \right) + \frac{4}{2} \left[\left(\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \left(\frac{1}{16} \right) + 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) (0.02) \right] \end{aligned}$$

$$dA = \frac{3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{32} + \left[\frac{1}{8}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1.2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$dA = \frac{3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{32} + \frac{1}{8}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1.2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$dA = \frac{7\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{32} + 0.12\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$dA = 0.2395 \quad \text{error al medir el área es aprox. } 0.2395 \text{ pulg}^2$$

Otra opción:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Pero sabemos que:

$$h = a\operatorname{sen}\theta$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{b \times a\operatorname{sen}\theta}{2}$$

$$A = \frac{ab \operatorname{sen}\theta}{2}$$

Calculando dA tendremos:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial b} db + \frac{\partial A}{\partial a} da + \frac{\partial A}{\partial \theta} d\theta$$

$$dA = \frac{a \operatorname{sen} \theta}{2} db + \frac{b \operatorname{sen} \theta}{2} da + \frac{ab \cos \theta}{2} d\theta$$

$$dA = \frac{3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right)}{2} \left(\frac{1}{16} \right) + \frac{4 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right)}{2} \left(\frac{1}{16} \right) + \frac{(3)(4) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right)}{2} (0.02)$$

$$dA = \frac{3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right)}{32} + \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right)}{8} + 0.12 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

$$dA = \frac{7 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right)}{32} + 0.12 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

$$dA = 0.2395 \quad \text{error al medir el área es aprox. } 0.2395 \text{ pulg}^2$$

EJEMPLO 9

Un sistema de coordenadas rectangulares se coloca sobre un mapa y las coordenadas de un punto son (7.2, 2.5). Existe un posible error de 0.05 en cada coordenada. Aproximar el máximo error posible al medir las coordenadas polares del punto.

Solución:

$$x = 7.2 \quad y = 2.5 \quad \Delta x = \Delta y = 0.05$$

$$\Delta x = dx \quad y \quad \Delta y = dy$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$dr = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

$$dr = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

$$dr = \frac{7.2}{\sqrt{7.2^2 + 2.5^2}} (0.05) + \frac{2.5}{\sqrt{7.2^2 + 2.5^2}} (0.05)$$

$$dr = 0.064$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{u'}{1+u^2} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = \frac{-c v'}{v^2}$$

$$d\theta = \left(\frac{\frac{-y(1)}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right) dx + \left(\frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right) dy$$

$$d\theta = \left(\frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{1} + \frac{y^2}{x^2}} \right) dx + \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1} + \frac{y^2}{x^2}} \right) dy$$

$$d\theta = \left(\frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \right) dx + \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \right) dy$$

$$d\theta = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy$$

$$d\theta = \left(\frac{-2.5}{7.2^2 + 2.5^2} \right) (0.05) + \left(\frac{7.2}{7.2^2 + 2.5^2} \right) (0.05)$$

$$\mathbf{d\theta = 0.004}$$

Por lo tanto, los posibles errores al medir en coordenadas polares son:

$$\mathbf{dr = 0.064 \quad y \quad d\theta = 0.004}$$

3.5 ² Regla de la cadena, derivada implícita.

Regla de la cadena

La regla de la cadena se emplea cuando se tiene una función en la que sus variables dependen de otra variable o parámetro. En las fórmulas utilizadas para derivación implícitamente está la regla de la cadena, en el siguiente recuadro se puede analizar un ejemplo donde se emplea de forma directa la fórmula para la potencia y posteriormente se deriva utilizando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}f(x) &= 4(5x + 1)^3 \\f'(x) &= 12(5x + 1)^2(5) = 60(5x + 1)^2\end{aligned}$$

Regla de la cadena:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} * \frac{du}{dx}$$
$$f(x) = 4(5x + 1)^3$$
$$u = 5x + 1$$
$$f(u) = 4u^3$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} * \frac{du}{dx} = (12u^2)(5)$$
$$\frac{df}{dx} = 60u^2 \quad \text{donde } u = 5x + 1$$
$$\frac{df}{dx} = 60(5x + 1)^2$$

Regla de la cadena:

¹³ Sea $f(x, y, z)$ donde $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$, entonces:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Sea $f(x, y, z)$, donde $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ y $z = z(s, t)$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

Y

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

EJEMPLO 1

Calcular $\frac{dz}{dt}$ si $f(x, y) = 8\cos(4xy + 3x)$ y $x = 3t^2$ y $y = 5t + 1$:

Solución:

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = (-8(4y + 3)\sin(4xy + 3x))(6t) + (-8(4x\sin(4xy + 3x)))(5)$$

$$\frac{df}{dt} = (-48t(4y + 3)\sin(4xy + 3x)) + (-40(4x\sin(4xy + 3x)))$$

$$\frac{df}{dt} = -48t(4y + 3)\sin(4xy + 3x) - 160x\sin(4xy + 3x)$$

$$\frac{df}{dt} = -48t(4(5t+1)+3)\text{sen}[4(3t^2)(5t+1)+3(3t^2)] \\ - 160(3t^2)\text{sen}[4(3t^2)(5t+1)+3(3t^2)]$$

$$\frac{df}{dt} = -48t(20t+7)\text{sen}(60t^3+12t^2+9t^2) - 480t^2\text{sen}(60t^3+12t^2+9t^2)$$

$$\frac{df}{dt} = -48t(20t+7)\text{sen}(60t^3+21t^2) - 480t^2\text{sen}(60t^3+21t^2)$$

$$\frac{df}{dt} = -960t^2\text{sen}(60t^3+21t^2) - 336t\text{sen}(60t^3+21t^2) - 480t^2\text{sen}(60t^3+21t^2)$$

$$\frac{df}{dt} = -1440t^2\text{sen}(60t^3+21t^2) - 336t\text{sen}(60t^3+21t^2)$$

$$\frac{df}{dt} = -48 \left(30t^2 \text{sen}(60t^3+21t^2) + 7t\text{sen}(60t^3+21t^2) \right)$$

$$\frac{df}{dt} = (-1440t^2 - 336t)\text{sen}(60t^3+21t^2)$$

Sustituyendo primero:

$$f(x, y) = 8 \cos(4xy + 3x) \quad x = 3t^2 \quad y = 5t + 1$$

$$f(t) = 8 \cos(4(3t^2)(5t+1) + 3(3t^2))$$

$$f(t) = 8 \cos(60t^3 + 12t^2 + 9t^2)$$

$$f(t) = 8 \cos(60t^3 + 21t^2)$$

$$\frac{df}{dt} = -8(180t^2 + 42t)\text{sen}(60t^3 + 21t^2)$$

$$\frac{df}{dt} = -48(30t^2 + 7t)\text{sen}(60t^3 + 21t^2)$$

$$\frac{df}{dt} = (-1440t^2 - 336t)\text{sen}(60t^3 + 21t^2)$$

EJEMPLO 2

Calcular $\frac{\partial f}{\partial t}$ y $\frac{\partial f}{\partial s}$ si:

$$f(x, y, z) = 4xy^3 + 9xz^2; \quad x = 5t^2 - 4s, y = 7t + 9s \quad y \quad z = 10ts:$$

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{df}{dt} = (4y^3 + 9z^2)(10t) + (12xy^2)(7) + (18xz)(10s)$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = & (4(7t + 9s)^3 + 9(10ts)^2)(10t) + (12(5t^2 - 4s)(7t + 9s)^2)(7) \\ & + (18(5t^2 - 4s)(10ts))(10s) \end{aligned}$$

$$\frac{df}{dt} = 10t[4(7t + 9s)^3 + 9(10ts)^2] + 84(5t^2 - 4s)(7t + 9s)^2 + 1800ts^2(5t^2 - 4s)$$

$$\frac{df}{dt} = 40t(7t + 9s)^3 + 9000t^3s^2 + 84(5t^2 - 4s)(7t + 9s)^2 + 1800ts^2(5t^2 - 4s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{df}{ds} = (4y^3 + 9z^2)(-4) + (12xy^2)(9) + (18xz)(10t)$$

$$\frac{df}{ds} = -4(4(7t + 9s)^3 + 9(10ts)^2) + 108(5t^2 - 4s)(7t + 9s)^2 + 180t(5t^2 - 4s)(10ts)$$

$$\frac{df}{ds} = -4[4(7t + 9s)^3 + 9(10ts)^2] + 108(5t^2 - 4s)(7t + 9s)^2 + 1800t^2s(5t^2 - 4s)$$

$$\frac{df}{ds} = -16(7t + 9s)^3 - 3600t^2s^2 + 108(5t^2 - 4s)(7t + 9s)^2 + 1800t^2s(5t^2 - 4s)$$

Sustituyendo primero:

$$f(x, y, z) = 4xy^3 + 9xz^2; \quad x = 5t^2 - 4s, y = 7t + 9s \quad y \quad z = 10ts$$

$$x = 5t^2 - 4s, y = 7t + 9s \quad y \quad z = 10ts$$

$$f(t, s) = 4(5t^2 - 4s)(7t + 9s)^3 + 9(5t^2 - 4s)(10ts)^2$$

$$f(t, s) = 4(5t^2 - 4s)(7t + 9s)^3 + 900t^2s^2(5t^2 - 4s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 4(5t^2 - 4s)[3(7t + 9s)^2(7)] + (7t + 9s)^3[4(10t)] + 900t^2s^2(10t) + (5t^2 - 4s)(1800ts^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 84(5t^2 - 4s)(7t + 9s)^2 + 40t(7t + 9s)^3 + 9000t^3s^2 + 1800ts^2(5t^2 - 4s)$$

$$f(t, s) = 4(5t^2 - 4s)(7t + 9s)^3 + 900t^2s^2(5t^2 - 4s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 4(5t^2 - 4s)[3(7t + 9s)^2(9)] + 4(7t + 9s)^3(-4) + 900t^2s^2(-4) + (5t^2 - 4s)1800t^2s$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 108(5t^2 - 4s)(7t + 9s)^2 - 16(7t + 9s)^3 - 3600t^2s^2 + 1800t^2s(5t^2 - 4s)$$

Derivación implícita

En tu curso de Cálculo Diferencial te enseñaron a derivar implícitamente, aquí veremos una forma mucho más sencilla de hacerlo:

Primero se IGUALA A CERO la función:

$$F(x, y) = 0$$

Enseguida aplicamos las siguientes fórmulas:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

En caso de que la función dependa de más de dos variables:

Primero se IGUALA A CERO la función:

$$F(x, y, z) = 0$$

Enseguida aplicamos las siguientes fórmulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

EJEMPLO 3

Calcular $\frac{dy}{dx}$ si $7x^2y^3 + 8y^2 = 10y + 3xy$:

Solución:

Igualamos a cero:

$$\underbrace{7x^2y^3 + 8y^2 - 10y - 3xy}_{F(x,y)} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{14xy^3 - 3y}{21x^2y^2 + 16y - 10 - 3x}$$

EJEMPLO 4

Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $4xy^3 + 9z^2 = 4y + 3xz$:

Solución:

Igualamos a cero:

$$\underbrace{4xy^3 + 9z^2 - 4y - 3xz}_{F(x,y,z)} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{4y^3 - 3z}{18z - 3x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{12xy^2 - 4}{18z - 3x}$$

3.6 Derivadas parciales de orden superior.

1 Derivadas de orden superior

La notación para las derivadas de orden superior es:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = z_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = z_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y) = z_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x, y) = z_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$z_{yx} = (z_y)_x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$z_{xy} = (z_x)_y$$

Ejemplo 1 Sea $f(x, y) = 9x^4y^3 + 5xy^2 + 2x^3 - 8y^2$ calcular:

$$a) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad c) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad d) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Solución:

Es necesario calcular las primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (9x^4y^3 + 5xy^2 + 2x^3 - 8y^2)$$

La "x" se considera variable y "y" constante

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(9x^4y^3) + \frac{\partial}{\partial x}(5xy^2) + \frac{\partial}{\partial x}(2x^3) - \frac{\partial}{\partial x}(8y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9y^3 \frac{\partial}{\partial x}(x^4) + 5y^2 \frac{\partial}{\partial x}(x) + 2 \frac{\partial}{\partial x}(x^3) - 8y^2 \frac{\partial}{\partial x}(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9y^3(4x^3) + 5y^2(1) + 2(3x^2) - 8y^2(0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 36x^3y^3 + 5y^2 + 6x^2 - 0 = \mathbf{36x^3y^3 + 5y^2 + 6x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(9x^4y^3 + 5xy^2 + 2x^3 - 8y^2)$$

└─ La “y” se considera variable y “x” constante

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 27x^4y^2 + 10xy + 0 - 16y = \mathbf{27x^4y^2 + 10xy - 16y}$$

a)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (36x^3y^3 + 5y^2 + 6x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 108x^2y^3 + 0 + 12x = \mathbf{108x^2y^3 + 12x}$$

La “x” se considera variable y “y” constante en ambas derivadas

b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (27x^4y^2 + 10xy - 16y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{54x^4y + 10x - 16}$$

La “y” se considera variable y “x” constante en ambas derivadas

c)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (27x^4y^2 + 10xy - 16y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 108x^3y^2 + 10y - 0 = \mathbf{108x^3y^2 + 10y}$$

La “y” se considera variable y “x” constante en la primera derivada y

La “x” se considera variable y “y” constante en la segunda derivada.

d)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (36x^3y^3 + 5y^2 + 6x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 108x^3y^2 + 10y + 0 = 108x^3y^2 + 10y$$

La “x” se considera variable y “y” constante en la primera derivada y

La “y” se considera variable y “x” constante en la segunda derivada.

En los incisos c) y d) se observa que los resultados son iguales. Esto es debido a que se cumple el siguiente teorema conocido como **teorema de las derivadas mixtas**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{o bien,} \quad f_{yx} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{o bien,} \quad (f_y)_x = (f_x)_y$$

Ejemplo 2

Sea $f(x, y) = \text{Sen}(3x^2y)$ calcular:

$$\text{a) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{b) } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{c) } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{d) } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Solución:

Es necesario calcular las primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\text{Sen}(3x^2y))$$

$$\frac{d}{dx} (\text{Sen } u) = \text{Cos } u \frac{du}{dx}$$

$$u = 3x^2y \quad \therefore \quad \frac{du}{dx} = 6xy$$

$$\frac{d}{dx} (\text{Sen } (3x^2y)) = \text{Cos}(3x^2y)(6xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy \text{Cos}(3x^2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\text{Sen}(3x^2y))$$

$$\frac{d}{dy} (\text{Sen } u) = \text{Cos } u \frac{du}{dy}$$

$$u = 3x^2y \quad \therefore \quad \frac{du}{dy} = 3x^2$$

$$\frac{d}{dy} (\text{Sen } (3x^2y)) = \text{Cos}(3x^2y)(3x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 \text{Cos}(3x^2y)$$

a)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{6xy}_{u} \underbrace{\cos(3x^2y)}_v \right)$$

Ya que ambas tienen "x"

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy \left(\frac{\partial}{\partial x} (\cos(3x^2y)) \right) + \cos(3x^2y) \left(\frac{\partial}{\partial x} (6xy) \right)$$

$$= (6xy)(-6xy \operatorname{Sen}(3x^2y)) + (\cos(3x^2y))(6y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -36x^2y^2 \operatorname{Sen}(3x^2y) + 6y \cos(3x^2y)$$

b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 \cos(3x^2y))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (3x^2)(-3x^2 \operatorname{Sen}(3x^2y))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -9x^4 \operatorname{Sen}(3x^2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{3x^2}_{U} \underbrace{\cos(3x^2 y)}_V \right)$$

Ya que ambas tienen "x"

c)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (3x^2)(-6xy \operatorname{Sen}(3x^2 y)) + (\cos(3x^2 y))(6x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -18x^3 y \operatorname{Sen}(3x^2 y) + 6x \cos(3x^2 y)$$

d)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\underbrace{6xy}_{U} \underbrace{\cos(3x^2 y)}_V \right)$$

Ya que ambas tienen "y"

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (6xy)(-3x^2 \operatorname{Sen}(3x^2 y)) + (\cos(3x^2 y))(6x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -18x^3 y \operatorname{Sen}(3x^2 y) + 6x \cos(3x^2 y)$$

Nuevamente se cumple que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Fórmulas empleadas:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Sen}(u)) = \text{Cos}(u) \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Cos}(u)) = -\text{Sen}(u) \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 3

Sea $f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2 y}{x-y}\right)$ calcular:

$$c) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad d) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad e) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad f) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Solución:

Es necesario calcular las primeras derivadas y es conveniente aplicar propiedades de los logaritmos:

$$\ln(A^n) = n\ln(A) \quad \ln(AB) = \ln A + \ln B \quad \ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$$

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2 y}{x - y}\right) = \ln(x^2 y) - \ln(x - y) \rightarrow \ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$$

$$f(x, y) = \ln(x^2) + \ln(y) - \ln(x - y) \rightarrow \ln(AB) = \ln A + \ln B$$

$$f(x, y) = 2\ln(x) + \ln(y) - \ln(x - y) \rightarrow \ln(A^n) = n\ln(A)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2\ln(x) + \ln(y) - \ln(x - y))$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(u)) = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} + 0 - \frac{1}{x - y} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x - y}$$

La "x" se considera variable y "y" constante

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2\ln(x) + \ln(y) - \ln(x - y))$$

$$\frac{d}{dy}(\ln(u)) = \frac{\frac{du}{dy}}{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{1}{y} - \frac{-1}{x - y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x - y}$$

La "y" se considera variable y "x" constante

21
a)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-y} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{c}{v} \right) = \frac{-c \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2}{x^2} - \frac{-1(1)}{(x-y)^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$$

La “x” se considera variable y “y” constante en ambas derivadas

b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x-y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} + \frac{-1(-1)}{(x-y)^2} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$$

La “y” se considera variable y “x” constante en ambas derivadas

c)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x-y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 + \frac{-1(1)}{(x-y)^2} = -\frac{1}{(x-y)^2}$$

La “y” se considera variable y “x” constante en la primera derivada y

La “x” se considera variable y “y” constante en la segunda derivada.

d)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 - \frac{-1(-1)}{(x-y)^2} = -\frac{1}{(x-y)^2}$$

La “x” se considera variable y “y” constante en la primera derivada y

La “y” se considera variable y “x” constante en la segunda derivada.

Nuevamente se cumple que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Fórmulas empleadas:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

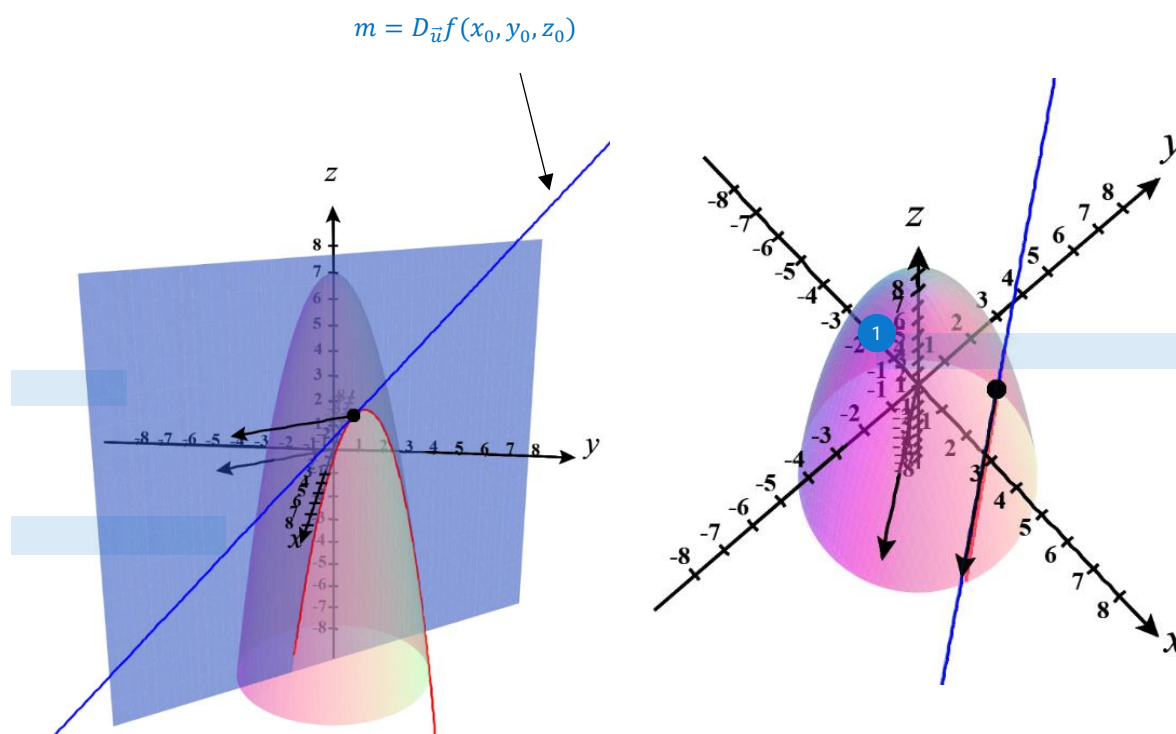
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{c}{v} \right) = -\frac{c}{v^2} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(u)) = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

3.7 Derivada direccional y gradiente.

Derivada direccional

Como ya se vio anteriormente, las derivadas parciales están en dirección paralela al “eje x” o al “eje y”. Ahora se verá la derivada direccional que puede ser en la dirección de cualquier vector. Una forma de visualizarlo es imaginando un plano sobre el vector de dirección, así la derivada direccional es la pendiente de la recta tangente a la curva de corte entre la superficie y el plano de dirección.



$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

Geométricamente, el gradiente es perpendicular a las curvas o superficies de nivel.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

$$\nabla f(x, y) = 2x\hat{i} + 2y\hat{j}$$

$$P(3,1) \rightarrow f(x, y) = 3^2 + 1^2 = 10 \quad (3, 1, 10)$$

$$\nabla f(3, 1) = 2(3)\hat{i} + 2(1)\hat{j} = 6\hat{i} + 2\hat{j}$$

Curva de nivel:

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{Si } z = 10, \text{ entonces } 10 = x^2 + y^2$$

$10 = x^2 + y^2$ al graficarlo en R^3 representa un cilindro

29

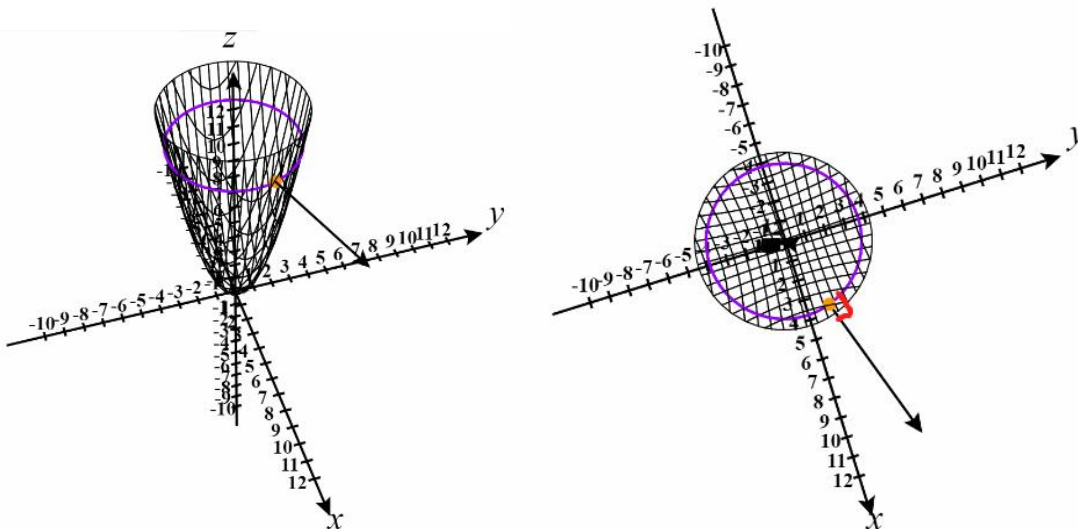
Para obtener la curva de nivel es necesario parametrizar:

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$x = \sqrt{10} \cos(t)$$

$$y = \sqrt{10} \sin(t)$$

Utilizando CalcPlot3D podremos visualizar que ³ el gradiente es perpendicular a la curva de nivel:



La **derivada direccional** ² de una función real de n variables está definida por el límite:

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h}$$

Si la función es diferenciable, entonces podemos dar una fórmula para calcular ¹ la derivada de una función $f(x, y)$ **en la dirección del vector UNITARIO $\vec{u}$ en (x_0, y_0)** ² viene dada por el producto punto entre el gradiente y el vector de dirección unitario.

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$$

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}$$

Demostración:

8 Supongamos que existe una función diferenciable $z = f(x, y)$. 5 La derivada direccional según la dirección de un vector unitario $\vec{v} = \langle v_x, v_y \rangle$ es:

$$D_{\vec{v}}f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + v_x h, y + v_y h) - f(x, y)}{h}$$

$$D_{\vec{v}}f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + v_x h, y + v_y h) - f(x, y + v_y h) + f(x, y + v_y h) - f(x, y)}{h}$$

$$D_{\vec{v}}f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + v_x h, y + v_y h) - f(x, y + v_y h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + v_y h) - f(x, y)}{h}$$

Hacemos, para el primer límite el cambio:

$$h' = v_x h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x + h', y + \frac{v_y h'}{v_x}\right) - f\left(x, y + \frac{v_y h'}{v_x}\right)}{\frac{h'}{v_x}} = \lim_{h' \rightarrow 0} v_x \frac{\partial f\left(x, y + \frac{v_y h'}{v_x}\right)}{\partial x}$$

$$= v_x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

De forma similar trabajamos el segundo límite:

$$h' = v_y h$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + v_y h) - f(x, y)}{h} &= \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{f\left(x, y + \frac{v_y h'}{v_y}\right) - f(x, y)}{\frac{h'}{v_y}} \\ &= \lim_{h' \rightarrow 0} v_y \frac{f(x, y + h') - f(x, y)}{h'} = \lim_{h' \rightarrow 0} v_y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = v_y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$D_{\vec{v}} f = v_x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + v_y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \langle v_x, v_y \rangle \cdot \left\langle \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\rangle = \vec{v} \cdot \nabla F$$

$$D_{\vec{v}} f = \nabla F \cdot \vec{u}$$

Ejemplo 1

Sea $f(x, y) = 7 - x^2 - y^2$ calcular la derivada direccional de f en la dirección $\vec{v} = \langle 3, -4 \rangle$ en $(2, 1, 2)$:

Solución:

Haciendo unitario el vector de dirección $\vec{v} = \langle 3, -4 \rangle$:

$$\vec{u} = \frac{\langle 3, -4 \rangle}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{\langle 3, -4 \rangle}{5}$$

Se calcula el gradiente de f:

$$f(x, y) = 7 - x^2 - y^2$$

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

$$= (-2x)\hat{i} + (-2y)\hat{j}$$

$$\nabla f(x, y) = -2x\hat{i} - 2y\hat{j}$$

Se evalúa el gradiente en (2, 1, 2):

$$\nabla f(2, 1) = -2(2)\hat{i} - 2(1)\hat{j} = \langle -4, -2 \rangle$$

Por último, se efectúa el producto punto:

$$D_{\vec{u}} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$$

$$D_{\vec{u}} = \nabla f(2, 1) \cdot \vec{u}$$

$$D_{\vec{u}} = \langle -4, -2 \rangle \cdot \frac{\langle 3, -4 \rangle}{5} = \frac{-12 + 8}{5}$$

$$D_{\vec{u}}(4, 1) = -\frac{4}{5}$$

No hay que olvidar que ² la derivada direccional es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la función y el plano trazado sobre el vector de dirección, en un punto:

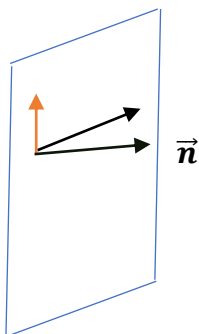
$$f(x, y) = 7 - x^2 - y^2$$

$$\vec{v} = \langle 3, -4 \rangle$$

$$(2, 1, 2)$$

Los siguientes pasos son para calcular la recta tangente a la superficie en la dirección de $\vec{v}$ en el punto indicado:

Para determinar una ecuación del plano se utiliza el vector de dirección y el vector $\hat{k}$ ya que el producto cruz proporcionará el vector normal al plano:



$$\vec{n} = \vec{v} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-4 - 0)\hat{i} - (3 - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k} = -4\hat{i} - 3\hat{j}$$

$$\vec{n} = -4\hat{i} - 3\hat{j} \quad y \quad P_0(2, 1, 2)$$

$$ax + by + cz = \vec{n} \cdot \vec{P}_0$$

$$-4x - 3y = -8 - 3$$

$$-4x - 3y = -11$$

$$4x + 3y = 11$$

Curva de intersección:

$$z = 7 - x^2 - y^2$$

$$4x + 3y = 11 \rightarrow y = \frac{11}{3} - \frac{4x}{3}$$

$$z = 7 - x^2 - \left(\frac{11}{3} - \frac{4x}{3}\right)^2$$

Parametrizando:

$$x = t$$

$$y = \frac{11}{3} - \frac{4t}{3}$$

$$z = 7 - t^2 - \left(\frac{11}{3} - \frac{4}{3}t\right)^2$$

27 Recta tangente a la curva en el punto indicado:

$$\vec{r}(t) = \left\langle t, \frac{11}{3} - \frac{4t}{3}, 7 - t^2 - \left(\frac{11}{3} - \frac{4}{3}t\right)^2 \right\rangle$$

$$\vec{v} = \vec{r}'(t) = \left\langle 1, -\frac{4}{3}, -2t - 2\left(\frac{11}{3} - \frac{4}{3}t\right)\left(-\frac{4}{3}\right) \right\rangle$$

$$\vec{v} = \vec{r}'(t) = \left\langle 1, -\frac{4}{3}, -2t + \frac{8}{3}\left(\frac{11}{3} - \frac{4}{3}t\right) \right\rangle$$

$$\vec{v} = \vec{r}'(t) \vec{v} = \vec{r}'(t) = \left\langle 1, -\frac{4}{3}, -\frac{50}{9}t + \frac{88}{9} \right\rangle \quad y \quad P_0(2, 1, 2)$$

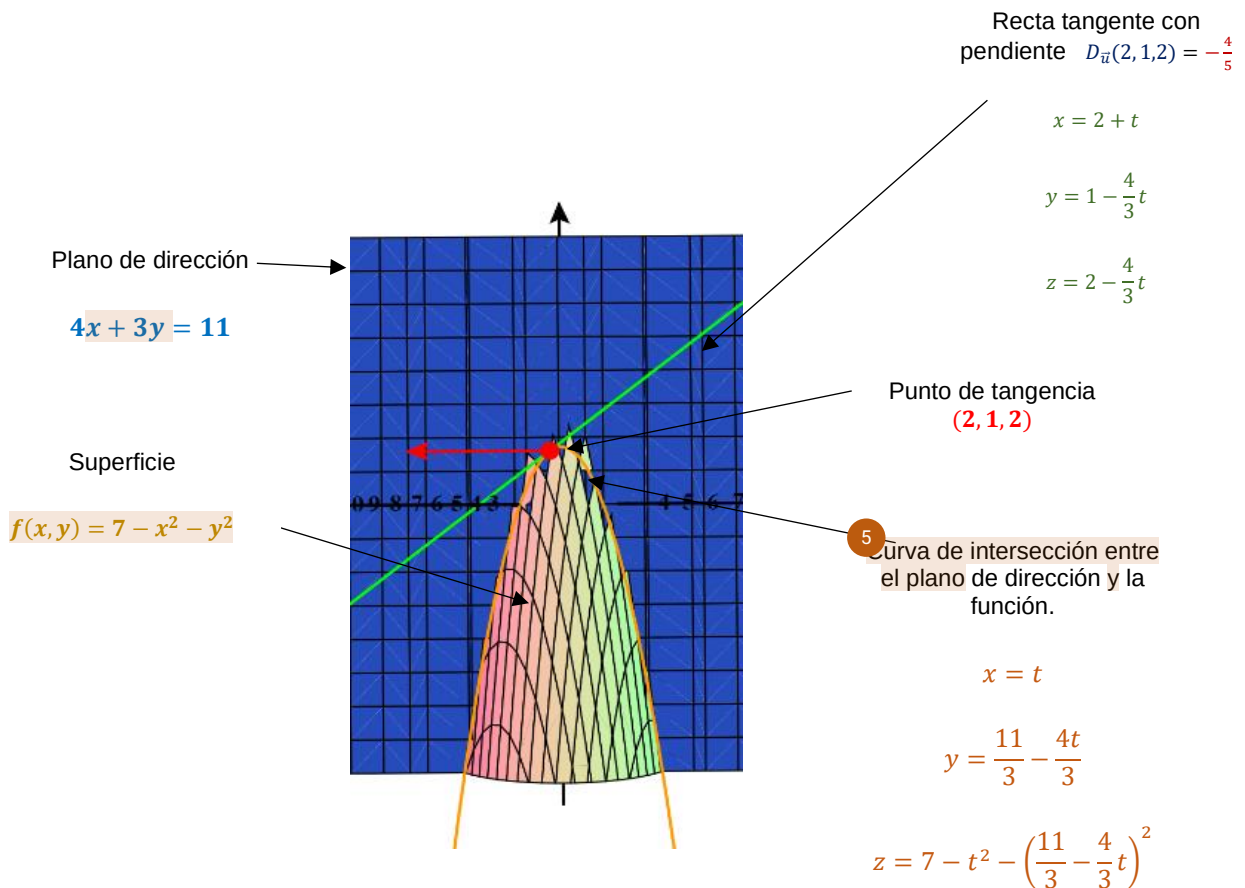
$$\text{Como } x = t \quad y \quad x = 2 \quad \therefore \quad t = 2$$

$$\vec{v} = \vec{r}'(2) = \left\langle 1, -\frac{4}{3}, -\frac{50}{9}(2) + \frac{88}{9} \right\rangle$$

$$\vec{v} = \vec{r}'(2) = \left\langle 1, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right\rangle$$

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

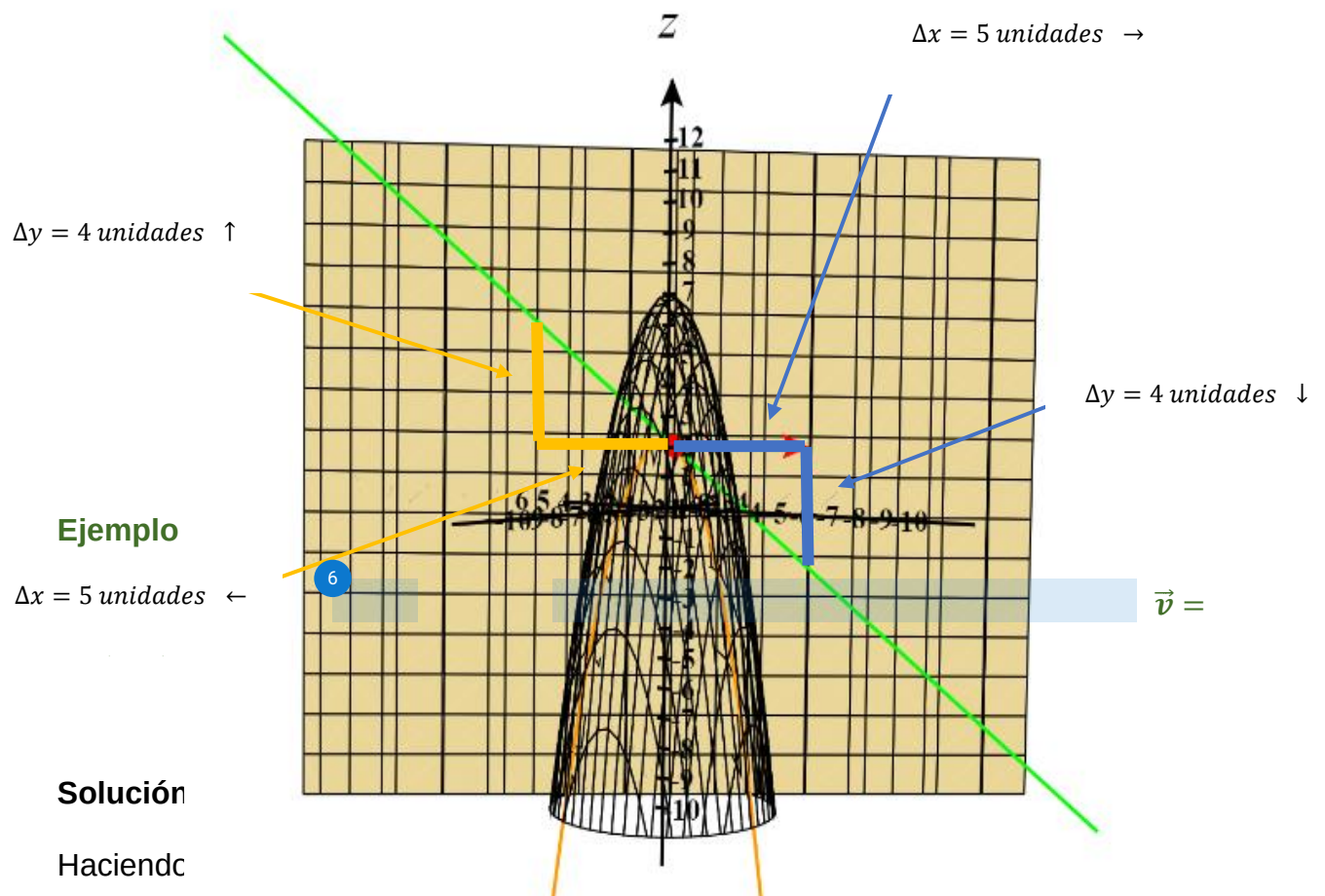
$$x = 2 + t, \quad y = 1 - \frac{4}{3}t, \quad z = 2 - \frac{4}{3}t$$



Para verificar o visualizar la derivada direccional como la pendiente de la tangente a la curva de intersección entre la superficie y el plano de dirección se puede imaginar éste como el plano xy, se sabe que la pendiente de una recta es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, por lo tanto, el numerador es la dirección en que se tendría que mover de forma vertical y el denominador el desplazamiento en la horizontal:

$$D_{\vec{u}}(4,1) = -\frac{4}{5} = \frac{-4}{5} = \frac{4}{-5}$$

- Para el caso $m = \frac{-4}{5}$ el desplazamiento en x será de 5 unidades a la derecha y el desplazamiento en y será de 4 unidades hacia abajo como se muestra en la figura.
- Para el caso $m = \frac{4}{-5}$ el desplazamiento en x será de 5 unidades a la izquierda y el desplazamiento en y será de 4 unidades hacia arriba como se muestra en la figura.



$$\vec{u} = \frac{\langle 3, -4, 1 \rangle}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (1)^2}} = \frac{\langle 3, -4, 1 \rangle}{\sqrt{26}}$$

Se calcula el gradiente de f:

$$f(x, y, z) = 4x^2y - z^2$$

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

$$= (8xy) \hat{i} + (4x^2) \hat{j} - 2z \hat{k}$$

$$\nabla f(x, y, z) = 8xy \hat{i} + 4x^2 \hat{j} - 2z \hat{k}$$

Se evalúa el gradiente en $(-1, 1, 2)$:

$$\nabla f(2, 1) = 8(-1)(1) \hat{i} + 4(-1)^2 \hat{j} - 2(2) \hat{k} = \langle -8, 4, -4 \rangle$$

Por último, se efectúa el producto punto:

$$D_{\vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}$$

$$D_{\vec{u}}(-1, 1, 2) = \nabla f(-1, 1, 2) \cdot \vec{u}$$

$$D_{\vec{u}}(-1,1,2) = \langle -8, 4, -4 \rangle \cdot \frac{\langle 3, -4, 1 \rangle}{\sqrt{26}} = \frac{-24 - 16 - 4}{\sqrt{26}}$$

$$D_{\vec{u}}(-1, 1, 2) = -\frac{44}{\sqrt{26}}$$

Propiedades:

Sea f una función de x , y y z , con derivadas parciales de primer orden continuas. La derivada direccional de f en dirección de un vector unitario $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ viene dada por:

$$D_{\vec{u}}f(x, y, z) = af_x(x, y, z) + bf_y(x, y, z) + cf_z(x, y, z)$$

El gradiente de f se define como:

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\hat{i} + f_y(x, y, z)\hat{j} + f_z(x, y, z)\hat{k}$$

Las propiedades del gradiente son:

1. $D_{\vec{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u}$
2. Si $\nabla f(x, y, z) = \vec{0}$, entonces $D_{\vec{u}}f(x, y, z) = 0$ para todo $\vec{u}$.
3. La dirección de máximo incremento de f está dada por $\nabla f(x, y, z)$. El valor máximo de $D_{\vec{u}}f(x, y, z)$ es $\|\nabla f(x, y, z)\|$
4. La dirección de mínimo incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y, z)$. El valor mínimo de $D_{\vec{u}}f(x, y, z)$ es $-\|\nabla f(x, y, z)\|$.

Ejemplo 3:

6 Una superficie de una montaña se modela mediante la ecuación:

$$h(x, y) = 4800 - 0.002x^2 - 0.003y^2$$

6 Un montañista se encuentra en el punto $(450, 320, 4087.8)$. ¿En qué dirección debe moverse para ascender con la mayor rapidez posible?

SOLUCIÓN:

1 Calculamos el gradiente ya que la *dirección de máximo incremento* la proporciona éste:

$$h(x, y) = 4800 - 0.002x^2 - 0.003y^2$$

$$\nabla h(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{j} = (-0.004x) \hat{i} + (-0.006y) \hat{j}$$

$$\nabla h(500, 400) = (-0.004(450)) \hat{i} + (-0.006(320)) \hat{j}$$

$$\nabla h(450, 320) = -1.8 \hat{i} - 1.92 \hat{j}$$

3.8 ²Valores extremos de funciones de ¹varias variables, plano tangente y recta normal a una superficie.

Plano tangente y recta normal a una superficie

Como ya sabemos el gradiente de $w = f(x, y, z)$ viene dado por:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

Recordando que ¹el gradiente es perpendicular a las curvas o superficies de nivel. Veamos esto a través de una función en $\mathcal{R}^4$ (esto es, una función que depende de 3 variables)

$$f(x, y, z) = 4 - x^2 - y^2 - z$$

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla f(x, y, z) = -2x\hat{i} - 2y\hat{j} - \hat{k}$$

Al igualar f a una constante se obtiene una superficie de nivel. A continuación, se le asignaran 2 valores a la función y en determinado punto se grafica el gradiente correspondiente a la superficie de nivel:

Sea $f(x, y, z) = 0$ o $w = 0$:

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{Superficie de nivel}$$

$$0 = 4 - x^2 - y^2 - z$$

Si despejamos z podemos ver que la superficie de nivel correspondiente es un paraboloides que abre hacia abajo cuyo vértice está en $(0,0,4)$.

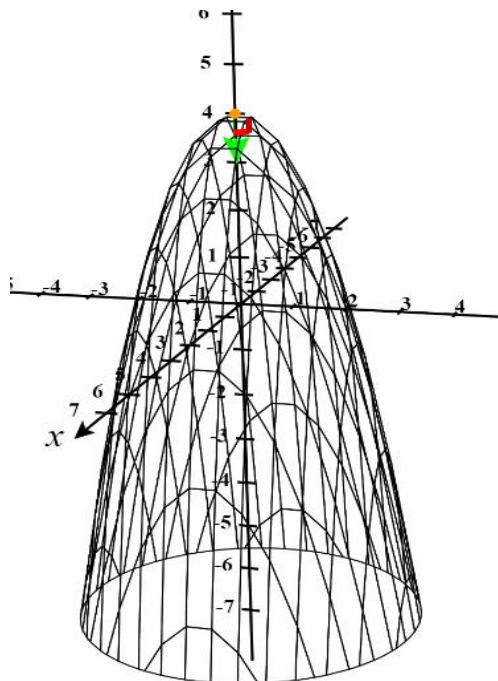
$$z = 4 - x^2 - y^2$$

Ahora evaluando el gradiente en ese punto:

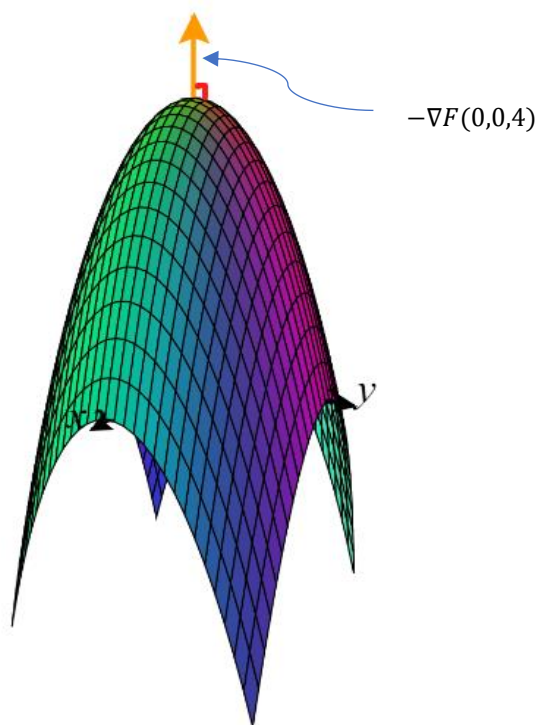
$$\nabla F(x, y, z) = -2x\hat{i} - 2y\hat{j} - \hat{k}$$

$$\nabla F(0,0,4) = 0\hat{i} + 0\hat{j} - \hat{k}$$

Al graficar “ z ” y su respectivo gradiente en $(0,0,4)$ se observa que el gradiente efectivamente es normal a la superficie:



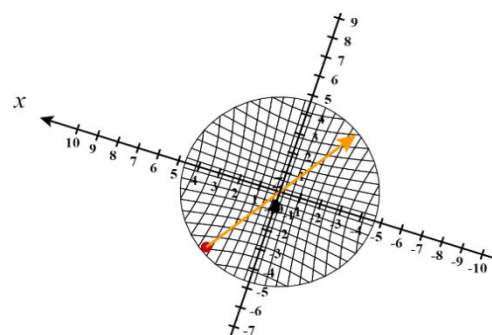
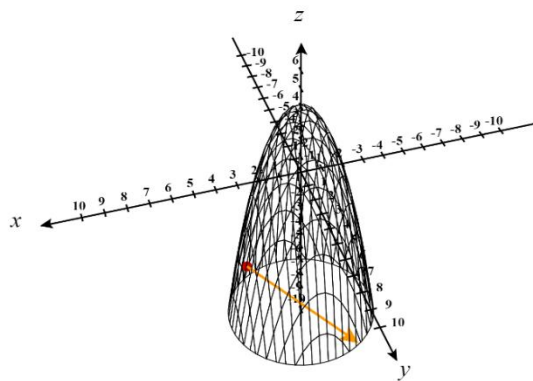
Para observar con más claridad lo anterior se multiplica el gradiente por -1:



Tomando otro punto y evaluando el gradiente:

$$\nabla F(x, y, z) = -2x\hat{i} - 2y\hat{j} - \hat{k}$$

$$\nabla F(2, -3, -9) = -4\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$$



Sea $f(x,y,z) = 3$ o $w = 3$:

$f(x,y,z) = 3$ Superficie de nivel

$$3 = 4 - x^2 - y^2 - z$$

Si se despeja z se puede ver que la superficie de nivel correspondiente es un paraboloides que abre hacia abajo cuyo vértice está en $(0,0,1)$.

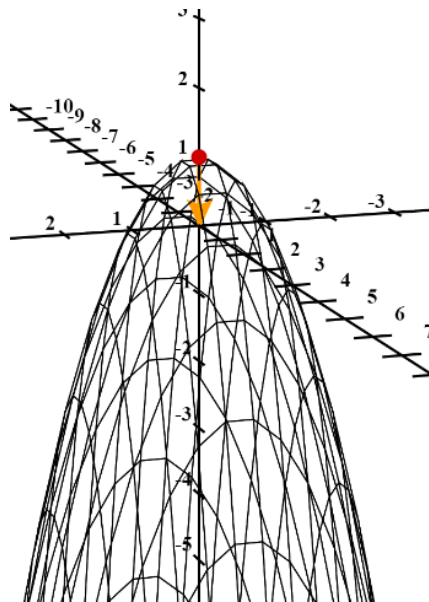
$$z = 1 - x^2 - y^2$$

Ahora se evalúa el gradiente en ese punto:

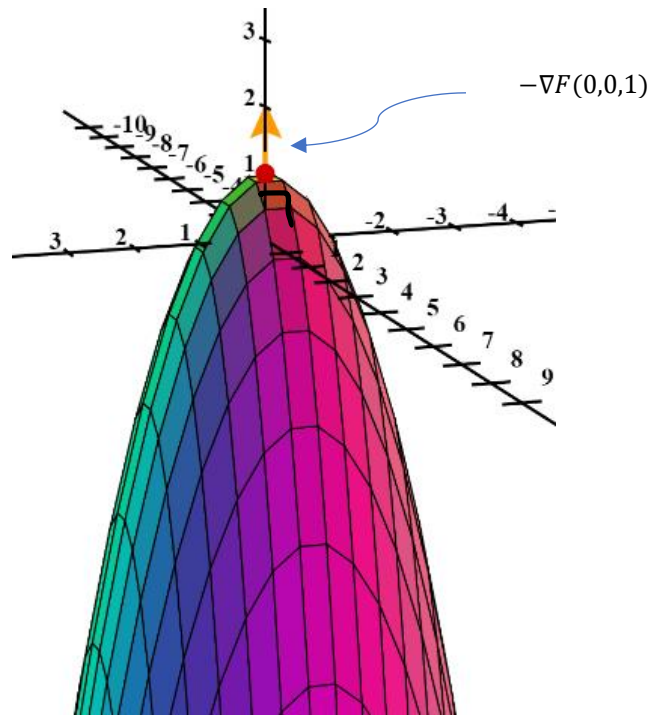
$$\nabla F(x,y,z) = -2x\hat{i} - 2y\hat{j} - \hat{k}$$

$$\nabla F(0,0,1) = 0\hat{i} + 0\hat{j} - \hat{k}$$

Al graficar “ z ” y su respectivo gradiente en $(0,0,1)$ se observa que el gradiente efectivamente es normal a la superficie:

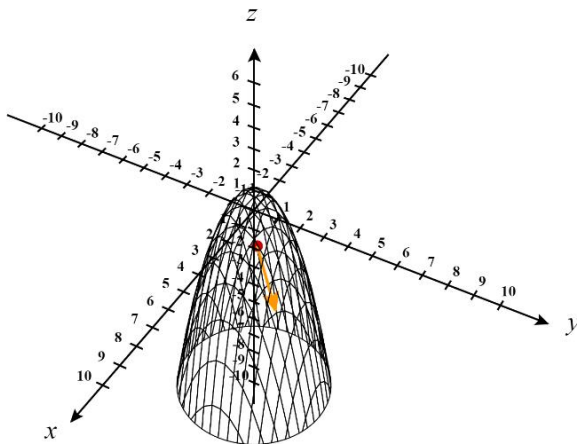


Para observar con más claridad lo anterior se multiplica el gradiente por -1:

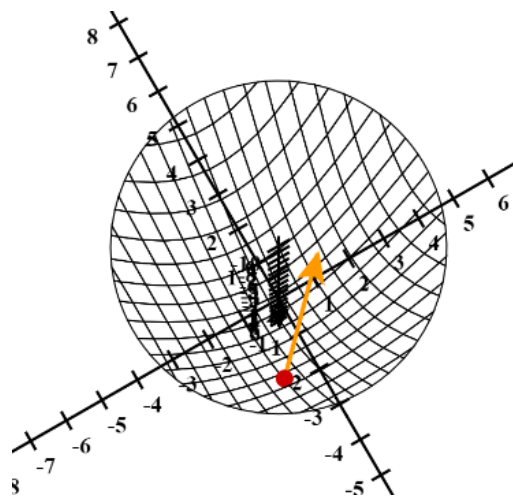


Tomemos otro punto y evaluemos el gradiente:

$$\nabla F(x, y, z) = -2x\hat{i} - 2y\hat{j} - \hat{k}$$



$$\nabla F(-2, -1, -4) = 4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$



Una vez que entendimos que el gradiente es normal a las superficies de nivel, nos será posible determinar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta normal a una superficie en cierto punto, así como una ecuación del plano tangente a dicha superficie.

$$z = f(x, y)$$

Igualamos a cero la expresión, esto con el fin de considerarlo como una superficie de nivel:

$$0 = \underbrace{f(x, y) - z}_{F(x, y, z)}$$

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k}$$

1 Plano tangente a una superficie:

Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0, z_0) viene dado por:

$$\vec{n} = \nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k} \quad \text{y} \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y + \frac{\partial F}{\partial z} z = \nabla F(x, y, z) \cdot \vec{P}_0$$

1 Recta normal a una superficie:

Un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0, z_0) vienen dadas por:

$$\vec{v} = \nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k} \quad \text{y} \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$x = x_0 + \frac{\partial F}{\partial x} t$$

$$y = y_0 + \frac{\partial F}{\partial y} t$$

$$z = z_0 + \frac{\partial F}{\partial z} t$$

EJEMPLO 1

1 Determine una ecuación para el plano tangente a la superficie dada en el punto indicado, así como la recta normal a la superficie en ese mismo punto:

$$f(x, y) = -3 + x^2 + y^2 \quad \text{en} \quad (-2, 3, 10)$$

Solución:

Calculando y evaluando en el punto indicado a $\nabla F(x, y, z)$:

$$z = -3 + x^2 + y^2$$

$$0 = \underbrace{f(x, y) - z}_{F(x, y, z)}$$

$$0 = -3 + x^2 + y^2 - z$$

$$F(x, y, z) = -3 + x^2 + y^2 - z$$

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} - \hat{k}$$

$$\nabla F(-2, 3, 10) = 2(-2)\hat{i} + 2(3)\hat{j} - \hat{k}$$

$$\nabla F(-2, 3, 10) = -4\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$$

Plano tangente:

$$\vec{n} = \nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k} \quad \text{y} \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y + \frac{\partial F}{\partial z} z = \nabla F(x, y, z) \cdot \vec{P_0}$$

$$\vec{n} = \nabla F(-2, 3, 10) = -4\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k} \quad P_0 = (-2, 3, 10)$$

$$-4x + 6y - z = \langle -4, 6, -1 \rangle \cdot \langle -2, 3, 10 \rangle$$

$$-4x + 6y - z = 8 + 18 - 10$$

$$\mathbf{-4x + 6y - z = 16}$$

Recta Normal:

$$\vec{v} = \nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{k} \quad \gamma \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$x = x_0 + \frac{\partial F}{\partial x}t$$

$$y = y_0 + \frac{\partial F}{\partial y}t$$

$$z = z_0 + \frac{\partial F}{\partial z}t$$

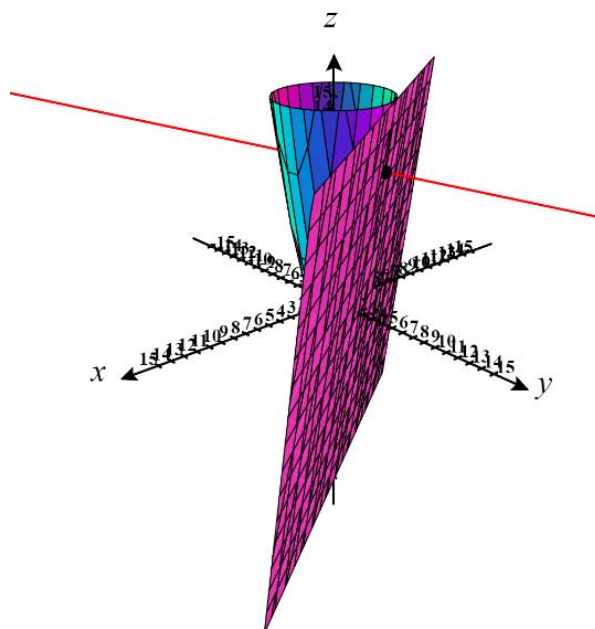
$$\vec{v} = \nabla F(-2, 3, 10) = -4\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k} \quad P_0 = (-2, 3, 10)$$

$$x = x_0 + \frac{\partial F}{\partial x}t \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = -2 - 4t}$$

$$y = y_0 + \frac{\partial F}{\partial y}t \quad \rightarrow \quad \mathbf{y = 3 + 6t}$$

$$z = z_0 + \frac{\partial F}{\partial z}t \quad \rightarrow \quad \mathbf{z = 10 - t}$$

Graficando se tiene:



EJEMPLO 2:

- 1 Determine una ecuación para el plano tangente a la superficie dada en el punto indicado, así como la recta normal a la superficie en ese mismo punto:

$$f(x, y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2} \quad \text{en} \quad (3, 2, \sqrt{23})$$

Solución:

Calculamos y evaluamos en el punto indicado a $\nabla F(x, y, z)$:

$$z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$$

$$0 = \underbrace{f(x, y) - z}$$

$$F(x, y, z)$$

$$0 = \sqrt{36 - x^2 - y^2} - z$$

$$F(x, y, z) = \sqrt{36 - x^2 - y^2} - z$$

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2 - y^2}} \hat{i} + \frac{-2y}{2\sqrt{36 - x^2 - y^2}} \hat{j} - \hat{k}$$

$$\nabla F(x, y, z) = -\frac{x}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}} \hat{i} - \frac{y}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}} \hat{j} - \hat{k}$$

$$\nabla F(3, 2, \sqrt{23}) = -\frac{3}{\sqrt{23}} \hat{i} - \frac{2}{\sqrt{23}} \hat{j} - \hat{k}$$

Plano tangente:

$$\vec{n} = \nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k} \quad \text{y} \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y + \frac{\partial F}{\partial z} z = \nabla F(x, y, z) \cdot \vec{P_0}$$

$$\vec{n} = \nabla F(3, 2, \sqrt{23}) = -\frac{3}{\sqrt{23}} \hat{i} - \frac{2}{\sqrt{23}} \hat{j} - \hat{k} \quad P_0 = (3, 2, \sqrt{23})$$

$$-\frac{3}{\sqrt{23}}x - \frac{2}{\sqrt{23}}y - z = \langle -\frac{3}{\sqrt{23}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{23}}\hat{j} - \hat{k} \rangle \cdot \langle 3\hat{i} + 2\hat{j} + \sqrt{23}\hat{k} \rangle$$

$$-\frac{3}{\sqrt{23}}x - \frac{2}{\sqrt{23}}y - z = -\frac{9}{\sqrt{23}} - \frac{4}{\sqrt{23}} - \sqrt{23}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{23}}x - \frac{2}{\sqrt{23}}y - z = -\frac{13}{\sqrt{23}} - \sqrt{23}$$

Multiplicando por $\sqrt{23}$:

$$-3x - 2y - \sqrt{23}z = -13 - 23$$

$$-3x - 2y - \sqrt{23}z = -36$$

$$3x + 2y + \sqrt{23}z = 36$$

Recta Normal:

$$\vec{v} = \nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{k} \quad y \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$x = x_0 + \frac{\partial F}{\partial x}t$$

$$y = y_0 + \frac{\partial F}{\partial y}t$$

$$z = z_0 + \frac{\partial F}{\partial z}t$$

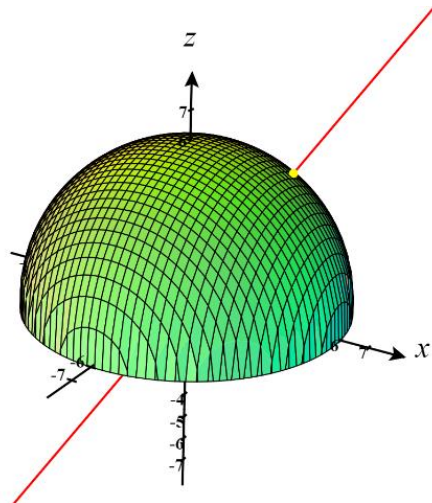
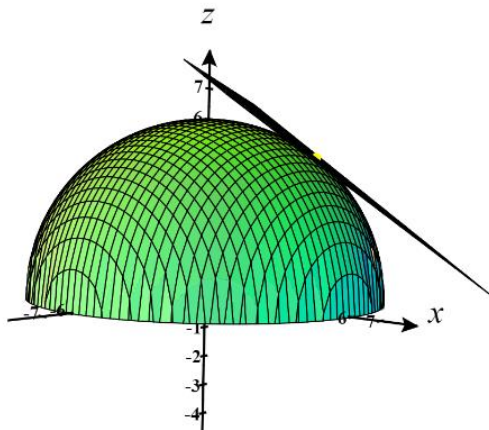
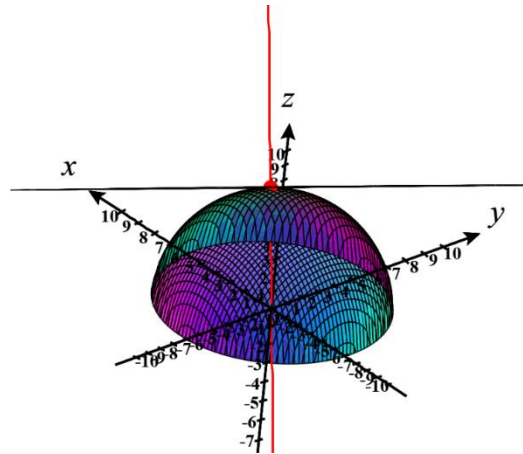
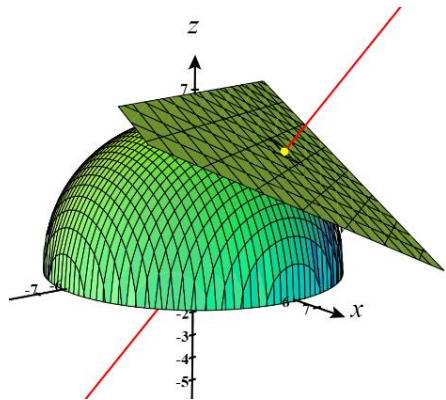
$$\vec{v} = \nabla F(-2, 3, 10) = -\frac{3}{\sqrt{23}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{23}}\hat{j} - \hat{k} \quad P_0 = (3, 2, \sqrt{23})$$

$$x = x_0 + \frac{\partial F}{\partial x} t \quad \rightarrow \quad x = 3 - \frac{3}{\sqrt{23}} t \quad \text{o bien, } x = 3 - 3t$$

$$y = y_0 + \frac{\partial F}{\partial y} t \quad \rightarrow \quad y = 2 - \frac{2}{\sqrt{23}} t \quad \text{o bien, } y = 2 - 2t$$

$$z = z_0 + \frac{\partial F}{\partial z} t \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{23} - t \quad \text{o bien, } z = \sqrt{23} - \sqrt{23}t$$

Graficando se tiene:



EJEMPLO 3

- 1 Determine una ecuación para el plano tangente a la superficie dada en el punto indicado, así como la recta normal a la superficie en ese mismo punto:

$$4x^2 + 36y^2 - 16z^2 = 64 \text{ en } (7,1,3.24)$$

Solución:

$$4x^2 + 36y^2 - 16z^2 - 64 = 0$$

Calculamos y evaluamos en el punto indicado a $\nabla F(x, y, z)$:

$$F(x, y, z) = 4x^2 + 36y^2 - 16z^2 - 64$$

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla F(x, y, z) = 8x\hat{i} + 72y\hat{j} - 32z\hat{k}$$

$$\nabla F(7,1,3.24) = 8(7)\hat{i} + 72(1)\hat{j} - 32(3.24)\hat{k}$$

$$\nabla F(7, 1, 3.24) = 56\hat{i} + 72\hat{j} - 103.68\hat{k}$$

Plano tangente:

$$\vec{n} = \nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k} \quad \text{y} \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y + \frac{\partial F}{\partial z}z = \nabla F(x, y, z) \cdot \vec{P_0}$$

$$\vec{n} = \nabla F(7,1,3.24) = 56\hat{i} + 72\hat{j} - 103.68\hat{k} \quad P_0 = (7,1,3.24)$$

$$56x + 72y - 103.68z = (56\hat{i} + 72\hat{j} - 103.68\hat{k}) \cdot (7\hat{i} + \hat{j} + 3.24\hat{k})$$

$$56x + 72y - 103.68z = 128.07$$

Recta Normal:

$$\vec{v} = \nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{k} \quad \text{y} \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$x = x_0 + \frac{\partial F}{\partial x}t$$

$$y = y_0 + \frac{\partial F}{\partial y}t$$

$$z = z_0 + \frac{\partial F}{\partial z}t$$

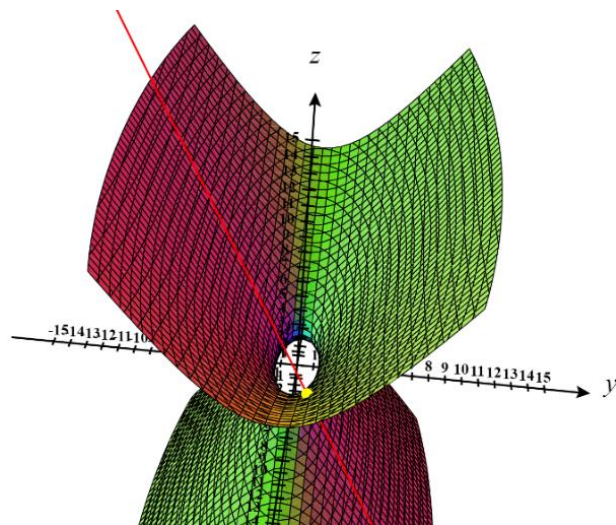
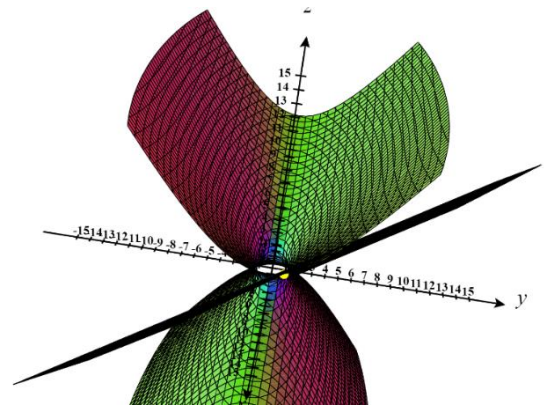
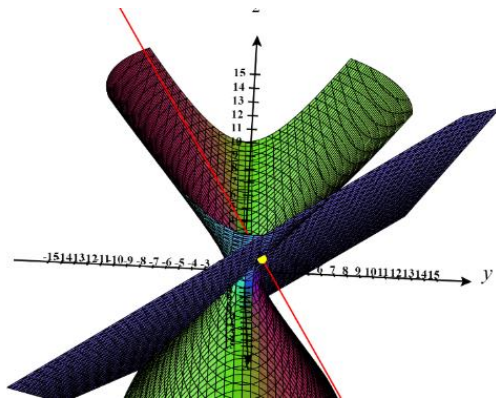
$$\vec{v} = \nabla F(7,1,3.24) = 56\hat{i} + 72\hat{j} - 103.68\hat{k} \quad P_0 = (7,1,3.24)$$

$$x = x_0 + \frac{\partial F}{\partial x}t \quad \rightarrow \quad x = 7 + 56t$$

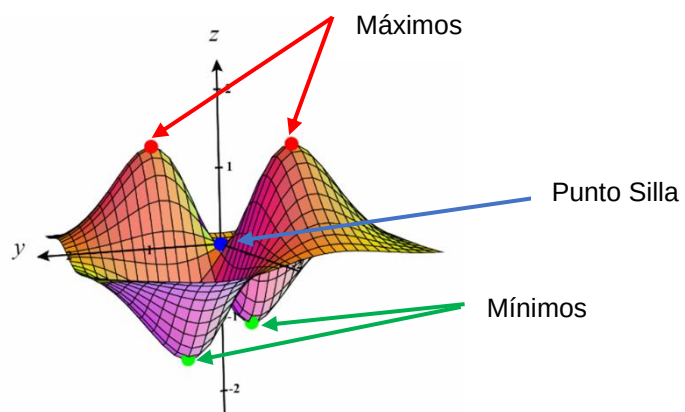
$$y = y_0 + \frac{\partial F}{\partial y}t \quad \rightarrow \quad y = 1 + 72t$$

$$z = z_0 + \frac{\partial F}{\partial z}t \quad \rightarrow \quad z = 3.24 - 103.68t$$

Graficando se tiene:



Extremos relativos



Para encontrar los valores extremos de una superficie dada por $z = f(x, y)$ igualamos el gradiente a cero, esto es:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

3 Criterio de las segundas derivadas parciales

Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene un punto (a, b) para el cual:

$$f_x(a, b) = 0 \quad y \quad f_y(a, b) = 0$$

Para buscar los extremos relativos de f , considérese la cantidad:

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

1. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene un **mínimo relativo** en (a, b) .
2. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene un **máximo relativo** en (a, b) .
3. Si $d < 0$, entonces f tiene un **punto silla**.
4. Si $d = 0$ el criterio no lleva a ninguna conclusión.

EJEMPLO 4

Determinar los máximos o mínimos de $f(x, y) = 7 - x^2 - y^2$

Solución:

$$f_x(x, y) = 0 \quad y \quad f_y(x, y) = 0$$

$$f_x(x, y) = -2x = 0 \quad \therefore \quad x = 0$$

$$f_y(x, y) = -2y = 0 \quad \therefore \quad y = 0$$

Si $x = 0$ y $y = 0$, entonces $z = 7$

$$f(0, 0) = z = 7 - 0^2 - 0^2 = 7$$

Por lo tanto, ya se tiene un punto crítico:

$$(0, 0, 7)$$

Ahora analizamos si se trata de un máximo, mínimo o punto silla.

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$f_{xx}(x, y) = -2 \quad y \quad f_{yy}(x, y) = -2$$

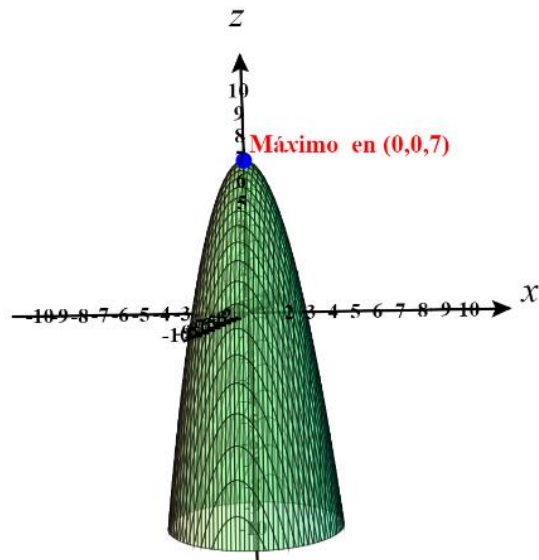
$$f_{xx}(0, 0) = -2 \quad y \quad f_{yy}(0, 0) = -2$$

$$f_{xy}(x, y) = 0 \quad y \quad f_{xy}(0, 0) = 0$$

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$d = (-2)(-2) - (0)^2 = 4 > 0$$

Como $d = 4 > 0$ y $f_{xx}(0, 0) = -2 < 0$, entonces se trata de un máximo. Entonces se tiene un **máximo en (0, 0, 7)**



EJEMPLO 5

Determinar los máximos, mínimos o puntos silla de $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + 1$

Solución:

$$f_x(x, y) = 0 \quad y \quad f_y(x, y) = 0$$

$$f_x(x, y) = 2y - 2x^3 = 0$$

$$f_y(x, y) = 2x - 2y^3 = 0$$

Por resolver:

$$2y - 2x^3 = 0 \quad \rightarrow \quad y - x^3 = 0$$

$$2x - 2y^3 = 0 \quad \rightarrow \quad x - y^3 = 0$$

3

De la primera ecuación se despeja “y” y se sustituye en la segunda ecuación:

$$y - x^3 = 0 \rightarrow y = x^3$$

$$x - y^3 = 0 \quad \therefore \quad x - (x^3)^3 = 0$$

$$x - x^9 = 0$$

$$x(1 - x^8) = 0$$

$$x(1 - x^4)(1 + x^4) = 0$$

$$x(1 - x^2)(1 + x^2)(1 + x^4) = 0$$

$$x(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = 0$$

Por lo tanto, los ceros de la ecuación son:

$$x = 0, \quad x = 1 \quad y \quad x = -1$$

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow y = x^3 \quad y = 0$$

$$\text{Si } x = 1 \rightarrow y = x^3 \quad y = 1$$

$$\text{Si } x = -1 \rightarrow y = x^3 \quad y = -1$$

Como se encontraron 3 valores críticos, entonces los puntos críticos son:

$$f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + 1$$

$$f(0,0) = 2(0)(0) - \frac{1}{2}((0)^4 + (0)^4) + 1 = 1 \quad \therefore \quad P_1(0,0,1)$$

$$f(1,1) = 2(1)(1) - \frac{1}{2}((1)^4 + (1)^4) + 1 = 2 - 1 + 1 = 2 \quad \therefore \quad P_2(1,1,2)$$

$$f(-1, -1) = 2(-1)(-1) - \frac{1}{2}((-1)^4 + (-1)^4) + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$$

$$\therefore P_3(-1, -1, 2)$$

Ahora determinamos si se tratan de máximos, mínimos o puntos silla:

10 $P_1(0, 0, 1)$:

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$f_x(x, y) = 2y - 2x^3$$

$$f_{xx}(x, y) = -6x^2 \quad f_{xx}(0, 0) = -6(0)^2 = 0$$

$$f_y(x, y) = 2x - 2y^3$$

$$f_{yy}(x, y) = -6y^2 \quad f_{yy}(0, 0) = -6(0)^2 = 0$$

$$f_{xy}(x, y) = 2 \quad f_{xy}(0, 0) = 2$$

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$d = (0)(0) - (2)^2 = -4 < 0$$

Como $d = -4 < 0$, entonces se trata de un punto silla. Se tiene un **punto silla en $(0, 0, 1)$**

$P_2(1, 1, 2)$:

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$f_x(x, y) = 2y - 2x^3$$

$$f_{xx}(x, y) = -6x^2 \quad f_{xx}(1, 1) = -6(1)^2 = -6$$

$$f_y(x, y) = 2x - 2y^3$$

$$f_{yy}(x, y) = -6y^2 \quad f_{yy}(1, 1) = -6(1)^2 = -6$$

$$f_{xy}(x, y) = 2 \quad f_{xy}(1, 1) = 2$$

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$d = (-6)(-6) - (2)^2 = 36 - 4 = 32 > 0$$

Como $d = 32 > 0$ y $f_{xx}(1, 1) = -6 < 0$, entonces se trata de un **MÁXIMO**. Se tiene un **MÁXIMO en (1, 1, 2)**

$P_3(-1, -1, 2)$:

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$f_x(x, y) = 2y - 2x^3$$

$$f_{xx}(x, y) = -6x^2 \quad f_{xx}(-1, -1) = -6(-1)^2 = -6$$

$$f_y(x, y) = 2x - 2y^3$$

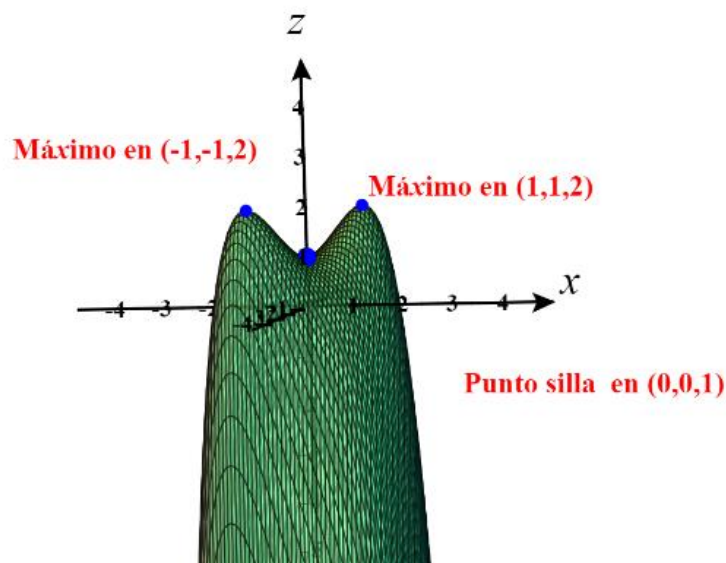
$$f_{yy}(x, y) = -6y^2 \quad f_{yy}(-1, -1) = -6(-1)^2 = -6$$

$$f_{xy}(x, y) = 2 \quad f_{xy}(-1, -1) = 2$$

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$d = (-6)(-6) - (2)^2 = 36 - 4 = 32 > 0$$

Como $d = 32 > 0$ y $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$, entonces se trata de un **MÁXIMO**. Se tiene un **MÁXIMO en (-1, -1, 2)**



EJEMPLO 6

Determinar los máximos, mínimos o puntos silla de $f(x, y) = \frac{7xy}{e^{x^2+y^2}}$

Solución:

$$f(x, y) = \frac{7xy}{e^{x^2+y^2}}$$

$$f_x(x, y) = 0 \quad y \quad f_y(x, y) = 0$$

$$f_x(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2}(7y) - 7xy(2xe^{x^2+y^2})}{(e^{x^2+y^2})^2} = \frac{7ye^{x^2+y^2}(1 - 2x^2)}{(e^{x^2+y^2})^2} = 0$$

$$f_x(x, y) = \frac{7y(1 - 2x^2)}{e^{x^2+y^2}} = 0$$

$$f_y(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2}(7x) - 7xy(2ye^{x^2+y^2})}{(e^{x^2+y^2})^2} = \frac{7xe^{x^2+y^2}(1 - 2y^2)}{(e^{x^2+y^2})^2} = 0$$

$$f_y(x, y) = \frac{7x(1 - 2y^2)}{e^{x^2+y^2}} = 0$$

Resolviendo:

$$f_x(x, y) = \frac{7y(1 - 2x^2)}{e^{x^2+y^2}} = 0 \rightarrow 7y(1 - 2x^2) = 0$$

$$f_y(x, y) = \frac{7x(1 - 2y^2)}{e^{x^2+y^2}} = 0 \rightarrow 7x(1 - 2y^2) = 0$$

$$7y(1 - 2x^2) = 0$$

$$7x(1 - 2y^2) = 0$$

Una solución es cuando $x = y = 0$

Las otras soluciones las encontramos cuando:

$$1 - 2x^2 = 0 \quad y \quad 1 - 2y^2 = 0$$

$$1 - 2x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1 - 2y^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ahora calculamos los puntos críticos una vez que conocemos los valores críticos:

- Para $x = y = 0$:

$$f(x, y) = \frac{7xy}{e^{x^2+y^2}} \rightarrow f(0,0) = 0 \quad \therefore \quad P_1(0, 0, 0)$$

- $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f(x, y) = \frac{7xy}{e^{x^2+y^2}} \rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{\frac{7}{2}}{e^1} = \frac{7}{2e^1}$$

$$\therefore P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2e}\right)$$

- $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f(x, y) = \frac{7xy}{e^{x^2+y^2}} \rightarrow f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{e^{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{\frac{7}{2}}{e^1} = \frac{7}{2e^1}$$

$$\therefore P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2e}\right)$$

- $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f(x, y) = \frac{7xy}{e^{x^2+y^2}} \rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{-\frac{7}{2}}{e^1} = -\frac{7}{2e^1}$$

$$\therefore P_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2e}\right)$$

- $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f(x, y) = \frac{7xy}{e^{x^2+y^2}} \rightarrow f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{e^{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{-\frac{7}{2}}{e^1} = -\frac{7}{2e^1}$$

$$\therefore P_5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2e}\right)$$

Una vez que conocemos los puntos críticos vamos a determinar cuáles son máximos, cuáles mínimos y si hay algún punto silla.

Primero calculamos las segundas derivadas:

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$f_x(x, y) = \frac{7y(1 - 2x^2)}{e^{x^2+y^2}}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2}(7y(-4x)) - 7y(1 - 2x^2)(2xe^{x^2+y^2})}{(e^{x^2+y^2})^2}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{-14xye^{x^2+y^2}(2 + (1 - 2x^2))}{(e^{x^2+y^2})^2} = -\frac{14xy(2 + (1 - 2x^2))}{e^{x^2+y^2}}$$

$$f_{xx}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2x^2))}{e^{x^2+y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{7x(1 - 2y^2)}{e^{x^2+y^2}}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2}7x(-4y) - 7x(1 - 2y^2)(2ye^{x^2+y^2})}{(e^{x^2+y^2})^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{-14xye^{x^2+y^2}(2 + (1 - 2y^2))}{(e^{x^2+y^2})^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2y^2))}{e^{x^2+y^2}}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{7y(1 - 2x^2)}{e^{x^2+y^2}} \right) = \frac{e^{x^2+y^2}(7(1 - 2x^2)) - 7y(1 - 2x^2)(2ye^{x^2+y^2})}{(e^{x^2+y^2})^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{7(1 - 2x^2)e^{x^2+y^2}(1 - 2y^2)}{(e^{x^2+y^2})^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{7(1 - 2x^2)(1 - 2y^2)}{e^{x^2+y^2}}$$

Para $P_1(0, 0, 0)$:

$$f_{xx}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2x^2))}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{xx}(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2y^2))}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{yy}(0,0) = 0$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{7(1 - 2x^2)(1 - 2y^2)}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{xy}(0,0) = 7$$

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$d = (0)(0) - (7)^2 = 0 - 49 = -49 < 0$$

Como $d < 0$, entonces se trata de un **PUNTO SILLA en $(0, 0, 0)$**

Para $P_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2e} \right)$:

$$f_{xx}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2x^2))}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -14$$

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2y^2))}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -14$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{7(1 - 2x^2)(1 - 2y^2)}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$d = (-14)(-14) - (0)^2 = 196 > 0$$

Como $d > 0$ y $f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$, entonces se trata de un **MÁXIMO en $P_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2e} \right)$**

Para $P_3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2e} \right)$:

$$f_{xx}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2x^2))}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -14$$

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2y^2))}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{yy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -14$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{7(1 - 2x^2)(1 - 2y^2)}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$d = (-14)(-14) - (0)^2 = 196 > 0$$

Como $d > 0$ y $f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$, entonces se trata de un **MÁXIMO** en $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2e}\right)$

Para $P_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2e}\right)$:

$$f_{xx}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2x^2))}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 14$$

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2y^2))}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 14$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{7(1 - 2x^2)(1 - 2y^2)}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$d = (14)(14) - (0)^2 = 196 > 0$$

Como $d > 0$ y $f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$, entonces se trata de un **MÍNIMO** en $P_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2e}\right)$

Para $P_5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2e}\right)$:

$$f_{xx}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2x^2))}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 14$$

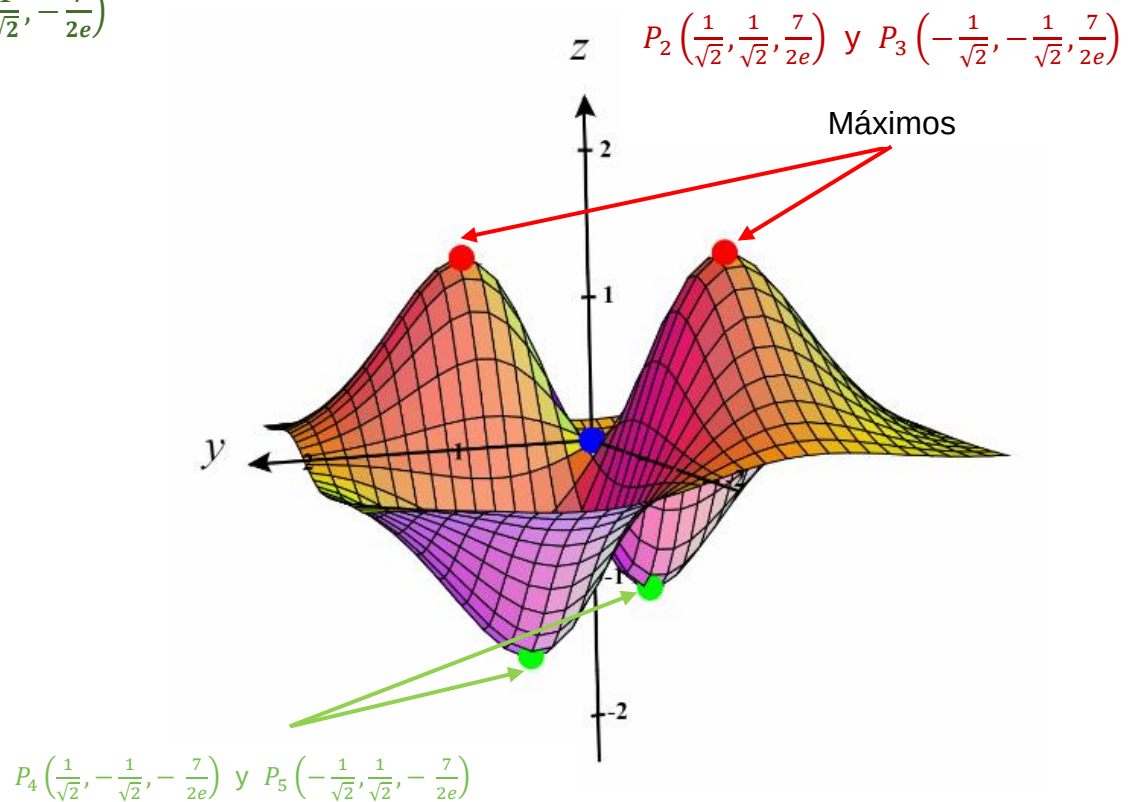
$$f_{yy}(x, y) = -\frac{14xy(2 + (1 - 2y^2))}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{yy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 14$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{7(1 - 2x^2)(1 - 2y^2)}{e^{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad f_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$d = (14)(14) - (0)^2 = 196 > 0$$

Como $d > 0$ y $f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$, entonces se trata de un **MÍNIMO** en $P_5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2e}\right)$



Mínimos

4. Integración múltiple

4.1 Integrales iteradas.

6

Integración múltiple

Integrales Dobles y Triples

Para calcular una integral doble o triple se irá integrando de dentro hacia afuera como se indica a continuación:

9

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dy dx dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz$$

Se puede intercambiar el orden de integración intercambiando los límites al mismo tiempo:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Hay que recordar que la letra que tomaremos como variable es la que indica el diferencial de integración, las demás se considera constante.

Ejemplo 1

Calcular:

$$\int_0^1 \int_{-1}^2 (9x^4y^3 + 5xy^2 + 2x^3 - 8y^2) dy dx$$

Solución:

Se calcula primero la integral más interna:

$$\int_{-1}^2 (9x^4y^3 + 5xy^2 + 2x^3 - 8y^2) dy = \frac{9x^4y^4}{4} + \frac{5xy^3}{3} + 2x^3y - \frac{8y^3}{3} \Big|_{-1}^2$$

$$\int 9x^4y^3 dy = 9x^4 \int y^3 dy = 9x^4 \left(\frac{y^4}{4} \right) + C = \frac{9x^4y^4}{4} + C$$

Como se integró respecto a “y”, esta variable es la que se evalúa:

$$= \left(\frac{9x^4(2)^4}{4} + \frac{5x(2)^3}{3} + 2x^3(2) - \frac{8(2)^3}{3} \right) - \left(\frac{9x^4(-1)^4}{4} + \frac{5x(-1)^3}{3} + 2x^3(-1) - \frac{8(-1)^3}{3} \right)$$

$$= 36x^4 + \frac{40x}{3} + 4x^3 - \frac{64}{3} - \frac{9}{4}x^4 + \frac{5x}{3} + 2x^3 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{135}{4}x^4 + 6x^3 + 15x - 24$$

Una vez calculada la integral se vuelve a integrar, pero ahora respecto a “x”:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_{-1}^2 (9x^4y^3 + 5xy^2 + 2x^3 - 8y^2) dy \right] dx &= \int_0^1 \left[\frac{135}{4}x^4 + 6x^3 + 15x - 24 \right] dx \\ &= \frac{135}{4} \left(\frac{x^5}{5} \right) + 6 \left(\frac{x^4}{4} \right) + 15 \left(\frac{x^2}{2} \right) - 24x \Big|_0^1 = \frac{27}{4}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{15}{2}x^2 - 24x \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{27}{4}(1)^5 + \frac{3}{2}(1)^4 + \frac{15}{2}(1)^2 - 24(1) \right) - \left(\frac{27}{4}(0)^5 + \frac{3}{2}(0)^4 + \frac{15}{2}(0)^2 - 24(0) \right) \\ &= \left(\frac{27}{4} + \frac{3}{2} + \frac{15}{2} - 24 \right) - (0) = \frac{27}{4} + \frac{6}{4} + \frac{30}{4} - \frac{96}{4} = -\frac{33}{4} \end{aligned}$$

Comprobando en WolframAlpha:

<https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/calculus-and-analysis/integrals/>



computational intelligence.

int 9x^4y^3+5xy^2+2x^3-8y^2 dy dx , x=0..1, y=-1..2

Extended Keyboard Upload Examples Random

Definite integral:

$$\int_0^1 \int_{-1}^2 (9x^4y^3 + 5xy^2 + 2x^3 - 8y^2) dy dx = -\frac{33}{4} = -8.25$$

Download Page POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

Ejemplo 2

Calcular:

$$\int_0^9 \int_0^{\frac{y}{3}} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z \, dz \, dx \, dy$$

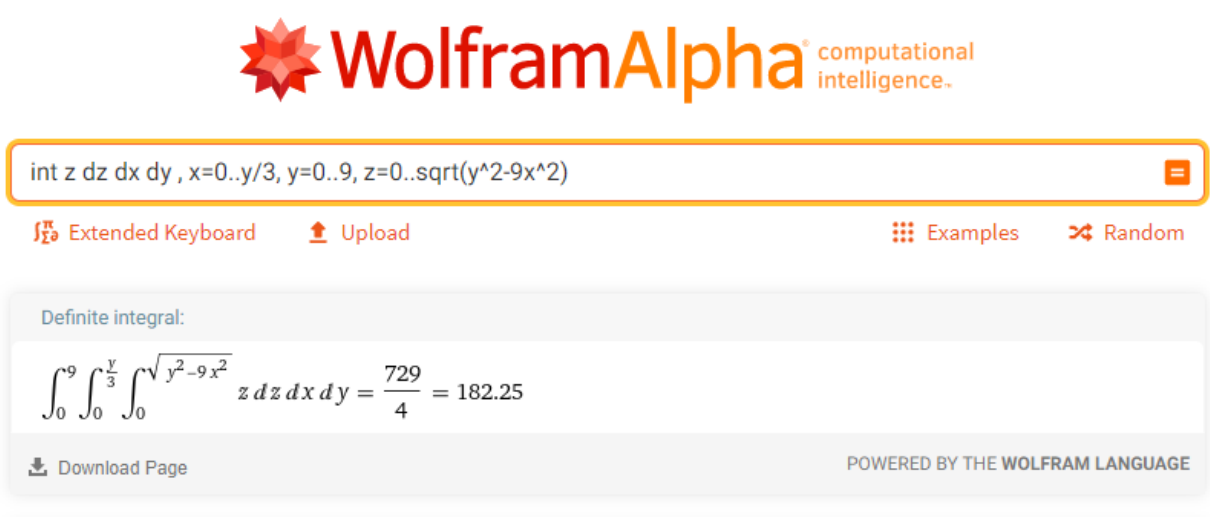
Solución:

Calculamos primero la integral más interna:

$$\begin{aligned} \int_0^9 \int_0^{\frac{y}{3}} \left[\int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z \, dz \right] dx \, dy &= \int_0^9 \int_0^{\frac{y}{3}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} dx \, dy \\ &= \int_0^9 \int_0^{\frac{y}{3}} \left[\frac{(\sqrt{y^2-9x^2})^2}{2} - 0 \right] dx \, dy = \int_0^9 \int_0^{\frac{y}{3}} \left[\frac{y^2-9x^2}{2} \right] dx \, dy \\ &= \int_0^9 \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{y}{3}} (y^2-9x^2) \, dx \right] dy = \int_0^9 \frac{1}{2} \left[xy^2 - 3x^3 \right] \left[\frac{y}{3} \right] dy \\ &= \int_0^9 \frac{1}{2} \left[\left(\left(\frac{y}{3} \right) y^2 - 3 \left(\frac{y}{3} \right)^3 \right) - ((0)y^2 - 3(0)^3) \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^9 \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^3}{9} \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^9 \left[\frac{2y^3}{9} \right] dy = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{9} \right) \int_0^9 y^3 \, dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9} \left[\frac{y^4}{4} \right] \Big|_0^9 = \frac{1}{9} \left[\left(\frac{9^4}{4} \right) - \left(\frac{0^4}{4} \right) \right] = \frac{6561}{36} = \frac{729}{4}$$

Comprobando en WolframAlpha:



The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top is the logo with the text "WolframAlpha computational intelligence". Below it is a search bar containing the input "int z dz dx dy , x=0..y/3, y=0..9, z=0..sqrt(y^2-9x^2)". Below the search bar are links for "Extended Keyboard", "Upload", "Examples", and "Random". The main result area shows the text "Definite integral:" followed by the mathematical expression:
$$\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z \, dz \, dx \, dy = \frac{729}{4} = 182.25$$
At the bottom of the result area, there is a link "Download Page" and the text "POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE".

Ejemplo 3

Calcular:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \theta} 3 r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\cos \theta} 3 r^2 \sin \theta \, dr \right] d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[3 \sin \theta \int_0^{\cos \theta} r^2 \, dr \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[r^3 \sin \theta \Big|_0^{\cos \theta} \right] d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos^3 \theta \sin \theta - 0] d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \theta (-) \sin \theta d\theta = - \frac{\cos^4 \theta}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= - \frac{\cos^4 \left(\frac{\pi}{4} \right)}{4} - \left(- \frac{\cos^4 0}{4} \right) = - \frac{\cos^4 (45^\circ)}{4} + \frac{\cos^4 0}{4} = - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{16}
 \end{aligned}$$

Comprobando en WolframAlpha:



int 3r^2sin(t) dr dt , r=0..cos(t), t=0..Pi/4 =

Extended Keyboard
 Upload
 Examples
 Random

Definite integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos(t)} 3 r^2 \sin(t) \, dr \, dt = \frac{3}{16} = 0.1875$$

Download Page
POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

Ejemplo 4

Calcular:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x y e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xy e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{\infty} \frac{y}{-2} \int_0^{\infty} -2x e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} -\frac{y}{2} e^{-(x^2+y^2)} \Big|_0^{\infty} dy \\
 &= \int_0^{\infty} \left[\left(-\frac{y}{2} e^{-((\infty)^2+y^2)} \right) - \left(-\frac{y}{2} e^{-((0)^2+y^2)} \right) \right] dy = \int_0^{\infty} \left[0 + \left(\frac{y}{2} e^{-y^2} \right) \right] dy \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{y}{2} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2(-2)} \int_0^{\infty} -2y e^{-y^2} dy = -\frac{1}{4} e^{-y^2} \Big|_0^{\infty} \\
 &= -\frac{1}{4} e^{-\infty^2} - \left(-\frac{1}{4} e^{-0^2} \right) = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

Comprobando en WolframAlpha:



int xy e^{-(x^2+y^2)} dx dy , x=0..infinity, y=0..infinity

Extended Keyboard

Upload

Examples

Random

Definite integral:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x y e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{1}{4} = 0.25$$

Download Page

POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

Ejemplo 5

Calcular:

$$\int_0^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+y^2} dy dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+y^2} dy dx &= \int_0^3 x^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy dx = \int_0^3 x^2 \arctan(y) \Big|_0^{\infty} dx \\ &= \int_0^3 x^2 (\arctan(\infty) - \arctan(0)) dx \\ &= \int_0^3 x^2 (\frac{\pi}{2} - 0) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^3 x^2 dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{27}{3} = \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

Observaremos el comportamiento de $\arctan(y)$ dando valores muy grandes al argumento (y):

$$\arctan(1000) = 89.94^\circ$$

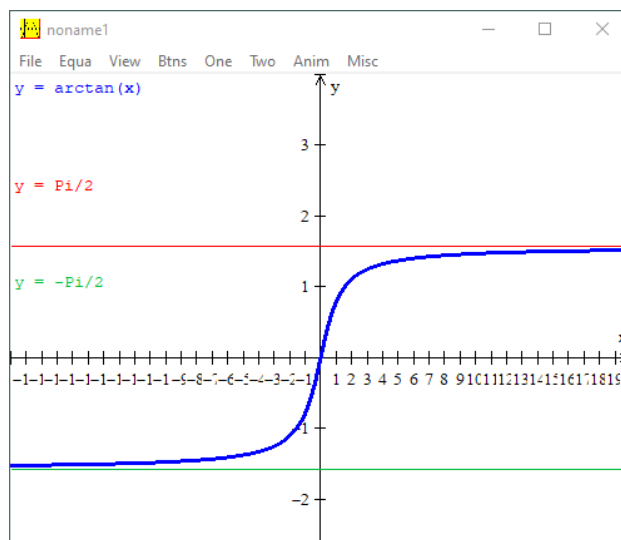
$$\arctan(10000) = 89.994^\circ$$

$$\arctan(100000) = 89.9994^\circ$$

$\vdots$

$$\arctan(\infty) \approx 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

Analizando el comportamiento de $\arctan(y)$ con la gráfica realizada en winplot:



En la gráfica se puede ver que al aumentar el valor de x la función $\arctan(x)$ se aproxima al valor de $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^3 x^2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^3 x^2 dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{\pi x^3}{6} \Big|_0^3 = \frac{9\pi}{2}$$

Comprobando en WolframAlpha:



integrate $x^2/(1+y^2)$ dy dx, x=0..3, y=-0..infinity

Extended Keyboard

Upload

Examples

Random

An attempt was made to fix mismatched parentheses, brackets, or braces.

Definite integral:

[More digits](#)

$$\int_0^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{1+y^2} dy dx = \frac{9\pi}{2} \approx 14.1372$$

Ejemplo 6

Calcular:

$$\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{\frac{1}{xz}} \ln(z) \, dy \, dz \, dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{\frac{1}{xz}} \ln(z) \, dy \, dz \, dx &= \int_1^4 \int_1^{e^2} y \ln(z) \Big|_0^{\frac{1}{xz}} dz \, dx \\ &= \int_1^4 \int_1^{e^2} \frac{\ln(z)}{xz} dz \, dx = \int_1^4 \frac{1}{x} \int_1^{e^2} \frac{\ln(z)}{z} dz \, dx = \int_1^4 \frac{1}{x} \int_1^{e^2} \frac{(\ln(z))^1}{z} dz \, dx \end{aligned}$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^4 \frac{1}{x} \left(\frac{(\ln(z))^2}{2} \right) \Big|_1^{e^2} dx = \int_1^4 \frac{1}{x} \left(\frac{(\ln(e^2))^2}{2} - \frac{(\ln(1))^2}{2} \right) dx \\ &= \int_1^4 \frac{1}{x} \left(\frac{(2\ln(e))^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right) dx = \int_1^4 \frac{1}{x} \left(\frac{(2(1))^2}{2} \right) dx \end{aligned}$$

$$= 2 \int_1^4 \frac{1}{x} dx = 2 \ln(x) \Big|_1^4 = 2 \ln(4) - 2 \ln(1) = 2 \ln(4) = 2 \ln(2^2) = 2(2) \ln(2)$$

$$= 4 \ln(2)$$

Comprobando resultado:

$$\ln(16) = \ln(2^4) = 4 \ln(2)$$

$$\ln(16) = \ln(4^2) = 2 \ln(4)$$



int log(e,z) dy dz dx , x=1..4, z=1..e^2, y=0..1/(xz)

Extended Keyboard Upload Examples compute input

Definite integral: More digits

$$\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{\frac{1}{xz}} \log_e(z) dy dz dx = \log(16) \approx 2.77259$$

$\log_b(x)$ is the base- b logarithm
 $\log(x)$ is the natural logarithm

Download Page POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

Ejemplo 7

Calcular:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y}{2}} \int_0^{\frac{1}{y}} \text{sen}(y) dz dx dy$$

Solución:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y}{2}} \int_0^{\frac{1}{y}} \text{sen}(y) dz dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y}{2}} z \text{sen}(y) \Big|_0^{\frac{1}{y}} dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y}{2}} \left[\left(\frac{1}{y} \right) \operatorname{sen}(y) - 0 \right] dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y}{2}} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} dx dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{x \operatorname{sen}(y)}{y} \right|_0^{\frac{y}{2}} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(\frac{y}{2} \right) \operatorname{sen}(y)}{y} - 0 \right] dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(y) dy = -\frac{\cos(y)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \left(-\frac{\cos(0)}{2} \right) = -\frac{0}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Comprobando resultado:



int sin(y) dz dx dy , x=0..y/2, y=0..Pi/2, z=0..1/y

Extended Keyboard

Upload

Examples

Random

Definite integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y}{2}} \int_0^{\frac{1}{y}} \sin(y) dz dx dy = \frac{1}{2} = 0.5$$

Download Page

POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

Ejemplo 8

Calcular:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} y dz dy dx$$

Solución:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} y dz dy dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} yz \Big|_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} [y(4-y^2) - y(2x^2+y^2)] dy dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} [4y - y^3 - 2x^2y - y^3] dy dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} [4y - 2y^3 - 2x^2y] dy dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left[2y^2 - \frac{1}{2}y^4 - x^2y^2 \right] \Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left[2(\sqrt{2-x^2})^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2-x^2})^4 - x^2(\sqrt{2-x^2})^2 - 0 \right] dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left[2(2-x^2) - \frac{1}{2}(2-x^2)^2 - x^2(2-x^2) \right] dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left[4-2x^2 - 2 + 2x^2 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x^4 \right] dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left[2 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 \right] dx = 2x + \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{2}} \\
&= 2\sqrt{2} + \frac{1}{10}(\sqrt{2})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 - 0 = \sqrt{2} \left[2 + \frac{1}{10}(\sqrt{2})^4 - \frac{2}{3}(\sqrt{2})^2 \right] \\
&= \sqrt{2} \left[2 + \frac{1}{10}(4) - \frac{2}{3}(2) \right] = \sqrt{2} \left(\frac{16}{15} \right) = \frac{16}{15}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Comprobando resultado:

 **WolframAlpha**[®] computational intelligence.

int y dz dy dx , x=0..sqrt(2), y=0..sqrt(2-x^2), z=2x^2+y^2..4-y^2

 Extended Keyboard
 Upload
 Examples
 compute input

Definite integral: More digits

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} y dz dy dx = \frac{16\sqrt{2}}{15} \approx 1.50849$$

 Download Page POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

4.2 Integral doble en coordenadas rectangulares y cálculo de áreas planas.

Áreas

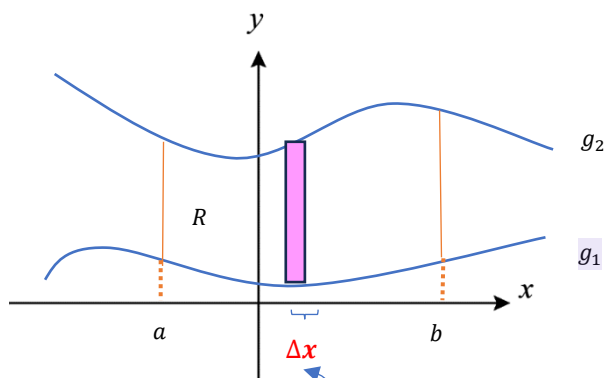
Para el cálculo de áreas se tienen dos opciones:

CASO I: Cuando los rectángulos se construyen de forma vertical.

La región está delimitada por:

$$a \leq x \leq b$$

$$g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$



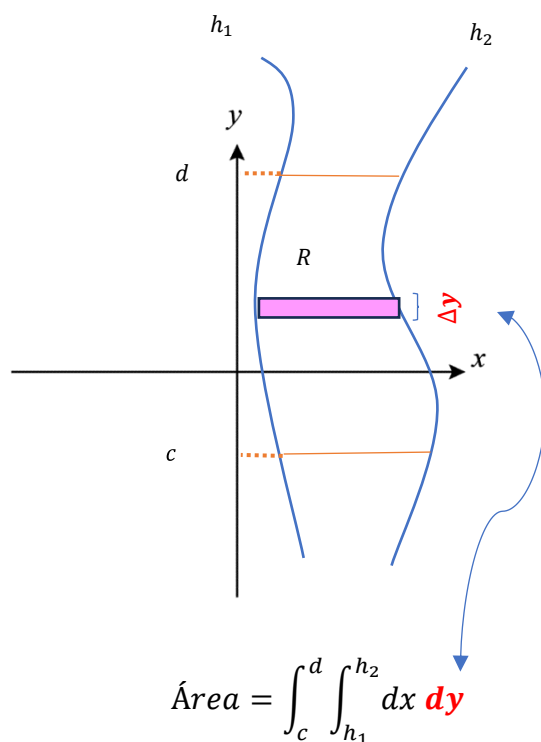
$$\text{Área} = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} dy \, dx$$

CASO II: Cuando los rectángulos se construyen de forma horizontal.

La región está delimitada por:

$$c \leq y \leq d$$

$$h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$



NOTA: Para decidir que nos conviene más, si rectángulos verticales o bien horizontales debemos procurar que todas las bases superiores (o derecha) de los rectángulos descansen sobre una sola función, lo mismo con la base inferior (o izquierda) de los rectángulos.

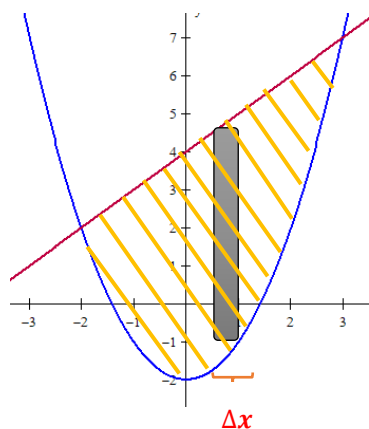
EJEMPLO 1

2 Calcular el área de la región limitada por las gráficas de las siguientes funciones:

$$f(x) = x + 4 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 2$$

Solución:

Para este caso conviene realizar los rectángulos verticales y al calcular los límites de integración se igualan las funciones:



$$23 \quad x^2 - 2 = x + 4$$

$$x^2 - 2 - x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 3 \quad \text{y} \quad x = -2$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^3 \int_{x^2-2}^{x+4} dy \, dx = \int_{-2}^3 y \Big|_{x^2-2}^{x+4} dx$$

$$\int_{-2}^3 ((x + 4) - (x^2 - 2)) dx = \int_{-2}^3 (x + 4 - x^2 + 2) dx$$

$$= \int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \Big|_{-2}^3$$

$$= \left(-\frac{(3)^3}{3} + \frac{(3)^2}{2} + 6(3) \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) \right)$$

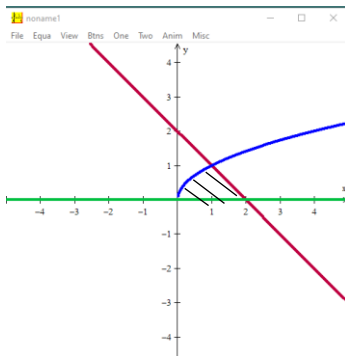
$$= -9 + \frac{9}{2} + 18 - \frac{8}{3} - 2 + 12 = 19 + \frac{11}{6} = \frac{125}{6} u^2$$

EJEMPLO 2

27 Calcular el área de la región limitada por las gráficas de las siguientes funciones:

$$f(x) = 2 - x, \quad g(x) = \sqrt{x} \quad y \quad h(x) = 0$$

Solución:



$$f(x) = 2 - x, \quad g(x) = \sqrt{x} \quad y \quad h(x) = 0$$

Considerando los rectángulos horizontales:

$$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$$

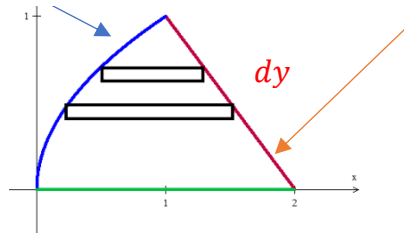
$$y = 2 - x \rightarrow x = 2 - y$$

$$y^2 = 2 - y$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y + 2)(y - 1) = 0$$

$$y = 1 \quad y = -2$$



$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} dx dy = \int_0^1 x \Big|_{y^2}^{2-y} dy = \int_0^1 (2 - y - y^2) dy$$

$$2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

Considerando los rectángulos verticales:

Intersección entre las curvas:

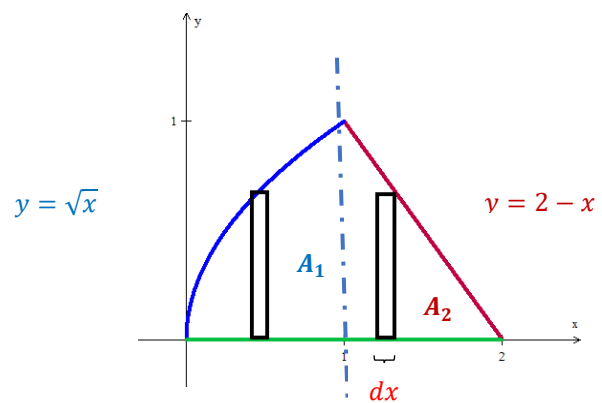
$$\sqrt{x} = 2 - x$$

$$(\sqrt{x} = 2 - x)^2$$

$$x = 4 - 4x + x^2$$

$$0 = 4 - 4x + x^2 - x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$



$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ y } x = 4$$

Intersección entre la recta y el eje x:

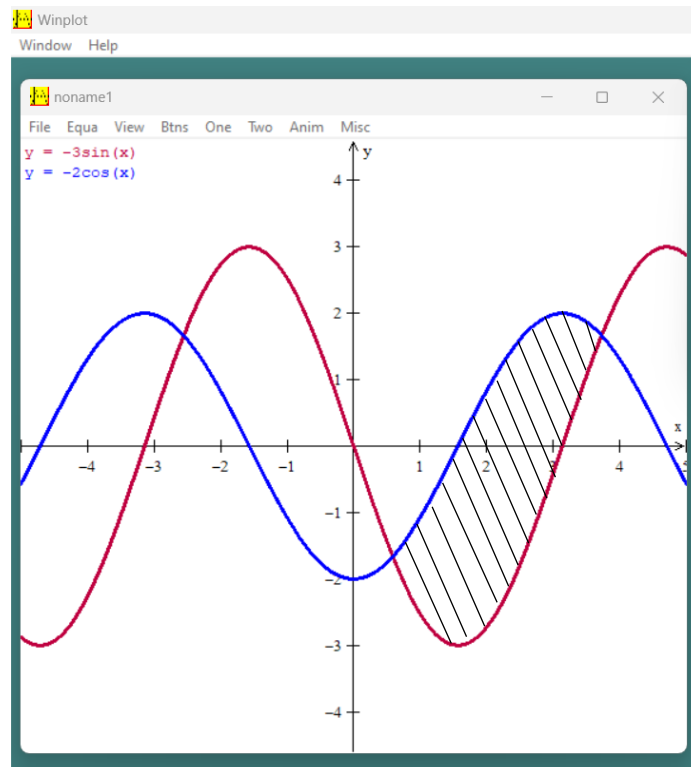
$$2 - x = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\underbrace{\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx}_{A_1} + \underbrace{\int_1^2 \int_0^{2-x} dy dx}_{A_2} = \int_0^1 y \Big|_0^{\sqrt{x}} dx + \int_1^2 y \Big|_0^{2-x} dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{2}{3} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} u^2$$

EJEMPLO 3

Calcula el área indicada en la siguiente gráfica:



Solución:

A continuación, se calculan los puntos de intersección entre ambas curvas:

$$-3\operatorname{sen} x = -2 \cos x$$

$$\frac{-3\operatorname{sen} x}{\cos x} = -2$$

$$\tan x = \frac{-2}{-3}$$

$$\tan x = \frac{2}{3}$$

$$x = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69^\circ = 0.588$$

El semiperiodo de las funciones es $\frac{T}{2} = \pi$

$$0.588 + \frac{T}{2} = 0.588 + \pi = 3.73$$

Por lo tanto, el área indicada en la gráfica dada es:

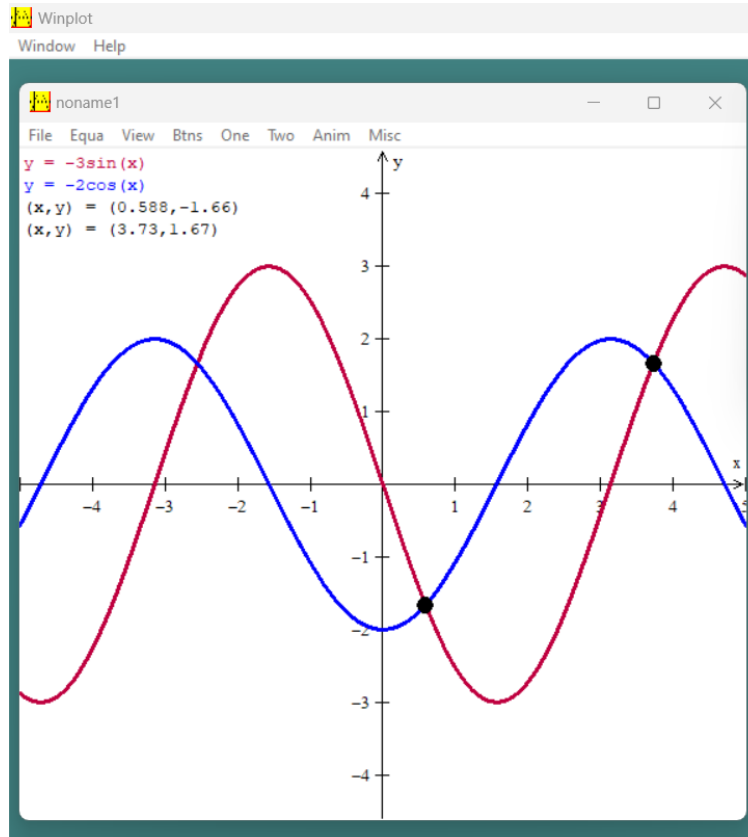
$$0.588 \leq x \leq 3.73$$

Comprobación realizada en winplot:

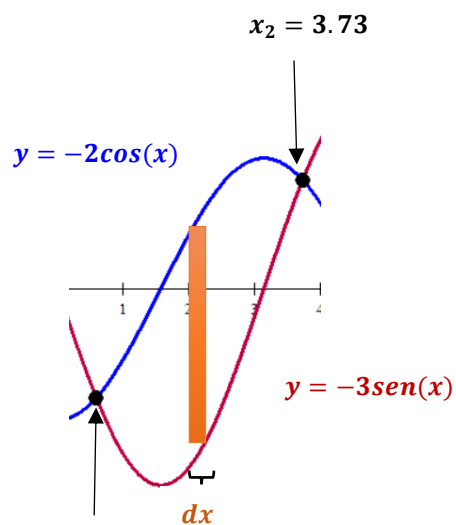
Es necesario encontrar la coordenada en y, esto con el objetivo de graficar los puntos correspondientes.

$$f(0.588) = -3\text{sen}(0.588) = -1.66$$

$$f(3.73) = -3\text{sen}(3.73) = 1.67$$



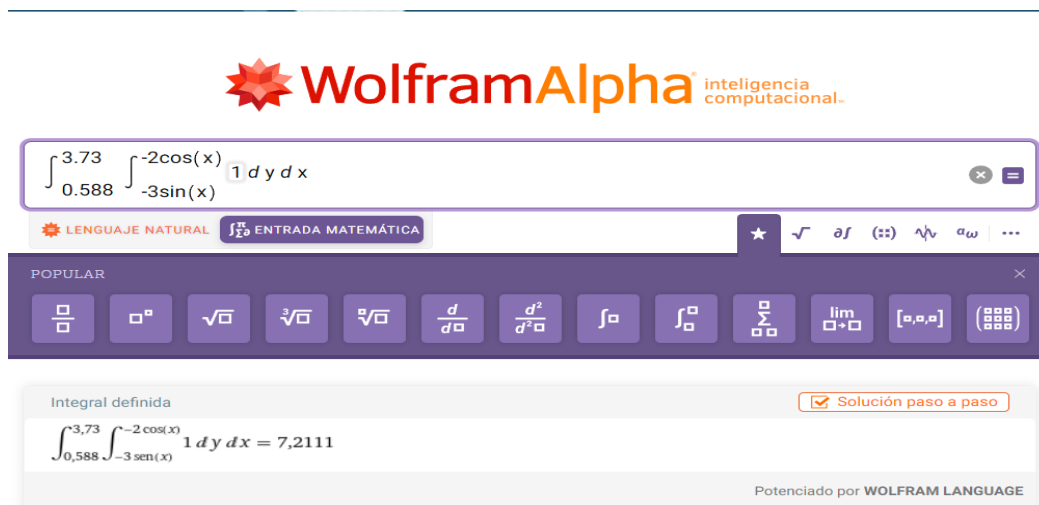
Una vez que se tienen los límites de la región indicada se procede a plantear la integral, se utiliza Caso I:



$$\begin{aligned}
 \int_{0.588}^{3.73} \int_{-3\sin(x)}^{-2\cos(x)} dy dx &= \int_{0.588}^{3.73} y \Big|_{-3\sin(x)}^{-2\cos(x)} dx \\
 &= \int_{0.588}^{3.73} (-2\cos(x) - (-3\sin(x))) dx \\
 &= \int_{0.588}^{3.73} (-2\cos(x) - (-3\sin(x))) dx \\
 &= -2\sin(x) - 3\cos(x) \Big|_{0.588}^{3.73} \\
 &= (-2\sin(3.73) - 3\cos(3.73)) - (-2\sin(0.588) - 3\cos(0.588)) \\
 &= (3.61) - (-3.61) = 7.21 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Comprobación de la integral con WolframAlpha:

<https://es.wolframalpha.com/calculators/integral-calculator>



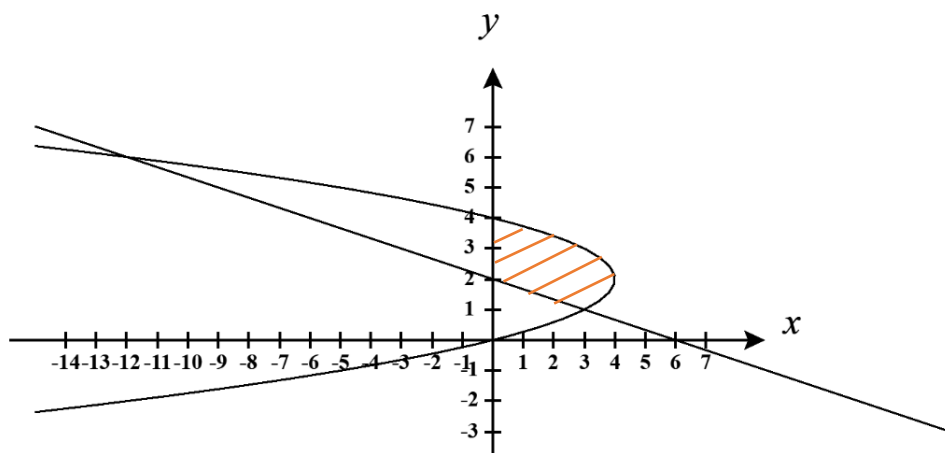
The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top, the WolframAlpha logo is displayed with the tagline "inteligencia computacional". Below the logo, the input field contains the integral expression: $\int_{0.588}^{3.73} \int_{-3\sin(x)}^{-2\cos(x)} 1 \, dy \, dx$. Below the input field, there are buttons for "LENGUAJE NATURAL" and "ENTRADA MATEMÁTICA". A row of mathematical symbols (star, square root, partial derivative, double colon, cube root, omega, and ellipsis) is visible. Below this, a "POPULAR" section shows various mathematical symbols. At the bottom, the result is displayed: "Integral definida" followed by $\int_{0.588}^{3.73} \int_{-3\sin(x)}^{-2\cos(x)} 1 \, dy \, dx = 7.2111$. A button labeled "Solución paso a paso" is next to the result. At the very bottom, it says "Potenciado por WOLFRAM LANGUAGE".

EJEMPLO 4

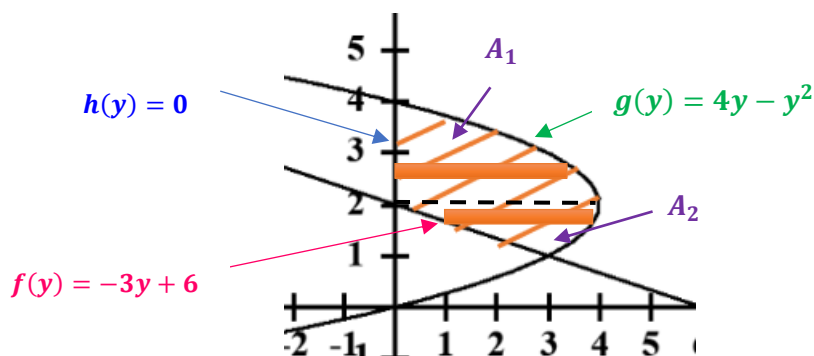
2
Calcula el área de la región limitada por las gráficas de las siguientes funciones:

$$f(y) = -3y + 6, \quad g(y) = 4y - y^2 \quad \text{y} \quad h(y) = 0$$

Solución:

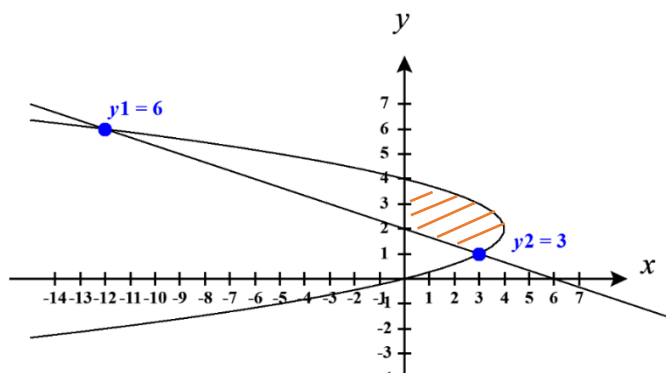


Dada la forma de la región marcada es necesario dividir en 2 áreas y encontrar la intersección de las curvas así como la intersección de cada curva con el eje y:



Cortes entre f y g:

$$\begin{aligned} -3y + 6 &= 4y - y^2 \\ -3y + 6 - 4y + y^2 &= 0 \\ y^2 - 7y + 6 &= 0 \\ (y - 6)(y - 1) &= 0 \\ y &= 6 \quad y = 1 \end{aligned}$$



Cortes de la parábola en eje y:

$$\begin{aligned} 4y - y^2 &= 0 \\ y(4 - y) &= 0 \\ y &= 0 \quad y = 4 \end{aligned}$$

Cortes de la recta en eje y:

$$\begin{aligned} -3y + 6 &= 0 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Una vez que se tienen las intersecciones y empleando caso II, se tiene:

$$\underbrace{\int_1^2 \int_{-3y+6}^{4y-y^2} dx dy}_{A_1} + \underbrace{\int_2^4 \int_0^{4y-y^2} dx dy}_{A_2} = \int_1^2 x \Big|_{-3y+6}^{4y-y^2} dy + \int_2^4 x \Big|_0^{4y-y^2} dy$$

$$= \int_1^2 ((4y - y^2) - (-3y + 6)) dy + \int_2^4 ((4y - y^2) - (0)) dy$$

$$= \int_1^2 (-y^2 + 7y - 6) dy + \int_2^4 (4y - y^2) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{7y^2}{2} - 6y \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{4y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_2^4 \\
&= \left(-\frac{(2)^3}{3} + \frac{7(2)^2}{2} - 6(2) \right) - \left(-\frac{(1)^3}{3} + \frac{7(1)^2}{2} - 6(1) \right) \\
&\quad + \left(\frac{4(4)^2}{2} - \frac{(4)^3}{3} \right) - \left(\frac{4(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3} \right) \\
&= \left(-\frac{8}{3} + \frac{28}{2} - 12 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 6 \right) + \left(\frac{64}{2} - \frac{64}{3} \right) - \left(\frac{16}{2} - \frac{8}{3} \right) \\
&= -\frac{2}{3} + \frac{17}{6} + \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{15}{2} u^2
\end{aligned}$$

Comprobando el resultado de la integral con WolframAlpha:

 **WolframAlpha** inteligencia computacional.

$$\int_1^2 \int_{-3y+6}^{4y-y^2} 1 \, dx \, dy + \int_2^4 \int_0^{4y-y^2} 1 \, dx \, dy$$

LENGUAJE NATURAL ENTRADA MATEMÁTICA
★ √ ∂f (:) ∇ aω ...

POPULAR
×

$\frac{\square}{\square}$
 $\square^{\square}$
 $\sqrt{\square}$
 $\sqrt[3]{\square}$
 $\sqrt[n]{\square}$
 $\frac{d}{d\square}$
 $\frac{d^2}{d^2\square}$
 $\int \square$
 $\int \square$
 $\sum_{\square}^{\square}$
 $\lim_{\square \rightarrow \square}$
 $[\square, \square]$
 $\left(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \right)$

Entrada

$$\int_1^2 \int_{6-3y}^{4y-y^2} 1 \, dx \, dy + \int_2^4 \int_0^{4y-y^2} 1 \, dx \, dy$$

Resultado

$$\frac{15}{2} = 7,5$$

Resultado del cálculo

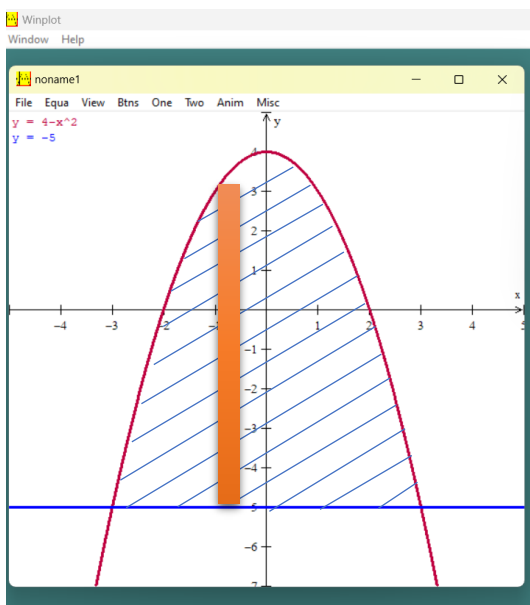
$$\int_1^2 \int_{6-3y}^{4y-y^2} 1 \, dx \, dy + \int_2^4 \int_0^{4y-y^2} 1 \, dx \, dy = \frac{15}{2}$$

EJEMPLO 5

Representar la región representada en la siguiente integral y plantear otra integral cambiando el orden de integración y comprobar que el resultado de ambas integrales es el mismo:

$$\int_{-3}^3 \int_{-5}^{4-x^2} dy dx$$

Solución:



Intersección entre las funciones:

$$-5 = 4 - x^2$$

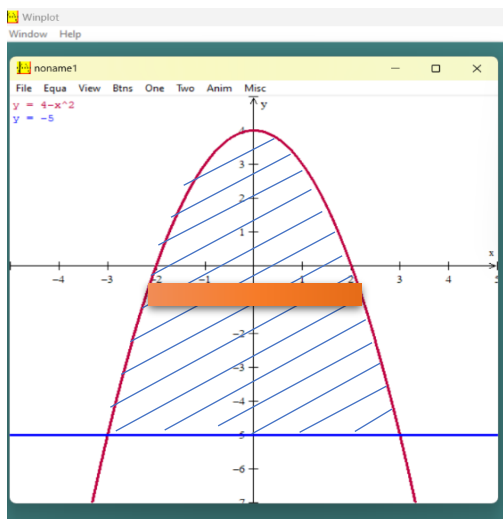
$$x^2 - 5 - 4 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x + 3)(x - 3) = 0$$

$$x = -3 \quad y \quad x = 3$$

Cambiando el orden de integración:



$$y = 4 - x^2 \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{4 - y}$$

$$\int_{-5}^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} dx dy$$

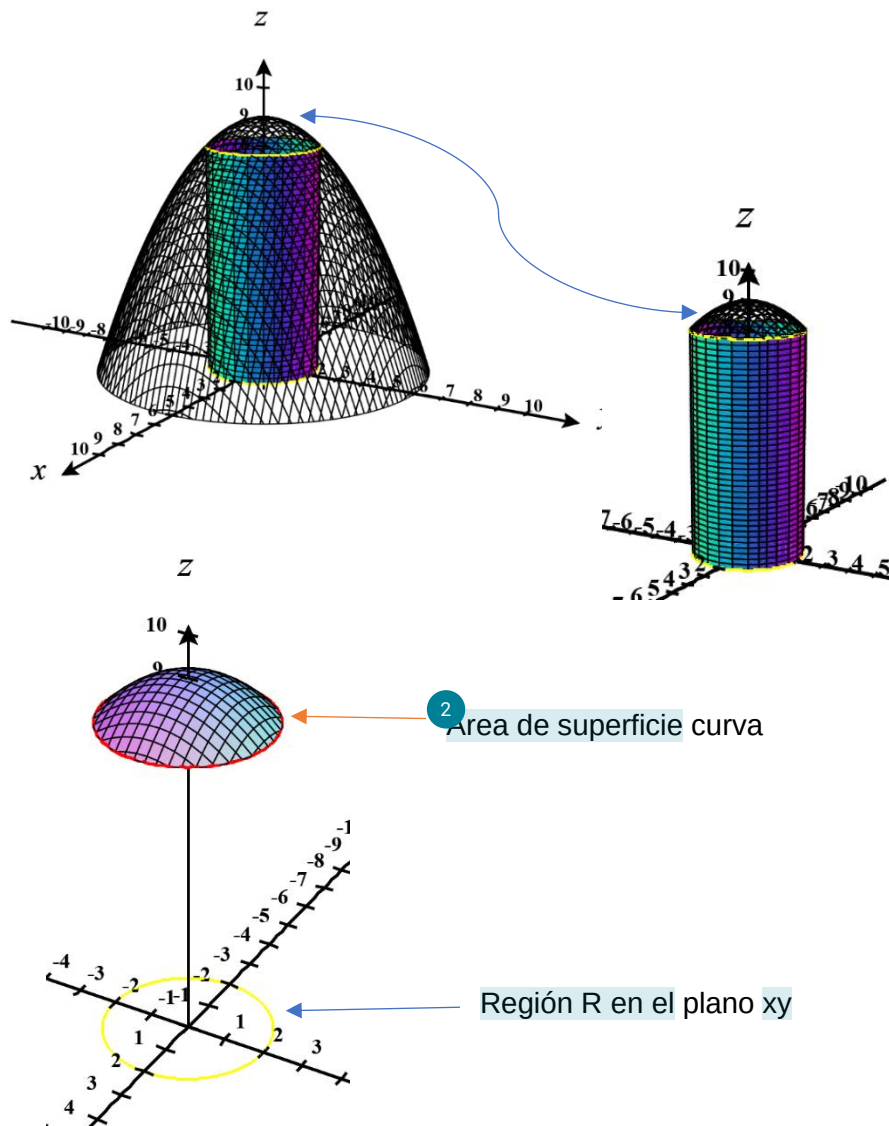
Verificación de resultados en ambas integrales:

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^3 \int_{-5}^{4-x^2} dy dx &= \int_{-3}^3 y \Big|_{-5}^{4-x^2} dx = \int_{-3}^3 ((4-x^2) - (-5)) dx \\
 &= \int_{-3}^3 (9-x^2) dx = 9x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^3 = \left(9(3) - \frac{(3)^3}{3}\right) - \left(9(-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right) \\
 &= (27 - 9) - (-27 + 9) = \mathbf{36u^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-5}^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} dx dy &= \int_{-5}^4 x \Big|_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} dy = \int_{-5}^4 ((\sqrt{4-y}) - (-\sqrt{4-y})) dy \\
 &= \int_{-5}^4 2\sqrt{4-y} dy = 2 \int_{-5}^4 (4-y)^{\frac{1}{2}} dy = -2 \int_{-5}^4 (4-y)^{\frac{1}{2}} (-) dy \\
 &= -\frac{4}{3} (4-y)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-5}^4 = \left(-\frac{4}{3} (4-(4))^{\frac{3}{2}}\right) - \left(-\frac{4}{3} (4-(-5))^{\frac{3}{2}}\right) \\
 &= (0) - \left(-\frac{4}{3} (9)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{3} (27) = \mathbf{36u^2}
 \end{aligned}$$

4.3 Cálculo de áreas de superficies curvas.

Áreas de superficies curvas



Definición de ¹ área de una superficie:

Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada R en el plano xy , entonces el área de la superficie S dada por $z = f(x, y)$ sobre R está dada por:

9

$$\text{Área de la superficie} = \iint_R dS = \iint_R \sqrt{1 + (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2} dA$$

Ver anexo A para las gráficas en CalcPlot3D

8

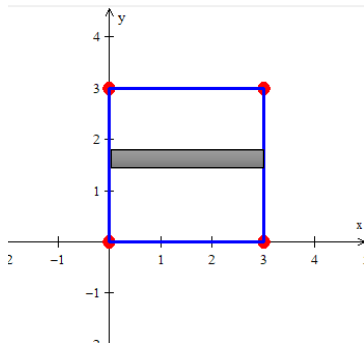
Ejemplo 1

Calcular el área de la superficie sobre la región R:

$$f(x, y) = 15 - 2x + 3y$$

R: Cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (3, 0), (0, 3) y (3, 3)

Solución:



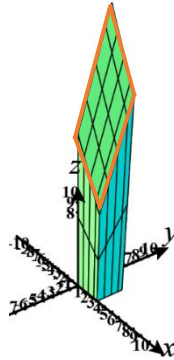
$$f_x(x, y) = -2 \quad y \quad f_y(x, y) = 3$$

$$\text{Área de la superficie} = \iint_R dS = \iint_R \sqrt{1 + (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2} dA$$

$$\text{Superficie} = \int_0^3 \int_0^3 \sqrt{1 + (-2)^2 + (3)^2} dx dy$$

$$\text{Superficie} = \int_0^3 \int_0^3 \sqrt{14} dx dy = \int_0^3 \sqrt{14} x \Big|_0^3 dy = \int_0^3 3\sqrt{14} dy$$

$$= 3\sqrt{14} y \Big|_0^3 = 9\sqrt{14} u^2$$



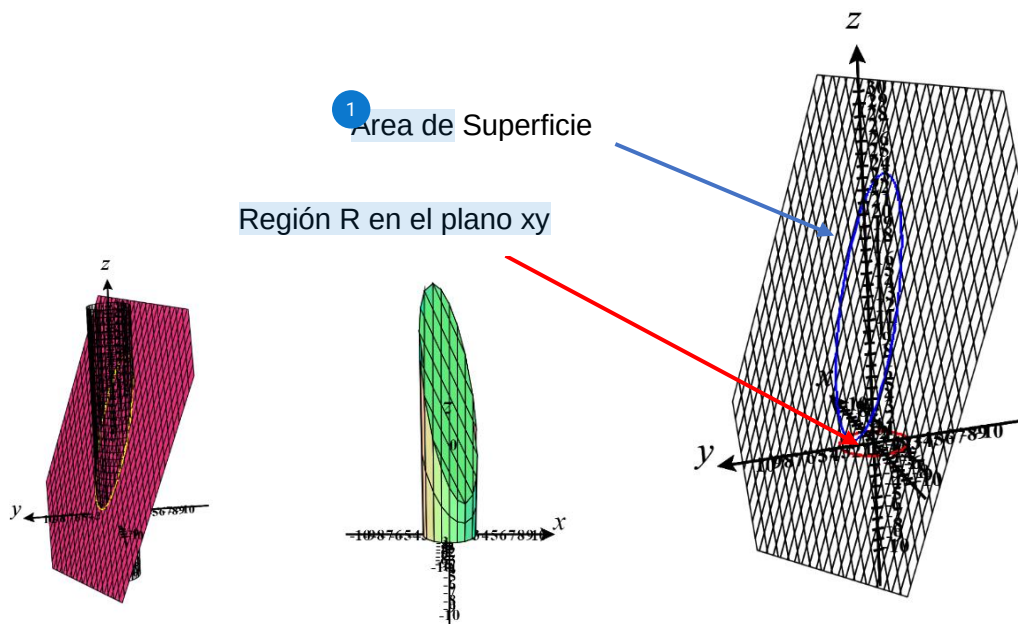
Ejemplo 2

Calcular el área de la superficie sobre la región R:

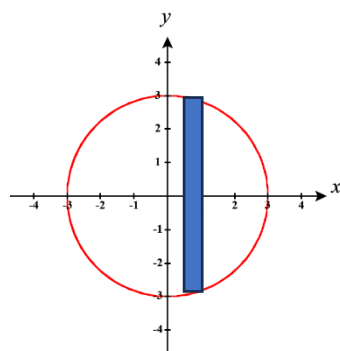
$$f(x, y) = 12 + 2x - 3y$$

$$R: x^2 + y^2 \leq 9$$

Solución:



Región R:



$$R: x^2 + y^2 \leq 9$$

$$S = \iint_R \sqrt{1 + (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2} dA$$

$$f_x(x, y) = 2 \quad y \quad f_y(x, y) = -3$$

$$\text{Superficie} = \iint_R \sqrt{1 + (2)^2 + (-3)^2} dA$$

$$\text{Superficie} = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + (2)^2 + (-3)^2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{14} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left. \frac{\sqrt{14} r^2}{2} \right|_0^3 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{9\sqrt{14}}{2} d\theta = \frac{9\sqrt{14}}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = 9\sqrt{14} \pi \text{ u}^2$$

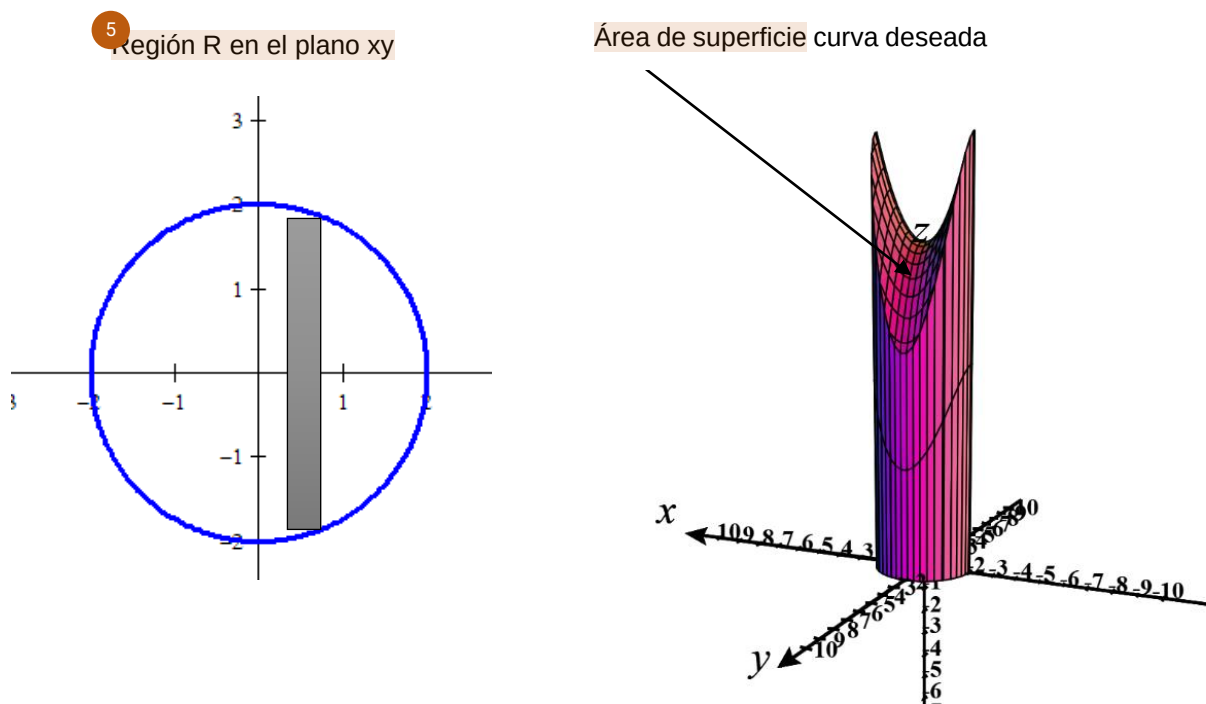
Ejemplo 3

Calcular el área de la superficie sobre la región R:

$$f(x, y) = 13 + x^2 - y^2$$

$$R: \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Solución:



$$f_x(x, y) = 2x \quad f_y(x, y) = -2y$$

$$\iint_R \sqrt{1 + (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2} dA$$

$$Superficie = \iint_R \sqrt{1 + (2x)^2 + (-2y)^2} dA$$

$$Superficie = \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA = \iint_R \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA$$

Cambiando a polares:

$$Superficie = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} \int_0^2 (1 + 4r^2)^{1/2} (8) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (1 + 4r^2)^{3/2} \left(\frac{2}{3}\right) \Big|_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (1 + 4(2)^2)^{3/2} - \frac{1}{12} (1 + 4(0)^2)^{3/2} \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (17)^{3/2} - \frac{1}{12} (1) \right] d\theta = \left[\frac{1}{12} (17)^{3/2} - \frac{1}{12} \right] \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{12} (17)^{3/2} - \frac{1}{12} \right] \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6} [(17)^{3/2} - 1] u^2$$

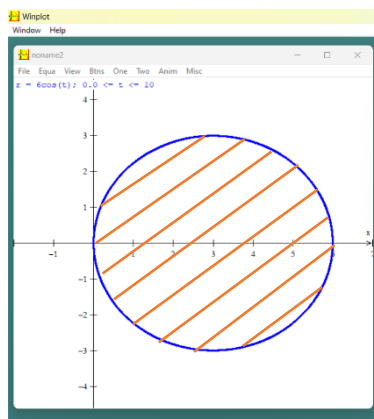
12 4.4 Integrales dobles en coordenadas polares.

Integrales dobles en coordenadas polares

$$\iint_R dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\theta$$

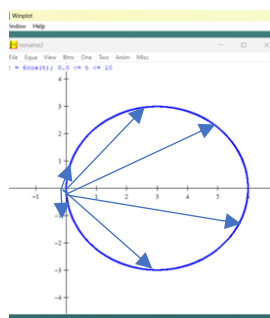
8 Ejemplo 1

Calcular el área de la región sombreada:



$$r = 6\cos(t)$$

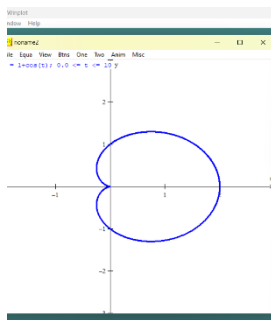
Solución:



$$\begin{aligned}
 A &= \iint_R dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{6\cos\theta} r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{6\cos\theta} d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{36\cos^2\theta}{2} d\theta = 18 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right) d\theta \\
 &= 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{9}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta) (2) d\theta = 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{9}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta) 2 d\theta \\
 &= 9\theta + \frac{9}{2} \sin(2\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{9\pi}{2} + \frac{9}{2} \sin(\pi) \right) - \left(-\frac{9\pi}{2} + \frac{9}{2} \sin(-\pi) \right) \\
 A &= \frac{9\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} = 9\pi \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

1 Calcular el área de la región sombreada:



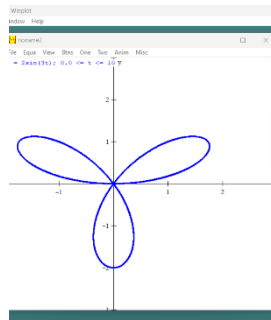
$$r = 1 + \cos(t)$$

Solución:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r dr d\theta = \frac{3\pi}{2} u^2$$

Ejemplo 3

Calcular ¹ el área de la región sombreada:



$$r = 2\text{sen}(3t)$$

Solución:

θ_1 :

$$2\text{sen}(3\theta_1) = 0$$

$$\text{sen}(3\theta_1) = 0 \quad \therefore \quad 3\theta_1 = \text{arcsen } 0$$

$$3\theta_1 = 0 \quad \therefore \quad \theta_1 = 0$$

θ_2 :

$$2\operatorname{sen}(3\theta_2) = 0$$

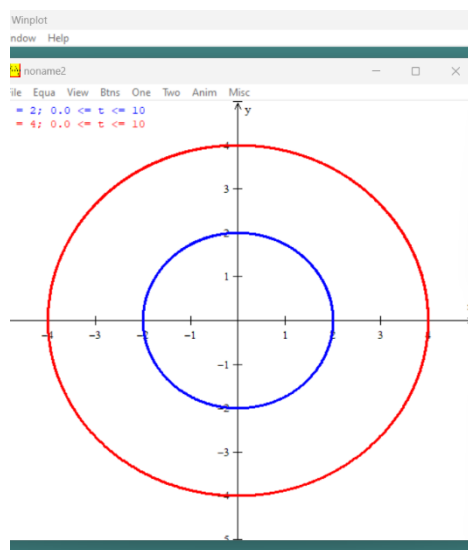
$$\operatorname{sen}(3\theta_2) = 0 \quad \therefore \quad 3\theta_2 = \operatorname{arcsen} 0$$

$$3\theta_2 = \pi \quad \therefore \quad \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\theta = 3 \int_0^{\pi/3} \int_0^{2\operatorname{sen}(3\theta)} r dr d\theta = \pi u^2$$

Ejemplo 4

Calcular el área de la región sombreada:



$$r = 2$$

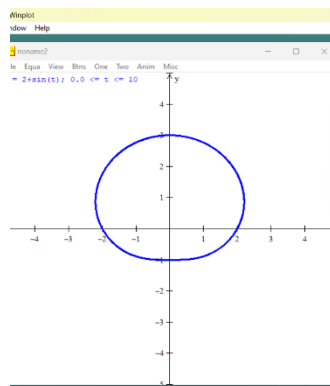
$$r = 4$$

Solución:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_2^4 r dr d\theta = 12\pi u^2$$

Ejemplo 5

1 Calcular el área de la región sombreada:



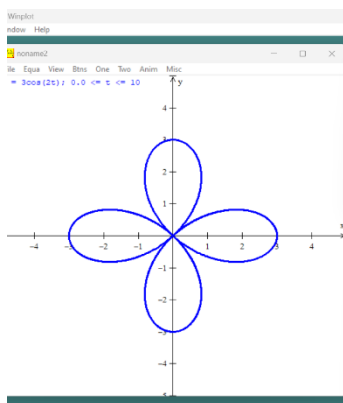
$$r = 2 + \sin(t)$$

Solución:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2+\sin\theta} r dr d\theta = \frac{9\pi}{2} u^2$$

Ejemplo 6

1 Calcular el área de la región sombreada:



$$r = 3\cos(2t)$$

Solución:

θ_1 :

$$3\cos(2\theta_1) = 0$$

$$\cos(2\theta_1) = 0 \quad \therefore \quad 2\theta_1 = \arccos 0$$

$$2\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

θ_2 :

$$2\theta_1 = \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{4}$$

Podemos usar el límite superior como $\frac{3\pi}{4}$ y multiplicamos la integral por 4, o bien, obtenemos el área de medio pétalo y lo multiplicamos por 8.

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\theta = 4 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{3\cos(2\theta)} r dr d\theta = 8 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{3\cos(2\theta)} r dr d\theta = \frac{9\pi}{2} u^2$$

Ejemplo 7

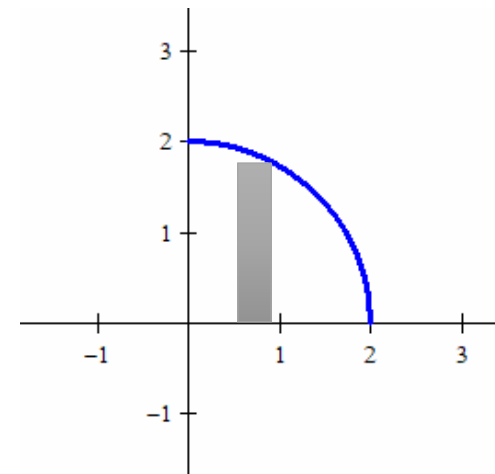
Evaluar la integral iterada pasando a polar:

$$a) \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x dy dx =$$

Solución:

$$x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = a$$

$$y_1 = 0 \quad y \quad y_2 = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \therefore \quad y_2^2 + x^2 = a^2$$



$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x dy dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^a r \cos \theta (r dr d\theta) = \frac{a^3}{3}$$

$$b) \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$$

Solución:

$$y = \sqrt{x - x^2}$$

$$y = \sqrt{-(x^2 - x)} = \sqrt{-\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]}$$

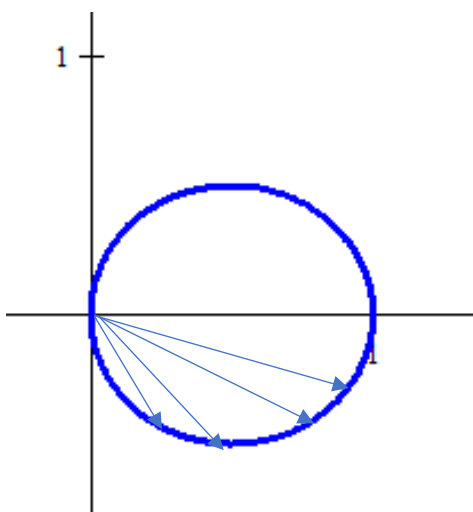
$$y = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Circulo de radio $r=1/2$ y centro en $(1/2,0)$

$$\therefore r = 1 \cos \theta$$



Coincide con la gráfica de:

$$r = a \cos(t)$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} r^2 (r dr d\theta) = \mathbf{0.2945}$$

$$c) \int_0^2 \int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy =$$

$$y_1 = 0 \quad y \quad y_2 = 2$$

$$x_1 = y \quad x_1 = r \sin \theta \quad y \quad x_2 = \sqrt{8 - y^2} \quad \therefore \quad y^2 + x_2^2 = 8$$

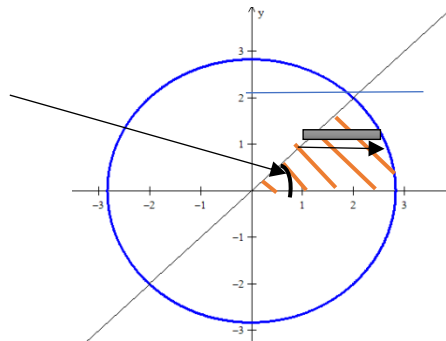
$$x = r \sin \theta \quad y \quad y = r \cos \theta$$

Circulo de radio $r = \sqrt{8}$ y centro en (0,0)

$$y = x$$

$$\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$y = 2$$



$$\int_0^2 \int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{8}} r (r dr d\theta) = \mathbf{5.9238}$$

$$d) \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2 \, dx dy =$$

$$x = \sqrt{4y - y^2}$$

$$x^2 = -(y^2 - 4y)$$

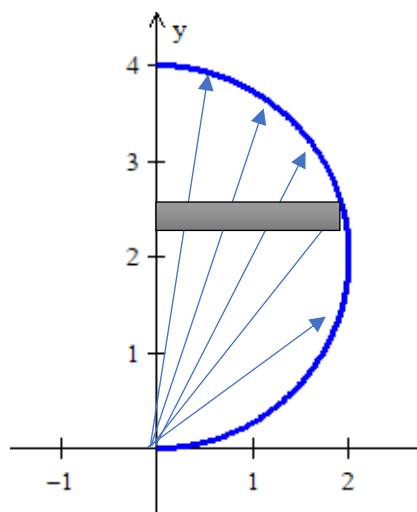
$$x^2 = -[(y - 2)^2 - 2^2]$$

$$x^2 = 4 - (y - 2)^2$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Círculo de radio $r = 2$ y centro en $(0,2)$

$$\therefore r = 4 \operatorname{sen} \theta$$



Coincide con la gráfica de:

$$r = a \operatorname{sen}(t)$$

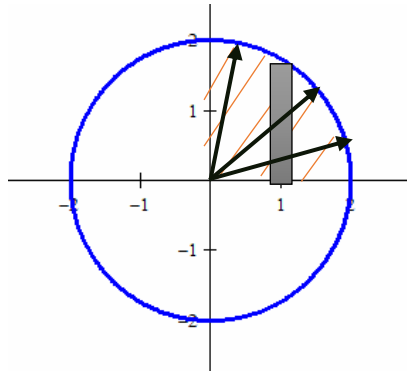
$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2 dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\sin \theta} (r \cos \theta)^2 r dr d\theta = \mathbf{6.28319}$$

$$e) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \text{sen}(\sqrt{x^2+y^2}) dy dx =$$

$$y = \sqrt{4-x^2}$$

$$y^2 = 4-x^2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

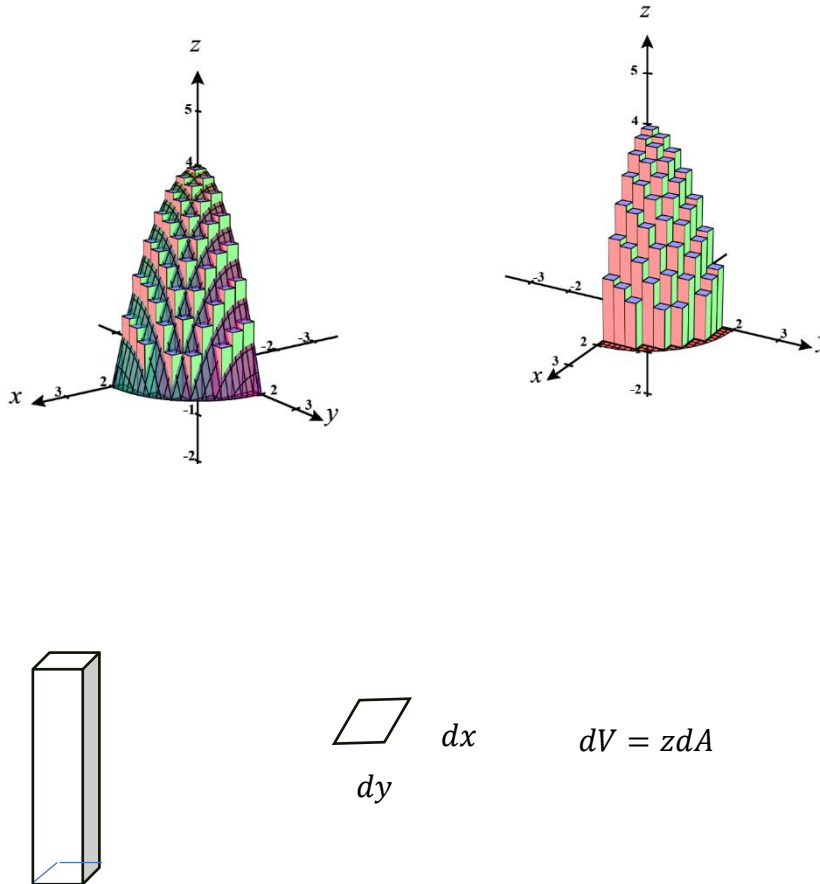


$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \text{sen}(\sqrt{x^2+y^2}) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (\text{sen}(r)) (r dr d\theta) = \mathbf{2.73569}$$

4.5 ¹ Cálculo de volúmenes mediante integrales dobles.

Volúmenes con integral doble:

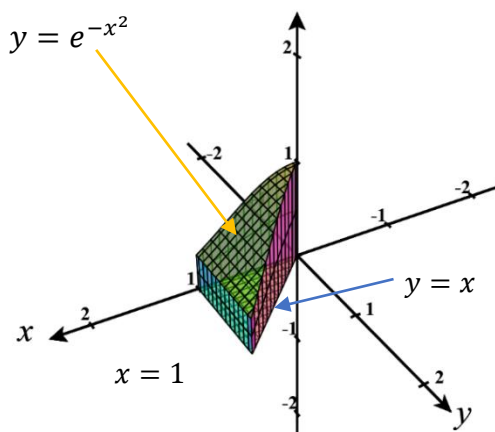
Para el cálculo de volúmenes solo basta con analizar ¹ la región sobre el plano xy , ya que esto nos ayudará a decidir los límites de integración:



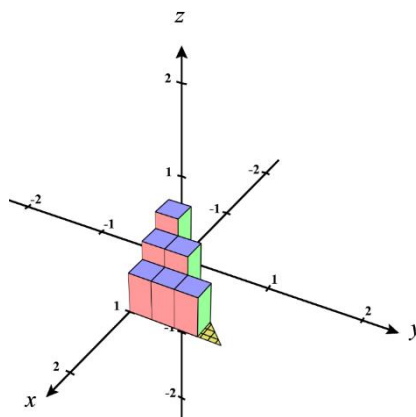
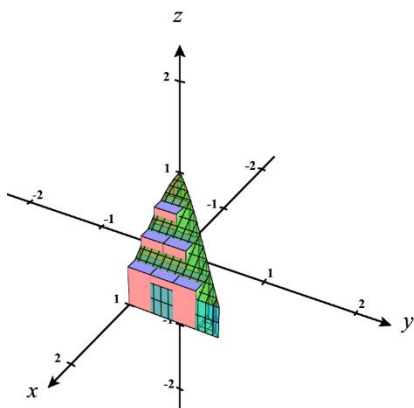
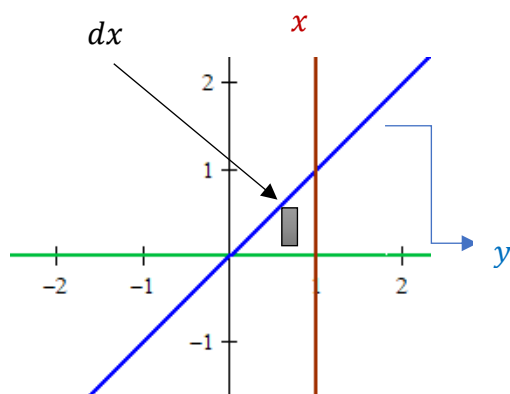
$$V = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dy dx = \iint_R f(x, y) dx dy$$

EJEMPLO 1

1 Calcule el volumen del sólido que se muestra en la siguiente figura:



Solución:



$$dA = dydx \quad \text{o} \quad dA = dxdy$$

$$dV = f(x, y) dA$$

$$V = \iint_R dV = \iint_R f(x, y) dA$$

Solución:

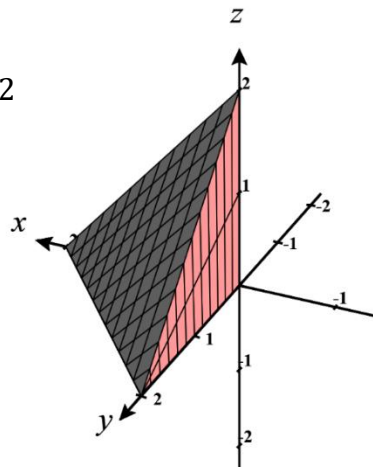
Vemos que la región R en el plano xy es un triángulo, esto nos ayudará a decidir los límites de integración ya que el volumen de un “prisma” es área de la base (un triángulo para este caso) por altura ($h=f(x,y)$).

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy dx = \int_0^1 ye^{-x^2} \Big|_0^x dx = \int_0^1 (xe^{-x^2} - 0) dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})u^3 = 0.31606u^3 \end{aligned}$$

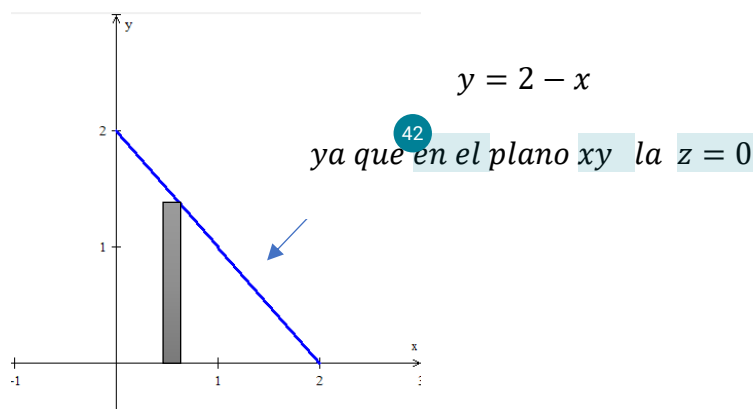
EJEMPLO 2

Calcular el volumen de:

$$x + y + z = 2$$



Solución:



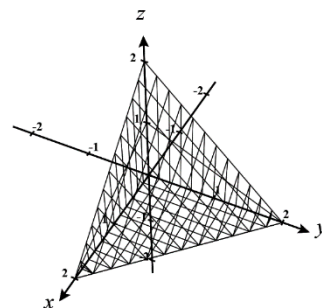
$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_0^2 \int_0^{2-x} (2 - x - y) dy dx = \frac{4}{3} u^3$$

$$V = \frac{4}{3} u^3$$

Comprobando resultado:

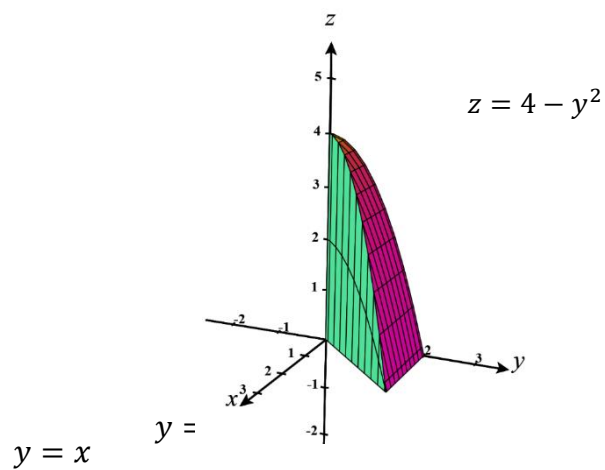
Volumen de una pirámide = $(\text{área base})(h)/3$

$$V = \left(\frac{bxh}{2} \right) (H)/3 = \frac{\left(\frac{2x2}{2} \right) (2)}{3} = \frac{4}{3} u^3$$

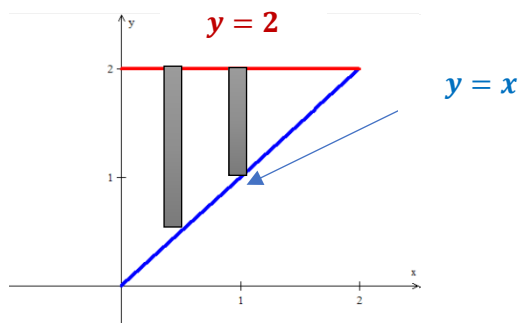


EJEMPLO 3

Calcular el volumen de:



Solución:

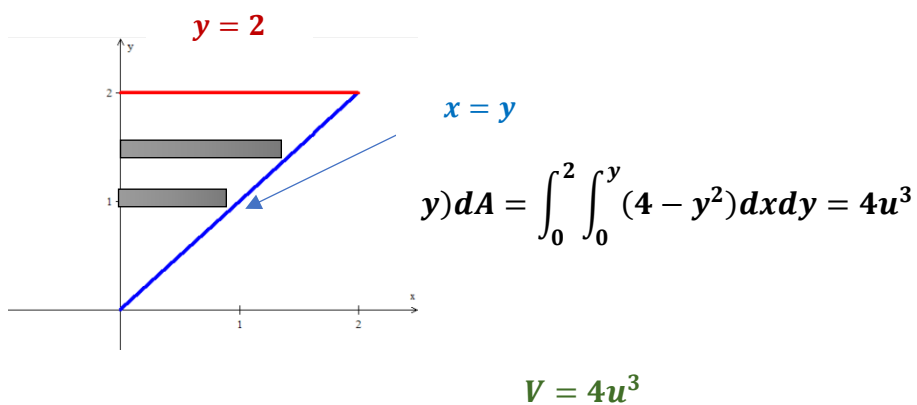


$$z = 4 - y^2$$

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_0^2 \int_x^2 (4 - y^2) dy dx = 4u^3$$

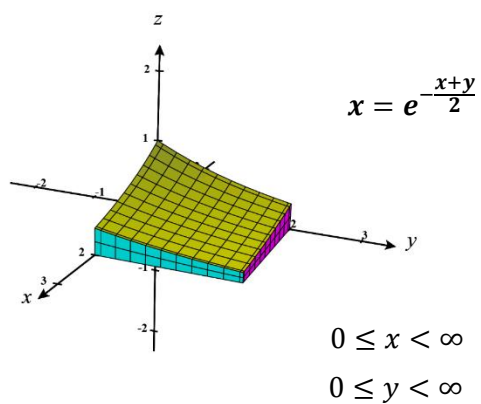
$$V = 4u^3$$

O bien,



EJEMPLO 4

Calcular el volumen de:



Solución:

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{x+y}{2}} dy dx$$

$$= \int_0^{\infty} -2e^{-\frac{x+y}{2}} \Big|_0^{\infty} dx = \int_0^{\infty} \left(0 - (-2e^{-\frac{x}{2}}) \right) dx = \int_0^{\infty} (2e^{-\frac{x}{2}}) dx = -4e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^{\infty}$$

$$= (0 - (-4)) = 4u^3$$

$$V = 4u^3$$

EJEMPLO 5

Calcular el volumen de la región limitada por el paraboloide dado y el plano “xy”:

$$z = 49 - x^2 - y^2$$

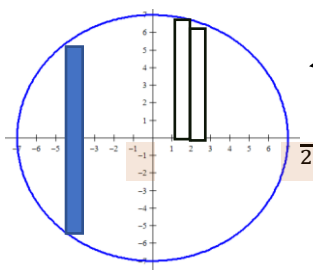
Solución:

La gráfica corresponde a un paraboloide circular. Por lo tanto, la región R viene dada por un círculo con centro en el origen de radio 4.

$$z = 49 - (x^2 + y^2)$$

En rectangulares:

$$x^2 + y^2 = 49$$



$$y = \sqrt{49 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{49 - x^2}$$

$$Volumen = \int_{-7}^7 \int_{-\sqrt{49-x^2}}^{\sqrt{49-x^2}} (49 - x^2 - y^2) dy dx = 4 \int_0^7 \int_0^{\sqrt{49-x^2}} (49 - x^2 - y^2) dy dx$$

$$= 4 \int_0^7 \left(\int_0^{\sqrt{49-x^2}} (49 - x^2 - y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^7 \left((49y - x^2y - \frac{y^3}{3}) \Big|_0^{\sqrt{49-x^2}} \right) dx$$

$$= 4 \int_0^7 \left(49\sqrt{49-x^2} - x^2\sqrt{49-x^2} - \frac{(\sqrt{49-x^2})^3}{3} - 0 \right) dx$$

$$= 4 \int_0^7 \left(49\sqrt{49-x^2} - x^2\sqrt{49-x^2} - \frac{(\sqrt{49-x^2})^3}{3} \right) dx$$

Se resuelve la segunda y tercera integral por sustitución trigonométrica:

Primer integral:

$$= 4 \int_0^7 49\sqrt{49-x^2} dx = 196 \int_0^7 \sqrt{49-x^2} dx$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{u}{a} + c$$

$$= 196 \left(\frac{x}{2} \sqrt{49-x^2} + \frac{49}{2} \arcsen \left(\frac{x}{7} \right) \right) \Big|_0^7$$

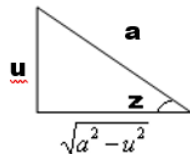
$$= 196 \left[\left(\frac{(7)}{2} \sqrt{49 - (7)^2} + \frac{49}{2} \arcsen \left(\frac{7}{7} \right) \right) - \left(\frac{(0)}{2} \sqrt{49 - (0)^2} + \frac{49}{2} \arcsen \left(\frac{0}{7} \right) \right) \right]$$

$$= 196 \left[\left(0 + \frac{49}{2} \arcsen(1) \right) - 0 \right] = 196 \left(\frac{49}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = \mathbf{2401\pi}$$

Segunda integral:

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^7 -x^2 \sqrt{49 - x^2} dx = -4 \int_0^7 x^2 \sqrt{49 - x^2} dx \\ &= -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (7 \operatorname{sen} z)^2 (7 \cos z) (7 \cos z dz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - u^2} : \\ u = a \operatorname{sen} z \\ \sqrt{a^2 - u^2} = a \cos z \end{aligned}$$



$$u^2 = x^2 \quad a^2 = 49$$

$$u = x \quad a = 7$$

$$x = 7 \operatorname{sen} z \quad \sqrt{49 - x^2} = 7 \cos z$$

$$dx = 7 \cos z dz$$

Cambio de límite inferior:

$$x = 0$$

Sustituimos el valor de x:

$$x = 7 \operatorname{sen} z$$

$$0 = 7 \operatorname{sen} z$$

$$\frac{0}{7} = \operatorname{sen} z$$

$$z = \arcsen(0)$$

$$z = 0$$

Cambio de límite superior:

$$x = 7$$

Sustituimos el valor de x:

$$x = 7 \operatorname{sen} z$$

$$7 = 7 \operatorname{sen} z$$

$$\frac{7}{7} = \operatorname{sen} z$$

$$z = \arcsen(1)$$

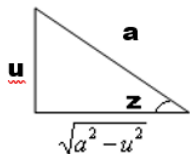
$$z = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= -4(7^4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 z \cos^2 z dz = -4(7^4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2z) \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2z) \right) dz \\
&= -9604 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2(2z) \right) dz = -9604 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} dz + 9604 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos^2(2z) dz \\
&= -\frac{9604}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz + \frac{9604}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4z) \right) dz \\
&= -2401 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz + 2401 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dz + 2401 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(4z) dz \\
&= -2401 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz + \frac{2401}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz + \frac{2401}{2(4)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4z) dz \\
&= -\frac{2401}{2} z + \frac{2401}{8} \sin(4z) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2401}{4} \pi + \frac{2401}{4} \sin(2\pi) - 0 = -\frac{2401}{4} \pi
\end{aligned}$$

Tercera integral:

$$= 4 \int_0^7 -\frac{(\sqrt{49-x^2})^3}{3} dx = -\frac{4}{3} \int_0^7 (\sqrt{49-x^2})^3 dx = -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (7 \cos z)^3 (7 \cos z dz)$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a^2 - u^2} : \\
&u = a \operatorname{sen} z \\
&\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos z
\end{aligned}$$



$$u^2 = x^2 \quad a^2 = 49$$

$$u = x \quad a = 7$$

$$x = 7 \operatorname{sen} z \quad \sqrt{49 - x^2} = 7 \cos z$$

$$dx = 7 \cos z dz$$

Cambio de límite inferior:

$$x = 0$$

Sustituimos el valor de x:

$$x = 7 \operatorname{sen} z$$

$$0 = 7 \operatorname{sen} z$$

$$\frac{0}{7} = \operatorname{sen} z$$

$$z = \operatorname{arcsen}(0)$$

$$z = 0$$

Cambio de límite superior:

$$x = 7$$

Sustituimos el valor de x:

$$x = 7 \operatorname{sen} z$$

$$7 = 7 \operatorname{sen} z$$

$$\frac{7}{7} = \operatorname{sen} z$$

$$7 = \operatorname{arcsen}(1)$$

$$z = \frac{\pi}{2}$$

$$= -\frac{4(7^4)}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 z dz = -\frac{4(7^4)}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 z)^2 dz = -\frac{4(7^4)}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2z) \right)^2 dz$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{9604}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cos(2z) + \frac{1}{4} \cos^2(2z) \right) dz \\ &= -\frac{9604}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz - \frac{9604}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z) dz - \frac{9604}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2z) dz \end{aligned}$$

$$= -\frac{9604}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz - \frac{9604}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z) dz - \frac{2401}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2z) dz$$

$$= -\frac{9604}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz - \frac{9604}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z) dz - \frac{2401}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4z) \right) dz$$

$$= -\frac{2401}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz - \frac{9604}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z) dz - \frac{2401}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz - \frac{2401}{6(4)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4z) dz$$

$$= -\frac{2401}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz - \frac{4802}{3(2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z) dz - \frac{2401}{6(4)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4z) dz$$

$$= -\frac{2401}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz - \frac{2401}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z) dz - \frac{2401}{24} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4z) dz$$

$$= -\frac{2401}{2} z - \frac{2401}{3} \sin(2z) - \frac{2401}{24} \sin(4z) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\frac{2401}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{2401}{3} \operatorname{sen} \left(2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - \frac{2401}{24} \operatorname{sen} \left(4 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) \\ - \left(-\frac{2401}{2} (0) - \frac{2401}{3} \operatorname{sen}(2(0)) - \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4(0)) \right)$$

$$= -\frac{2401}{4} \pi$$

Ahora ya se puede obtener el volumen deseado:

$$Volumen = (2401\pi) + \left(-\frac{2401}{4} \pi \right) + \left(-\frac{2401}{4} \pi \right)$$

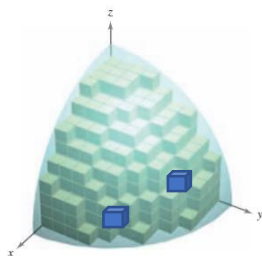
$$Volumen = \frac{2401}{2} \pi u^3$$

4.6 Integral triple en coordenadas rectangulares. Volúmenes.

Volúmenes con integral triple:

Para el cálculo de volúmenes solo basta con analizar la región sobre el plano xy , ya que esto ayudará a decidir los límites de integración:

Región sólida Q



65

$$dV = dx dy dz$$

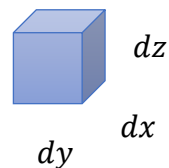
$$dV = dx dz dy$$

$$dV = dy dx dz$$

$$dV = dy dz dx$$

$$dV = dz dx dy$$

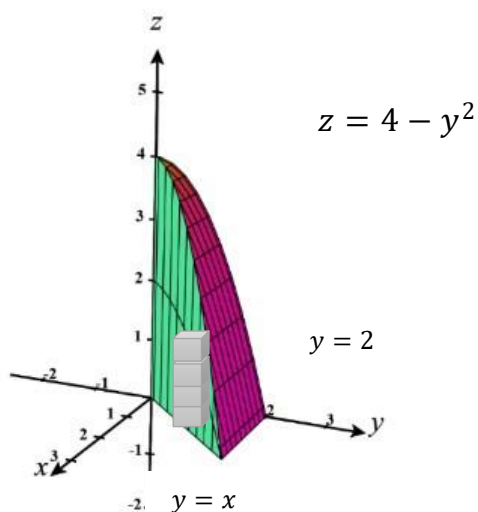
$$dV = dz dy dx$$



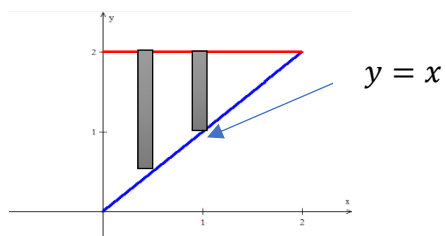
$$V = \iiint_Q dV$$

EJEMPLO 1

Calcular el volumen de:



Solución:



$$z = 4 - y^2$$

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^2 \int_x^2 \int_0^{4-y^2} dz dy dx = \int_0^2 \int_x^2 z \Big|_0^{4-y^2} dy dx$$

$$= \int_0^2 \int_x^2 (4 - y^2) dy dx = 4u^3$$

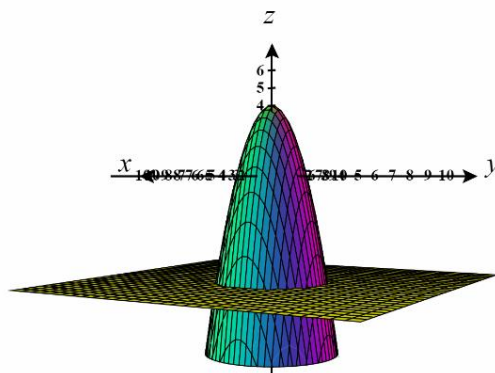
$$V = 4u^3$$

Como al evaluar se llega a la integral doble, **no** conviene plantear integral triple para el cálculo de volúmenes en la mayoría de los casos.

2 EJEMPLO 2

Plantear una integral triple para el cálculo del volumen comprendido entre $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = -6$:

Solución:



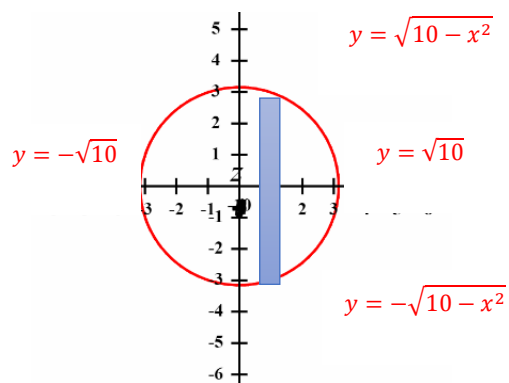
Para encontrar la región R igualamos las funciones:

$$4 - x^2 - y^2 = -6$$

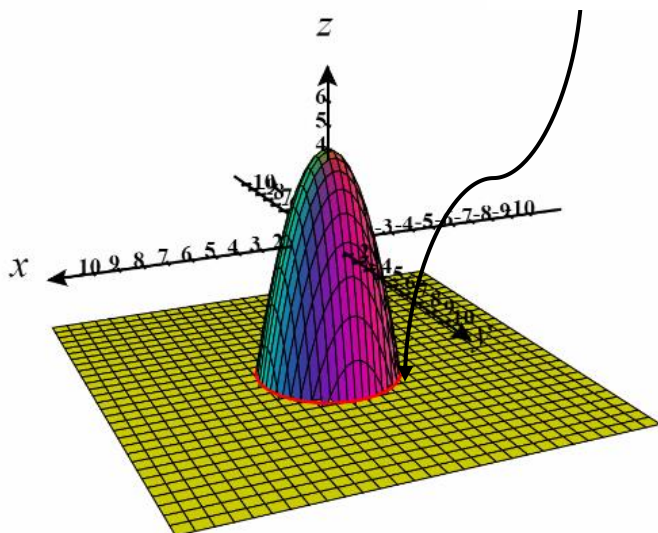
$$4 + 6 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 = 10$$

Región R en xy:



Región R de intersección entre el plano y el paraboloide.

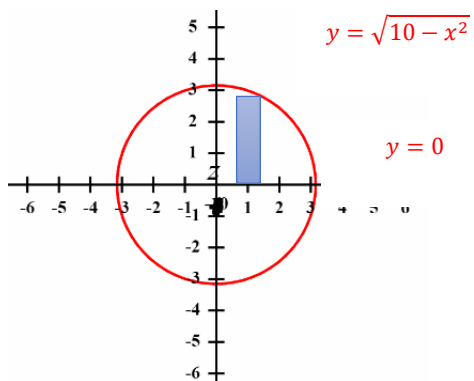


Donde terminan los cubos

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} \int_{-6}^{4-x^2-y^2} dz dy dx$$

Donde inician los cubos

Otra forma es calculando la cuarta parte y multiplicándola por 4:

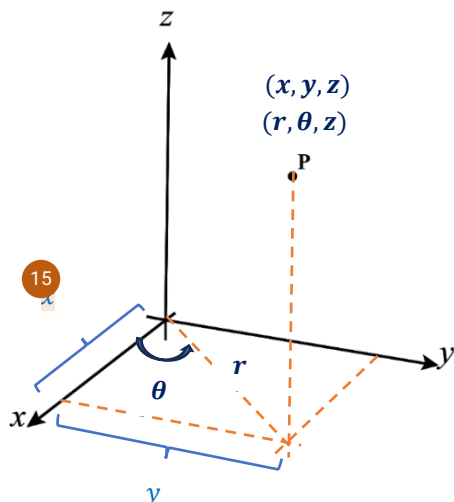


$$= 4 \int_0^{\sqrt{10}} \int_0^{\sqrt{10-x^2}} \int_{-6}^{4-(x^2+y^2)} dz dy dx$$

En caso de querer calcular la integral es mejor hacer el cambio a coordenadas POLARES e integración doble como se verá en la siguiente sección (Coordenadas cilíndricas y esféricas).

6 4.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Coordenadas cilíndricas



Coordenadas rectangulares:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Coordenadas cilíndricas:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

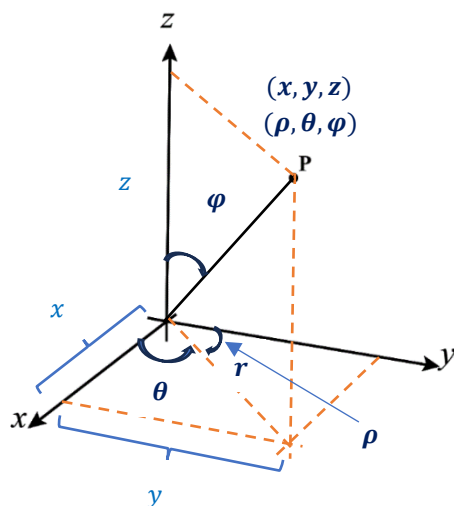
$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

1 En un sistema de coordenadas cilíndricas, un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada (r, θ, z) .

1. (r, θ) es una representación polar de la proyección de P en el plano xy .
2. z es la distancia dirigida de (r, θ) a P.

Coordenadas esféricas



$$r = \rho \sin \phi = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1

En un sistema de coordenadas esféricas, un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada (ρ, θ, φ) .

1. ρ es la distancia entre P y el origen, $\rho \geq 0$.
2. θ es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas para $r \geq 0$.
3. φ es el ángulo entre el eje z positivo y el segmento $\overline{OP}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Hay que observar que la primera y tercera coordenadas, ρ y φ , son no negativas. ρ es la letra minúscula *rho* y φ es la letra griega minúscula *fi*.

Conversión de un sistema a otro

- Cilíndrica a rectangular:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad y \quad z = z$$

- Rectangular a cilíndrica:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad y \quad z = z$$

- Esféricas a rectangulares:

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad y \quad z = \rho \cos \varphi$$

- Rectangulares a esféricas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad y \quad \varphi = \arcsen\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

- Esféricas a cilíndricas ($r \geq 0$):

$$r^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi, \quad \theta = \theta \quad y \quad z = \rho \cos \varphi$$

- Cilíndricas a esféricas ($r \geq 0$):

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta \quad y \quad \varphi = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

DIFERENCIAL DE ÁREA EN POLARES:	DIFERENCIAL DE VOLUMEN EN ESFÉRICAS:
$dA = r dr d\theta$	$dV = \rho^2 \sin \Phi d\rho d\Phi d\theta$

Ejemplo 1:

Cambiar el punto dado en su forma rectangular a cilíndricas:

$$(-1, 4, 3)$$

Solución:

$$(-1, 4, 3) = (x, y, z)$$

$$x = -1 \quad y = 4 \quad y \quad z = 3$$

Rectangular a cilíndrica:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad y \quad z = z$$

$$r^2 = (-1)^2 + (4)^2 \quad r^2 = 17 \quad \therefore \quad r = \sqrt{17}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{4}{-1}\right) = -75.96^\circ$$

Como $x = -1$ y $y = 4$ se encuentran en el segundo cuadrante en el plano xy , entonces restamos el valor absoluto del ángulo obtenido a 180° .

$$\theta = 180^\circ - 75.96^\circ = 104.04^\circ$$

En el caso de las cilíndricas z se queda igual.

Por lo tanto, $(-1, 4, 3) \rightarrow (r, \theta, z) = (\sqrt{17}, 104.4^\circ, 3)$

Ejemplo 2

Cambiar el punto dado en su forma cilíndrica a esférica:

$$\left(\sqrt{10}, \frac{\pi}{3}, 7\right)$$

Solución:

$$\left(\sqrt{10}, \frac{\pi}{3}, 7\right) = (r, \theta, z)$$

$$r = \sqrt{10} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad y \quad z = 7$$

Cilíndricas a esféricas ($r \geq 0$):

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta \quad y \quad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + (7)^2} = \sqrt{59}$$

$$\theta = \theta$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right) = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{59}}\right) = 24.31^\circ = 0.4243 \text{ rad}$$

Por lo tanto,

$$\left(\sqrt{10}, \frac{\pi}{3}, 7\right) = (r, \theta, z) \rightarrow (\rho, \theta, \phi) = \left(\sqrt{59}, \frac{\pi}{3}, 0.4243\right) = (\sqrt{59}, 60^\circ, 24.31^\circ)$$

Ejemplos de Volumen

1

EJEMPLO 3

Calcula el volumen de la región limitada por el paraboloide dado y “xy”:

$$z = 49 - x^2 - y^2$$

Solución:

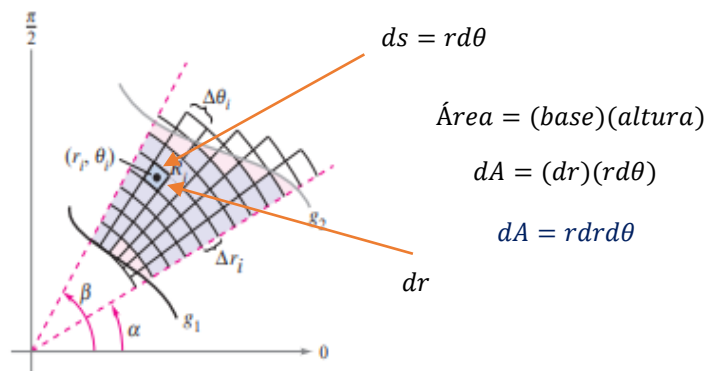
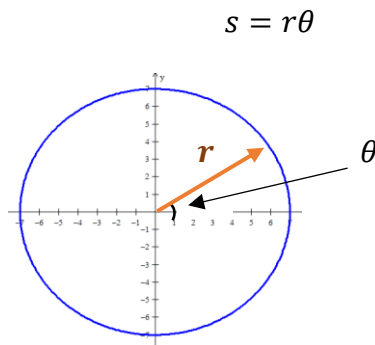
La gráfica corresponde a un paraboloide circular. Por lo tanto, la región R viene dada por un círculo con centro en el origen de radio 4. Para facilitar los cálculos se utilizan coordenadas polares o cilíndricas:

$$z = 49 - (x^2 + y^2)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$dA = r dr d\theta$$



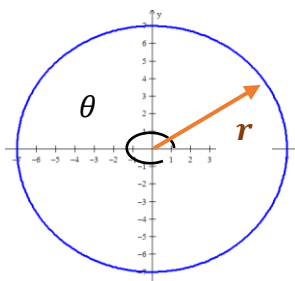
$$z = 49 - x^2 - y^2$$

$$z = 49 - (x^2 + y^2)$$

$$z = 49 - r^2$$

$$\text{Volumen} = \iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r, \theta) r dr d\theta$$

$$0 < \theta < 2\pi$$



Ya que abarca los 4 cuadrantes

Radio finaliza en 7

$$\text{Volumen} = \int_0^{2\pi} \int_0^7 (49 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^7 (49r - r^3) dr d\theta$$

dA en cilíndricas

Radio inicia en cero

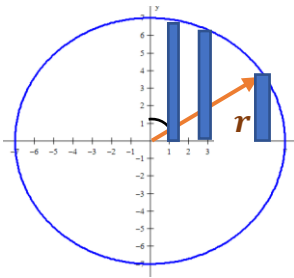
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{49r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^7 d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{49(7)^2}{2} - \frac{(7)^4}{4} \right) - \left(\frac{49(0)^2}{2} - \frac{(0)^4}{4} \right) \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2401}{2} - \frac{2401}{4} \right) d\theta = \frac{2401}{4} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{2401}{4} (2\pi) - \frac{2401}{4} (0) = \frac{2401}{2} \pi u^3$$

Otra forma de plantear la integral:

Ya que solo consideramos un cuadrante

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$



$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^7 (49r - r^3) dr d\theta = \frac{2401}{2} \pi u^3$$

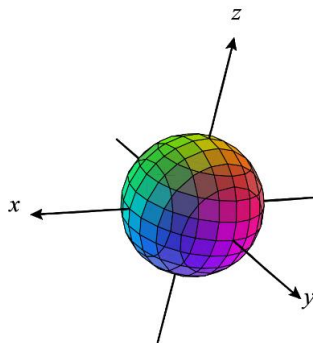
Radio finaliza en 7

Radio inicia en 0

EJEMPLO 4

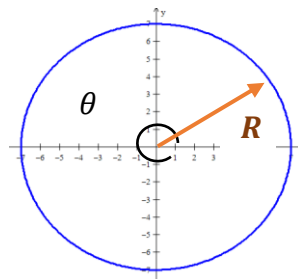
Calcular la fórmula para el volumen de una esfera de radio R .

Solución:



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$0 < \theta < 2\pi$$



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2$$

$$z^2 = R^2 - (x^2 + y^2)$$

$$z^2 = R^2 - r^2$$

$$z = \pm \sqrt{R^2 - r^2}$$

Estamos calculando el volumen de los 2 hemisferios

$$\text{Volumen} = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \, r \, dr \, d\theta = - \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2)^{1/2} \, (-2)r \, dr \, d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} (R^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^R \, d\theta$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{2}{3} (R^2 - R^2)^{3/2} \right) - \left(\frac{2}{3} (R^2 - (0)^2)^{3/2} \right) \right] \, d\theta$$

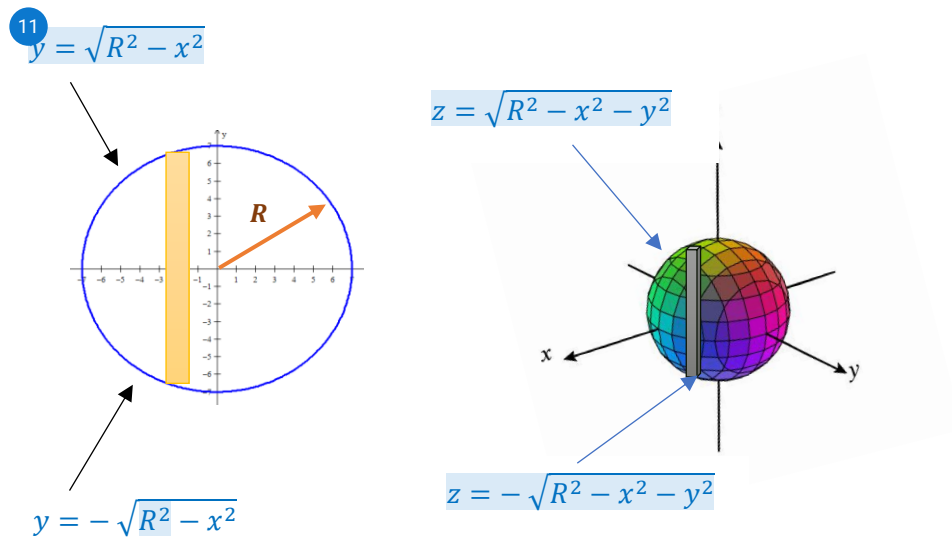
$$= - \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{2}{3} (0)^{3/2} \right) - \left(\frac{2}{3} (R^2 - (0)^2)^{3/2} \right) \right] \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} R^3 \, d\theta = \frac{2}{3} R^3 \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3} R^3 (2\pi) - \frac{2}{3} R^3 (0) = \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$\text{Volumen de la esfera de radio } R = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Se realizó con coordenadas cilíndricas ya que ello facilita el cálculo de la integral pero también se puede obtener el resultado planteando de forma rectangular:

$$\text{Volumen} = \iint_R f(x, y) dA$$



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y^2 = R^2 - x^2 \quad \rightarrow \quad y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

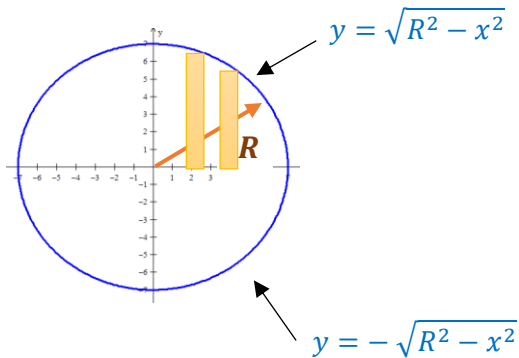
$$z^2 + x^2 + y^2 = R^2$$

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2$$

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \iint_R f(x, y) \, dA = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left[\sqrt{R^2-x^2-y^2} - \left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2} \right) \right] \, dy \, dx \\ &= \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left[\sqrt{R^2-x^2-y^2} + \sqrt{R^2-x^2-y^2} \right] \, dy \, dx \\ &= 2 \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2} \, dy \, dx \end{aligned}$$

Otra opción para rectangulares es considerando una cuarta parte de la región R:

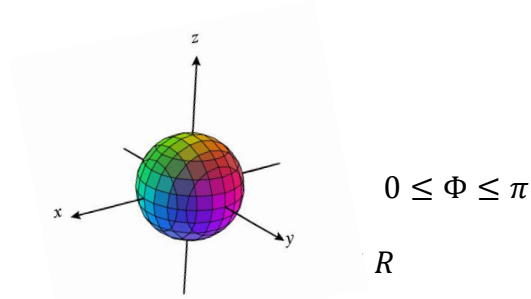


$$\text{Volumen} = 8 \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2} \, dy \, dx$$

EJEMPLO 5

2 Calcular el volumen de una esfera de radio r utilizando coordenadas esféricas:

Solución:



$$x = \rho \sin \Phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \Phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \Phi$$

$$dV = \rho^2 \sin \Phi d\rho d\Phi d\theta$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Rectangulares:

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz dy dx$$

Donde terminan los cubos

Donde inician los cubos

Esféricas:

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^2 \sin \Phi d\rho d\Phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left. \frac{\rho^3 \sin \Phi}{3} \right|_0^R d\Phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^3 \sin \Phi}{3} d\Phi d\theta = \int_0^{2\pi} \left. -\frac{R^3 \cos \Phi}{3} \right|_0^\pi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R^3 \cos \pi}{3} - \left(-\frac{R^3 \cos 0}{3} \right) \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R^3(-1)}{3} - \left(-\frac{R^3(1)}{3} \right) \right] d\theta$$

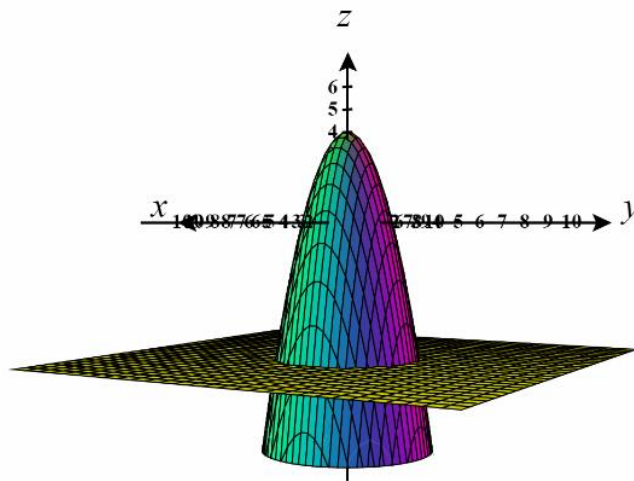
$$= \int_0^{2\pi} \frac{2R^3}{3} d\theta = \frac{2R^3}{3} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

EJEMPLO 6

Plantear una integral triple para el cálculo del volumen comprendido entre

$$z = 4 - x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad z = -6$$

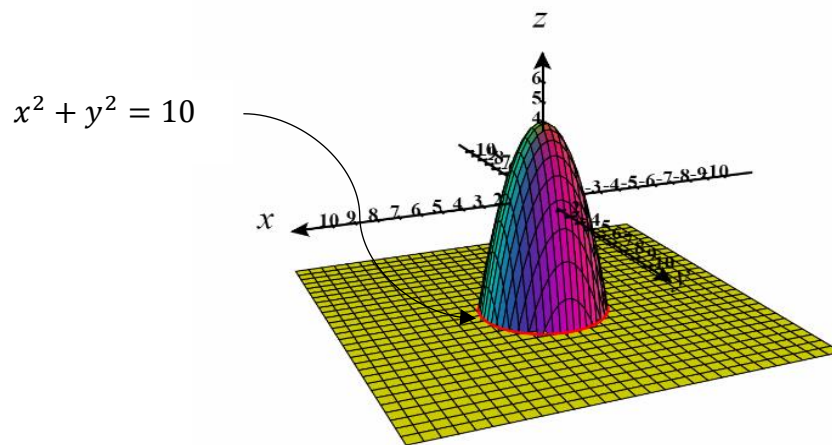
Solución:



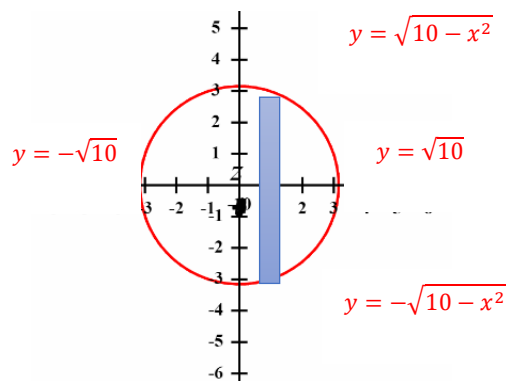
Para encontrar la región R igualamos las funciones:

$$4 - x^2 - y^2 = -6$$

$$4 + 6 = x^2 + y^2$$



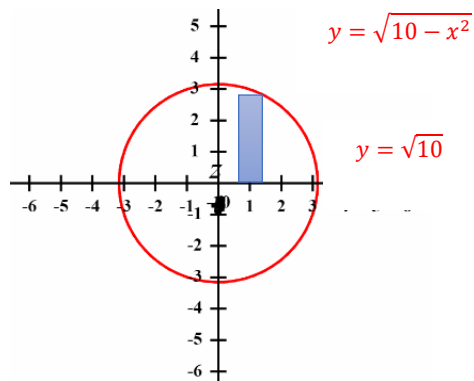
Región R en xy



$$V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} \int_{-6}^{4-x^2-y^2} dz dy dx$$

Donde terminan los cubos

Donde inician los cubos



$$= 4 \int_0^{\sqrt{10}} \int_0^{\sqrt{10-x^2}} \int_{-6}^{4-x^2-y^2} dz dy dx$$

En caso de querer calcular la integral es mejor hacer el cambio a coordenadas cilíndricas e integración doble.

$$= \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} \int_{-6}^{4-(x^2+y^2)} dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{10}} \int_{-6}^{4-r^2} dz r dr d\theta$$

5. Integración vectorial

5.1 Campos vectoriales, divergencia, rotacional y campos conservativos.

3 Definición de campo vectorial

Un campo vectorial sobre una región plana R es una función $\vec{F}$ que asigna un vector $\vec{F}(x, y)$ a cada punto en R .

$$\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j}$$

3 Un campo vectorial sobre una región sólida Q en el espacio es una función $\vec{F}$ que asigna un vector $\vec{F}(x, y, z)$ a cada punto en Q .

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$$

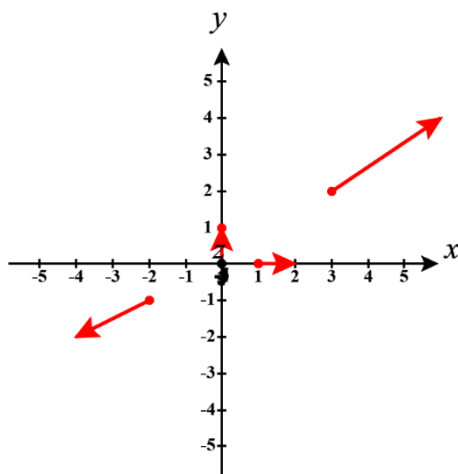
Ver Anexo A para graficar campos vectoriales

Ejemplo 1

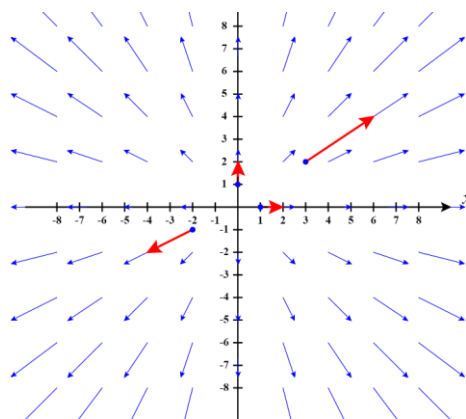
a) $\vec{F}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$

Solución:

x	y	$\vec{F}(x, y, z)$
-2	-1	$-2\hat{i} - \hat{j}$
1	0	$\hat{i}$
0	1	$\hat{j}$
3	2	$3\hat{i} + 2\hat{j}$



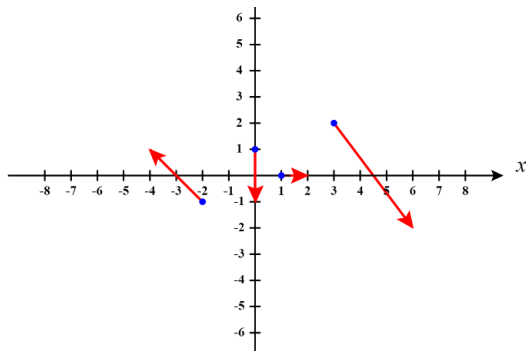
Tabulando más valores, se tiene:



b) $\vec{F}(x, y) = x \hat{i} - 2y \hat{j}$

Solución:

x	y	$\vec{F}(x, y, z)$
-2	-1	$-2 \hat{i} + 2 \hat{j}$
1	0	$\hat{i}$
0	1	$-2 \hat{j}$
3	2	$3 \hat{i} - 4 \hat{j}$



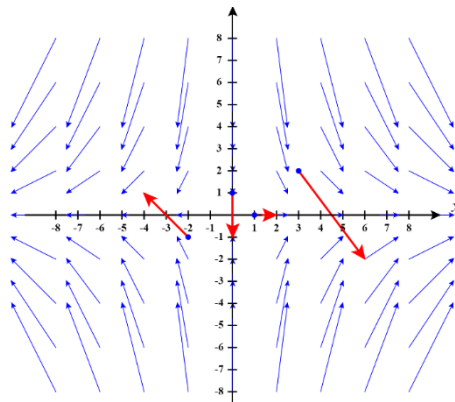
$$\vec{F}(-2, -1) = (-2)\hat{i} - 2(-1)\hat{j} = -2\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{F}(1, 0) = (1)\hat{i} - 2(0)\hat{j} = \hat{i}$$

$$\vec{F}(0, 1) = (0)\hat{i} - 2(1)\hat{j} = -2\hat{j}$$

$$\vec{F}(3, 2) = (3)\hat{i} - 2(2)\hat{j} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$

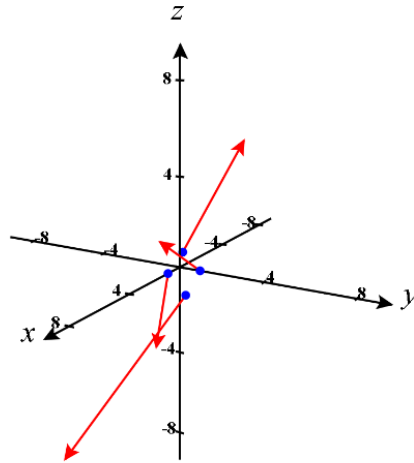
Tabulando más valores, se tiene:



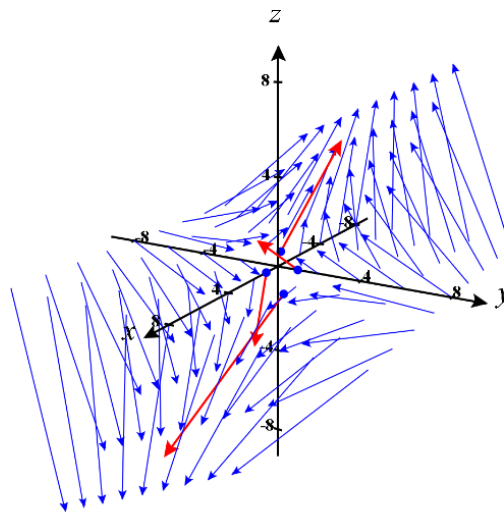
c) $\vec{F}(x, y) = x\hat{i} - 2y\hat{j} + (y - 3x)\hat{k}$

Solución:

x	y	$\vec{F}(x, y, z)$
-2	-1	$-2\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$
1	0	$\hat{i} - 3\hat{k}$
0	1	$-2\hat{j} + \hat{k}$
3	2	$3\hat{i} - 4\hat{j} - 7\hat{k}$



Tabulando más valores, se tiene:



d) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - 3y) \hat{i} - (x^2y - 3xy) \hat{j} + (y^3 - 3x + 4z) \hat{k}$

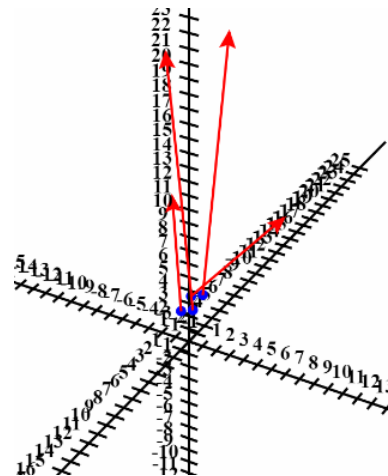
x	y	z	$\vec{F}(x,y,z)$
-2	-1	2	$7\hat{i} + 10\hat{j} + 13\hat{k}$
1	0	3	$\hat{i} + 9\hat{k}$
0	1	4	$-3\hat{i} + 17\hat{k}$
3	2	5	$3\hat{i} + 19\hat{k}$

$$M(-2, -1, 2) = (-2)^2 - 3(-1) = 4 + 3 = 7$$

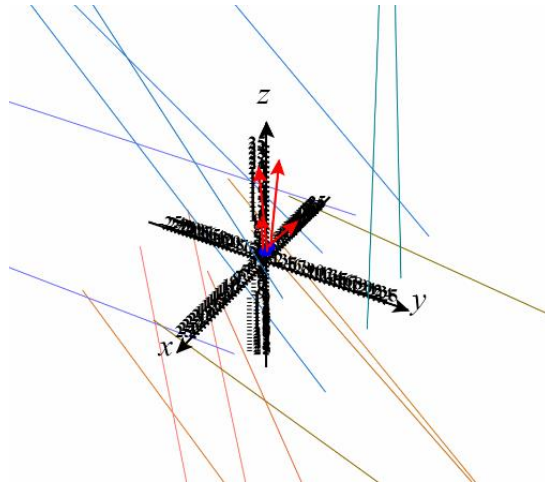
$$N(-2, -1, 2) = -((-2)^2(-1) - 3(-2)(-1)) = -(-4 - 6) = 10$$

$$P(-2, -1, 2) = (-1)^3 - 3(-2) + 4(2) = -1 + 6 + 8 = 13$$

$$\vec{F}(-2, -1, 2) = 7\hat{i} + 10\hat{j} + 13\hat{k}$$



Tabulando más valores, tendríamos:



Divergencia:

La divergencia es un operador que toma una función vectorial que define a un campo vectorial y da como resultado una función escalar que mide el cambio de la densidad del fluido en cada punto.

La divergencia mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, por tanto, si el campo tiene "fuentes" la divergencia será positiva, y si tiene "sumideros", la divergencia será negativa. *La divergencia mide la rapidez neta con la que se conduce la materia al exterior de cada punto*, y en el caso de ser la divergencia idénticamente igual a cero, describe al flujo incompresible del fluido. *Llamado también campo solenoidal.*

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$$

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle M, N, P \rangle = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Rotacional

El rotacional es un operador que toma una función vectorial, la cual representa un campo vectorial, y le asigna otra función que representa un campo vectorial diferente.

El rotacional o rotor muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Ejemplo 2

Calcular la divergencia y rotacional para el siguiente campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - 3y) \hat{i} - (x^2y - 3xy) \hat{j} + (y^3 - 3x + 4z) \hat{k}$$

Solución:

Divergencia:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
 M &= x^2 - 3y & M_x &= 2x \\
 N &= -(x^2y - 3xy) & N_y &= -x^2 + 3x \\
 P &= y^3 - 3x + 4z & P_z &= 4
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = (2x) + (-x^2 + 3x) + (4)$$

$$\mathbf{div} \vec{F} = -x^2 + 5x + 4$$

Rotacional:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - 3y & -(x^2y - 3xy) & y^3 - 3x + 4z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = (3y^2 - 0)\hat{i} - (-3 - 0)\hat{j} + ((-2xy + 3y) - (-3))\hat{k}$$

$$\text{rot } \vec{F} = 3y^2\hat{i} + 3\hat{j} + (-2xy + 3y + 3)\hat{k}$$

Campos conservativos

Un campo vectorial es conservativo si:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$$

En $\mathbf{R}^2$:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$= (0 - 0)\hat{i} - (0 - 0)\hat{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

En $\mathbf{R}^3$:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \vec{0}$$

EJEMPLO 3

a) Determina si los siguientes campos vectoriales son conservativos:

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \operatorname{sen}(3x) \right) \hat{i} + \left(2y - \frac{1}{x} - \cos(3x) \right) \hat{j}$$

Solución:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$M = \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \operatorname{sen}(3x) \quad \rightarrow \quad M_y = \frac{1}{x^2} + 3 \operatorname{sen}(3x)$$

$$N = 2y - \frac{1}{x} - \cos(3x) \quad \rightarrow \quad N_x = \frac{1}{x^2} + 3 \operatorname{sen}(3x)$$

Como si se cumple el criterio, entonces se trata de un **campo conservativo**. Al tratarse de un campo conservativo existe una función $f(x, y)$ tal que:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \quad y \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Esto significa que:

$$\vec{F}(x, y) = M\hat{i} + N\hat{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$$

$$\vec{F} = \nabla f$$

Para encontrar $f(x, y)$, se calculan las siguientes integrales:

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int M dx$$

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int N dy$$

$$\int \partial f = \int M \partial x = \int \left(\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \sin(3x) \right) \partial x = -\frac{y}{x} - x^4 - y \cos(3x) + h(y) = f(x, y)$$

$$\int \partial f = \int N \partial y = \int \left(2y - \frac{1}{x} - \cos(3x) \right) \partial y = y^2 - \frac{y}{x} - y \cos(3x) + g(x) = f(x, y)$$

Como en ambos casos se debe tener la misma función, entonces:

$$h(y) = y^2 \quad y \quad g(x) = -x^4$$

Por lo tanto, la solución es:

$$f(x, y) = y^2 - \frac{y}{x} - y \cos(3x) - x^4 + k \text{ **Función Potencia**}$$

$$\vec{F} = \nabla f$$

$$\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

$$\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2} + 3y \sin(3x) - 4x^3 \right) \hat{i} + \left(2y - \frac{1}{x} - \cos(3x) \right) \hat{j} + (0) \hat{k}$$

$$\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2} + 3y \sin(3x) - 4x^3 \right) \hat{i} + \left(2y - \frac{1}{x} - \cos(3x) \right) \hat{j}$$

$$\text{b) } \vec{F}(x, y, z) = y^2 z^3 \hat{i} + 2xyz^3 \hat{j} + 3xy^2 z^2 \hat{k}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2 z^2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (6xyz^2 - 6xyz^2)i - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)j + (2yz^3 - 2yz^3)k$$

67 Como $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ se cumple, se trata de un campo vectorial CONSERVATIVO

Entonces existe una función $f(x, y, z)$ tal que $\vec{F} = \nabla f$:

:

$$\int \partial f = \int M \partial x = \int (y^2z^3) \partial x = xy^2z^3 + h(y, z) = f(x, y, z)$$

$$\int \partial f = \int N \partial y = \int (2xyz^3) \partial y = xy^2z^3 + g(x, z) = f(x, y, z)$$

$$\int \partial f = \int P \partial z = \int (3xy^2z^2) \partial z = xy^2z^3 + m(x, y) = f(x, y, z)$$

$$\therefore h(y, z) = g(x, z) = m(x, y) = 0$$

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + k \text{ función potencia}$$

Comprobación:

$$\vec{F} = \nabla f$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} = y^2z^3\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + 3xy^2z^2\hat{k} = \vec{F}(x, y, z)$$

$$\vec{F}(x, y) = (12x^2y^2 + 10xye^{x^2})\hat{i} + (8x^3y + 5e^{x^2})\hat{j}$$

$$M = 12x^2y^2 + 10xye^{x^2} \rightarrow M_y = 24x^2y + 10xe^{x^2}$$

$$N = 8x^3y + 5e^{x^2} \rightarrow N_x = 24x^2y + 10xe^{x^2}$$

$$\text{Como } M_y = N_x \quad \therefore \quad \text{El campo es conservativo}$$

$$f(x, y) = \int M dx = \int (12x^2y^2 + 10xye^{x^2}) dx = 4x^3y^2 + 5ye^{x^2} + m(y)$$

$$f(x, y) = \int N dy = \int (8x^3y + 5e^{x^2}) dy = 4x^3y^2 + 5ye^{x^2} + n(x)$$

$$f(x, y) = 4x^3y^2 + 5ye^{x^2} + k$$

$$\text{c) } f(x, y) = (6xy - 5yz)\hat{i} + (3x^2 - 5xz + 10z^2)\hat{j} + (-5xy + 20yz)\hat{k}$$

$$M = 6xy - 5yz$$

$$N = 3x^2 - 5xz + 10z^2$$

$$P = -5xy + 20yz$$

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (6xy - 5yz) & (3x^2 - 5xz + 10z^2) & (-5xy + 20yz) \end{vmatrix}$$

$$= ((-5x + 20z) - (-5x + 20z))\hat{i} - (-5y - (-5y))\hat{j} + ((6x - 5z) - (6x - 5z))\hat{k} \\ = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

Como $\text{rot}\vec{F} = \vec{0} \quad \therefore \quad \text{El campo es conservativo}$

$$f(x, y, z) = \int M dx = \int (6xy - 5yz) dx = 3x^2y - 5xyz + m(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int N dy = \int (3x^2 - 5xz + 10z^2) dy = 3x^2y - 5xyz + 10yz^2 + n(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int P dz = \int (-5xy + 20yz) dz = -5xyz + 10yz^2 + h(x, y)$$

$$f(x, y) = 3x^2y - 5xyz + 10yz^2 + k$$

Ejemplo 4

2

Hallar el campo vectorial conservativo para la función potencial, encontrando su gradiente:

$$f(x, y, z) = 4x^3y^2 + 5ye^{x^2}$$

Solución:

$$\nabla f(x, y, z) = (12x^2y^2 + 10xye^{x^2})\hat{i} + (8x^3y + 5e^{x^2})\hat{j}$$

5.2 Trabajo e integrales de línea.

Integral de línea

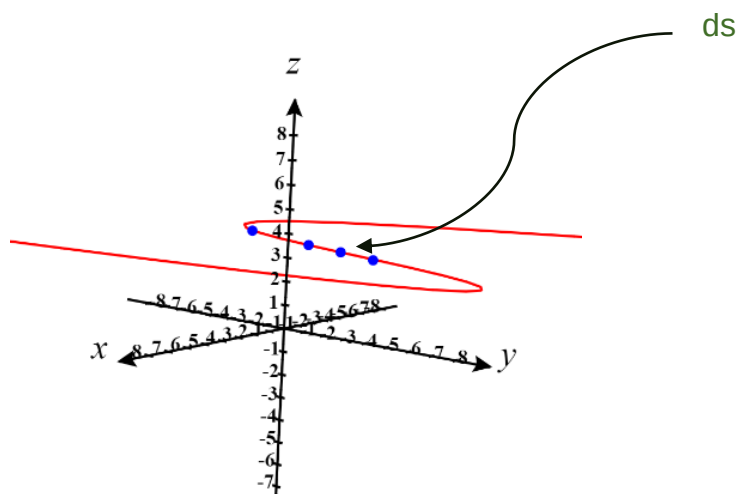
Si f está definida en una región que contiene una curva suave C de longitud finita, entonces la integral de línea de f a lo largo de C está dada por:

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i \quad \text{Plano}$$

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i \quad \text{Espacio}$$

siempre que el límite exista.

$$\int_C f(x, y) ds \quad \text{Se integra sobre una curva } S$$



En el caso de que $f(x, y) = 1$ entonces:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_C 1 ds \quad \text{se estaría calculando la longitud de arco.}$$

Se tiene que:

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt$$

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

1 Evaluación de una Integral de Línea como integral definida

Sea f continua en una región que contiene una curva suave C . Si C está dada por $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$, donde $a \leq t \leq b$ entonces:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Si C está dada por $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$, donde $a \leq t \leq b$ entonces:

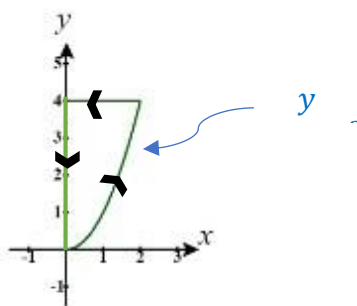
$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Antes de comenzar a calcular integrales de línea se realizarán algunas PARAMETRIZACIONES:

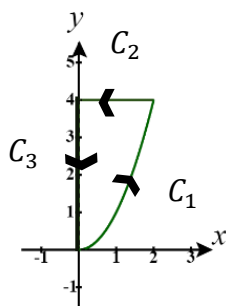
Las gráficas se realizan con el uso de CalcPlot3D con la instrucción curva paramétrica.

Ejemplo 1

- 2 Hallar una parametrización suave a trozos de la trayectoria C (Recuerde que hay infinitud de parametrizaciones):



Solución:



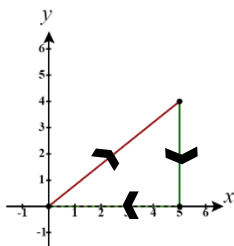
$$C_1: \vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j}, \quad 0 \leq t < 2$$

$$C_2: \vec{r}(t) = (4-t)\hat{i} + 4\hat{j}, \quad 2 \leq t < 4$$

$$C_3: \vec{r}(t) = 8-t\hat{j}, \quad 4 \leq t \leq 8$$

Ejemplo 2

- 2 Hallar una parametrización suave a trozos de la trayectoria C (Recuerde que hay infinitud de parametrizaciones):



Solución:

$(0,0)$ y $(5,4)$

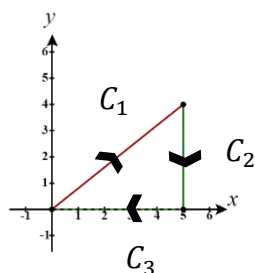
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{5 - 0} = \frac{4}{5}$$

$$y - 4 = \frac{4}{5}(x - 5)$$

$$y = \frac{4}{5}x - 4 + 4$$

$$y = \frac{4}{5}x$$



$$C_1: \vec{r}(t) = t\hat{i} + \frac{4}{5}t\hat{j}, \quad 0 \leq t < 5$$

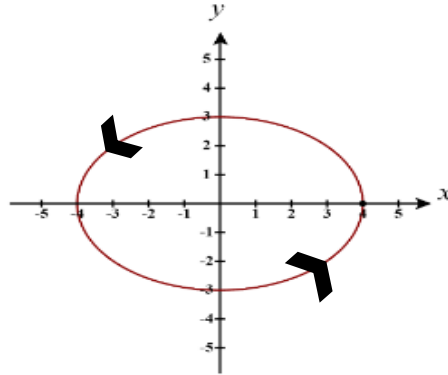
$$C_2: \vec{r}(t) = 5\hat{i} + (9 - t)\hat{j}, \quad 5 \leq t < 9$$

$$C_3: \vec{r}(t) = (14 - t)\hat{i}, \quad 9 \leq t \leq 14$$

Ejemplo 3

2. Hallar una parametrización suave a trozos de la trayectoria C (Recuerde que hay infinitud de parametrizaciones):

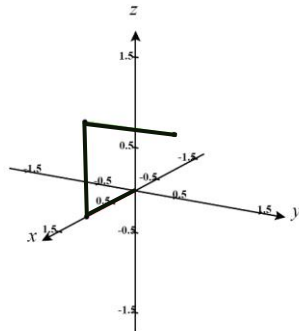
Solución:



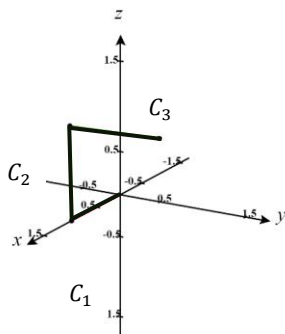
$$C: \vec{r}(t) = 4\cos(t)\hat{i} + 3\sin(t)\hat{j}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

Ejemplo 4

2. Hallar una parametrización suave a trozos de la trayectoria C (Recuerde que hay infinitud de parametrizaciones):



Solución:



$$C_1: \vec{r}(t) = t\hat{i}, \quad 0 \leq t < 1$$

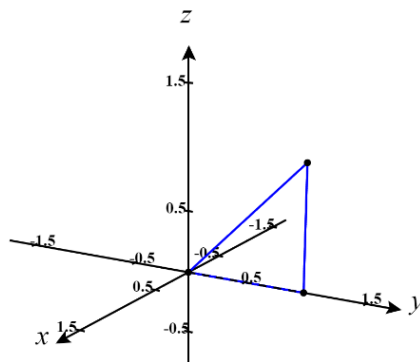
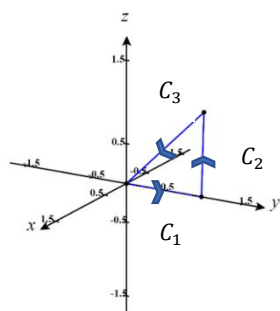
$$C_2: \vec{r}(t) = \hat{i} + (t-1)\hat{k}, \quad 1 \leq t < 2$$

$$C_3: \vec{r}(t) = \hat{i} + (t-2)\hat{j} + \hat{k}, \quad 2 \leq t \leq 3$$

Ejemplo 5

2 Hallar una parametrización suave a trozos de la trayectoria C (Recuerde que hay infinitud de parametrizaciones):

Solución:



$$0 \leq t < 1$$

$$C_2: \vec{r}(t) = \hat{j} + (t-1)\hat{k}, \quad 1 \leq t < 2$$

$$C_3: \vec{r}(t) = (3-t)\hat{j} + (3-t)\hat{k}, \quad 2 \leq t \leq 3$$

Ejemplo 6

2 Evaluar la integral de línea a lo largo de la trayectoria dada:

$$\int_C 3(x-y)ds$$

$$C: \vec{r}(t) = t\hat{i} + (2-t)\hat{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

Solución:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$\vec{r}'(t) = \hat{i} - \hat{j}$$

$$x(t) = t \quad y(t) = 2 - t$$

$$\begin{aligned} \int_C 3(x - y) ds &= \int_0^2 3((t) - (2 - t))\sqrt{[1]^2 + [-1]^2} dt \\ &= 3 \int_0^2 (t - 2 + t)\sqrt{2} dt = 3\sqrt{2} \int_0^2 (2t - 2) dt = 3\sqrt{2}(t^2 - 2t) \Big|_0^2 \\ &= 3\sqrt{2}((2)^2 - 2(2)) - 3\sqrt{2}((0)^2 - 2(0)) \\ &= 3\sqrt{2}(0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 7

2. Evaluar la integral de línea a lo largo de la trayectoria dada:

$$\int_C 2xyz ds$$

$$C: \vec{r}(t) = 12t\hat{i} + 5t\hat{j} + 84t\hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Solución:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

$$\vec{r}'(t) = 12\hat{i} + 5\hat{j} + 84\hat{k}$$

$$x(t) = 12t, \quad y(t) = 5t \quad y \quad z(t) = 84t$$

$$\begin{aligned} \int_C 2xyz ds &= \int_0^1 2(12t)(5t)(84t) \sqrt{[12]^2 + [5]^2 + [84]^2} dt \\ &= \int_0^1 10080t^4(85) dt = 10080(85) \int_0^1 t^4 dt = 856800 \left(\frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 \\ &= 214200t^5 \Big|_0^1 \\ &= \mathbf{214200} \end{aligned}$$

Ejemplo 8

3 Hallar una parametrización de la trayectoria y evaluar:

$$\int_C (x^2 + y^2) ds$$

C: segmento de recta de (0,0) a (2,4)

Solución:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

(0,0) a (2,4)

$$m = \frac{4-0}{2-0} = 2$$

$$y - 0 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x$$

$$\vec{r}(t) = t\hat{i} + 2t\hat{j}$$

$$\vec{r}'(t) = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$0 \leq t \leq 2$$

$$x(t) = t \quad y(t) = 2t$$

$$\int_C (x^2 + y^2) ds = \int_0^2 ((t)^2 + (2t)^2) \sqrt{[1]^2 + [2]^2} dt$$

$$= \int_0^2 5t^2 \sqrt{5} dt = 5\sqrt{5} \int_0^2 t^2 dt = 5\sqrt{5} \left(\frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{40\sqrt{5}}{3}$$

Ejemplo 9

3 Hallar una parametrización de la trayectoria y evaluar:

$$\int_C (x^2 + y^2) ds$$

C : Círculo $x^2 + y^2 = 4$ en sentido antihorario de $(2,0)$ a $(0,2)$

Solución:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\hat{i} + 2\sin(t)\hat{j}$$

$$\vec{r}'(t) = -2\sin(t)\hat{i} + 2\cos(t)\hat{j}$$

de (2,0) a (0,2)

$x = 2\cos(t)$ pero también sabemos que $x = 2$

$$2 = 2\cos(t) \rightarrow \cos(t) = 1 \therefore t = \arccos(1) = 0$$

$x = 2\cos(t)$ pero también sabemos que $x = 0$

$$0 = 2\cos(t) \rightarrow \cos(t) = 0 \therefore t = \arccos(0) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq t \leq 90^\circ$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\int_C (x^2 + y^2) ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2(t) + 4\sin^2(t)) \sqrt{[-2\sin(t)]^2 + [2\cos(t)]^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(1) \sqrt{4(\sin^2(t) + \cos^2(t))} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(1) \sqrt{4(1)} dt$$

$$= 4(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 8t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\pi$$

Ejemplo 10

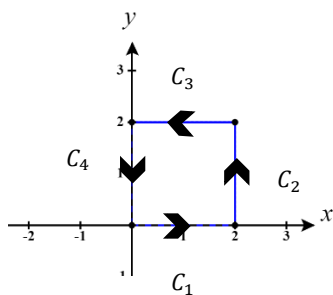
2

Hallar una parametrización de la trayectoria y evaluar:

$$\int_C (x + 4\sqrt{y}) ds$$

C : Cuadrado cuyos vértices son $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ y $(0,2)$ recorrido en sentido antihorario.

Solución:



$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

$$C_1: \vec{r}(t) = t\hat{i}, \quad 0 \leq t < 2$$

$$C_2: \vec{r}(t) = 2\hat{i} + (t-2)\hat{j}, \quad 2 \leq t < 4$$

$$C_3: \vec{r}(t) = (6-t)\hat{j} + 2\hat{j}, \quad 4 \leq t \leq 6$$

$$C_4: \vec{r}(t) = (8-t)\hat{j}, \quad 6 \leq t < 8$$

$$C_1: \vec{r}(t) = t\hat{i}, \quad 0 \leq t < 2$$

$$\vec{r}'(t) = \hat{i}$$

$$\int_C (x + 4\sqrt{y}) ds = \int_0^2 (t + 4\sqrt{0}) \sqrt{[1]^2 + [0]^2} dt$$

$$= \int_0^2 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 = 2$$

$$C_2: \vec{r}(t) = 2\hat{i} + (t-2)\hat{j} , \quad 2 \leq t < 4$$

$$\vec{r}'(t) = \hat{j}$$

$$\int_C (x + 4\sqrt{y}) ds = \int_2^4 (2 + 4\sqrt{t-2}) \sqrt{[0]^2 + [1]^2} dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_2^4 (2 + 4\sqrt{t-2}) dt = \left(2t + 4(t-2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} \right) \right) \Big|_2^4 \\ &= \left(8 + 4(4)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} \right) \right) - \left(4 + 4(2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} \right) \right) = \frac{88}{3} - 4 - \frac{8}{3}(2)^{\frac{3}{2}} = \frac{76}{3} - \frac{8}{3}(2)^{\frac{3}{2}} = \frac{76}{3} - \frac{16}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$C_3: \vec{r}(t) = (6-t)\hat{i} + 2\hat{j} , \quad 4 \leq t \leq 6$$

$$\vec{r}'(t) = -\hat{i}$$

$$\int_C (x + 4\sqrt{y}) ds = \int_4^6 ((6-t) + 4\sqrt{2}) \sqrt{[-1]^2 + [0]^2} dt$$

$$= \int_4^6 ((6-t) + 4\sqrt{2}) dt = \left(-\frac{(6-t)^2}{2} + 4\sqrt{2}t \right) \Big|_4^6$$

$$= (0 + 24\sqrt{2}) - (-2 + 16\sqrt{2}) = 2 + 8\sqrt{2}$$

$$C_4: \vec{r}(t) = (8-t)\hat{j}, \quad 6 \leq t < 8$$

$$\vec{r}'(t) = -\hat{j}$$

$$\int_C (x + 4\sqrt{y}) ds = \int_6^8 ((0) + 4\sqrt{8-t})\sqrt{[0]^2 + [-1]^2} dt$$

$$= \int_6^8 4\sqrt{8-t} dt = -4(8-t)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right) \Big|_6^8$$

$$= -(0) - \left(-4(2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_C (x + 4\sqrt{y}) ds =$$

$$\int_{C_1} (x + 4\sqrt{y}) ds + \int_{C_2} (x + 4\sqrt{y}) ds + \int_{C_3} (x + 4\sqrt{y}) ds + \int_{C_4} (x + 4\sqrt{y}) ds$$

$$= 2 + \left(\frac{76}{3} - \frac{8}{3}(2)^{\frac{3}{2}}\right) + (2 + 8\sqrt{2}) + \left(\frac{16\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{88}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{3} + 8\sqrt{2} + \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$= \frac{88}{3} + 8\sqrt{2}$$

Ejemplo 11

3
Plantear la integral de línea a lo largo de la trayectoria dada:

$$\int_C (4x + 5y - z) ds \quad C: \vec{r}(t) = (4t^2 - 5)\hat{i} + (2t^3 + 4)\hat{j} + (1 + 3t)\hat{k} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Solución:

$$x = 4t^2 - 5, \quad y = 2t^3 + 4 \quad y \quad z = 1 + 3t$$

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt$$

$$\vec{r}'(t) = (8t)\hat{i} + (6t^2)\hat{j} + (3)\hat{k}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{64t^2 + 36t^4 + 9}$$

$$\int_C (4x + 5y - z) ds = \int_0^2 (4(4t^2 - 5) + 5(2t^3 + 4) - (1 + 3t))\sqrt{64t^2 + 36t^4 + 9} dt$$

$$= \int_0^2 (16t^2 - 20 + 10t^3 + 20 - 1 - 3t)\sqrt{64t^2 + 36t^4 + 9} dt$$

$$= \int_0^2 (10t^3 + 16t^2 - 3t - 1)\sqrt{64t^2 + 36t^4 + 9} dt$$

Ejemplo 12

Evaluar $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde C está representada por $\vec{r}(t)$:

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$$

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\hat{i} + 2\sin t\hat{j} + \frac{t^2}{2}\hat{k} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Solución:

$$\vec{r}'(t) = -2\sin t\hat{i} + 2\cos t\hat{j} + t\hat{k}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^\pi \left((2\cos t)^2\hat{i} + (2\sin t)^2\hat{j} + \left(\frac{t^2}{2}\right)^2\hat{k} \right) \cdot (-2\sin t\hat{i} + 2\cos t\hat{j} + t\hat{k}) dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi \left(-8\cos^2 t \sin t + 8\sin^2 t \cos t + \frac{t^5}{4} \right) dt \\ &= \int_0^\pi \left(8\cos^2 t (-\sin t) + 8\sin^2 t (\cos t) + \frac{t^5}{4} \right) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{8\cos^3 t}{3} + \frac{8\sin^3 t}{3} + \frac{t^6}{24} \Big|_0^\pi = -\frac{8}{3} + 0 + \frac{\pi^6}{24} - \frac{8}{3} = -\frac{16}{3} + \frac{\pi^6}{24}$$

Ejemplo 13

Calcular la integral de línea a lo largo de la trayectoria C:

$$\int_C (3y - x)dx + y^2 dy \quad C: \vec{r}(t) = 4t^2 \hat{i} + (3t - 2)\hat{j} + 2t\hat{k} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Solución:

$$\begin{aligned} x = 4t^2 &\rightarrow dx = 8t dt \\ y = 3t - 2 &\rightarrow dy = 3 dt \\ z = 2t &\rightarrow dz = 2 dt \end{aligned}$$

$$\int_C (3y - x)dx + y^2 dy = \int_0^1 (3(3t - 2) - 4t^2)8t dt + (3t - 2)^2 3 dt$$

$$\int_0^1 (72t^2 - 48t - 32t^3 + 27t^2 - 36t + 12) dt = \int_0^1 (99t^2 - 32t^3 - 84t + 12) dt$$

$$= \frac{99t^3}{3} - \frac{32t^4}{4} - \frac{84t^2}{2} + 12t \Big|_0^1 = 33t^3 - 8t^2 - 42t^2 + 12t \Big|_0^1$$

$$= 33 - 8 - 42 + 12 - 0 = -5$$

Ejemplo 14

Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria dada:

$$\vec{F}(x, y) = x^2\hat{i} - xy\hat{j}$$

$$C: x(t) = \cos^3(t), \quad y(t) = \sin^3(t) \text{ desde } (1,0) \text{ hasta } (0,1)$$

Solución:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$(1,0) \text{ hasta } (0,1)$$

$$\text{Si } x = 1 \text{ y } x = \cos^3(t) \rightarrow 1 = \cos^3(t) \therefore \cos(t) = 1 \rightarrow t = \arccos(1) = 0$$

$$\text{Si } x = 0 \text{ y } x = \cos^3(t) \rightarrow 0 = \cos^3(t) \therefore \cos(t) = 0 \rightarrow t = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{r}(t) = \langle \cos^3(t), \sin^3(t) \rangle$$

$$d\vec{r} = \langle -3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t) \rangle dt$$

$$\vec{F}(x, y) = x^2\hat{i} - xy\hat{j}$$

$$\vec{F}(x, y) = (\cos^3(t))^2 \hat{i} - (\cos^3(t))(\sin^3(t)) \hat{j}$$

$$\vec{F}(x, y) = \cos^6(t) \hat{i} - \cos^3(t) \sin^3(t) \hat{j}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \cos^6(t)(-3\cos^2(t)\sin(t)) - \cos^3(t) \sin^3(t)(3\sin^2(t)\cos(t))$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -3\cos^8(t)\sin(t) - 3\cos^4(t)\sin^5(t)$$

$$W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-3\cos^8(t)\sin(t) - 3\cos^4(t)\sin^5(t))dt$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(t)(-\sin(t))dt - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)\sin^4(t)\sin(t)dt$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(t)(-\sin(t))dt - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)(\sin^2(t))^2(t)\sin(t)dt$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(t)(-\sin(t))dt - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)(1 - \cos^2(t))^2(t)\sin(t)dt$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(t)(-\text{sen}(t))dt - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)(1 - 2\cos^2(t) + \cos^4(t))\text{sen}(t)dt$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(t)(-\text{sen}(t))dt - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4(t) - 2\cos^6(t) + \cos^8(t))\text{sen}(t)dt$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(t)(-\text{sen}(t))dt + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)(-\text{sen}(t))dt \\ + (-)6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(t)(-\text{sen}(t))dt + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(t)(-\text{sen}(t))dt$$

$$= \frac{3\cos^9(t)}{9} + \frac{3\cos^5(t)}{5} - \frac{6\cos^7(t)}{7} + \frac{3\cos^9(t)}{9} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{3\cos^9\left(\frac{\pi}{2}\right)}{9} + \frac{3\cos^5\left(\frac{\pi}{2}\right)}{5} - \frac{6\cos^7\left(\frac{\pi}{2}\right)}{7} + \frac{3\cos^9\left(\frac{\pi}{2}\right)}{9} \right) \\ - \left(\frac{3\cos^9(0)}{9} + \frac{3\cos^5(0)}{5} - \frac{6\cos^7(0)}{7} + \frac{3\cos^9(0)}{9} \right)$$

$$= 0 - \frac{3}{9} - \frac{3}{5} + \frac{6}{7} - \frac{3}{9} = -\frac{43}{105} = -0.4095$$

Ejemplo 15

2 Hallar la masa total de dos vueltas completas de un resorte de densidad ρ y que tiene forma de hélice circular:

$$\vec{r}(t) = \langle 2\cos(t), 2\text{sen}(t), t \rangle \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

$$\rho(x, y, z) = z$$

Solución:

$$m = \int_C \rho(x(t), y(t), z(t)) ds$$

$$\vec{r}(t) = \langle 2\cos(t), 2\sin(t), t \rangle$$

$$x = 2\cos(t)$$

$$y = 2\sin(t)$$

$$z = t$$

$$\rho(x, y, z) = z \quad \therefore \quad \rho(x, y, z) = t$$

$$\vec{r}'(t) = \langle -2\sin(t), 2\cos(t), 1 \rangle$$

$$m = \int_C \rho(x(t), y(t), z(t)) ds = \int_0^{4\pi} (t) \sqrt{(-2\sin(t))^2 + (2\cos(t))^2 + (1)^2} dt$$

$$= \int_0^{4\pi} (t) \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + 1} dt$$

$$= \int_0^{4\pi} (t) \sqrt{4(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 1} dt$$

$$= \int_0^{4\pi} (t) \sqrt{4(1) + 1} dt = \int_0^{4\pi} (t) \sqrt{5} dt = \frac{\sqrt{5}t^2}{2} \Big|_0^{4\pi} = 8\sqrt{5} \pi^2$$

1 Integrales de línea en campos conservativos

2 Teorema fundamental de las integrales de línea:

Sea C una curva suave a trozos contenida en una región abierta R y dada por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad \text{donde } a \leq t \leq b$$

Si $\vec{F}(x, y) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ es **conservativo** en R , y M y N son continuas en R , entonces,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Donde f es una función potencial de $\vec{F}$. Es decir, $\vec{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$

Demostración:

Como $\vec{F}(x, y)$ es conservativo, existe una función potencial tal que:

$$\vec{F}(x, y) = \nabla f = f_x(x, y)\hat{i} + f_y(x, y)\hat{j}$$

Por lo tanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_a^b (f_x(x, y)\hat{i} + f_y(x, y)\hat{j}) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}\right) dt$$

$$= \int_a^b \left(f_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f_y(x, y) \frac{dy}{dt} \right) dt$$

Utilizando regla de la cadena:

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(x(t), y(t))] dt$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Ejemplo 16

Mostrar que el valor de $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es el mismo para cada representación paramétrica de C:

$$\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\hat{i} + xy\hat{j}$$

$$a) \vec{r}_1(t) = t\hat{i} + \sqrt{t}\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 4$$

$$b) \vec{r}_2(w) = w^2\hat{i} + w\hat{j} \quad 0 \leq w \leq 2$$

Solución:

$$a) \vec{r}_1(t) = t\hat{i} + \sqrt{t}\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 4$$

$$\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\hat{i} + xy\hat{j}$$

$$x(t) = t \quad y(t) = \sqrt{t}$$

$$d\vec{r} = \left(\hat{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\hat{j} \right) dt$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^4 \left((t)^2 + (\sqrt{t})^2 \right) \hat{i} + (t)(\sqrt{t})\hat{j} \cdot \left(\hat{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\hat{j} \right) dt$$

$$= \int_0^4 \left((t^2 + t)\hat{i} + t\sqrt{t}\hat{j} \right) \cdot \left(\hat{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\hat{j} \right) dt = \int_0^4 \left(t^2 + t + \frac{t}{2} \right) dt$$

$$= \int_0^4 \left(t^2 + \frac{3}{2}t \right) dt = \left. \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{4} \right|_0^4 = \left(\frac{4^3}{3} + \frac{3(4)^2}{4} \right) - 0 = \frac{64}{3} + 12 = \frac{100}{3}$$

$$b) \vec{r}_2(w) = w^2\hat{i} + w\hat{j} \quad 0 \leq w \leq 2$$

$$\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\hat{i} + xy\hat{j}$$

$$x(w) = w^2 \quad y(w) = w$$

$$d\vec{r} = (2w\hat{i} + \hat{j})dw$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \left(((w^2)^2 + (w)^2)\hat{i} + ((w^2)(w))\hat{j} \right) \cdot (2w\hat{i} + \hat{j})dw$$

$$= \int_0^2 ((w^4 + w^2)\hat{i} + w^3\hat{j}) \cdot (2w\hat{i} + \hat{j})dw = \int_0^2 (2w^5 + 2w^3 + w^3)dw$$

$$= \int_0^2 (2w^5 + 3w^3)dw = \frac{2w^6}{6} + \frac{3w^4}{4} \Big|_0^2 = \left(\frac{2(2)^6}{6} + \frac{3(2)^4}{4} \right) - 0 = \frac{64}{3} + 12 = \frac{100}{3}$$

Ejemplo 17

3 Hallar el valor de la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (**Sugerencia:** La integración puede ser más sencilla si $\vec{F}$ es conservativo).

$$\vec{F}(x, y) = ye^{xy}\hat{i} + xe^{xy}\hat{j}$$

a) $\vec{r}_1(t) = t\hat{i} - (t-3)\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 3$

b) La trayectoria cerrada que consiste en segmentos de recta desde (0,3) hasta (0,0), después desde (0,0) hasta (3,0) y desde (3,0) hasta (0,3)

Solución:

$$a) \vec{r}_1(t) = t\hat{i} - (t-3)\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$\vec{F}(x, y) = ye^{xy}\hat{i} + xe^{xy}\hat{j}$$

$$x(t) = t \quad y(t) = -(t-3)$$

$$d\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j})dt$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^3 (-(t-3)e^{t(-(t-3))}\hat{i} + te^{t(-(t-3))}\hat{j}) \cdot (\hat{i} - \hat{j})dt$$

$$= \int_0^3 (-(t-3)e^{-t^2+3t}\hat{i} + te^{-t^2+3t}\hat{j}) \cdot (\hat{i} - \hat{j})dt = \int_0^3 (-(t-3)e^{-t^2+3t} - te^{-t^2+3t})dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^3 (-t + 3 - t)e^{-t^2+3t}dt = \int_0^3 (-2t + 3)e^{-t^2+3t}dt = e^{-t^2+3t} \Big|_0^3 \\ &= (e^{-(3)^2+3(3)}) - (e^{-(0)^2+3(0)}) \end{aligned}$$

$$= e^0 - e^0 = 0$$

Ahora veamos si el campo es conservativo:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\vec{F}(x, y) = ye^{xy}\hat{i} + xe^{xy}\hat{j}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M = ye^{xy} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = xye^{xy} + e^{xy}$$

$$N = xe^{xy} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = xye^{xy} + e^{xy}$$

Por lo tanto, el campo es conservativo. En seguida se resolverá obteniendo la función de potencia:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

$$f(x, y) = \int M dx = \int ye^{xy} dx = e^{xy} + g(y)$$

$$f(x, y) = \int N dy = \int xe^{xy} dy = e^{xy} + h(x)$$

Por lo tanto,

$$f(x, y) = e^{xy} + k$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

$$\vec{r}_1(t) = t\hat{i} - (t-3)\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$\vec{r}_1(0) = 0\hat{i} + 3\hat{j} \quad (0,3) \text{ Punto Inicial}$$

$$\vec{r}_1(3) = 3\hat{i} - 0\hat{j} \quad (3,0) \text{ Punto Final}$$

$$= f(x(3), y(3)) - f(x(0), y(0))$$

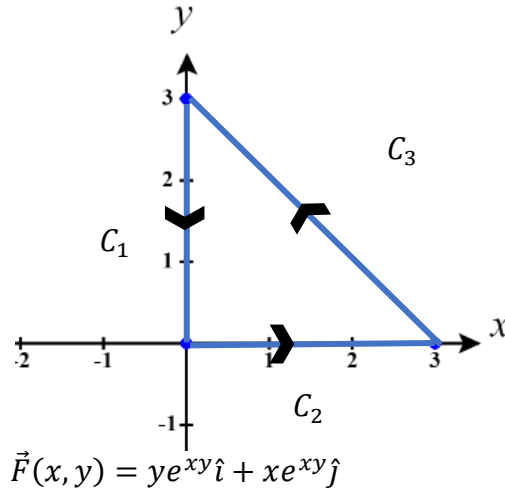
$$= f(3,0) - f(0,3)$$

$$= (e^{(3)(0)} + k) - (e^{(0)(3)} + k)$$

$$= 1 + k - 1 - k$$

$$= \mathbf{0}$$

b) La trayectoria cerrada que consiste en segmentos de recta desde (0,3) hasta (0,0), después desde (0,0) hasta (3,0) y desde (3,0) hasta (0,3)



$$C_1: \vec{r}(t) = (3-t)\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$C_2: \vec{r}(t) = (t-3)\hat{i} \quad 3 \leq t \leq 6$$

Para C_3 :

$$(0,3) \text{ a } (3,0)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{3 - 0} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -1(x - 3)$$

$$y = -x + 3$$

Como va de $(0,3)$ a $(3,0)$ entonces ajustamos la recta a la parametrización correcta:

$$x = 9 - t \quad \text{de} \quad 6 \leq t \leq 9$$

$$y = -(9 - t) + 3$$

$$C_3: \vec{r}(t) = (9 - t)\hat{i} + [-(9 - t) + 3]\hat{j} \quad 6 \leq t \leq 9$$

Una vez que tenemos las 3 curvas parametrizadas calculamos la integral:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$C_1: \vec{r}(t) = (3 - t)\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$\vec{F}(x, y) = ye^{xy}\hat{i} + xe^{xy}\hat{j}$$

$$x(t) = 0 \quad y \quad y(t) = 3 - t \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$d\vec{r} = (-\hat{j})dt$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^3 ((3 - t)e^{(0)(3-t)}\hat{i} + (0)e^{(0)(3-t)}\hat{j}) \cdot (-\hat{j})dt$$

$$= \int_0^3 ((3 - t)\hat{i}) \cdot (-\hat{j})dt = \int_0^3 0 \, dt = \mathbf{0}$$

$$C_2: \vec{r}(t) = (t - 3)\hat{i} \quad 3 \leq t \leq 6$$

$$\vec{F}(x, y) = ye^{xy}\hat{i} + xe^{xy}\hat{j}$$

$$x(t) = 3 - t \quad y \quad y(t) = 0 \quad 3 \leq t \leq 6$$

$$d\vec{r} = (-\hat{i})dt$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_3^6 ((0)e^{(3-t)(0)}\hat{i} + (3 - t)e^{(3-t)(0)}\hat{j}) \cdot (-\hat{i})dt$$

$$= \int_3^6 ((3-t)\hat{j}) \cdot (-\hat{i}) dt = \int_3^6 0 dt = \mathbf{0}$$

$$C_3: \vec{r}(t) = (9-t)\hat{i} + [-(9-t) + 3]\hat{j} \qquad 6 \leq t \leq 9$$

$$\vec{F}(x, y) = ye^{xy}\hat{i} + xe^{xy}\hat{j}$$

$$x(t) = 9-t \quad y \quad y(t) = -(9-t) + 3 \quad 6 \leq t \leq 9$$

$$d\vec{r} = (-\hat{i} + \hat{j})dt$$

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_6^9 ((9-t)e^{(9-t)(-(9-t)+3)}\hat{i} + (-(9-t) + 3)e^{(9-t)(-(9-t)+3)}\hat{j}) \cdot (-\hat{i} + \hat{j})dt$$

$$= \int_6^9 ((9-t)e^{(9-t)(t-6)}\hat{i} + (t-6)e^{(9-t)(t-6)}\hat{j}) \cdot (-\hat{i} + \hat{j})dt$$

$$= \int_6^9 (-(9-t)e^{(9-t)(t-6)} + (t-6)e^{(9-t)(t-6)}) dt$$

$$= \int_6^9 (-(9-t) + (t-6))e^{(9-t)(t-6)} dt$$

$$= \int_6^9 (2t-15)e^{-t^2+15t-54} dt = -\int_6^9 -(2t-15)e^{-t^2+15t-54} dt$$

$$= -e^{-t^2+15t-54} \Big|_6^9 = \left(-e^{-(9)^2+15(9)-54}\right) - \left(-e^{-(6)^2+15(6)-54}\right)$$

$$= -e^0 + e^0 = 0$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Ahora veamos si el campo es conservativo:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\vec{F}(x, y) = ye^{xy}\hat{i} + xe^{xy}\hat{j}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M = ye^{xy} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = xye^{xy} + e^{xy}$$

$$N = xe^{xy} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = xye^{xy} + e^{xy}$$

Por lo tanto, el campo es conservativo. En seguida se resolverá obteniendo la función de potencia:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

$$f(x, y) = \int M dx = \int y e^{xy} dx = e^{xy} + g(y)$$

$$f(x, y) = \int N dy = \int x e^{xy} dy = e^{xy} + h(x)$$

Por lo tanto,

$$f(x, y) = e^{xy} + k$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

$$= f(x(0), y(0)) - f(x(0), y(0)) = f(0, 3) - f(0, 3) = 0$$

ya que la trayectoria es cerrada y el campo es conservativo.

De lo anterior podemos concluir que, si el campo es conservativo y la trayectoria es cerrada, entonces:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Independencia de la trayectoria:

Si $\vec{F}$ es continuo en una región abierta y conexa, entonces la integral de línea

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

es independiente de la trayectoria si y sólo si $\vec{F}$ es conservativo.

Condiciones equivalentes:

Sea $\vec{F}(x, y, z) = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ con primeras derivadas parciales continuas en una región abierta R, y sea C una curva suave a trozos en R. Las condiciones siguientes son equivalentes:

- ✓ $\vec{F}$ es conservativo. Es decir, $\vec{F} = \nabla f$ para alguna función f .
- ✓ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria.
- ✓ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva cerrada C en R.

Ejemplo 18

3 Hallar el valor de la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (Sugerencia: La integración puede ser más sencilla si $\vec{F}$ es conservativo).

$$\vec{F}(x, y) = 2xy^2\hat{i} + 2x^2y\hat{j}$$

$$a) \vec{r}_1(t) = t\hat{i} + \frac{1}{t}\hat{j} \quad 1 \leq t \leq 3$$

$$b) \vec{r}_2(t) = (t+1)\hat{i} - \frac{1}{3}(t-3)\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Solución:

Si el campo es conservativo podemos resolverlo eligiendo la trayectoria más simple (una recta) o bien, obteniendo la función potencial.

$$\vec{F}(x, y) = 2xy^2\hat{i} + 2x^2y\hat{j}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M = 2xy^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy$$

$$N = 2x^2y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy$$

Por lo tanto, el campo es conservativo.

En seguida se resolverá obteniendo la recta como trayectoria más simple:

$$a) \vec{r}_1(t) = t\hat{i} + \frac{1}{t}\hat{j} \quad 1 \leq t \leq 3$$

$$\vec{r}_1(1) = \hat{i} + \hat{j} \quad \rightarrow \quad (1,1)$$

$$\vec{r}_1(3) = 3\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} \quad \rightarrow \quad \left(3, \frac{1}{3}\right)$$

$$(1,1) \text{ a } \left(3, \frac{1}{3}\right)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{3 - 1} = \frac{-\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 1$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Como va de $(1,1)$ a $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ entonces ajustamos la recta a la parametrización correcta:

$$x = t \quad de \quad 1 \leq t \leq 3$$

$$y = -\frac{1}{3}t + \frac{4}{3}$$

$$C: \vec{r}(t) = t\hat{i} + \left(-\frac{1}{3}t + \frac{4}{3}\right)\hat{j} \quad 1 \leq t \leq 3$$

$$\vec{F}(x, y) = 2xy^2\hat{i} + 2x^2y\hat{j}$$

$$x(t) = t \quad y \quad y(t) = -\frac{1}{3}t + \frac{4}{3}$$

$$d\vec{r} = \left(\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j}\right) dt$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^3 \left(2(t) \left(-\frac{1}{3}t + \frac{4}{3}\right)^2 \hat{i} + 2(t)^2 \left(-\frac{1}{3}t + \frac{4}{3}\right)\hat{j} \right) \cdot \left(\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j}\right) dt$$

$$= \int_1^3 \left(2t \left(\frac{1}{9}t^2 - \frac{8}{9}t + \frac{16}{9}\right) \hat{i} + 2t^2 \left(-\frac{1}{3}t + \frac{4}{3}\right)\hat{j} \right) \cdot \left(\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j}\right) dt$$

$$= \int_1^3 \left(\left(\frac{2}{9}t^3 - \frac{16}{9}t^2 + \frac{32}{9}t\right) \hat{i} + \left(-\frac{2}{3}t^3 + \frac{8}{3}t^2\right)\hat{j} \right) \cdot \left(\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j}\right) dt$$

$$= \int_1^3 \left(\left(\frac{2}{9}t^3 - \frac{16}{9}t^2 + \frac{32}{9}t \right) - \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}t^3 + \frac{8}{3}t^2 \right) \right) dt$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{2}{9}t^3 - \frac{1}{9}t^2 + \frac{32}{9}t + \frac{2}{9}t^3 - \frac{8}{9}t^2 \right) dt$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{4}{9}t^3 - \frac{24}{9}t^2 + \frac{32}{9}t \right) dt = \int_1^3 \left(\frac{4}{9}t^3 - \frac{8}{3}t^2 + \frac{32}{9}t \right) dt$$

$$= \frac{1}{9}t^4 - \frac{8}{9}t^3 + \frac{16}{9}t^2 \Big|_1^3 = \left(\frac{1}{9}(3)^4 - \frac{8}{9}(3)^3 + \frac{16}{9}(3)^2 \right) - \left(\frac{1}{9}(1)^4 - \frac{8}{9}(1)^3 + \frac{16}{9}(1)^2 \right)$$

$$= (9 - 24 + 16) - \left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9} + \frac{16}{9} \right) = 1 - 1 = \mathbf{0}$$

En seguida se resolverá obteniendo la función de potencia:

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

$$\vec{F}(x, y) = 2xy^2\hat{i} + 2x^2y\hat{j}$$

$$f(x, y) = \int M dx = \int 2xy^2 dx = x^2y^2 + g(y)$$

$$f(x, y) = \int N dy = \int 2x^2y dy = x^2y^2 + h(x)$$

Por lo tanto,

$$f(x, y) = x^2 y^2 + k$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

$$= f(x(3), y(3)) - f(x(1), y(1))$$

$$\vec{r}_1(t) = t\hat{i} + \frac{1}{t}\hat{j} \quad 1 \leq t \leq 3$$

$$\vec{r}_1(1) = \hat{i} + \hat{j} \quad \rightarrow \quad (1, 1)$$

$$\vec{r}_1(3) = 3\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} \quad \rightarrow \quad \left(3, \frac{1}{3}\right)$$

$$= f\left(3, \frac{1}{3}\right) - f(1, 1)$$

$$= \left((3)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + k\right) - ((1)^2(1)^2 + k) = (1 + k) - (1 + k)$$

$$= \mathbf{0}$$

$$b) \vec{r}_2(t) = (t+1)\hat{i} - \frac{1}{3}(t-3)\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Primero se resolverá con la recta como trayectoria más simple:

$$\vec{r}_2(t) = (t+1)\hat{i} - \frac{1}{3}(t-3)\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$\vec{F}(x, y) = 2xy^2\hat{i} + 2x^2y\hat{j}$$

$$x(t) = t+1 \quad y \quad y(t) = -\frac{1}{3}(t-3)$$

$$d\vec{r} = \left(\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j}\right) dt$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \left(2(t+1) \left(-\frac{1}{3}(t-3) \right)^2 \hat{i} + 2(t+1)^2 \left(-\frac{1}{3}(t-3) \right) \hat{j} \right) \cdot \left(\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} \right) dt$$

$$= \int_0^2 \left(2(t+1) \frac{1}{9}(t-3)^2 \hat{i} + 2(t+1)^2 \left(-\frac{1}{3}t+1 \right) \hat{j} \right) \cdot \left(\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} \right) dt$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{2}{9}(t+1)(t^2-6t+9)\hat{i} + 2(t^2+2t+1) \left(-\frac{1}{3}t+1 \right) \hat{j} \right) \cdot \left(\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} \right) dt$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{2}{9} (t^3 - 6t^2 + 9t + t^2 - 6t + 9) \hat{i} + 2 \left(-\frac{1}{3} t^3 + t^2 - \frac{2}{3} t^2 + 2t - \frac{1}{3} t + 1 \right) \hat{j} \right) \cdot \left(\hat{i} - \frac{1}{3} \hat{j} \right) dt$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{2}{9} (t^3 - 5t^2 + 3t + 9)(1) + \left(2 \left(-\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{3} t^2 + \frac{5}{3} t + 1 \right) \right) \left(-\frac{1}{3} \right) \right) dt$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{2}{9} (t^3 - 5t^2 + 3t + 9) + \left(\frac{2}{9} t^3 - \frac{2}{9} t^2 - \frac{10}{9} t - \frac{2}{3} \right) \right) dt$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{2}{9} t^3 - \frac{10}{9} t^2 + \frac{2}{3} t + 2 + \frac{2}{9} t^3 - \frac{2}{9} t^2 - \frac{10}{9} t - \frac{2}{3} \right) dt$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{4}{9} t^3 - \frac{12}{9} t^2 - \frac{4}{9} t + \frac{4}{3} \right) dt = \frac{1}{9} t^4 - \frac{12}{27} t^3 - \frac{2}{9} t^2 + \frac{4}{3} t \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{9} t^4 - \frac{4}{9} t^3 - \frac{2}{9} t^2 + \frac{4}{3} t \Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{9} (2)^4 - \frac{4}{9} (2)^3 - \frac{2}{9} (2)^2 + \frac{4}{3} (2) \right) - 0 = \frac{16}{9} - \frac{32}{9} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} = \mathbf{0}$$

En seguida se resolverá con la función de potencia:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

$$f(x, y) = x^2 y^2 + k$$

$$= f(x(2), y(2)) - f(x(0), y(0))$$

$$\vec{r}_2(t) = (t+1)\hat{i} - \frac{1}{3}(t-3)\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$\vec{r}_1(0) = \hat{i} + \hat{j} \rightarrow (1, 1)$$

$$\vec{r}_1(2) = 3\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} \rightarrow \left(3, \frac{1}{3}\right)$$

$$= f\left(3, \frac{1}{3}\right) - f(1, 1)$$

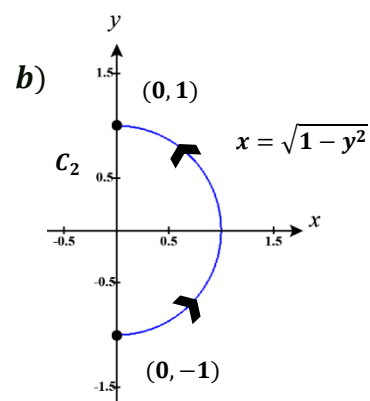
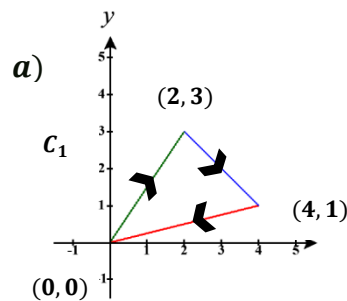
$$= \left((3)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + k\right) - ((1)^2(1)^2 + k) = (1 + k) - (1 + k)$$

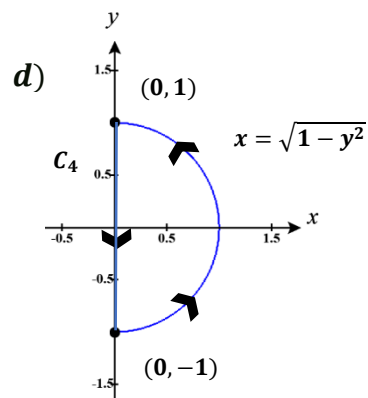
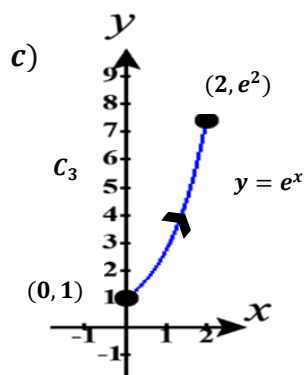
$$= \mathbf{0}$$

Ejemplo 19

2

Hallar el valor de la integral de línea $\int_C (2x - 3y + 1)dx - (3x + y - 5)dy$





Solución:

Primero se analiza si el campo es conservativo:

$$M = 2x - 3y + 1 \quad \therefore \quad M_y = -3$$

$$N = -3x - y + 5 \quad \therefore \quad N_x = -3$$

Como $M_y = N_x$ el Campo es CONSERVATIVO.

Como el campo es conservativo se obtiene la función potencial:

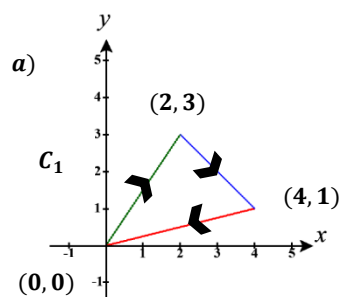
$$f(x, y) = \int M dx = \int (2x - 3y + 1) dx = x^2 - 3xy + x + h(y)$$

$$f(x, y) = \int N dy = \int (-3x - y + 5) dy = -3xy - \frac{y^2}{2} + 5y + g(x)$$

$$f(x, y) = -3xy - \frac{y^2}{2} + 5y + x^2 + x + k$$

Una vez obtenida la función potencial se procede a resolver cada uno de los incisos, esto facilitará llegar a la solución ya que no se resolverá la integral:

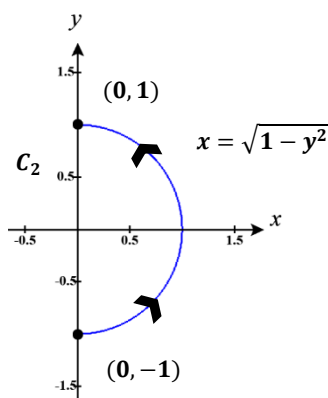
a)



$$\int_C (2x - 3y + 1)dx - (3x + y - 5)dy = f(0,0) - f(0,0) = 0$$

El resultado era el esperado ya que el campo es CONSERVATIVO y la trayectoria es CERRADA.

b)



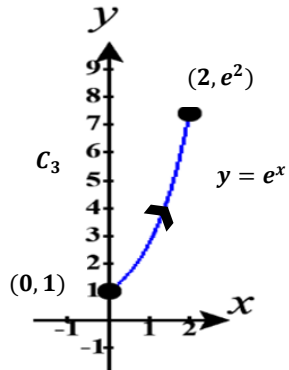
$$\int_C (2x - 3y + 1)dx - (3x + y - 5)dy = f(0,1) - f(0,-1)$$

$$f(x,y) = -3xy - \frac{y^2}{2} + 5y + x^2 + x$$

$$= \left(-3(0)(1) - \frac{(1)^2}{2} + 5(1) + (0)^2 + (0) \right) \\ - \left(-3(0)(-1) - \frac{(-1)^2}{2} + 5(-1) + (0)^2 + (0) \right)$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{11}{2} = 10$$

c)



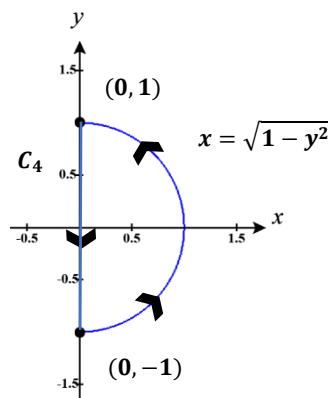
$$\int_C (2x - 3y + 1)dx - (3x + y - 5)dy = f(2, e^2) - f(0,1)$$

$$f(x,y) = -3xy - \frac{y^2}{2} + 5y + x^2 + x$$

$$= \left(-3(2)(e^2) - \frac{(e^2)^2}{2} + 5(e^2) + (2)^2 + (2) \right) - \left(-3(0)(1) - \frac{(1)^2}{2} + 5(1) + (0)^2 + (0) \right)$$

$$= -6e^2 - \frac{e^4}{4} + 5e^2 + 4 + 2 + \frac{1}{2} - 5 = -e^2 - \frac{e^4}{4} + \frac{3}{2}$$

d)



La integral es **CERO** ya que el campo es **CONSERVATIVO** y la trayectoria es **CERRADA**.

Ejemplo 20

Hallar el valor de la integral de línea $\int_C 2xydx + (x^2 + y^2)dy$

a) C : Elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ desde $(5,0)$ hasta $(0,4)$

Solución:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad x(t) = 5 \cos(t) \quad y(t) = 4 \sin(t)$$

$$dx = -5 \sin(t) dt \quad y \quad dy = 4 \cos(t) dt$$

desde (5,0) hasta (0,4)

$$x = 5 \cos(t) \quad y \quad \text{se sabe que } x = 5$$

$$5 = 5 \cos(t) \quad \therefore \cos(t) = 1 \quad t = \arccos(1) = 0$$

$$x = 5 \cos(t) \quad y \quad \text{se sabe que } x = 0$$

$$0 = 5 \cos(t) \quad \therefore \cos(t) = 0 \quad t = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2(5 \cos(t))(4 \sin(t))(-5 \sin(t) dt) + \left((5 \cos(t))^2 + (4 \sin(t))^2 \right) (4 \cos(t)) \right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-200 \cos(t) \sin^2(t) + 100 \cos^3(t) + 64 \sin^2(t) \cos(t)] dt$$

$$= -136 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(t) \cos(t) dt + 100 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) dt$$

$$= -136 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(t) \cos(t) dt + 100 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \cos(t) dt$$

$$= -136 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(t) \cos(t) dt + 100 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \text{sen}^2(t)) \cos(t) dt$$

$$= -\frac{136}{3} \text{sen}^3(t) + 100 \text{sen}(t) - \frac{100}{3} \text{sen}^3(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{136}{3} + 100 - \frac{100}{3} - 0 = \frac{64}{3}$$

Otro método es verificando si el campo es CONSERVATIVO:

$$M = 2xy \quad y \quad N = x^2 + y^2$$

$$M_y = 2x \quad y \quad N_x = 2x \quad \therefore \text{Es Conservativo}$$

$$f(x, y) = \int M dx = \int 2xy dx = x^2 y + h(y)$$

$$f(x, y) = \int N dy = \int (x^2 + y^2) dy = x^2 y + \frac{y^3}{3} + g(x)$$

$$f(x, y) = x^2 y + \frac{y^3}{3} + k$$

$$\int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy = f(0, 4) - f(5, 0)$$

$$= \left((0)^2(4) + \frac{(4)^3}{3} + k \right) - \left((5)^2(0) + \frac{(0)^3}{3} + k \right)$$

$$= \frac{64}{3}$$

6. Anexo

6.1 Anexo A: Introducción al uso de CalcPlot3D

Ventana Principal

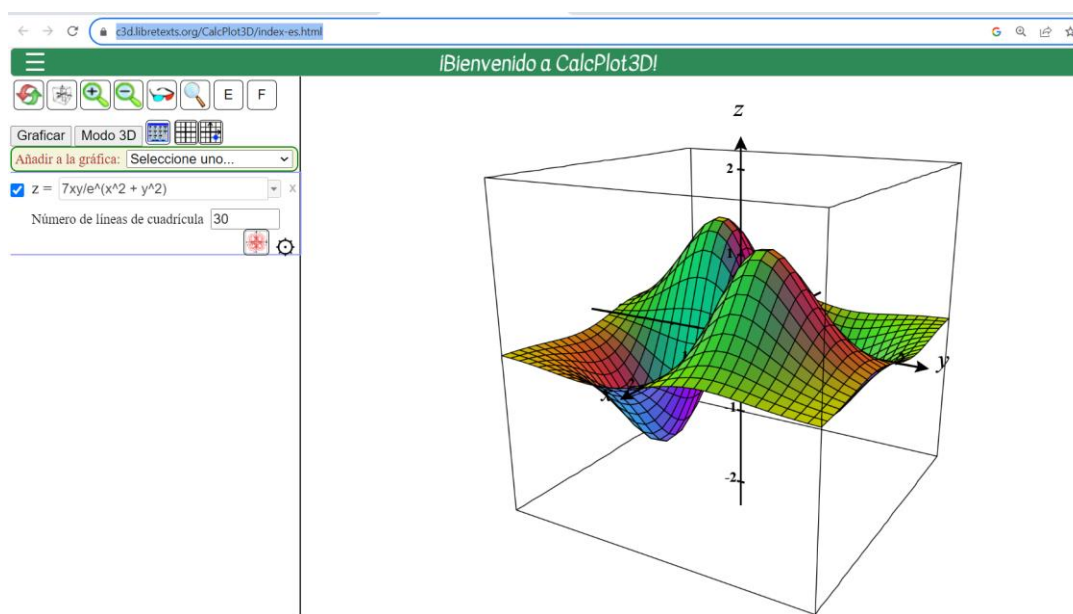
Para utilizar el Applet CalPlot3D es necesario tener acceso a internet, hay dos versiones una en Inglés y otra en Español que es la que se utiliza en este trabajo, las ligas son las siguientes:

- Versión Inglés:

<https://c3d.libretexts.org/CalcPlot3D/index.html>

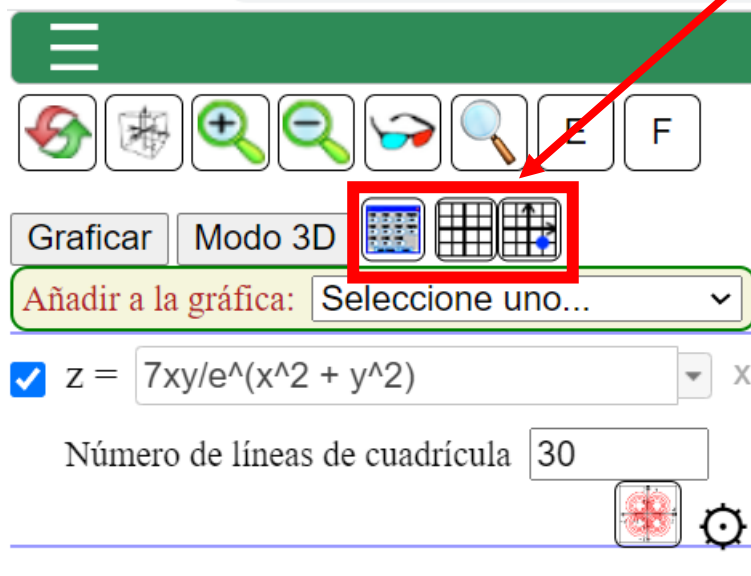
- Versión Español:

<https://c3d.libretexts.org/CalcPlot3D/index-es.html>

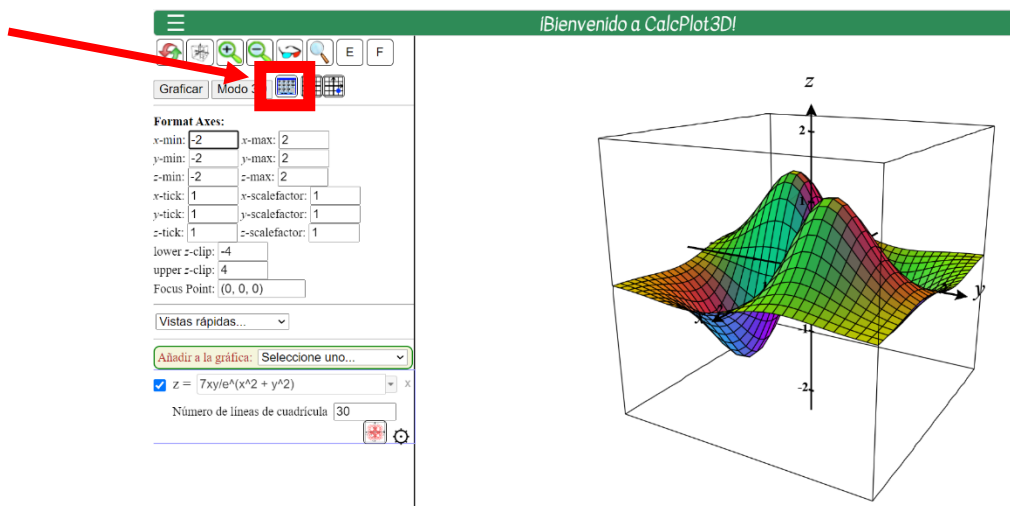


La imagen anterior muestra la ventana principal del Applet, enseguida se muestra cambios o ajustes a la ventana principal:

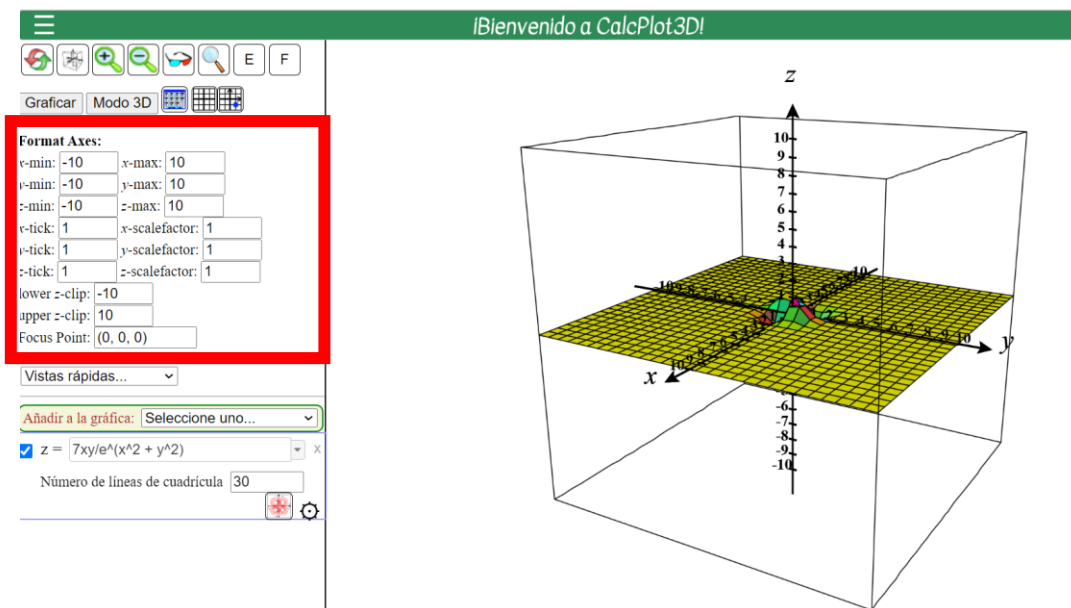
En la parte superior izquierda aparecen 3 botones con cuadrícula, el primer cuadro (de izquierda a derecha) es para cambiar los ejes, el segundo para esconder caja, ejes, divisiones en ejes, etc. Y el tercer cuadro para explorar gradientes, derivadas parciales o direccionales y otros conceptos.



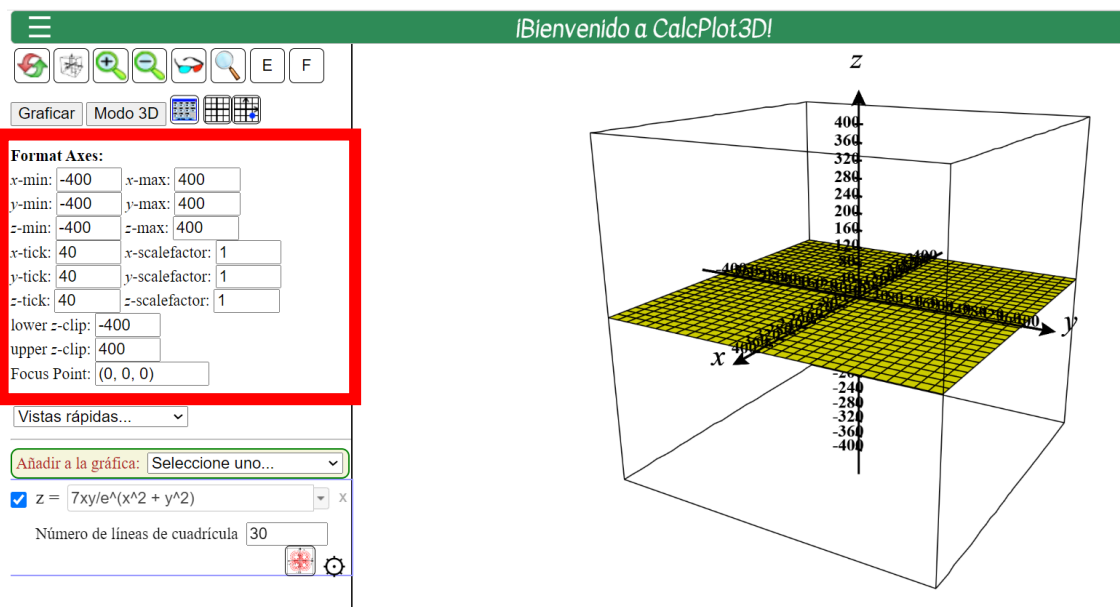
Cambio en tamaño de los ejes, para ello se presiona el primer botón cuadrículado, se desplegará una ventana la cual nos permitirá realizar los cambios:



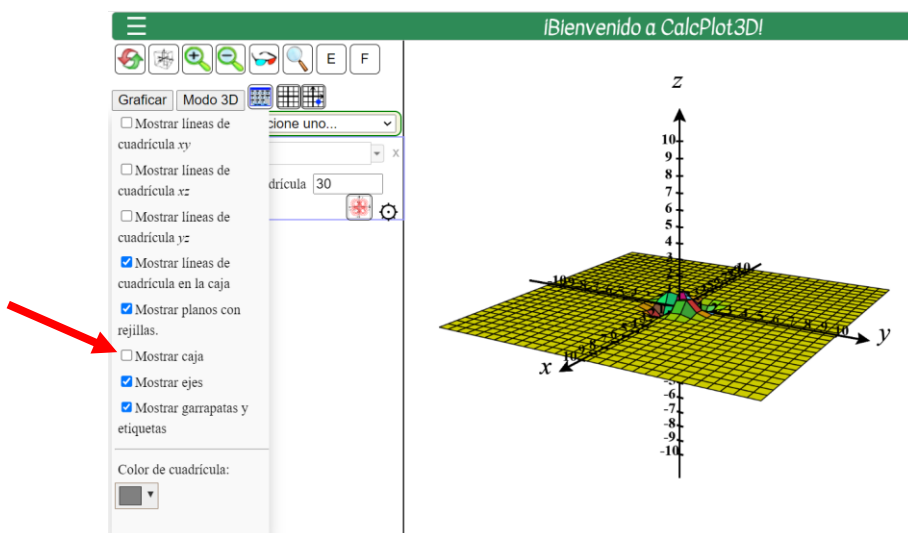
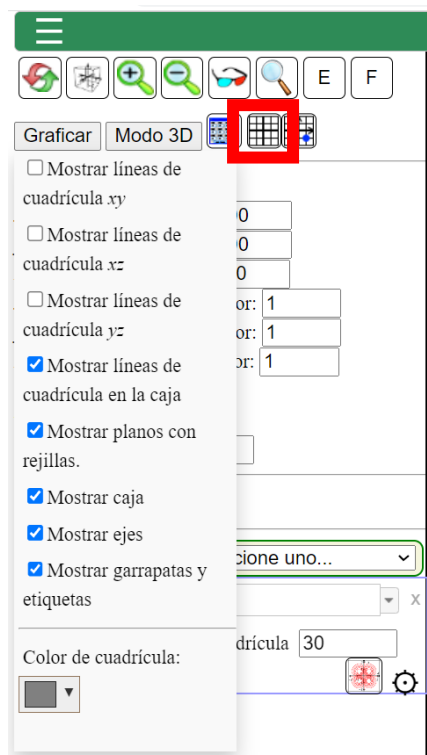
Al cambiar las unidades en los ejes de 2 a 10 se puede ver el cambio en la gráfica:



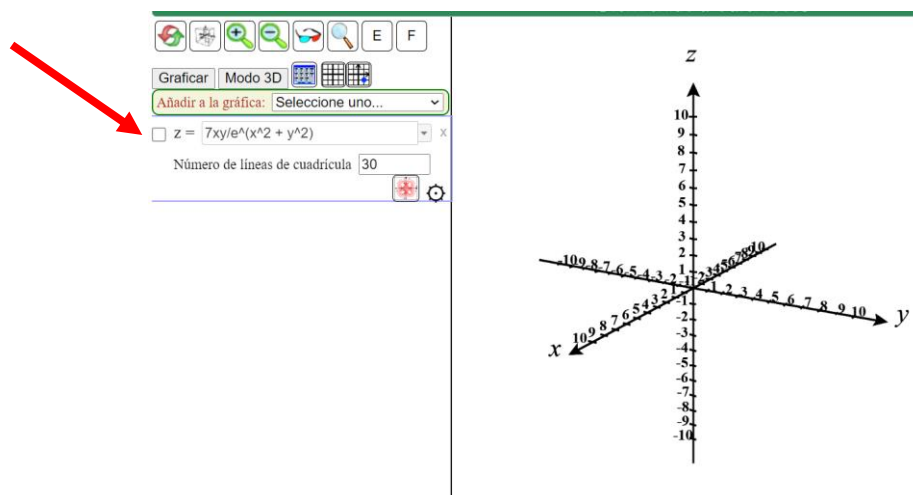
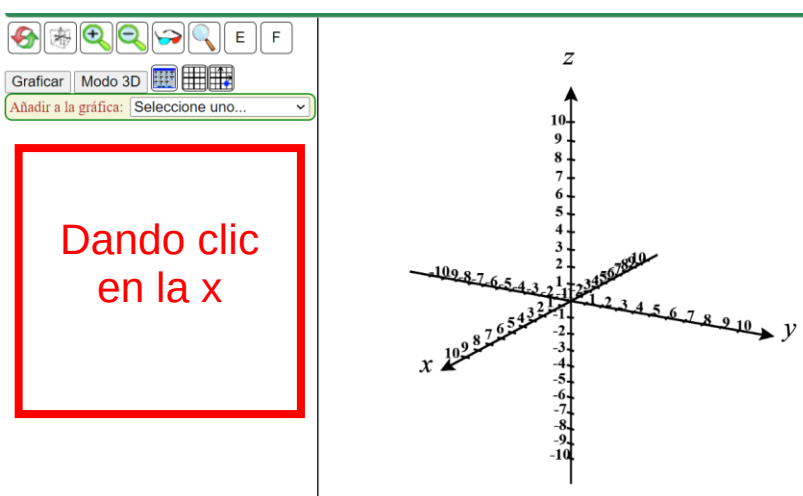
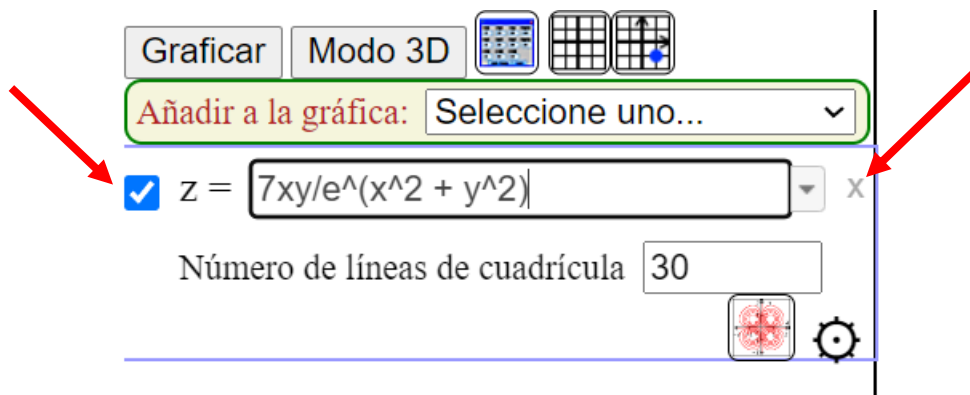
En caso de necesitar un número muy grande se puede realizar escala:



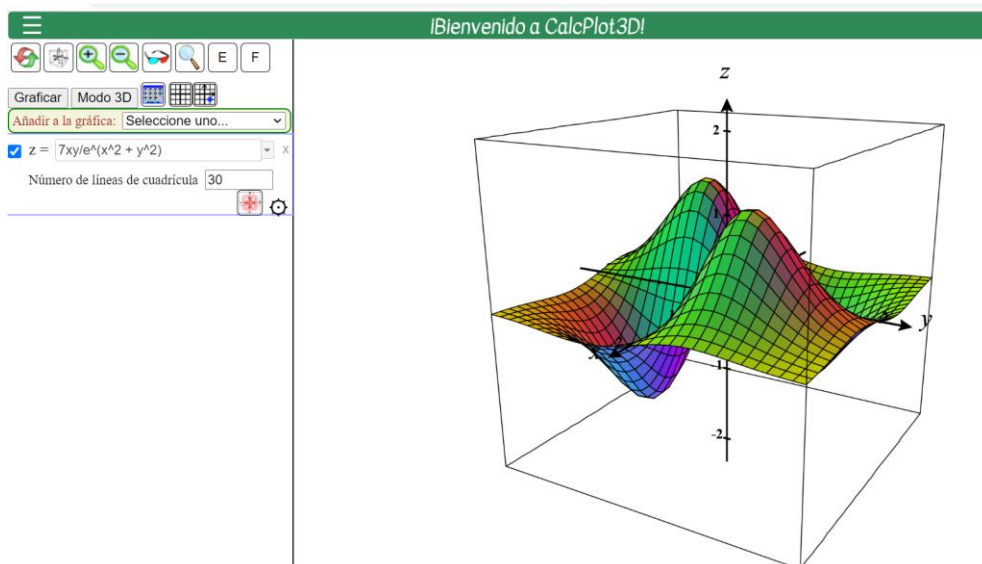
Dando clic en el segundo botón de cuadrícula podemos esconder caja, ejes, divisiones, etc.



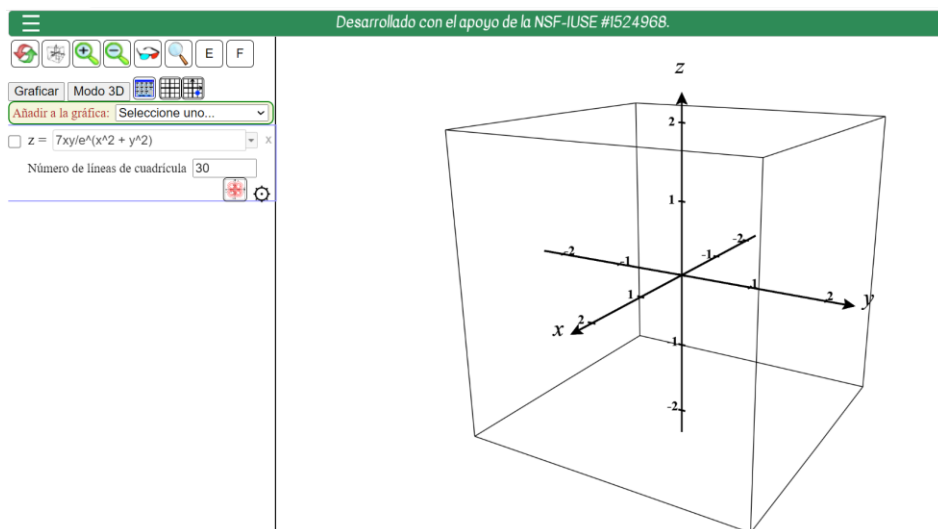
Para quitar la gráfica de la función se puede hacer de dos formas: dando clic en la x que aparece a un lado de la función y la otra opción es deseleccionando la función, esta segunda opción es útil cuando se seguirá utilizando la función:



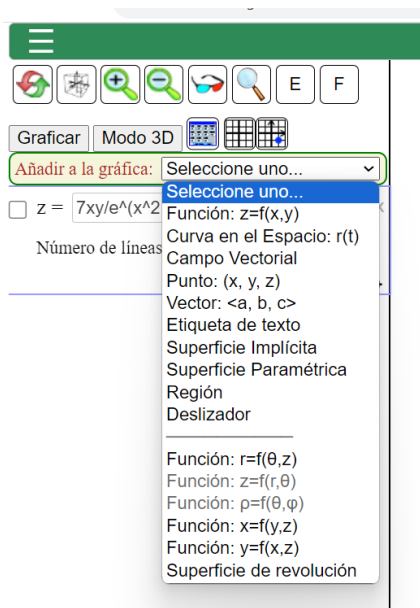
Resetear o limpiar ventana: para volver la ventana a su forma original se da clic en el primer botón superior izquierdo como se muestra en la siguiente imagen:



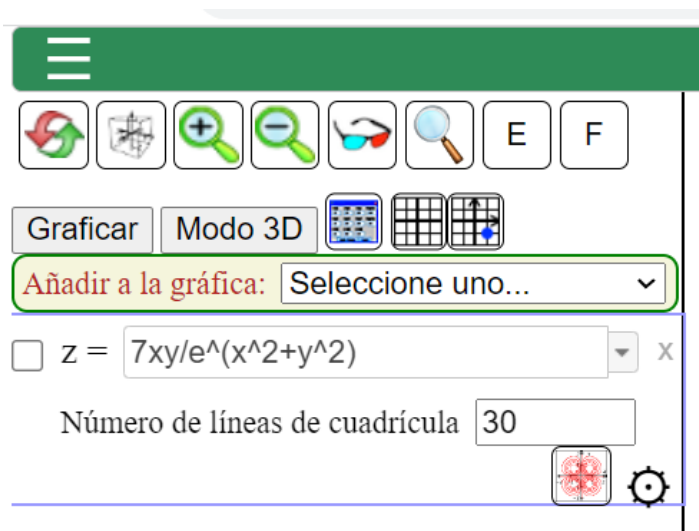
Al dar clic al segundo botón superior izquierdo se limpiará la ventana de gráficas, pero no se eliminarán las funciones o entradas:



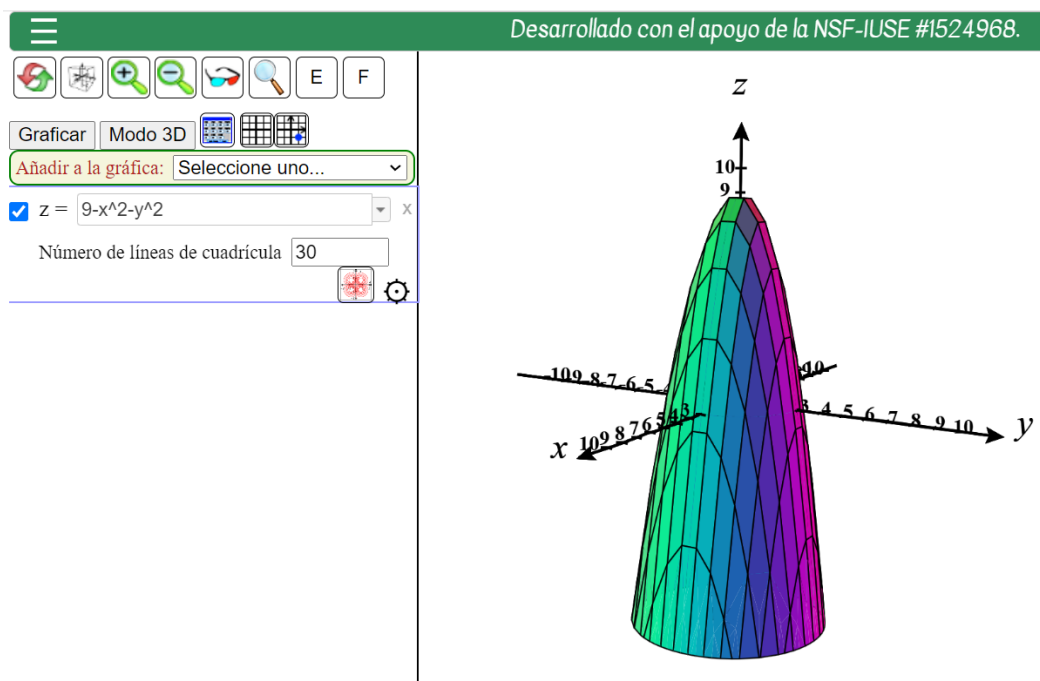
Pestaña de entradas: En esta pestaña se desplegará una ventana con varias opciones según lo que se desee graficar:



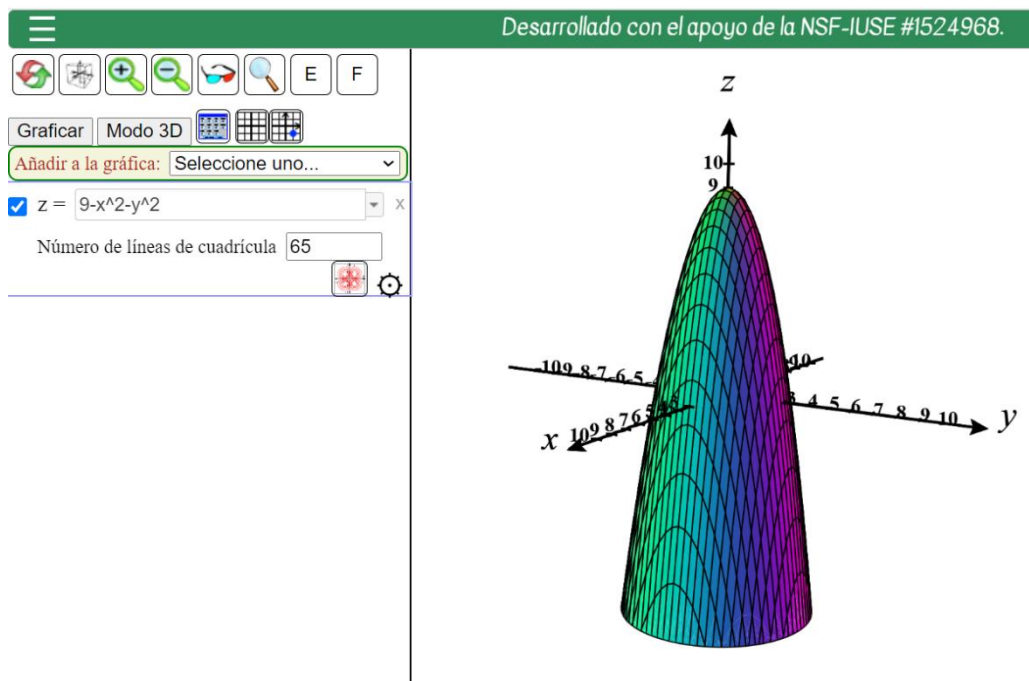
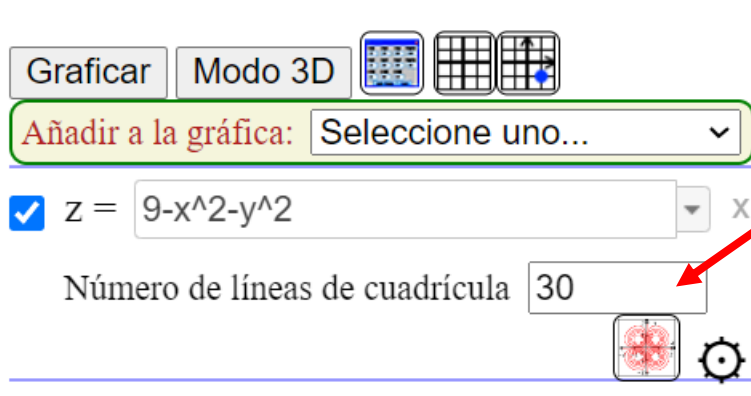
Función: Al dar clic en función se puede seleccionar de los ejemplos que tiene el applet o se puede escribir una función nueva:



Dando clic en la pestaña se desplegarán las funciones contenidas por default en el Applet, se puede escribir una función nueva en la casilla de la función.

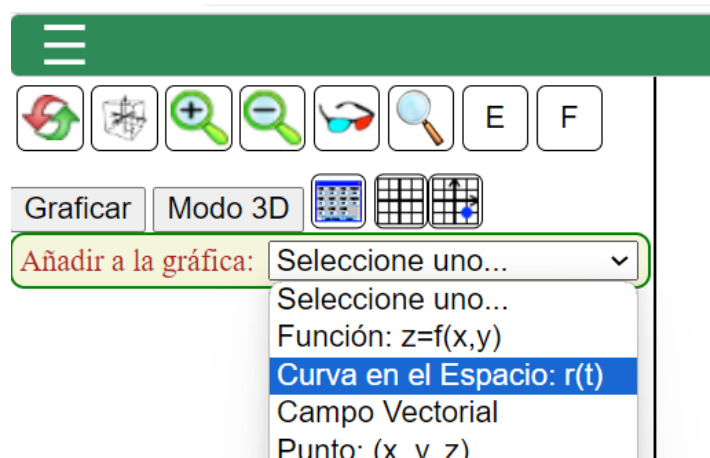


Se puede hacer más fina la gráfica cambiando el número de líneas de cuadrículas:

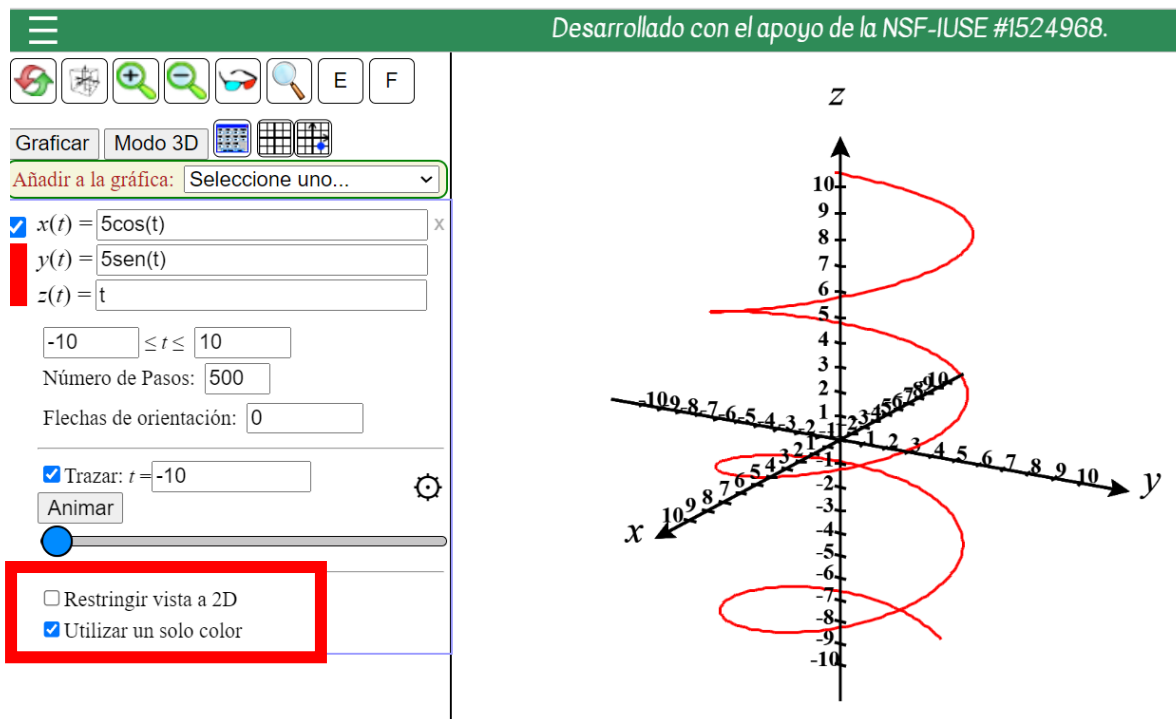


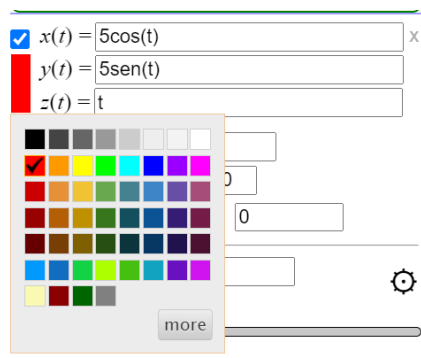
Existe también la opción de escribir la función en su forma $x=f(y,z)$ o $y=f(x,z)$ o en forma cilíndrica.

Curva paramétrica:

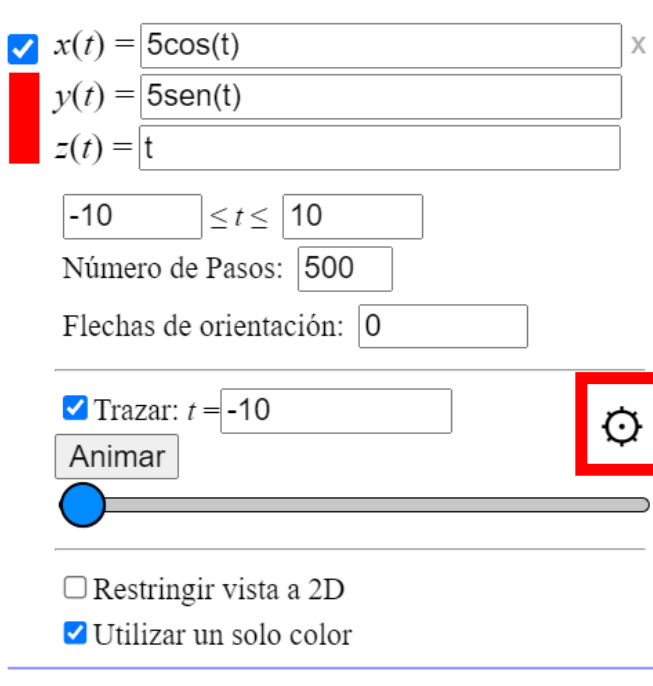
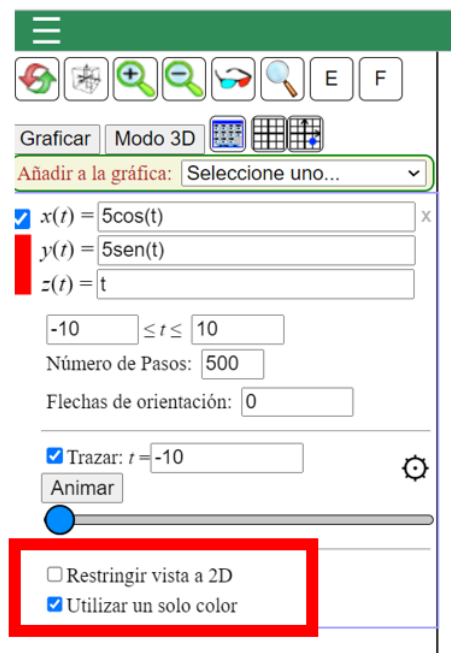


Al igual que en la opción **función** se pueden seleccionar ejemplos que trae el Applet o escribir una función diferente:

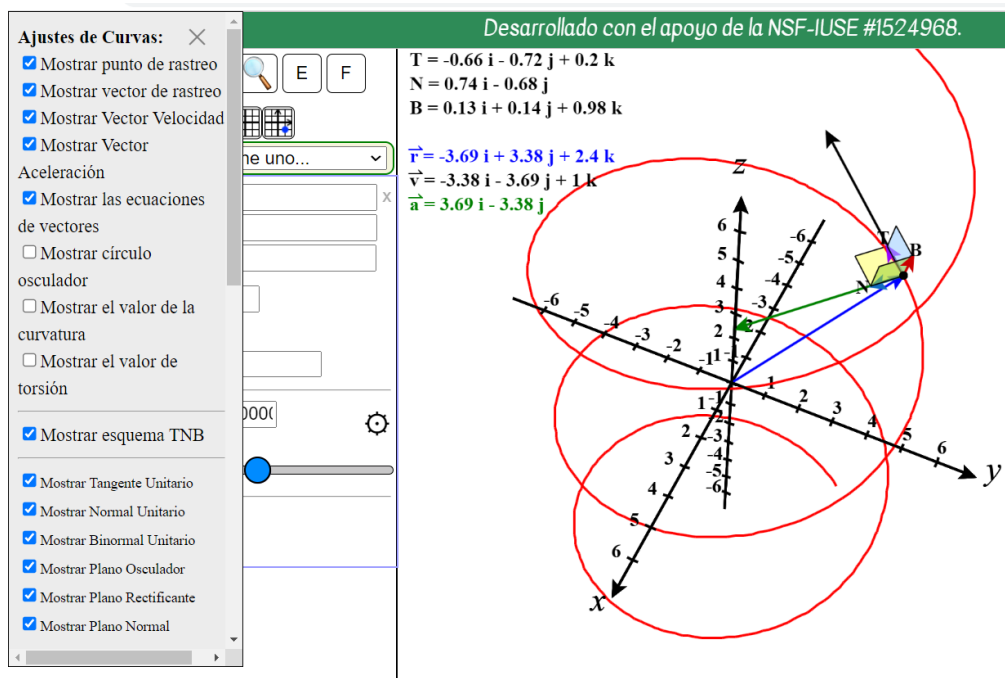




clic



Al dar clic en el engrane se abre una ventana donde se puede seleccionar que en la gráfica se muestre punto de traza, vector traza, velocidad, aceleración, vector tangente unitario, vector normal, vector binormal, plano osculador así como sus ecuaciones.



Punto:

Graficar Modo 3D

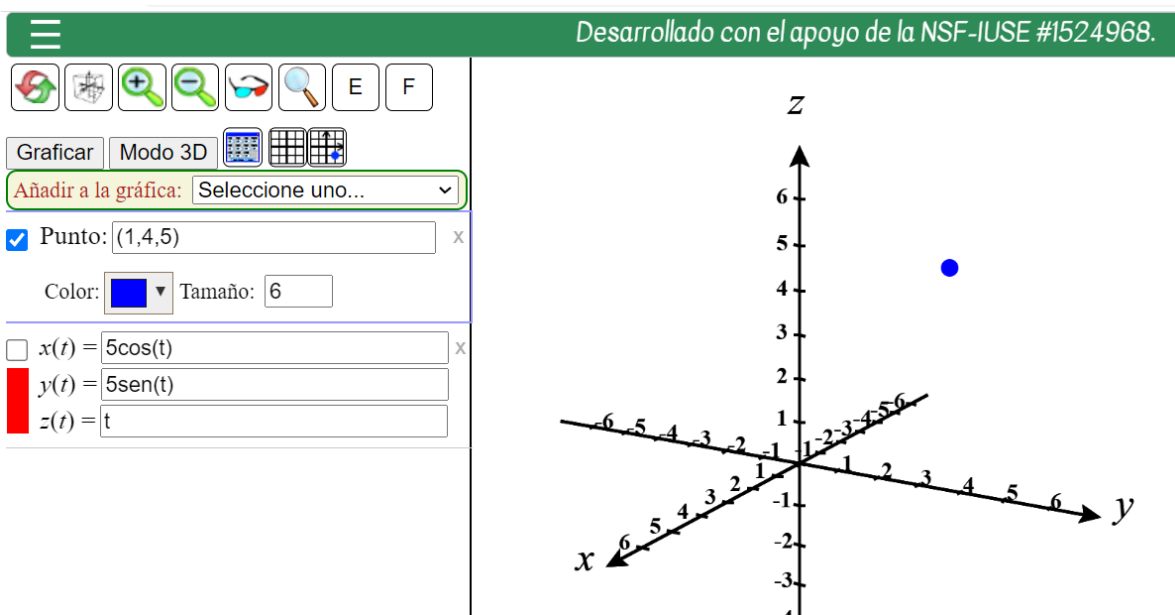
Añadir a la gráfica: Seleccione uno...

☐ Punto: (-1, 1, 1)

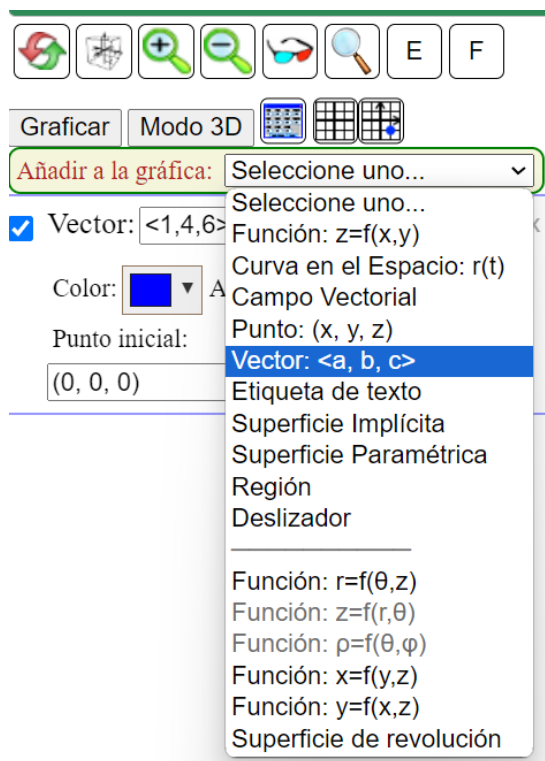
Color:

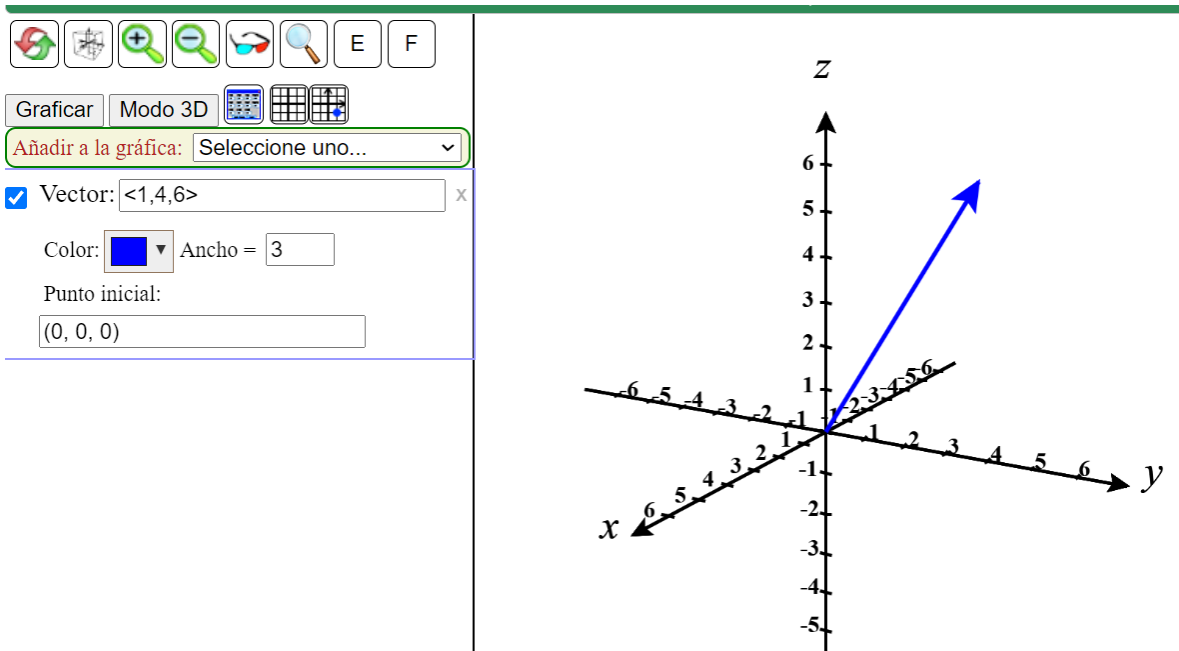
☐ $x(t) = 5\cos(t)$

Seleccione uno...
 Función: $z=f(x,y)$
 Curva en el Espacio: $r(t)$
 Campo Vectorial
Punto: (x, y, z)
 Vector: $\langle a, b, c \rangle$

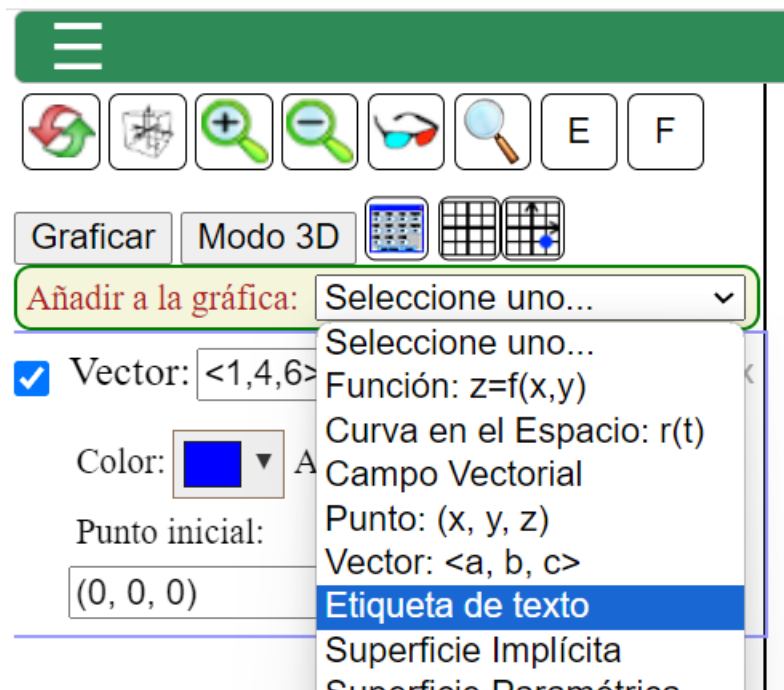


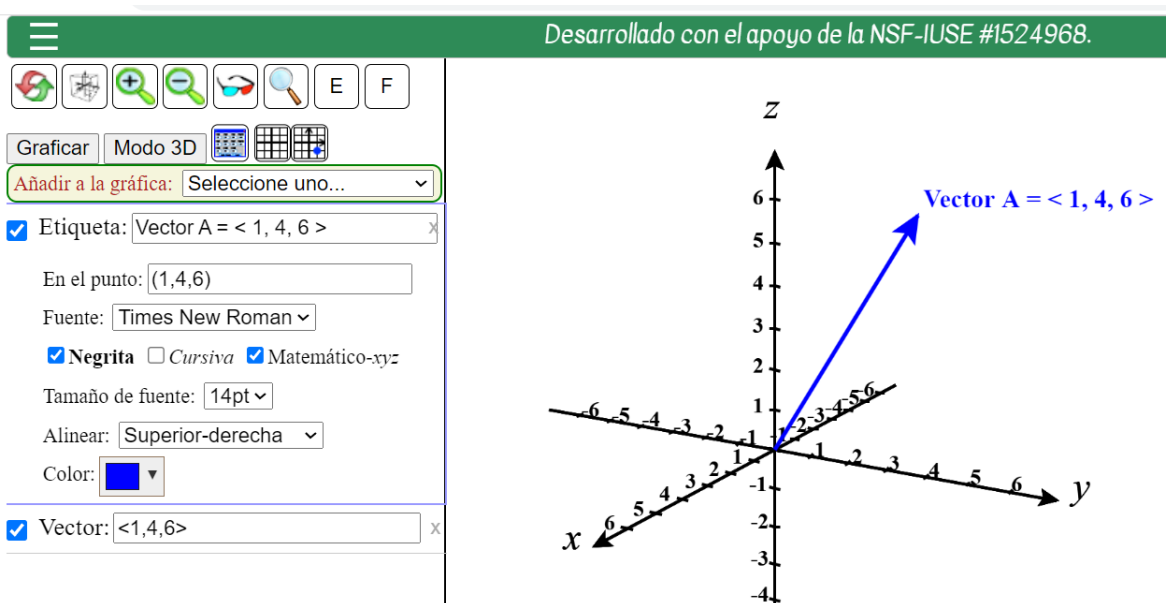
Vector:



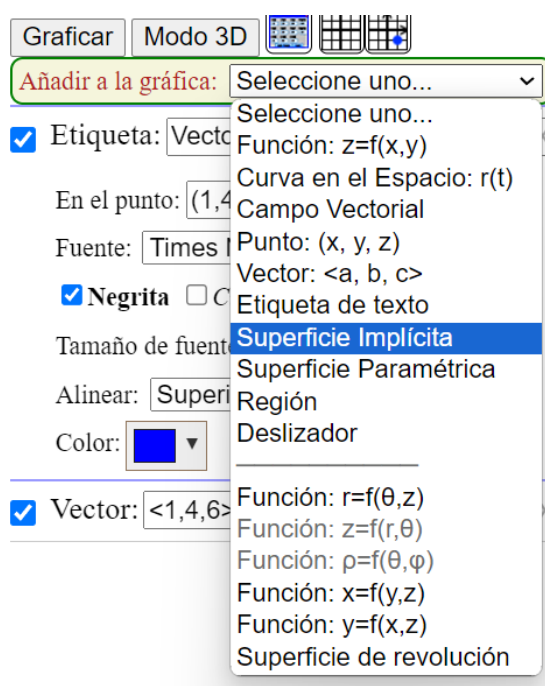


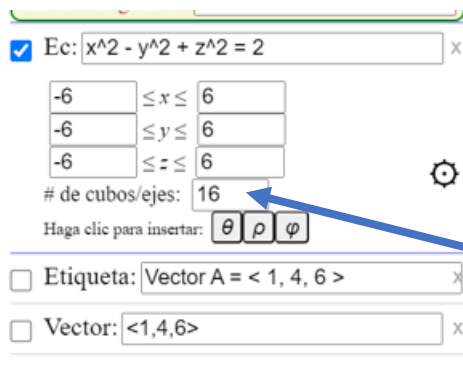
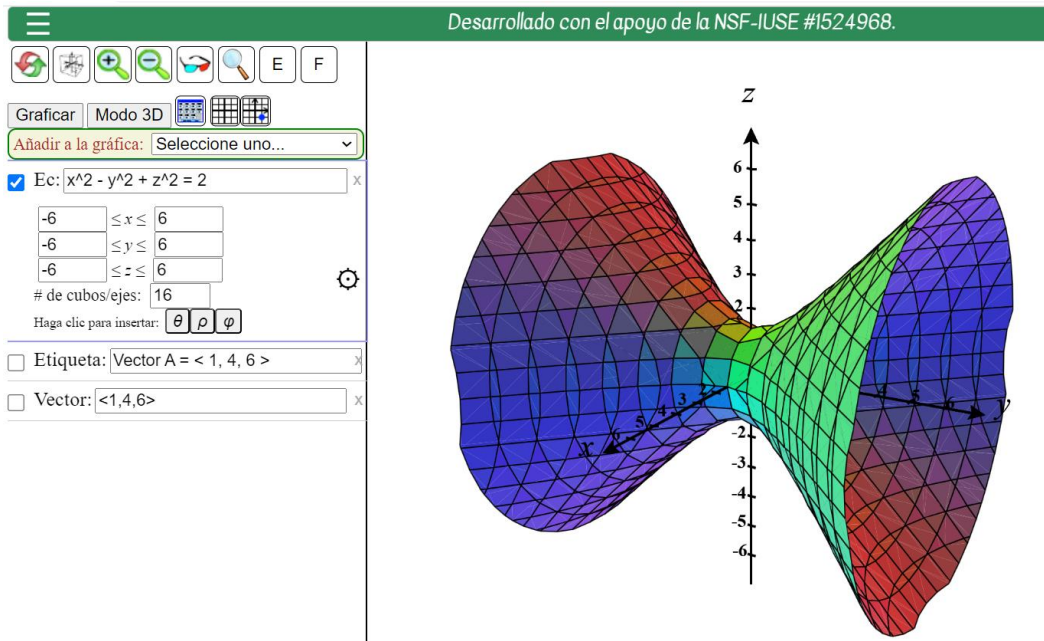
Etiqueta:





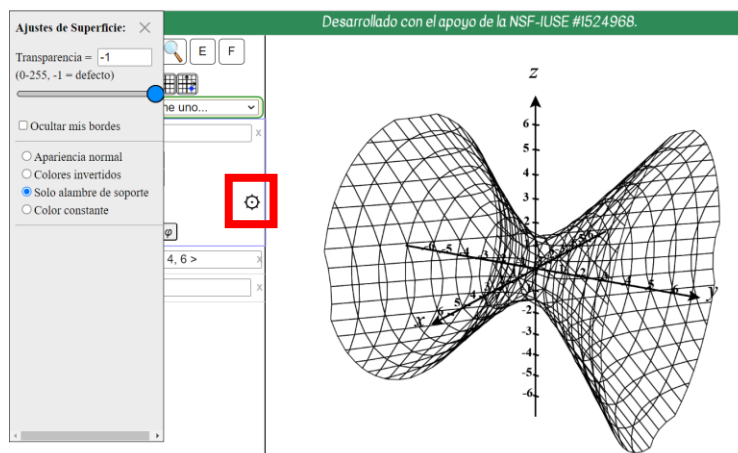
Superficie implícita:



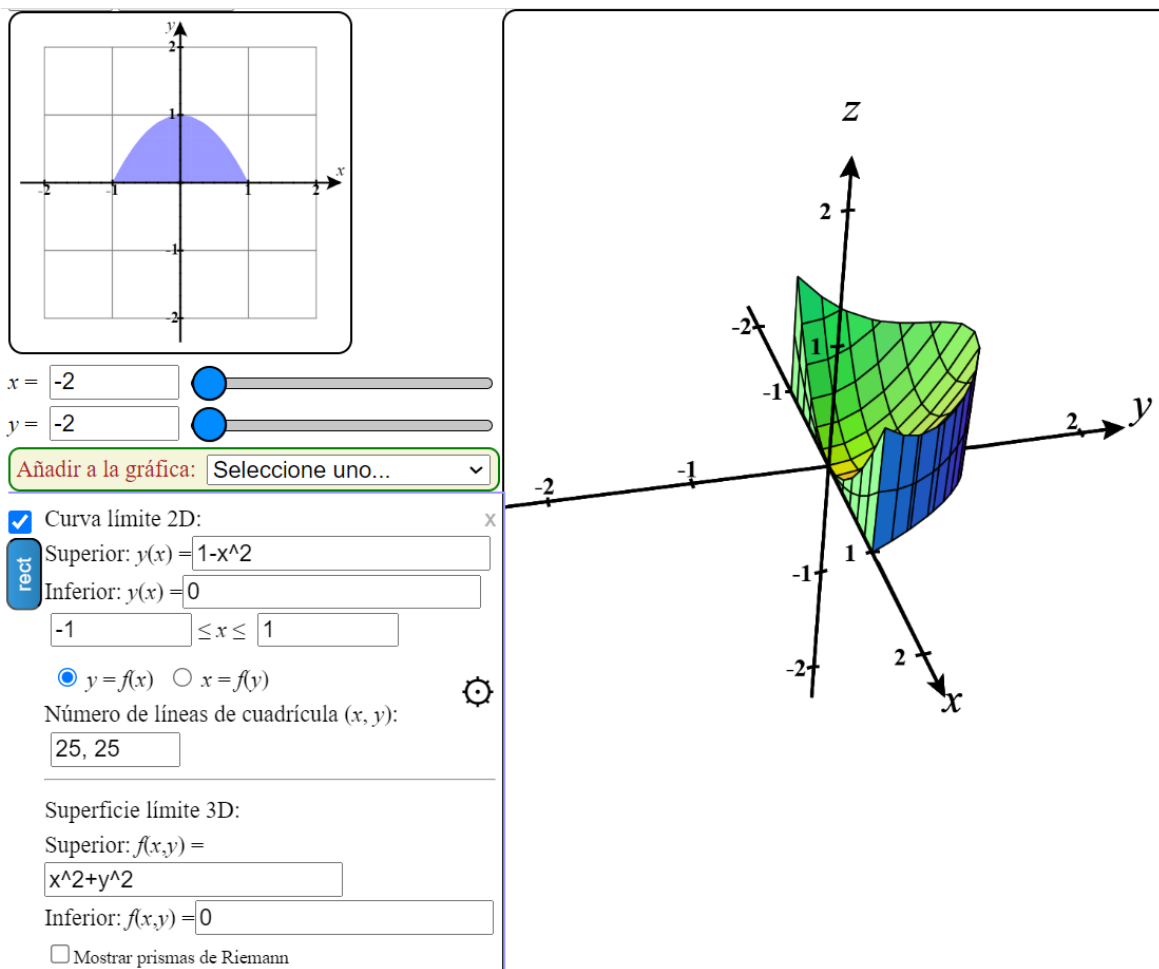


Al dar clic en el engrane se puede invertir el color o poner transparente la superficie.

Aumentando el número de cubos se hará más definida la superficie.

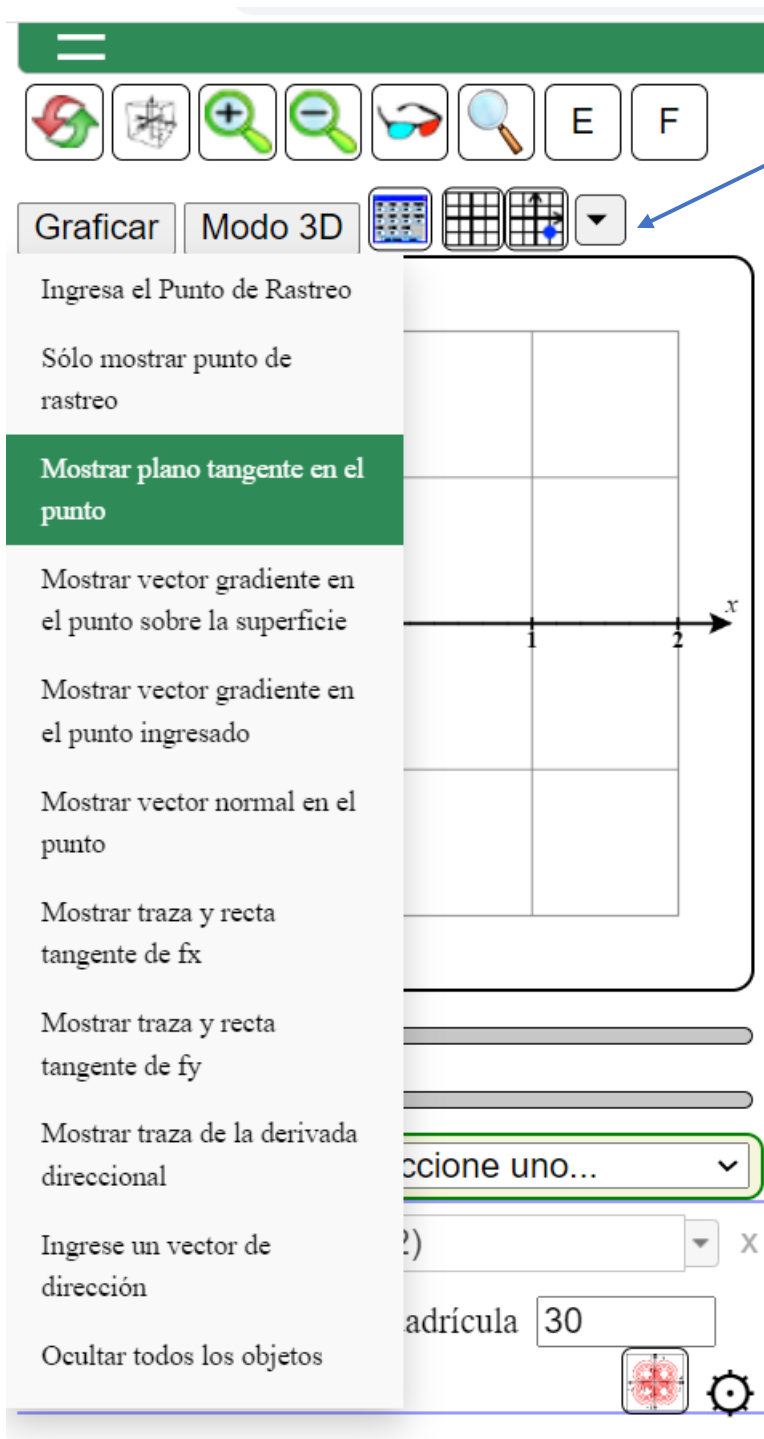


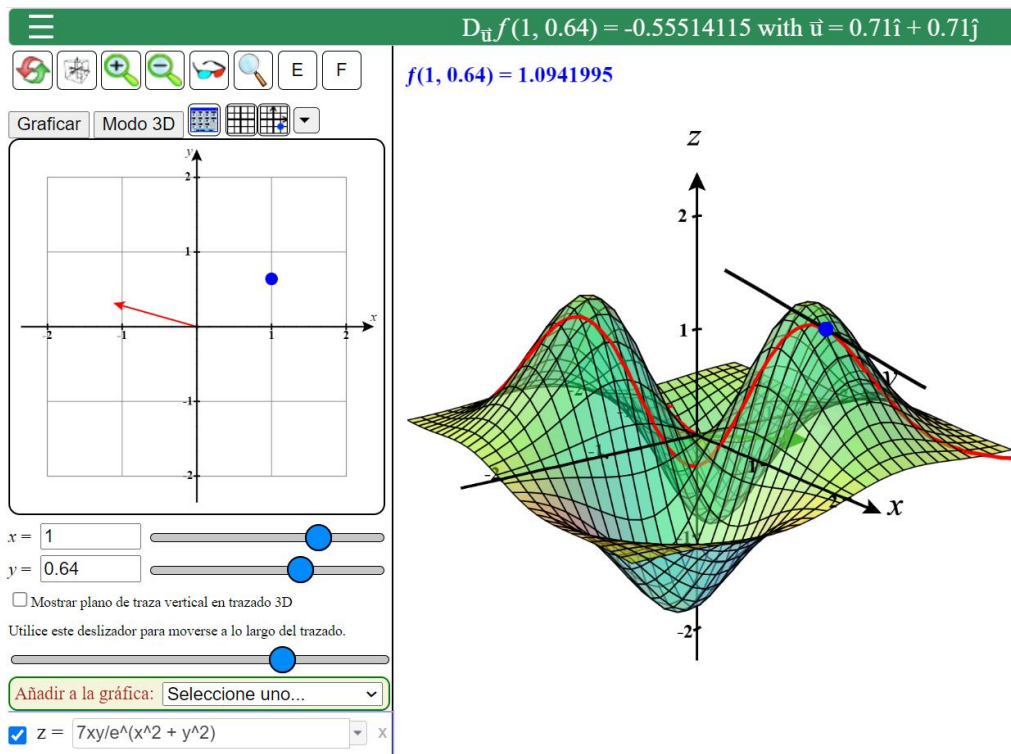
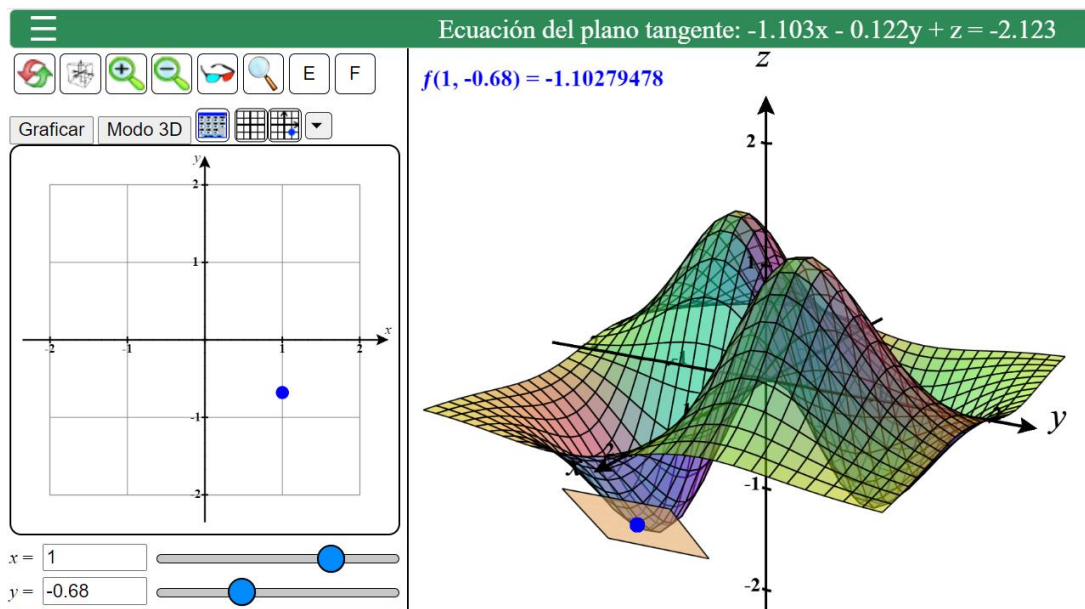
Región: Con esta opción se puede dibujar una región sólida.



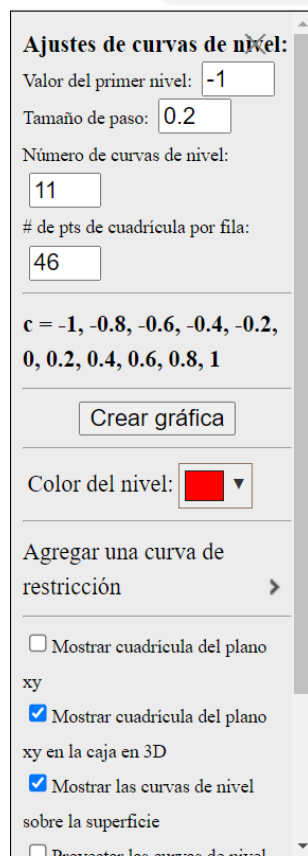
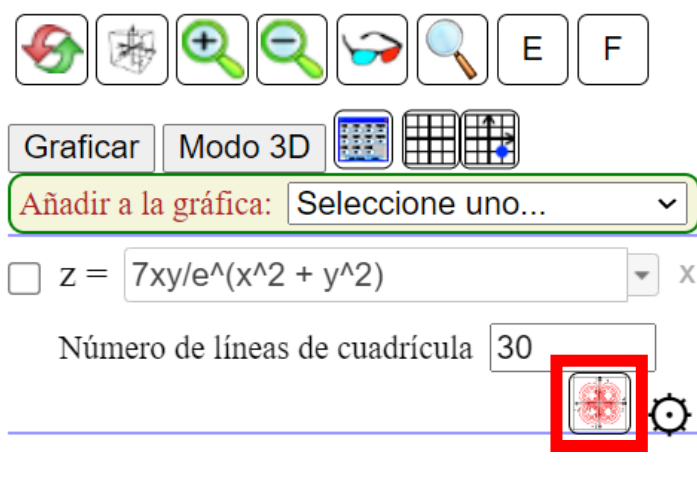
Tercer botón cuadrículado:







Curvas de nivel:



Ajustes de curvas de nivel:

Valor del primer nivel:

Tamaño de paso:

Número de curvas de nivel:

de pts de cuadrícula por fila:

$c = -1, -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$

Crear gráfica

Color del nivel:

Agregar una curva de restricción >

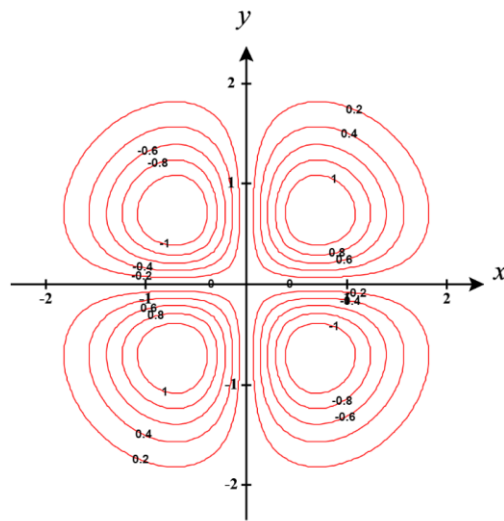
☐ Mostrar cuadrícula del plano xy

☒ Mostrar cuadrícula del plano xy en la caja en 3D

☒ Mostrar las curvas de nivel sobre la superficie

☐ Desactivar las curvas de nivel

Da click sobre la gráfica en 3D para una vista en 3D.



Gráficoar **Modo 3D**

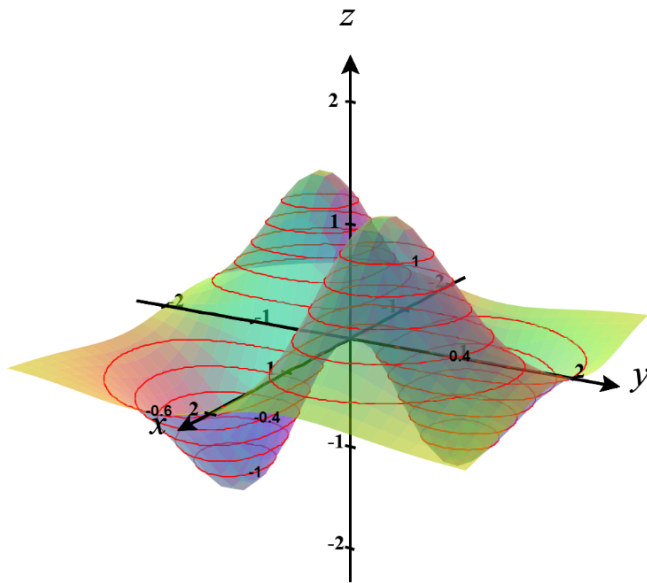
$x = -2$ $y = -2$

Añadir a la gráfica: Seleccione uno...

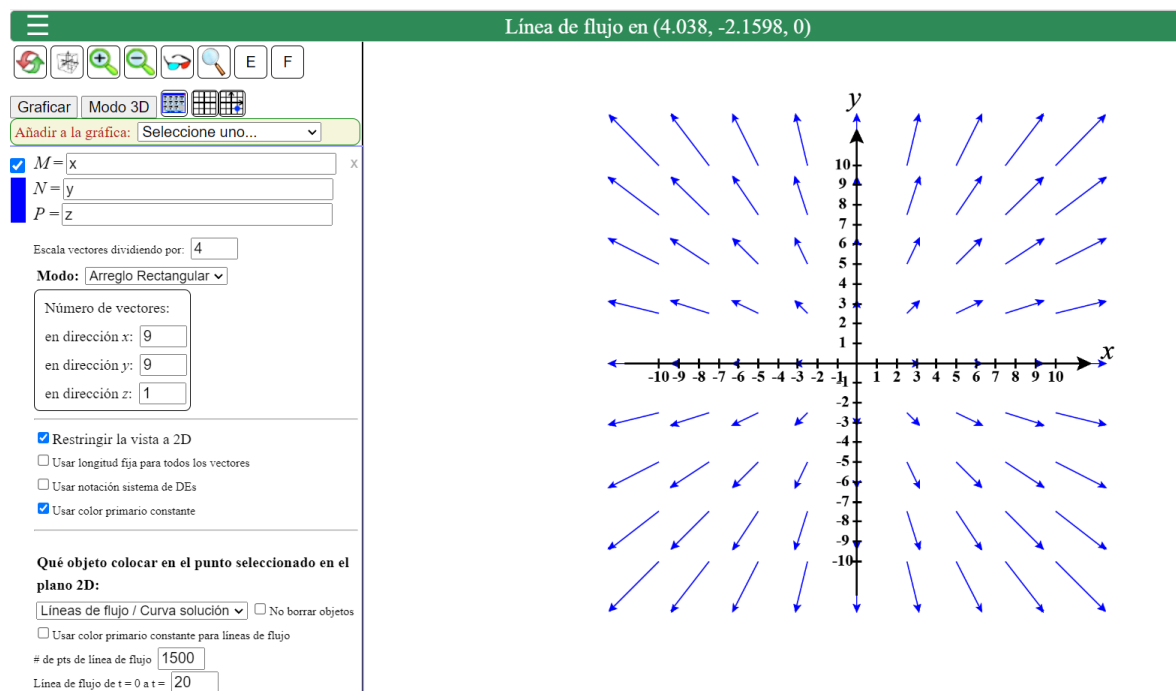
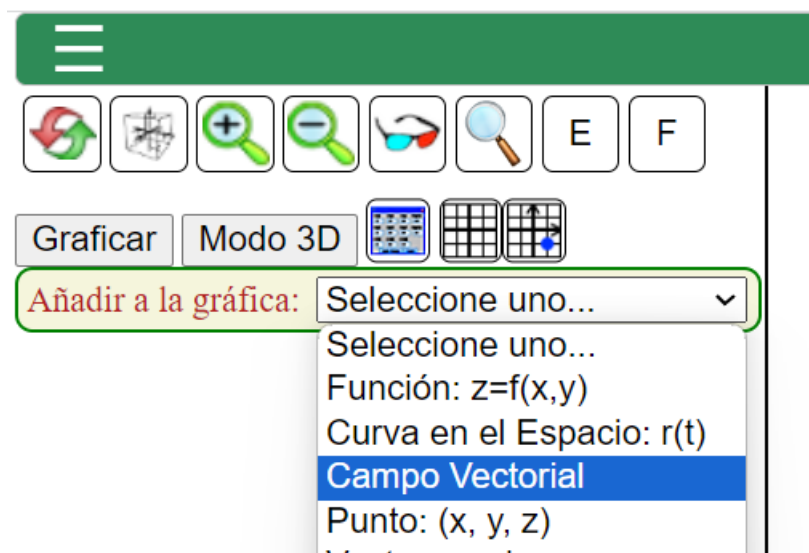
☒ $z = \frac{7xy}{e^{x^2 + y^2}}$

Número de líneas de cuadrícula

Desarrollado con el apoyo de la NSF-IUSE #1524968.



Campos vectoriales:



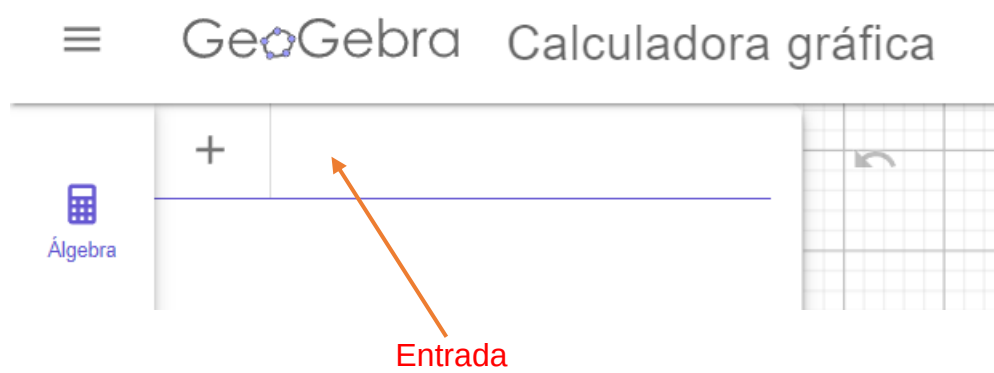
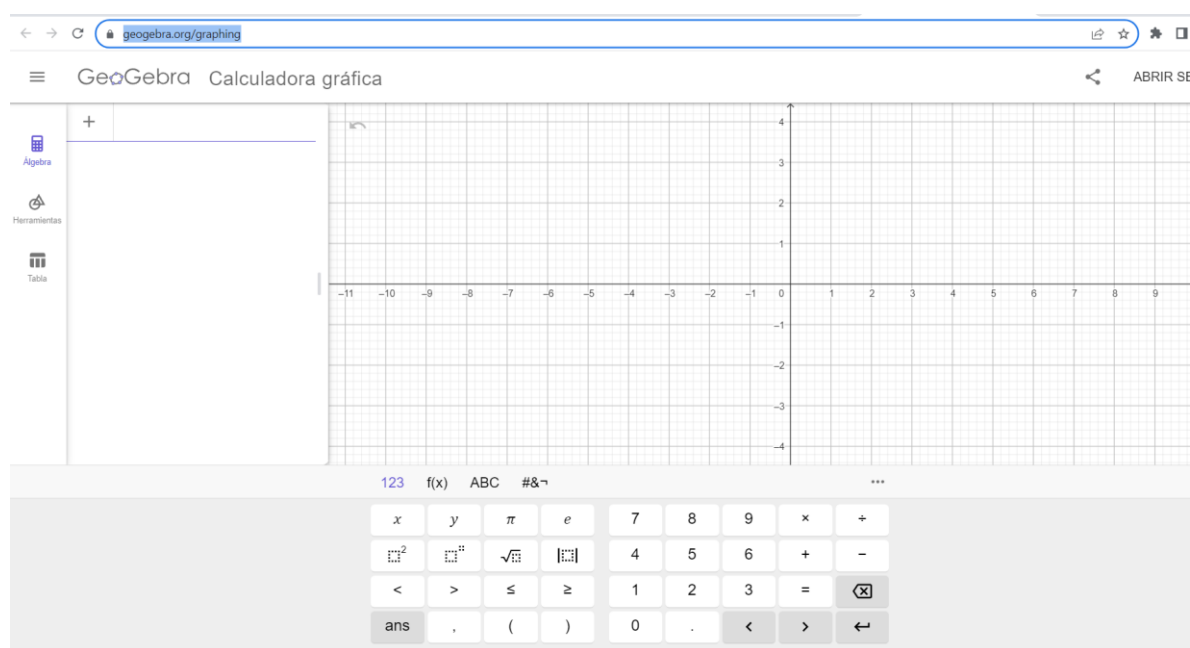
6.2 Anexo B: Geogebra

Para tener acceso a Geogebra se puede hacerlo directamente de internet o descargarlo.

<https://www.geogebra.org/graphing>

Geogebra se utilizó en este trabajo en menor cantidad que CalcPlot3D, así que sólo se aborda para pocas instrucciones:

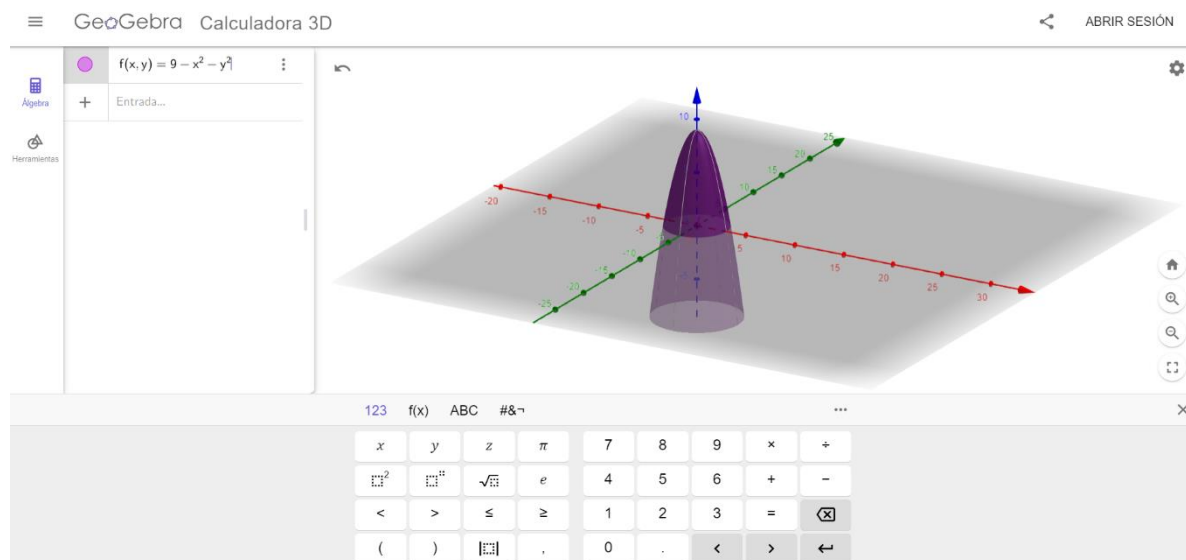
Ventana principal:



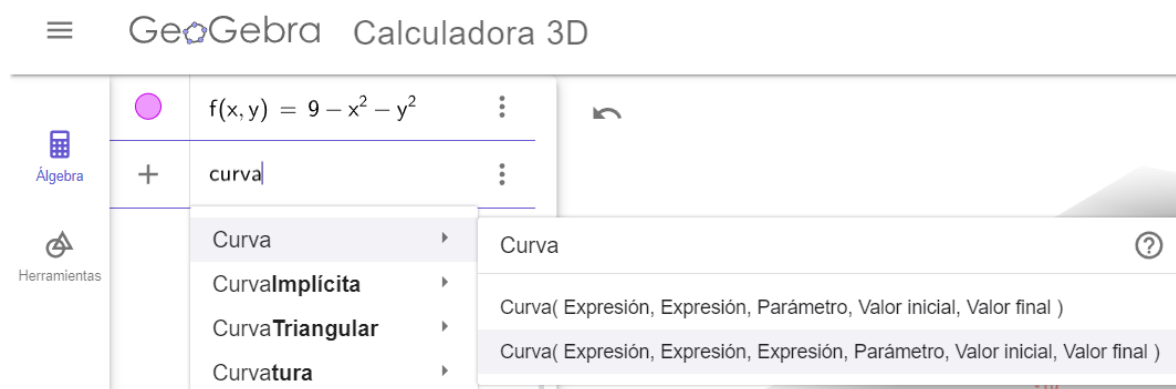
Al escribir la palabra clave en la entrada automáticamente GeoGebra nos indicará opciones y la forma de escribir lo que se desea calcular.

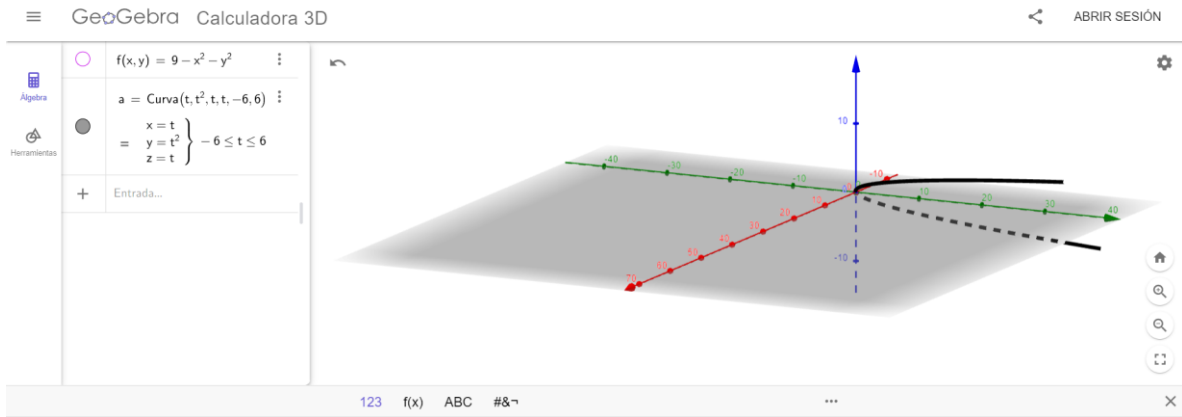
Gráfica: Cambiamos a Geogebra 3D

<https://www.geogebra.org/3d>



Curva paramétrica:





Producto escalar:



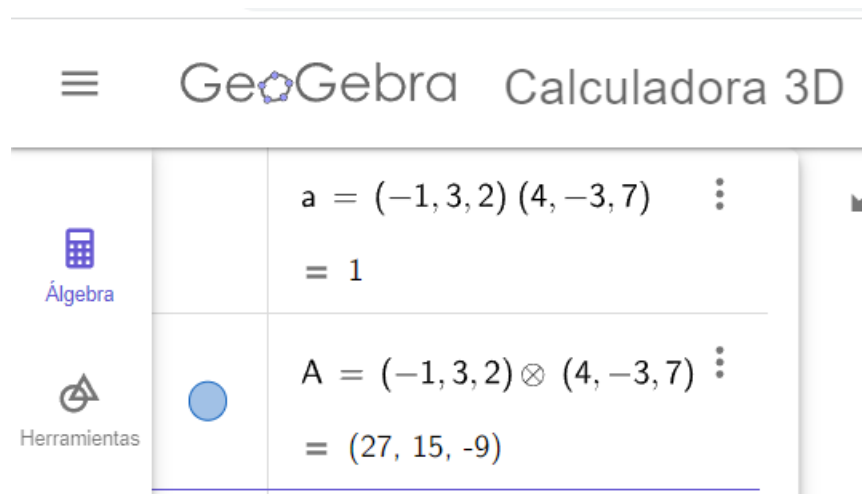
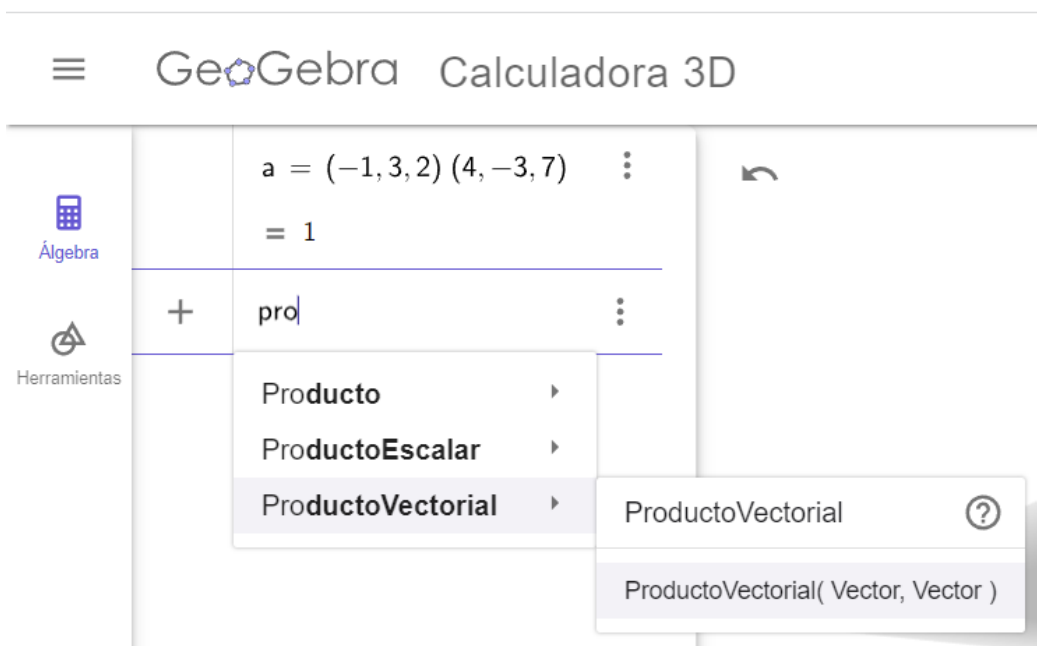
GeoGebra Calculadora 3D

Algebra

$$a = (-1, 3, 2) (4, -3, 7)$$

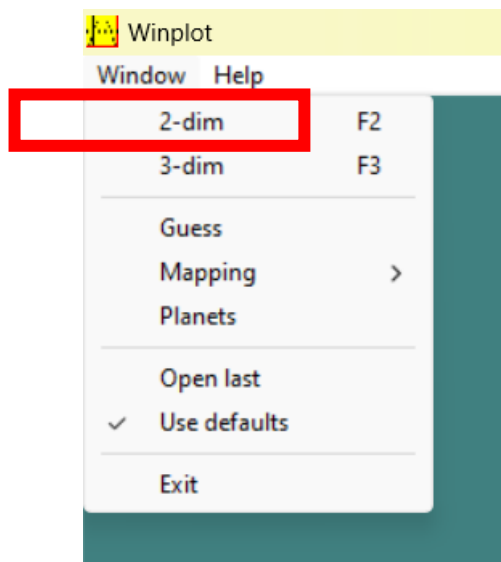
$$= 1$$

Producto Vectorial:

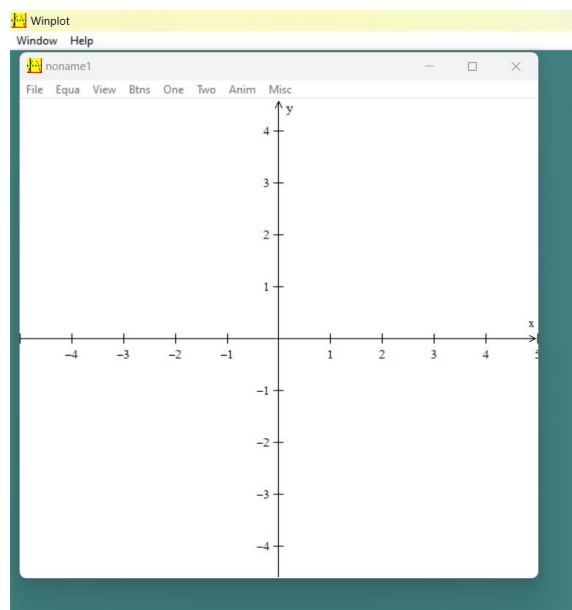


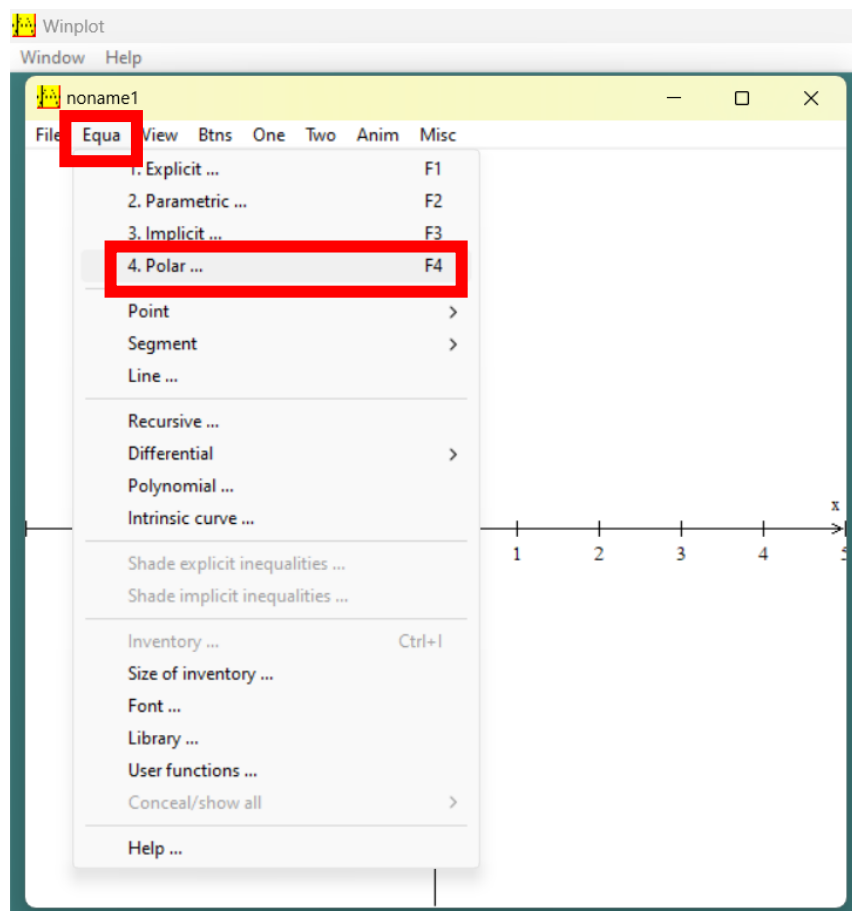
6.3 Anexo C: Winplot

Winplot se utiliza en este trabajo para la graficación de polares, al igual que otros graficadores trae para gráficas en R^2 y R^3 en rectangulares o curvas paramétricas, puntos, segmentos, etc.

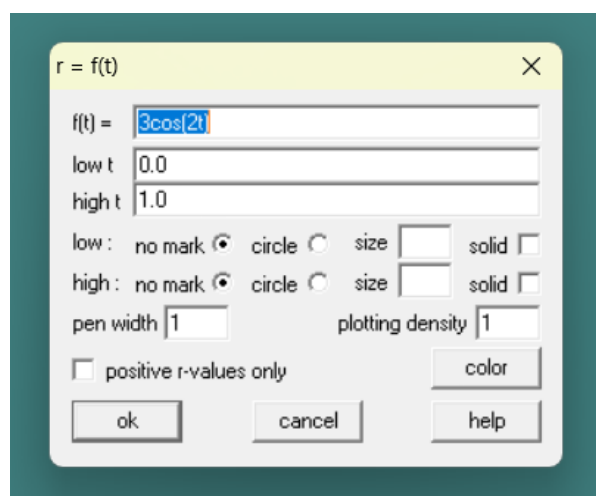


Al seleccionar 2 dimensiones se abre nueva ventana:

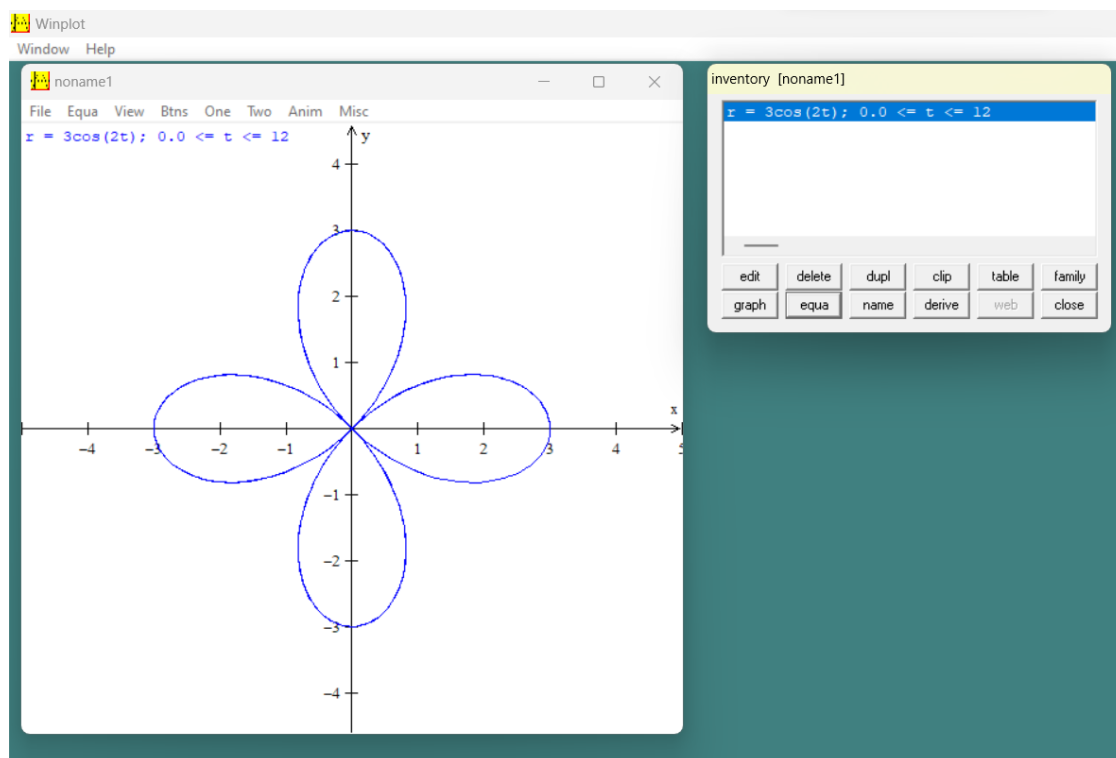




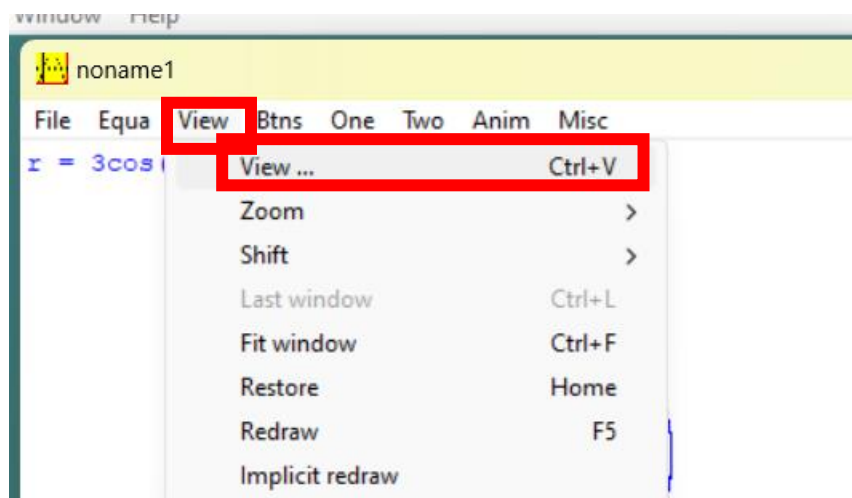
Al dar clic en Equa se abre una ventana con varias opciones, se selecciona polar y nuevamente se abre una ventana:

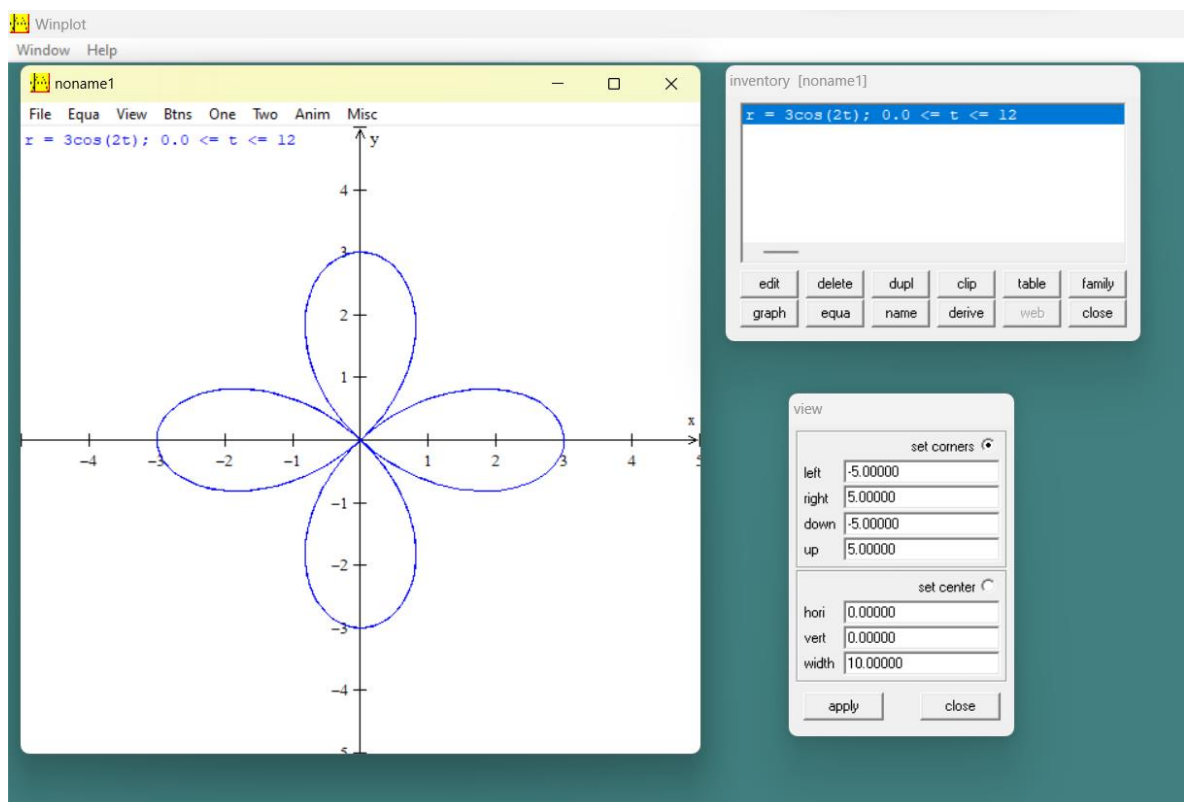
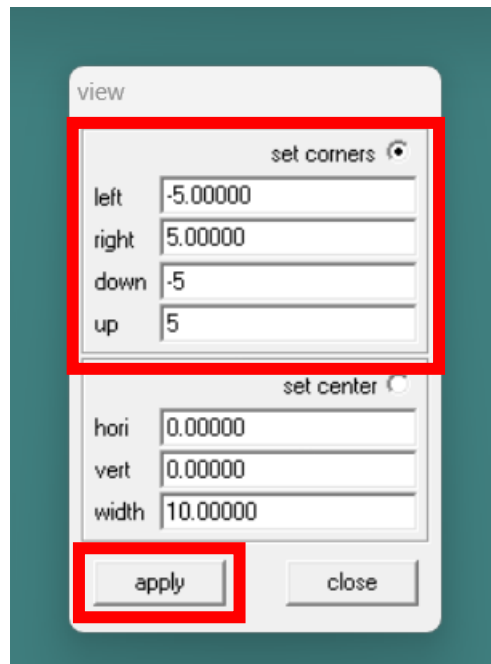


En esta nueva ventana se escribe la función y los valores inicial y final:



En el menú superior se puede modificar el tamaño de la ventana de graficación:





7. Referencias

1. ²⁹ Larson R. E., Hostetler, R. P., Edwards B. H., Heyd D. E. 1996. Cálculo y Geometría Analítica Volumen 2 (Sexta Edición), Copyright © 1996 McGRAW HILL
2. ²⁹ Edwards, B., & Larson, R. (2016). *Matemáticas III, Cálculo de Varias Variables*. CENGAGE Learning.
3. ⁵ Stewart, J. 2008. Cálculo de variables trascendentes tempranas (Octava Edición) – McMaster University, Copyright © 2008 THOMSON
4. Finney & Thomas, G. B. (2000). *Calculo Varias Variables - 9 Edicion*. Addison Wesley Longman.
5. Seeburger, P. (s/f). *CalcPlot3D*. CalcPlot3D. Recuperado el 4 de febrero de 2023, de <https://c3d.libretexts.org/CalcPlot3D/index-es.html>
6. *GeoGebra*. (s/f). Geogebra Calculadora 3D. Recuperado el 4 de febrero de 2023, de <https://www.geogebra.org/3d?lang=es>

● 14% de similitud general

Principales fuentes encontradas en las siguientes bases de datos:

- 9% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 5% Base de datos de trabajos entregados
- 4% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

FUENTES PRINCIPALES

Las fuentes con el mayor número de coincidencias dentro de la entrega. Las fuentes superpuestas no se mostrarán.

1	qdoc.tips Internet	3%
2	archive.org Internet	2%
3	docslide.us Internet	1%
4	Universitas Islam Bandung on 2021-02-11 Submitted works	<1%
5	idoc.pub Internet	<1%
6	vdoc.pub Internet	<1%
7	quadernsdigitals.net Internet	<1%
8	doku.pub Internet	<1%

9	"The Endocrine Society's 99th Annual Meeting and Expo", Endocrine Re...	<1%
	Crossref	
10	"Endocrine Society's 96th Annual Meeting and Expo, June 21–24, 2014...	<1%
	Crossref	
11	Academic Library Consortium on 2021-04-22	<1%
	Submitted works	
12	ww1.docero.mx	<1%
	Internet	
13	Brunel University on 2023-09-01	<1%
	Submitted works	
14	Royal Conservatoire of Scotland on 2019-05-20	<1%
	Submitted works	
15	University of Technology on 2020-06-25	<1%
	Submitted works	
16	"The Endocrine Society's 98th Annual Meeting and Expo, April 1–4, 20...	<1%
	Crossref	
17	Higher Education Commission Pakistan on 2022-10-25	<1%
	Submitted works	
18	King's College on 2019-01-10	<1%
	Submitted works	
19	University College London on 2020-05-13	<1%
	Submitted works	
20	Info Myanmar College on 2023-07-04	<1%
	Submitted works	

21	"The Endocrine Society's 100th Annual Meeting and Expo", Endocrine R...	<1%
	Crossref	
22	Menezes, R.. "On the Semantics of Coordination Models for Distributed...	<1%
	Crossref	
23	Universidad Distrital FJDC on 2020-12-04	<1%
	Submitted works	
24	Universidad Nacional Abierta y a Distancia, UNAD,UNAD on 2020-05-11	<1%
	Submitted works	
25	F.S. Mahmoud, M.A. Fath Alla, M.M. Khalaf. "F μ -strongly semiopen set...	<1%
	Crossref	
26	"Electrical Safety Engineering of Renewable EnergySystems", Wiley, ...	<1%
	Crossref	
27	scribd.com	<1%
	Internet	
28	University of Nottingham on 2021-05-30	<1%
	Submitted works	
29	sedici.unlp.edu.ar	<1%
	Internet	
30	Chua, . "PREDICTING THE UNPREDICTABLE", World Scientific Series o...	<1%
	Crossref	
31	www17.us.archive.org	<1%
	Internet	
32	K. A. Krakowski. "Envelopes of splines in the projective plane", IMA Jo...	<1%
	Crossref	

33	Universidad Nacional Abierta y a Distancia, UNAD,UNAD on 2020-09-29	<1%
	Submitted works	
34	University of London Worldwide on 2022-10-23	<1%
	Submitted works	
35	"IT-Sicherheitspolitik im Unternehmen", X systems press, 2005	<1%
	Crossref	
36	Ryerson University on 2020-11-17	<1%
	Submitted works	
37	Georgia College & State University on 2023-12-16	<1%
	Submitted works	
38	Universidad Nacional Abierta y a Distancia, UNAD,UNAD on 2020-10-07	<1%
	Submitted works	
39	(school name not available) on 2006-08-30	<1%
	Submitted works	
40	Karin Högdahl. "1.86–1.85 Ga intrusive ages of K-feldspar megacryst-...	<1%
	Crossref	
41	Sergey Bobkov, Gennadiy Chistyakov, Friedrich Götze. "Concentration ...	<1%
	Crossref	
42	Institute of International Studies on 2022-07-07	<1%
	Submitted works	
43	Steiner, Erich. "The Chemistry Maths Book", The Chemistry Maths Boo...	<1%
	Publication	
44	Andre J. Faure, Ben Lehner, Verónica Miró Pina, Claudia Serrano Colo...	<1%
	Crossref posted content	

45	Fabrizio Angiulli. "Detecting outlying properties of exceptional objects",...	<1%
	Crossref	
46	Universidad Nacional Abierta y a Distancia, UNAD,UNAD on 2021-03-13	<1%
	Submitted works	
47	Gabriel de Arêa Leão Souza. "Explicit free groups in division rings", Uni...	<1%
	Crossref posted content	
48	University of Sydney on 2017-11-17	<1%
	Submitted works	
49	A. W. Hanson. "The crystal structure of methyl orange monohydrate m...	<1%
	Crossref	
50	Buckinghamshire Chilterns University College on 2023-12-14	<1%
	Submitted works	
51	Skelton, Robert, Jean-Paul Pinaud, and D Mingori. "The Dynamics of th...	<1%
	Crossref	
52	"CS2-PC-22_HR", ActEd	<1%
	Publication	
53	Luis Herrera, Mario Cuellar, David Berrios. "Low Cost Implementation o...	<1%
	Crossref	
54	Colorado Technical University Online on 2006-11-28	<1%
	Submitted works	
55	Echebarria, B.. "Sideband instabilities and defects of quasipatterns", P...	<1%
	Crossref	
56	Central Queensland University on 2018-09-21	<1%
	Submitted works	

57	Moumita Saha, Sanjib Das, Krishnendu Manna, Krishna Das Saha. "Mel...	<1%
	Crossref	
58	University of Sydney on 2017-11-22	<1%
	Submitted works	
59	University of Texas Health Science Center on 2023-10-27	<1%
	Submitted works	
60	"Aktuelle Methoden II – Lernzirkel", Springer-Lehrbuch, 2007	<1%
	Crossref	
61	Laue Atlas, 1974.	<1%
	Crossref	
62	Yong Yau, Lee Lip Seong, Amy Khoo. "Cambridge International AS & A ...	<1%
	Publication	
63	Bond University on 2016-04-08	<1%
	Submitted works	
64	Embry Riddle Aeronautical University on 2024-03-02	<1%
	Submitted works	
65	P. A. C. Raats. "Comparison of Empirical Relationships between Press...	<1%
	Crossref	
66	Ryerson University on 2020-12-09	<1%
	Submitted works	
67	University of Sydney on 2018-10-09	<1%
	Submitted works	