



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Sistema de control basado en observador con
hardware en el lazo para estabilizar un vehículo de
dos ruedas

presentada por

Ing. Blanca Lucero Xopo Rodríguez

como requisito para la obtención del grado de
**Maestra en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza

Codirector de tesis

Dr. Jorge Aurelio Brizuela Mendoza

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2024.



Cuernavaca, Mor., 09/agosto/2024
No. de Oficio: DIE/111/202420
Asunto: Aceptación de documentos de tesis

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial de la **C. BLANCA LUCERO XOPO RODRÍGUEZ**, con número de control **M22CE068** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **“SISTEMA DE CONTROL BASADO EN OBSERVADOR CON HARDWARE EN EL LAZO PARA ESTABILIZAR UN VEHÍCULO DE DOS RUEDAS”**, y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Doctor en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 5505019

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Jorge Aurelio Brizuela Mendoza
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 9526499

REVISOR 1

Dr. Enrique Quintero Márquez Márquez
Doctor en Ciencias en Ingeniería Química
Cédula profesional 10259407

REVISOR 2

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
Doctora en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 9968714

C.p. M.T.I. Maria Elena Gómez Torres. Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Estudiante
JGM/kmq





Cuernavaca, Mor.,
No. De Oficio:
Asunto:

12/agosto/2024
SAC/234/2024
Autorización de
impresión de tesis

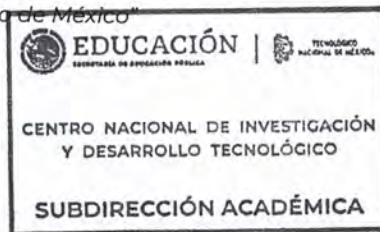
BLANCA LUCERO XOPO RODRÍGUEZ
CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“SISTEMA DE CONTROL BASADO EN OBSERVADOR CON HARDWARE EN EL LAZO PARA ESTABILIZAR UN VEHÍCULO DE DOS RUEDAS”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
“Conocimiento y tecnología al servicio de México”



CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



DEDICATORIA

A Dios por guiar mi camino, permitiéndome culminar una etapa más de mi vida.

A mis padres Ruperto y Blanca, en reconocimiento a todo el amor, paciencia, comprensión y apoyo para conmigo.

A mis hermanas Karen y Giseh, por el amor y apoyo incondicional que siempre me han brindado.

A mis sobrinos, Aislin y Adriel, por cada sonrisa que me recuerda lo importante que es disfrutar las pequeñas cosas de la vida.

AGRADECIMIENTOS

A mis asesores, el Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza y el Dr. Jorge Aurelio Brizuela Mendoza, personas que han demostrado no solo un gran conocimiento y talento, sino también una comprensión y empatía, me brindaron sus enseñanzas y el tiempo que me han ayudado a que este trabajo sea una realidad.

A mis revisores, Dr. Enrique Quintero Mármol Márquez y Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo, cuyas observaciones y comentarios han sido cruciales para la consolidación de este trabajo y quienes han sido pilares fundamentales en la dirección y enriquecimiento de esta investigación.

A mis padres y hermanas, que con su amor y paciencia, me enseñaron a disponer mi mente, ocupar mi tiempo, dedicar el mejor de mis esfuerzos en pro de mis objetivos y que la única forma de alcanzar mis sueños es trabajando duro por ellos. Gracias por todo y por mucho más.

Al CONAHCYT por el apoyo económico brindado para realizar y culminar mis estudios de maestría, facilitando mi camino académico.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) y, a la Universidad de Guadalajara (UDG) por abrirme las puertas durante mi estancia en estos meses de formación.

A mis compañeros y amigos del CENIDET, Arturo Espinosa, Ana Santana, Enrique Hernán-

dez, Erandi Arroyo, Elías Ramos, Inri Cruz, Víctor Salinas, Rossel Muñoz, Oscar Brito, Arturo García, Ezequiel Domínguez, Laura Galicia, etc., por su amistad y apoyo a lo largo de este proceso.

A mis amigas de la UDG, Carolina, Gabriela, Marisol, Brenda y Mariana, por las vivencias, hospitalidad y compañía durante mi estancia en Guadalajara. Gracias por cada momento compartido.

En este trabajo de investigación se presenta el estudio sobre el comportamiento dinámico y control de un vehículo de dos ruedas. Con la finalidad de entender los aspectos importantes tomados en cuenta en el modelado, se presenta el desarrollo de la aproximación del modelo matemático particular de una bicicleta. Se describen las condiciones, parámetros y desarrollo del modelo matemático, así como su validación por medio de simulaciones en *Simscape Multibody*.

Posteriormente, se instrumenta el vehículo de dos ruedas con la finalidad de obtener datos que dependan físicamente de su estructura y comportamiento. Con esta instrumentación, es posible implementar algoritmos de control y analizar el comportamiento dinámico de la bicicleta.

También, se describe el acoplamiento dinámico entre la parte real del sistema (instrumentación considerada en el vehículo), un observador de estados (algoritmo encargado de estimar los estados no disponibles) y la ecuación diferencial que describe la dinámica del balanceo de la bicicleta, cuya solución depende de los elementos reales y estimados.

La implementación de hardware en lazo se enfoca en el diseño del observador y la solución de la ecuación diferencial del balanceo, a partir de los datos derivados de la instrumentación de la bicicleta.

Finalmente, se presentan diversos sistemas de control enfocados en la estabilización del vehículo de dos ruedas en su posición vertical, basados en un prototipo instrumentado, un observador y la

ecuación diferencial del balanceo.

Estos sistemas de control se enfocan en validar el acoplamiento dinámico entre el sistema físico y los algoritmos de control programados, validando así la efectividad de implementar hardware en el lazo.

ABSTRACT

This research work presents a study on the dynamic behavior and control of a two-wheeled vehicle. In order to understand the important aspects considered in modeling, the development of a specific mathematical model for a bicycle is presented. The conditions, parameters, and development of the mathematical model are described, along with its validation through simulations in *Simscape Multibody*.

Subsequently, the two-wheeled vehicle is instrumented to obtain data that depend physically on its structure and behavior. This instrumentation enables the implementation of control algorithms and analysis of the bicycle's dynamic behavior.

Additionally, the dynamic coupling is described between the actual part of the system (instrumentation considered in the vehicle), a state observer (algorithm responsible for estimating unavailable states), and the differential equation describing the bicycle's balancing dynamics, whose solution depends on both real and estimated elements.

The hardware-in-the-loop implementation focuses on designing the observer and solving the balancing differential equation based on data derived from the bicycle's instrumentation.

Finally, various control systems focused on stabilizing the two-wheeled vehicle in its vertical position are presented. These systems are based on a instrumented prototype, an observer, and the

balancing differential equation. They aim to validate the dynamic coupling between the physical system and the programmed control algorithms, thereby demonstrating the effectiveness of hardware-in-the-loop implementation.

Índice general

Índice general	VIII
Índice de figuras	XII
Índice de tablas	XV
Nomenclatura	XVI
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	2
1.2 Justificación	3
1.3 Hipótesis	3
1.4 Objetivos	4
1.4.1 Objetivo general	4
1.4.2 Objetivos específicos	4
1.5 Sistemas lineales de parámetros variables (LPV)	4
1.5.1 Clasificación de los sistemas LPV	5
1.5.1.1 Sistemas LPV afines	5
1.6 Control por Ganancias Programadas	6
1.6.1 Características del control por programación de ganancias	6
1.6.2 Procedimiento	6
1.7 Observadores	7
1.7.1 Observador tipo Luenberger	7
1.8 Estado del Arte	8
1.8.1 Modelado de un vehículo de dos ruedas	8

1.8.2	Control de un vehículo de dos ruedas	9
1.8.3	Implementación de hardware en el lazo	11
1.9	Alcances	13
1.10	Aportación	13
1.11	Originalidad	13
1.12	Organización del documento	14
2	Modelado y simulación de un vehículo de dos ruedas	15
2.1	Modelo matemático de un vehículo de dos ruedas	16
2.2	Caso de estudio: Aproximación y validación del modelo matemático con representación polinomial (LPV) del vehículo de dos ruedas	16
2.2.1	Modelo CAD del vehículo de dos ruedas	16
2.2.2	Parámetros para el modelo matemático	18
2.2.3	Desarrollo del modelo matemático	19
2.2.4	Representación en espacio de estados	23
2.3	Validación del modelo matemático	24
2.4	Modelo CAD en <i>MATLAB-Simulink-Simscape Multibody</i>	26
2.5	Simulaciones considerando al Sistema LTI	29
2.5.1	Simulación 1. Vehículo de dos ruedas en lazo abierto	30
2.5.2	Simulación 2. Control por retroalimentación de estados aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas	32
2.5.3	Simulación 3. Control por retroalimentación de estados estimados aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas	33
2.5.4	Simulación 4. Control por retroalimentación de estados con acciones integrales aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas	35
2.5.5	Simulación 5. Control por retroalimentación de estados estimados con acciones integrales aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas	37
2.6	Simulaciones considerando Ganancias Programadas	39
2.6.1	Simulación 6. Control por retroalimentación de estados considerando Ganancias Programadas aplicadas al modelo CAD del vehículo de dos ruedas	40

2.6.2	Simulación 7. Control por retroalimentación de estados estimados considerando Ganancias Programadas aplicadas al modelo CAD del vehículo de dos ruedas	45
2.7	Conclusiones	51
3	Diseño de sistemas de control para estabilizar al vehículo de dos ruedas	53
3.1	Formulación del problema	54
3.2	Aspectos importantes de los sistemas de control	55
3.3	Parametrización del vehículo de dos ruedas	56
3.3.1	Sistema real instrumentado	56
3.3.2	Observador de estados	57
3.3.3	Ecuación Diferencial del Balanceo	57
3.3.4	Vector de estados para hardware en el lazo	58
3.4	Instrumentación del vehículo de dos ruedas	59
3.4.1	Estructura mecánica para el vehículo de dos ruedas	59
3.4.1.1	Mecanismos para instrumentación	59
3.4.2	Componentes electrónicos	61
3.4.3	Dispositivos para comunicación	64
3.5	Diseño de sistemas de control para el vehículo de dos ruedas	66
3.5.1	Caso A. Sistema de control con acción integral en el ángulo del manubrio	66
3.5.2	Caso B. Sistema de control con acciones integrales en el ángulo de balanceo y manubrio	69
3.5.3	Caso C. Sistema de control con acción integral en el ángulo del manubrio y una modificación en el observador	71
3.5.4	Caso D. Sistema de control con acciones integrales en el ángulo de balanceo y manubrio con modificación en el observador	72
3.6	Conclusiones	73
4	Resultados Experimentales	74
4.1	Estabilización de un vehículo de dos ruedas considerando Sistemas LTI	75
4.1.1	Experimento 1. Estabilización con acción integral en el ángulo del manubrio	75

4.1.2	Experimento 2. Estabilización con acción integral en el ángulo de balanceo y manubrio	80
4.1.3	Experimento 3. Estabilización con acción integral en el ángulo del manubrio con variante en el observador	85
4.1.4	Experimento 4. Estabilización con acción integral en el ángulo de balanceo y manubrio con variante en el observador	89
4.2	Estabilización de un vehículo de dos ruedas considerando velocidad traslacional variable y Ganancias Programadas	93
4.2.1	Experimento 5. Estabilización con acción integral en el ángulo del manubrio y una velocidad traslacional decreciente por medio de GP	95
4.2.2	Experimento 6. Estabilización con acción integral en el ángulo de balanceo y manubrio con una velocidad traslacional decreciente por medio de GP . . .	104
4.2.3	Experimento 7. Estabilización con dos acciones integrales, una variante en el observador, velocidad traslacional decreciente por medio de GP	111
4.2.4	Experimento 8. Estabilización con dos acciones integrales y una velocidad traslacional variable por medio de GP	118
4.3	Conclusiones	123
5	Conclusiones	124
5.1	Conclusiones generales	124
5.2	Ventajas y limitaciones	125
5.3	Originalidad	126
5.4	Trabajos futuros	126
5.5	Artículos escritos	127
5.6	Actividades complementarias	128
	Referencias	129

Índice de figuras

2.1	Subsistemas del vehículo de dos ruedas.	17
2.2	Modelo CAD del vehículo de dos ruedas en SolidWorks.	17
2.3	Diagrama para el modelo del vehículo de dos ruedas.	19
2.4	Parte real de los valores propio de la matriz $A(v(j))$ del vehículo de dos ruedas.	25
2.5	Parte imaginaria de los valores propios de la matriz $A(v(j))$ del vehículo de dos ruedas.	25
2.6	Articulación de <i>Revolute</i> para la rueda delantera y trasera.	26
2.7	Articulación de <i>Revolute</i> para el manubrio.	27
2.8	Articulación de <i>Gimbal</i> aplicada al marco general.	28
2.9	Diagrama y configuración del vehículo importado a <i>MATLAB-Simulink</i>	28
2.10	Animación del modelo CAD del vehículo de dos ruedas en <i>MATLAB-Simulink</i>	29
2.11	Sistema en lazo abierto.	31
2.12	Resultados de la <i>Simulación 2</i>	33
2.13	Resultados de la <i>Simulación 3</i>	34
2.14	Esquema de Control de la <i>Simulación 4</i>	36
2.15	Resultados de la <i>Simulación 4</i>	37
2.16	Esquema de control de la <i>Simulación 5</i>	38
2.17	Resultados de la <i>Simulación 5</i>	39
2.18	Velocidad traslacional variable para la <i>Simulación 6</i>	41
2.19	Ganancias programadas del vector K	42
2.20	Valores propios de $A(j) - BK(j)$ de la <i>Simulación 6</i>	43
2.21	Resultados de la <i>Simulación 6</i>	44
2.22	Ganancias programadas del vector L	46
2.23	Valores propios de $A(j) - L(j)C$ de la <i>Simulación 7</i>	47

2.24	Velocidad traslacional variable para la <i>Simulación 7</i>	48
2.25	Ganancias del Controlador.	49
2.26	Valores propios de $A(j) - BK(j)$ de la <i>Simulación 7</i>	50
2.27	Resultados de la <i>Simulación 7</i>	51
3.1	Estructura general de un sistema de control.	56
3.2	Base principal para el vehículo de dos ruedas.	59
3.3	Mecanismo para el sensor de posición.	60
3.4	Mecanismo para el actuador.	60
3.5	Sensor para medir la posición angular del manubrio δ	61
3.6	Actuador para manipular el marco frontal del vehículo.	62
3.7	Sensor para medir la velocidad traslacional v	63
3.8	Microcontrolador Arduino NANO.	64
3.9	Tarjeta de adquisición de datos NI myRIO.	65
4.1	Esquema del <i>Experimento 1</i>	76
4.2	Resultados del <i>Experimento 1</i> : Posiciones Angulares y Leyes de Control.	78
4.3	Resultados del <i>Experimento 1</i> : Error entre δ_d y δ	79
4.4	Resultados del <i>Experimento 1</i> : Velocidades angulares.	80
4.5	Esquema del <i>Experimento 2</i>	81
4.6	Resultados del <i>Experimento 2</i> : Posiciones Angulares y Leyes de Control.	83
4.7	Resultados del <i>Experimento 2</i> : Error entre $(\delta_d - \delta)$ y $(\phi_d - \phi_e)$	84
4.8	Resultados del <i>Experimento 2</i> : Velocidades angulares.	84
4.9	Esquema del <i>Experimento 3</i>	85
4.10	Resultados del <i>Experimento 3</i> : Posiciones Angulares y Leyes de Control.	87
4.11	Resultados del <i>Experimento 3</i> : Error entre $(\delta_d - \delta)$	88
4.12	Resultados del <i>Experimento 3</i> : Velocidades angulares.	89
4.13	Esquema del <i>Experimento 4</i>	90
4.14	Resultados del <i>Experimento 4</i> : Posiciones Angulares y Leyes de Control.	91
4.15	Resultados del <i>Experimento 4</i> : Error entre $(\phi_d - \phi_e)$ y $(\delta_d - \delta)$	92
4.16	Resultados del <i>Experimento 4</i> : Velocidades angulares.	93
4.17	Esquema del <i>Experimento 5</i>	95

4.18 Velocidad traslacional en el <i>Experimento 5</i>	96
4.19 Ganancias programadas del vector $K(v)$ del <i>Experimento 5</i>	97
4.20 Valores propios de $A(j) - BK(j)$ del <i>Experimento 5</i>	98
4.21 Ganancias programadas del vector $L(v)$ del <i>Experimento 5</i>	99
4.22 Valores propios de $A(j) - L(j)C$ del <i>Experimento 5</i>	101
4.23 Resultados del <i>Experimento 5</i> : Posiciones Angulares y Leyes de Control.	102
4.24 Resultados del <i>Experimento 5</i> : Error entre $(\delta_d - \delta)$	103
4.25 Resultados del <i>Experimento 5</i> : Velocidades angulares.	103
4.26 Esquema del <i>Experimento 6</i>	104
4.27 Ganancias programadas del vector K del <i>Experimento 6</i>	106
4.28 Valores propios de $A(j) - BK(j)$ del <i>Experimento 6</i>	107
4.29 Velocidad traslacional en el <i>Experimento 6</i>	108
4.30 Resultados del <i>Experimento 6</i> : Posiciones Angulares y Leyes de Control.	109
4.31 Resultados del <i>Experimento 6</i> : Error entre $(\delta_d - \delta)$ y $(\phi_d - \phi_e)$	110
4.32 Resultados del <i>Experimento 6</i> : Velocidades angulares.	111
4.33 Esquema del <i>Experimento 7</i>	112
4.34 Ganancias programadas del vector $L(v)$ del <i>Experimento 7</i>	113
4.35 Valores propios de $A(j) - L(j)C$ del <i>Experimento 7</i>	115
4.36 Velocidad traslacional en el <i>Experimento 7</i>	115
4.37 Resultados del <i>Experimento 7</i> : Posiciones Angulares y Leyes de Control.	116
4.38 Resultados del <i>Experimento 7</i> : Error entre $(\delta_d - \delta)$ y $(\phi_d - \phi_e)$	117
4.39 Resultados del <i>Experimento 7</i> : Velocidades angulares.	117
4.40 Esquema del <i>Experimento 8</i>	119
4.41 Velocidad traslacional en el <i>Experimento 8</i>	120
4.42 Resultados del <i>Experimento 8</i> : Posiciones Angulares y Leyes de Control.	121
4.43 Resultados del <i>Experimento 8</i> : Error entre $(\delta_d - \delta)$ y $(\phi_d - \phi_e)$	122
4.44 Resultados del <i>Experimento 8</i> : Velocidades angulares.	122

Índice de tablas

Tabla 2.1	Parámetros del vehículo de dos ruedas.	18
Tabla 3.1	Estado real.	57
Tabla 3.2	Estados generados por el observador.	57
Tabla 3.3	Estados generados por la Ecuación Diferencial de ϕ	57
Tabla 3.4	Vector de estados con hardware en el lazo.	58
Tabla 3.5	Especificaciones Técnicas del encoder.	61
Tabla 3.6	Especificaciones Técnicas del Actuador.	62
Tabla 3.7	Especificaciones Técnicas del Fototransistor y Fotodiodo.	63
Tabla 3.8	Estados contemplados para el diseño del observador 1.	68
Tabla 3.9	Estados contemplados para la solución de la ecuación diferencial de ϕ	69
Tabla 3.10	Estados contemplados para el diseño del observador Caso C	71
Tabla 3.11	Estados contemplados para el diseño del observador Caso D	72

Acrónimo

CAD
LTI
LPV
GP

Descripción

Diseño Asistido por Computadora
Lineal Invariante en el Tiempo
Lineal de Parámetros Variables
Ganancias Programadas

Variables

M^T
 $x(t)$
 $y(t)$
 $u(t)$
 $\hat{x}(t)$
 $\hat{y}(t)$
 $e(t)$
 K
 K_ϕ
 K_δ

Descripción

Matriz transpuesta
Vector de estados del sistema
Vector de salidas del sistema
Vector de fuerzas de entrada generalizada
Vector de estados estimados
Vector de salidas estimadas
Error de estimación
Ganancia asociada al controlador
Ganancia asociada al balanceo
Ganancia asociada al manubrio

Vehículo de dos ruedas

v
 ϕ
 δ
 $\dot{\phi}$
 $\dot{\delta}$
 T_ϕ
 T_δ

Descripción

Velocidad traslacional (m/s)
Ángulo de Balanceo ($^\circ$)
Ángulo del manubrio ($^\circ$)
Velocidad Angular del Balanceo ($^\circ/s$)
Velocidad Angular del Manubrio ($^\circ/s$)
Fuerza de entrada generalizada asociada al balanceo (Nm)
Fuerza de entrada generalizada asociada al manubrio (Nm)

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La implementación de hardware en el lazo se define como una herramienta importante en el proceso de desarrollo de investigaciones, ya que, su aplicación permite llevar a cabo pruebas eficientes y seguras a través de un sistema condicionado por dispositivos electrónicos (o bien, instrumentado), cuyos datos proporcionan información de su comportamiento (Ahmadi et al., 2023).

Esta metodología optimiza los procesos de prueba y respuesta ante distintos escenarios y condiciones de funcionamiento de un sistema, en un entorno seguro y controlado, mejorando la productividad y calidad del prototipo instrumentado, además de reducir el tiempo de una investigación.

En este tema de tesis trabaja el caso de estudio del vehículo de dos ruedas considerando hardware en el lazo.

Uno de los casos relacionados directamente con el proceso de innovación es el vehículo de dos ruedas. A lo largo de su historia, la bicicleta ha presentado avances significativos en diversos aspectos: diseño estructural y físico, rendimiento, tecnología aplicada, seguridad, etc. Así mismo, la comunidad científica ha mostrado un gran interés en el estudio de su comportamiento dinámico, ya que, naturalmente, es considerado un sistema inestable.

Diversas investigaciones definen dicho comportamiento en un modelo matemático descrito en Meijaard et al. (2007) y Schwab et al. (2005), considerando ciertas condiciones y restricciones en su

modelado. Su desarrollo implica el uso de teoría física y ecuaciones diferenciales, aplicando el principio de D'Alembert descrito en Whipple (1899).

También, su comportamiento dinámico se ve afectado por la velocidad traslacional (o de avance), lo cual lo define como un parámetro variable. Con esto, el sistema tiene las bases para determinarse como un Sistema Lineal de Parámetros Variables (LPV).

En este proyecto de investigación se aborda el caso de estudio del vehículo de dos ruedas, del cual, se realiza la aproximación del modelo matemático particular de una bicicleta seleccionada a instrumentar para que en conjunto con el diseño de algoritmos que estabilice en posición vertical al vehículo de dos ruedas.

1.1. Planteamiento del problema

El comportamiento dinámico y la estabilidad de una bicicleta es definido por 3 grados de libertad.

Velocidad traslacional $v(t)$

Ángulo del manubrio $\delta(t)$

Ángulo del balanceo $\phi(t)$

Su estudio involucra el análisis del modelo matemático presentado en la Ec. (1.1), cuya estructura lo define como un sistema LPV con la velocidad traslacional como parámetro variable.

$$M\ddot{q}(t) + v(t)C_1\dot{q}(t) + [gK_0 + v^2K_2]q(t) = f(t) \quad (1.1)$$

La descripción detallada de este modelo matemático se presenta en el Capítulo 2 de este documento.

El estudio y análisis del modelo para estabilizar la bicicleta presenta un problema porque ciertos valores de la velocidad traslacional hacen que la bicicleta sea inestable y que no mantenga su posición vertical cuando está en movimiento.

La implementación de hardware en el lazo representa una forma factible de desarrollar y simular diferentes algoritmos de control, ya que a través de una planta simulada se pueden detectar errores,

problemas de diseño o validar el comportamiento del sistema sin necesidad de poner en riesgo de avería, pérdidas económicas o materiales, etc., a la planta real.

Se diseña un controlador basado en observador que es capaz de estimar los parámetros no medibles y estabilizar una bicicleta en su posición vertical. Con todo lo anterior, se diseña el sistema con hardware en el lazo, teniendo como ventaja la capacidad de validar el diseño de diferentes algoritmos de control, evitar averías o pérdidas en la instrumentación de un vehículo de dos ruedas, etc.

1.2. Justificación

Las investigaciones realizadas anteriormente implementan diferentes métodos para estabilizar un vehículo de dos ruedas, tomando como base los estados (ángulo de balanceo y ángulo del manubrio) del sistema y un parámetro variable (velocidad traslacional), considerándolo así un sistema LPV. Dentro de estas, algunas implementan un controlador para estabilizar el vehículo en su posición vertical mediante un observador que depende de los estados del sistema original y de los que este estime, considerando la velocidad traslacional en su análisis.

La implementación de hardware en el lazo, por su parte, permite probar de manera virtual los algoritmos y controladores diseñados. Su implementación puede considerar diferentes escenarios y posibilidades, y trabajar sobre las dificultades que afecten los resultados finales sin generar pérdidas económicas y materiales.

El presente proyecto de tesis encuentra como justificación diseñar un sistema de control basado en observador con hardware en el lazo que estabilice un vehículo de dos ruedas y que permita a investigaciones posteriores simular, observar y validar el comportamiento de otros algoritmos de control con la misma estructura.

1.3. Hipótesis

Diseñar una ley de control y un controlador basado en observador con hardware en lazo permitirá estabilizar un vehículo de dos ruedas sin conductor en su posición vertical, y observar, analizar

y validar el diseño y comportamiento de otros diferentes algoritmos de control a investigaciones posteriores.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Diseñar un controlador basado en observador con hardware en el lazo para estabilizar un vehículo de dos ruedas modelado por un sistema LPV polinomial.

1.4.2. Objetivos específicos

1. Diseñar un observador que estime las variables no medibles del vehículo de dos ruedas.
2. Diseñar una ley de control estabilizante basada en observador para mantener en posición vertical un vehículo de dos ruedas.
3. Diseñar un esquema de hardware en lazo para validar algoritmos de control para un vehículo de dos ruedas.
4. Validar resultados mediante la simulación de sistemas de control diseñados a partir de un observador con hardware en el lazo.

1.5. Sistemas lineales de parámetros variables (LPV)

Según Briat (2014), los sistemas lineales de parámetros variables (LPV) son modelos cuya representación matemática considera parámetros variantes a través del tiempo de acuerdo a las condiciones y especificaciones propias del sistema. Estos modelos se representan en espacio de estados, definiendo en su estructura coeficientes dependientes de los parámetros.

En términos matemáticos, un sistema LPV se representa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) &= C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde el vector de estado está definido por $x(t) \in \mathbb{R}^n$, el vector de entrada por $u(t) \in \mathbb{R}^m$, el vector de salida por $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y el vector de parámetros variables $\rho(t) \in \mathbb{R}^k$. Así mismo,

$A(\rho(t))$, $B(\rho(t))$, $C(\rho(t))$ y $D(\rho(t))$ representan matrices dependientes del parámetro variable de dimensiones compatibles.

El vector de parámetros ρ modifica el comportamiento de entrada-salida del sistema y su estructura a lo largo del tiempo.

1.5.1. Clasificación de los sistemas LPV

Es posible clasificar a los sistemas LPV en función del comportamiento de los parámetros variables. Existen tres tipos comúnmente utilizados:

- Sistemas LPV politópicos.
- Sistemas LPV en forma de LFT (Transformación Lineal Fraccional).
- Sistemas LPV afines.

Nota: Para el caso de estudio, el sistema LPV se enfocará en el estudio y análisis de sistemas afines.

1.5.1.1. Sistemas LPV afines

Esta representación es la más utilizada para sistemas con parámetros polinómicos. En los sistemas LPV, el término polinomial refiere a que él o los parámetros variables se involucran en el sistema en un polinomio de grado mayor a uno.

Este tipo de sistema LPV con parámetro variable ρ se define como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\rho(t))x + B(\rho(t))u \\ y &= C(\rho(t))x \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde tanto $A(\rho(t))$, $B(\rho(t))$ y/o $C(\rho(t))$ pueden descomponerse como:

$$\eta(\rho) = \eta_0 + \sum_{i=1}^{\beta} (\eta_i \rho_i) \tag{1.4}$$

dando lugar a un sistema LPV con representación afín. Un sistema LPV afín con dependencia polinomial corresponderá a aquel definido por matrices $A(\rho(t))$, $B(\rho(t))$ o $C(\rho(t))$ con forma general:

$$\eta(\rho) = \eta_0 + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^m \eta_{\{(i-1)m+l\}} \rho(t)_l^i \tag{1.5}$$

para algunos $k \geq 1$, donde η_l , $l = 0, \dots, km$ son matrices de dimensiones compatibles, entonces el modelo se considera un sistema LPV polinomial.

Por ejemplo, considere a $\rho \in \mathbb{R}^2$ (dos parámetros variables ρ_1 y ρ_2), entonces $m = 2$. Si $k = 2$, la ecuación anterior se desarrolla de la siguiente manera:

$$\eta(\rho) = \eta_0 + \eta_1\rho_1 + \eta_2\rho_2 + \eta_3\rho_1^2 + \eta_4\rho_2^2 \quad (1.6)$$

1.6. Control por Ganancias Programadas

Por definición, todos los sistemas ingenieriles son considerados no lineales, cuyo comportamiento dinámico cambia junto con su región de funcionamiento. Una de las limitaciones principales del control por linealización de una planta no lineal es el hecho de contar con un único punto de operación (Rugh, 1990). El control por ganancias programadas es una técnica que permite extender el concepto de linealización en un punto de operación (considerando sistemas LTI) a un rango de puntos de operación (Guo et al., 2019).

1.6.1. Características del control por programación de ganancias

Los controladores diseñados con este tipo de metodología permiten trabajar un sistema con condiciones de funcionamiento cambiantes. Sin embargo, es importante que las variables de programación operen ante los cambios en la dinámica del sistema ocasionados por las condiciones de funcionamiento. Normalmente, la estabilidad de un sistema únicamente se garantiza localmente y considerando una variación “lenta”. Debido a esto, no suele haber garantía de un buen rendimiento y estabilidad ante cambios “rápidos” en la dinámica del sistema (Rugh, 1990).

1.6.2. Procedimiento

En términos generales, el diseño de un controlador por ganancias programadas considera cuatro pasos (Rugh and Shamma, 2000):

- Obtener el modelo lineal del sistema variable por uno o varios parámetros en torno a una familia de puntos de equilibrio.

- Por medio de metodologías de control lineal, diseñar una familia de controladores a partir del sistema linealizado dependiente del o los parámetros variables.
- Implementar la familia de controladores considerando interpolación lineal, teniendo en cuenta que los elementos o ganancias del controlador cambiarán de valor en función de las variables de programación.

1.7. Observadores

Comúnmente, el diseño de sistemas de control se ve limitado a causa de la falta de información de una planta, por lo que resulta necesario estimar aquellas variables de estado no disponibles. Un observador es un sistema dinámico encargado de generar el vector de estado $x(t)$ de un modelo matemático, basándose en las entradas y salidas disponibles del sistema.

Los observadores tienen la propiedad de lograr su objetivo de estimación aun con reducidas señales dinámicas que definan el comportamiento del sistema. Actualmente, se han utilizado observadores de estado bajo diferentes enfoques como la estimación, detección de fallas, diseño de controladores, etc.

1.7.1. Observador tipo Luenberger

Luenberger desarrolló una representación matemática cuya solución reconstruye el vector de estados con información de las entradas y salidas disponibles de un sistema. Esta representación toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{1.7}$$

donde $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ y $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ son el vector de estados estimados y las salidas estimadas, respectivamente. Así mismo, L corresponde al vector de ganancias de retroalimentación. Esto último hace referencia al error e entre las salidas del sistema real $y(t)$ y su representación matemática $\hat{y}(t)$ que, en conjunto con la ganancia L , se genera el vector de estados \hat{x} (Yuan et al., 2020).

1.8. Estado del Arte

1.8.1. Modelado de un vehículo de dos ruedas

Schwab and Meijaard (2013a) desarrolla los elementos fundamentales de la dinámica y control de las bicicletas de forma detallada basada en el análisis científico y técnicas avanzadas implementadas. Explica temas fundamentales respecto a los principios físico-matemático que rigen el movimiento de una bicicleta, los factores generales que ayudan a la estabilidad y maniobrabilidad, el desarrollo de técnicas y algoritmos de control que beneficien la estabilidad de una bicicleta con el respectivo modelado y simulación computacional para el análisis dinámico.

Jones (2006) aborda la dinámica general de una bicicleta referente a los principios físico-matemático que gobierna su movimiento. Desarrolla la cinemática y dinámica de los cuerpos rígidos aplicados en el diseño de una bicicleta, los aspectos mecánicos como la geometría de cuadro, fuerzas externas y distribución de pesos que influyen directamente en la estabilidad de la bicicleta. Basado en ese análisis se muestran los modelos matemáticos implementados para la simulación del comportamiento dinámico de una bicicleta.

En Schwab and Meijaard (2013b) se caracteriza por la fundamentación del punto de contacto de una bicicleta con el suelo, pues es un factor relevante en el comportamiento dinámico. En análisis acerca de la geometría de cuadro, la distribución de cargas y fuerzas externas son influyentes para la estabilidad de una bicicleta con diferentes maniobras de manejo y cambios de dirección. Se realiza una serie de técnicas de control para la optimización del rendimiento y seguridad de la bicicleta, implementando la mejora del control dinámico, sistemas de asistencia electrónica y algoritmos de control adaptativo.

Jones (1970) se centra en la mejora del diseño y rendimiento de una bicicleta tomando en cuenta los factores físicos y geométricos. La estabilidad de una bicicleta se ha desarrollado en base a teorías de estabilidad y conceptos integrados en los modelos matemáticos, así como los cambios en las diferentes configuraciones que se han realizado para lograr una estabilidad dinámica exitosa durante curvaturas y cambios de dirección.

Moore et al. (2016) se enfoca en el análisis de los factores físico-matemático que gobierna el movimiento y la estabilidad de bicicletas y motocicletas por medio de un estudio computacional. Los métodos de simulación empleados comprenden todos los aspectos influenciales para una estabilidad, maniobrabilidad y rendimiento dinámico exitoso. La diferencia entre bicicletas y motocicletas ayuda a encontrar características mecánicas, físicas y aerodinámicas para una mejora en el diseño e investigaciones futuras. Asimismo, la integración de nuevas tecnologías se basan en las validaciones de modelos y las simulaciones computacionales realizadas.

1.8.2. Control de un vehículo de dos ruedas

La estructura de la bicicleta es representada por un marco general que considera un cuerpo rígido, un marco frontal (manubrio y rueda delantera) y las ruedas, cuyo comportamiento dinámico involucra la velocidad traslacional del vehículo.

La bicicleta instrumentada por Brizuela et al. (2016) tuvo como objetivo ejecutar algoritmos de control diseñados para analizar, observar y validar el comportamiento de manera física. Dicho prototipo está basado en un modelo matemático presentado en Cerone et al. (2010) que considera a la velocidad traslacional, la posición angular del manubrio y la velocidad del ángulo de balanceo como variables dinámicas.

Dado lo anterior, el modelo corresponde a uno lineal de parámetros variables en el tiempo (LPV) tomando a la velocidad traslacional como el parámetro variable.

Brizuela Mendoza et al. (2016) desarrolló un controlador para estabilizar la postura vertical de un vehículo de dos ruedas cuando este está en movimiento. Dicho diseño se basa en un control tolerante a fallas (CTF), este tipo de control mantiene la planta en su función correspondiente aún en presencia de fallas. Además, se incorporó un observador de fallas debido a que los sensores implementados emiten fallas en la medición, el observador tiene como objetivo diagnosticar las fallas y generar su aislamiento.

El trabajo de Ríos Ruiz (2016) tiene como objetivo estabilizar una bicicleta no tripulada implementando esquemas de control basados en modelos Quasi-LPV. Dichos esquemas controlan la velocidad y la estabilización de la bicicleta por medio de un modelo LPV. Todos los esquemas

de control, observadores y controladores diseñados en este trabajo fueron basados en modelos en forma Takagi-Sugeno y validados por medio de simulaciones.

En Brizuela-Mendoza et al. (2017) propone estabilizar una bicicleta sin conductor a partir de la programación de ganancia de un regulador cuadrático lineal y aplicando un par al manubrio. Este sistema de control fue diseñado por acciones integrales apoyadas de un observador, donde los resultados fueron validados experimentalmente en un prototipo instrumentado. El método de programación de ganancia se desarrolló alrededor del punto de operación del sistema definido como la posición perpendicular del vehículo con respecto a la horizontal. El parámetro de programación cambia su valor a través del tiempo y, por consiguiente, también el punto de operación del sistema.

El trabajo de González et al. (2016) presenta el diseño de un controlador por retroalimentación de estados basado en un observador de orden completo LPV para estabilizar una bicicleta. Los resultados de este trabajo fueron validados por medio de simulaciones enfocadas a una velocidad decreciente, analizando los valores propios, estados reales, error de estimación del observador, etc. Una vez que la bicicleta se estabiliza en su posición vertical, esta sigue en línea recta hasta que su velocidad de traslación $v(t)$ llega a 0.

Bravo and Rengifo (2020) presenta el modelo cinemático y dinámico de una bicicleta robótica cuyo objetivo es estabilizarla en posición vertical automáticamente implementando dos estrategias de control: un controlador PID y un controlador no lineal (control por par calculado).

El algoritmo (controlador PID en forma de velocidad) tiene como objetivo suavizar los valores de la salida ante cambios significativos en la entrada. Según el análisis realizado, la ley de control diseñada indica que la aceleración angular del manubrio se debe mover en dirección opuesta al ángulo de inclinación de la bicicleta.

El controlador no lineal contempla al modelo no-lineal de la bicicleta. El método consiste en linealizar el modelo y diseñar un modelo estimado y una ley de control para la bicicleta que le permita mantener su posición vertical.

Los sistemas lineales de parámetros variables (LPV) permiten analizar y manipular las no linealidades de un sistema en torno a diferentes puntos de operación, creando así un control variante en

el tiempo. Esta metodología garantiza la estabilidad y el rendimiento de sistemas no lineales.

Sename (2021) presenta un estudio de los sistemas LPV enfocado a la suspensión de vehículos. Dado que el sistema de suspensión de un vehículo es clasificado como no lineal (por los amortiguadores), el estudio muestra los diferentes desarrollos y aplicaciones de los sistemas LPV con el fin de cumplir diferentes objetivos como por ejemplo productividad de la suspensión ante la carga al vehículo o a las condiciones del camino, colaboración del sistema de suspensión con otros subsistemas del vehículo y/o control tolerante a fallas particularmente en la calidad de los amortiguadores.

Begines Gavira (2022) propone estabilizar una bicicleta por medio de un controlador PID. Se plantea que solo para algunas velocidades el sistema se considera estable, por esta razón se realizó un análisis de estabilidad para determinar en que valores de velocidad la bicicleta no es estable. MATLAB fue el software utilizado para observar el comportamiento del controlador bajo diferentes casos, tal como una determinada velocidad inicial y otros donde la velocidad era constante a causa de un pedaleo.

1.8.3. Implementación de hardware en el lazo

El término Hardware en el lazo se refiere a la combinación entre componentes físicos de un sistema y su interacción con un software en tiempo real, creando así un entorno de pruebas seguro ante cambios en las condiciones de prueba.

Yang et al. (2020) desarrolló un banco de pruebas para la investigación de los vehículos eléctricos ante posibles ataques de ciberseguridad (robo de información confidencial, control de las funciones como aire acondicionado, música, ruta o dispositivos que se encuentren conectados a la misma red, etc.). Este banco de pruebas con hardware en el lazo (HIL) permite observar y validar el comportamiento de diferentes vehículos eléctricos ante problemas de seguridad y diseño. Se menciona el desarrollo de simulaciones con hardware en el lazo brinda la oportunidad de recabar información para corregir y/o mejorar el rendimiento del vehículo eléctrico simulado sin la necesidad de poner en riesgo de avería al vehículo físico.

Manson et al. (2021) describe que una de las primeras aplicaciones de Hardware in the Loop fue en la industria aeroespacial, donde se desarrollaron simuladores de vuelo para capacitar a los pilotos. En la industria automotriz, la implementación de Hardware in the Loop ha sido de gran utilidad para el diseño de sistemas de frenos antibloqueo, control de tracción, etc.

El desarrollo de Hardware in the Loop también ha tenido relación en el área de energías renovables, como la aplicación de inversores y electrodomésticos inteligentes. Un modelo de Hardware in the Loop aplicado en este ámbito es de gran utilidad porque estos dispositivos inteligentes requieren experimentar primeramente su comportamiento bajo diferentes escenarios y condiciones reales, pero dentro de un entorno controlado.

La agricultura optó por implementar robots para diversas tareas como aplicación de fungicidas, remoción de maleza, plantación, fertilización, etc., y con ello aumentar la productividad y calidad de sus productos, y al mismo tiempo salvaguardar la salud de los agricultores.

Herrera et al. (2021) desarrolló un controlador para dar seguimiento a las velocidades de un robot agrícola implementando hardware en el lazo (HIL). El robot está diseñado para trasladarse sobre cultivos principalmente de hortalizas. Este trabajo presenta un nuevo sistema de control de un robot denominado Ceres que cumpla con las tareas de remoción de maleza, fertilización, y fumigación soportando una carga de 150 kg. Dados estos cambios se desarrolla un nuevo modelado y ajuste de parámetros. La simulación con hardware en el lazo otorga flexibilidad y seguridad durante el desarrollo de pruebas, ya que evitar provocar averías o pérdidas ante la presencia de errores y con ello proteger sistemas de alto costo como el robot Ceres.

El trabajo realizado por Mihalič et al. (2022) presenta una descripción de las diferentes aplicaciones de la simulación Hardware in the Loop. Dicha aplicación es una configuración que simula un sistema en condiciones físicas reales en algunos de sus subsistemas dentro de una simulación virtual en circuito cerrado de los subsistemas restantes.

Aplicar un modelo de Hardware in the Loop a un sistema resulta de gran utilidad para evitar daños significativos al sistema real, reducir costos de depuración o mantenimiento y/o reducir el esfuerzo integral durante la prueba. Así mismo, el artículo presenta distintas aplicaciones utilizando

varias plataformas como National Instruments, dSPACE, Typhoon HIL o MATLAB Simulink Real-Time toolboxes y sistemas de hardware Speedgoat, las cuales funcionan como herramienta para el desarrollo de investigaciones en diferentes campos.

1.9. Alcances

En este trabajo se proponen los siguientes alcances:

- Aproximar el modelo matemático de una bicicleta a menor escala, considerada para instrumentación.
- Instrumentación de la bicicleta para validar algoritmos de control.
- Diseño de un observador que estime los estados no medibles en el vehículo instrumentado.
- Solución de la ecuación diferencial que describe la dinámica del balanceo, con información proveniente del hardware.
- Diseño de un sistema de control que permita estabilizar en posición vertical al vehículo de ruedas.

1.10. Aportación

De acuerdo a lo analizado en el estado del arte, este trabajo aborda una nueva alternativa en el diseño de sistemas de control y su metodología de validación, que considera la implementación de hardware en el lazo.

Cada sistema de control diseñado para estabilizar en posición vertical al vehículo de dos ruedas, considera un observador cuyo propósito es estimar los estados no medibles (o no instrumentados) del vehículo. Posteriormente, la solución de la ecuación diferencial del balanceo brindará información de su comportamiento frente a los sistemas de control aplicados a la bicicleta instrumentada.

1.11. Originalidad

En este trabajo de tesis se aborda el desarrollo de la aproximación del modelo matemático particular de una bicicleta instrumentada.

La instrumentación, o implementación de hardware en el lazo, representa una nueva forma de validar algoritmos de control diseñados en torno al vehículo de dos ruedas, ya que permite considerar diferentes escenarios y posibilidades, y trabajar sobre las dificultades que afecten los resultados finales.

En este trabajo se propone el diseño de un sistema de control basado en observador que establezca en posición vertical a un vehículo de dos ruedas, considerando hardware en el lazo.

1.12. Organización del documento

El contenido de este documento se encuentra dividido de la siguiente manera:

- **Capítulo 1:** Se presentan las generalidades del trabajo de investigación. También, se presentan los conceptos básicos asociados al estudio del vehículo de dos ruedas. Finalmente, se presenta una revisión del estado del arte en torno al vehículo de dos ruedas y las consideraciones importante asociadas el tema de tesis.
- **Capítulo 2:** Se presentan las características importantes y el desarrollo del modelo matemático enfocado al caso de estudio considerado en diseño de un modelo CAD dimensionado y parametrizado de acuerdo a la bicicleta real instrumentada. También se muestra la validación del modelo por medio de simulaciones aplicadas al modelo CAD importado a MATLAB - SIMULINK.
- **Capítulo 3:** Se enfoca en las características y descripción del diseño de los sistemas de control considerados para implementación. En él, se reportan las condiciones del vehículo instrumentado y las características asociadas al diseño del observador y la solución de la ecuación diferencial de ϕ .
- **Capítulo 4:** Se presentan los resultados experimentales implementados en el vehículo de dos ruedas, considerando lo descrito en capítulo anterior.
- **Capítulo 5:** Se presentan las conclusiones, aportaciones y actividades adicionales.

CAPÍTULO 2

MODELADO Y SIMULACIÓN DE UN VEHÍCULO DE DOS RUEDAS

El propósito de este capítulo es presentar el modelo matemático de un vehículo de dos ruedas. Al mismo tiempo, se muestra la teoría de sistemas LTI y LPV como bases fundamentales para el desarrollo de los sistemas de control abordados posteriormente. También, se describen las características y configuraciones programadas al modelo CAD por medio de *Simscape Multibody*, herramienta utilizada para validar el modelo matemático particular del vehículo seleccionado.

Este capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera:

En la sección 2.2 se presenta el caso de estudio del tema de investigación: se abordan las generalidades del modelo matemático del vehículo de dos ruedas presentado el modelo CAD diseñado en *SolidWorks*, herramienta utilizada para obtener los parámetros necesarios para el desarrollo de la aproximación del modelo matemático, posteriormente su representación en espacio de estados.

En la sección 2.3 se presenta la validación del modelo matemático por medio de un análisis frente a diferentes valores de velocidad traslacional.

En la Sección 2.4 se describen las configuraciones consideradas en el modelo CAD importado a *Simscape*, buscando que su comportamiento fuera similar al de una bicicleta real.

En la sección 2.5 y 2.6 se presentan las simulaciones y resultados de los sistemas de control diseñados considerando al Sistema LTI y LPV.

2.1. Modelo matemático de un vehículo de dos ruedas

Los modelos matemáticos representan una forma de entender como funcionan los procesos o sistemas complejos, creando una representación de su comportamiento dinámico basado en teorías matemáticas. Su desarrollo considera diversos factores (algunos de estos desconocidos), por lo que resulta necesario delimitar el análisis a ciertas condiciones para linealizar al sistema y resolverlo por algún método de solución.

2.2. Caso de estudio: Aproximación y validación del modelo matemático con representación polinomial (LPV) del vehículo de dos ruedas

Una vez estudiada la teoría considerada en este caso de estudio y las generalidades del modelo matemático del vehículo de dos ruedas, se procede a obtener la información necesaria para la aproximación del modelo matemático particular del vehículo de dos ruedas y su validación por medio de simulaciones realizadas en *MATLAB-Simulink-Simscape Multibody* aplicando técnicas de control.

Investigaciones anteriores han considerado el modelo matemático del vehículo de dos ruedas desarrollado en Meijaard et al. (2007) contemplando la teoría y análisis de su comportamiento dinámico y estabilidad estudiado en Schwab et al. (2005).

2.2.1. Modelo CAD del vehículo de dos ruedas

Previa definición del modelo matemático (LPV) del vehículo de dos ruedas, resulta necesaria la construcción del sistema en CAD, con el objetivo de obtener los parámetros dependientes de la geometría física del prototipo que definen la dinámica del sistema. De acuerdo con Schwab et al. (2005), la estructura de un vehículo de dos ruedas contempla un marco general, un marco frontal, la rueda delantera y la rueda trasera, véase en la Fig. 2.1.

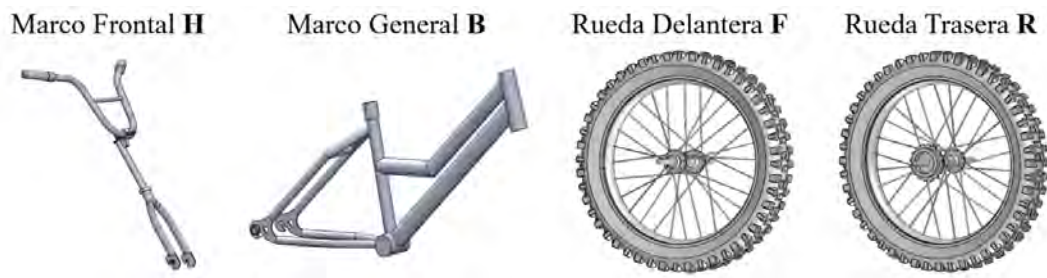


Fig. 2.1. Subsistemas del vehículo de dos ruedas.

Una de las principales aportaciones del presente trabajo refiere el considerar un vehículo de dos ruedas real para el desarrollo de sistemas de control, y la construcción de los mecanismos que operarán como hardware en el lazo. Por esta razón, se realizó el modelo CAD del vehículo real considerado en el software de *SolidWorks*, véase en la Fig. 2.2.



Fig. 2.2. Modelo CAD del vehículo de dos ruedas en SolidWorks.

Con el objetivo de que el modelo CAD fuera diseñado con las medidas reales (o aproximadas), el vehículo real fue desarmado a fin de separar los cuatro subsistemas que considera el modelo matemático (marco general, marco frontal, rueda delantera y rueda trasera). Cada uno de ellos fue pesado y parametrizado en *SolidWorks* con el objetivo de, mediante el software, conocer la información de las masas y las posiciones de los centros de masa de cada subsistema. Esta consideración permitió, de igual forma, obtener los momentos de inercia según los movimientos de un vehículo real (también considerados en el modelo CAD). Dicha información se utilizó para cons-

truir el modelo matemático del sistema, presentada posteriormente.

En la siguiente tabla se presentan los parámetros resultantes del modelo CAD considerados para el desarrollo del modelo matemático.

Tabla 2.1. Parámetros del vehículo de dos ruedas.

Parámetro	Símbolo	Valor
Distancia entre ejes	w	0.706 m
Punto de contacto del suelo y la rueda delantera	c	0.025 m
Ángulo del marco frontal	α	70°
Inclinación del eje de dirección	λ	$\pi/2 - \alpha$
Gravedad	g	9.81 m/s^2
Rueda Trasera R		
Radio	r_R	0.16 m
Masa	m_R	2.32 Kg
Momentos de inercia	(I_{Rxx}, I_{Ryy})	$(0.03, 0.07) \text{ Kg m}^2$
Cuerpo trasero y conjunto marco B		
Posición centro de masa	(x_B, z_B)	$(0.06, 0.07) \text{ m}$
Masa	m_B	35 Kg
Momentos de inercia	$\begin{bmatrix} I_{Bxx} & 0 & I_{Bxz} \\ 0 & I_{Byy} & 0 \\ I_{Bxz} & 0 & I_{Bzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.41 & 0 & 0.45 \\ 0 & 1.35 & 0 \\ 0.45 & 0 & 0.98 \end{bmatrix} \text{ Kg m}^2$
Cuerpo delantero y Conjunto del marco frontal H		
Posición centro de masa	(x_H, z_H)	$(0.15, -0.27) \text{ m}$
Masa	m_H	2.0001 Kg
Momentos de inercia	$\begin{bmatrix} I_{Hxx} & 0 & I_{Hxz} \\ 0 & I_{Hyy} & 0 \\ I_{Hxz} & 0 & I_{Hzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.13 & 0 & 0.03 \\ 0 & 0.10 & 0 \\ 0.03 & 0 & 0.04 \end{bmatrix} \text{ Kg m}^2$
Rueda Delantera R		
Radio	r_F	0.16 m
Masa	m_F	1.87 Kg
Momentos de inercia	(I_{Fxx}, I_{Fyy})	$(0.03, 0.05) \text{ Kg m}^2$

2.2.2. Parámetros para el modelo matemático

En la Fig. 2.3, se muestra un esquema del vehículo de dos ruedas considerando los cuatro subsistemas (véase en la Fig. 2.1), la posición y dirección del sistema de coordenadas que requiere el modelo y los tres grados de libertad considerados: el ángulo de balanceo ϕ , el ángulo del manubrio δ y la velocidad traslacional v .

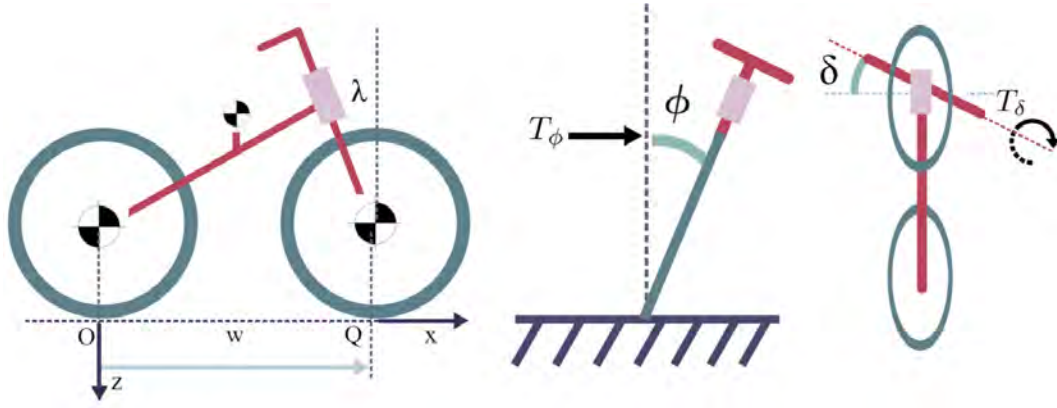


Fig. 2.3. Diagrama para el modelo del vehículo de dos ruedas.

Dimensionar y parametrizar el modelo CAD del vehículo resultó de suma importancia debido a que es necesario obtener el modelo matemático del vehículo real que será utilizado. Por consiguiente, los parámetros que se muestran en la Tabla 2.1 fueron los que se consideraron para el desarrollo del modelo CAD del vehículo en *SolidWorks* (por ejemplo dimensiones de las llantas, dimensión de la estructura de cada subsistema, etc.) y los que resultaron a partir del modelo ya parametrizado. Así, se obtuvieron datos relacionados con los momentos de inercia y posición de los centros de masa, entre otros.

2.2.3. Desarrollo del modelo matemático

El procedimiento para obtener el modelo matemático particular del vehículo de dos ruedas real se basa en Meijaard et al. (2007). En primer lugar, se considera la masa total m_T y las posiciones de los centros de masa de cada subsistema con respecto al punto O (punto de contacto ubicado en la rueda trasera) el cual es considerado el origen del sistema de coordenadas (véase en la Fig. 2.3).

$$m_T = m_R + m_B + m_H + m_F \quad (2.1)$$

$$x_T = \frac{x_B m_B + x_H m_H + w m_F}{m_T} \quad (2.2)$$

$$z_T = \frac{-r_R m_R + z_B m_B + z_H m_H - r_F m_F}{m_T} \quad (2.3)$$

Las Ecs. (2.2) y (2.3) corresponden a la ubicación de los centros de masa totales de acuerdo al eje correspondiente. Los momentos de masa y productos de inercia respecto al punto de contacto O y

considerando los ejes globales.

Nota: En las ecuaciones siguientes, los subíndices se definen de acuerdo a los ejes globales definidos en la Fig. 2.3.

$$I_{Txx} = I_{Rxx} + I_{Bxx} + I_{Hxx} + I_{Fxx} + m_R r_R^2 + m_B z_B^2 + m_H z_H^2 + m_F r_F^2 \quad (2.4)$$

$$I_{Tzx} = I_{Bzx} + I_{Hxz} - m_B x_B z_B - m_H x_H z_H + m_F w r_F \quad (2.5)$$

Los momentos de inercia dependientes para la rueda trasera y la rueda delantera se definen como:

$$I_{Rzz} = I_{Rxx}, \quad I_{Fzz} = I_{Fxx} \quad (2.6)$$

Los momentos de inercia del vehículo de dos ruedas a lo largo del eje z son:

$$I_{Tzz} = I_{Rzz} + I_{Bzz} + I_{Hzz} + I_{Fzz} + m_B x_B^2 + m_H z_H^2 + m_F w^2 \quad (2.7)$$

Ahora, hablando particularmente del conjunto delantero (marco frontal y rueda delantera). La masa total del conjunto delantero m_A y las posiciones de los centros de masa considerados de cada subsistema son:

$$m_A = m_H + m_F \quad (2.8)$$

$$x_A = \frac{x_H m_H + w m_F}{m_A} \quad (2.9)$$

$$z_A = \frac{z_H m_H - r_F m_F}{m_A} \quad (2.10)$$

Los momentos de masa y productos de inercia respecto a la posición del centro de masa del conjunto delantero se definen como:

$$I_{Axx} = I_{Hxx} + I_{Fxx} + I_{Hxx} + m_H (z_H - z_A)^2 + m_F (r_F + z_A)^2 \quad (2.11)$$

$$I_{Axz} = I_{Hxz} - m_H (x_H - x_A)(z_H - z_A) + m_F (w - x_A)(r_F + z_A) \quad (2.12)$$

$$I_{Azz} = I_{Hzz} + I_{Fzz} + m_H (x_H - x_A)^2 + m_F (w - x_A)^2 \quad (2.13)$$

Ahora bien, λ es el ángulo en el plano xz entre el eje de dirección y el eje $+z$, y U_A es el centro de masa del conjunto delantero, el cual se localiza frente al eje de dirección a una distancia perpendicular. Este valor fue tomado directamente del vehículo de dos ruedas.

$$U_A = 15 \text{ cm} \quad (2.14)$$

Para el conjunto delantero se consideran tres magnitudes de inercia: los momentos de inercia en torno al eje de dirección, los momentos de inercia en relación con los ejes cruzados (tomados desde el punto de intersección) y los pares generados por los antes mencionados sobre el eje de dirección debido a la aceleración angular alrededor del otro.

A modo de ejemplo, el elemento λx se ubica en torno al eje de dirección y la intersección con el plano de tierra. Esto incluye el elemento I_A (momentos de inercia del conjunto delantero) que opera sobre vectores unitarios $\lambda = [\sin \lambda \ 0 \ \cos \lambda]^T$ a lo largo del eje de dirección y a lo largo de x , y también un elemento del eje paralelo basado en la distancia de m_A a cada uno de los ejes.

$$I_{A\lambda\lambda} = m_A u_A^2 + I_{Axx} \sin^2 \lambda + 2I_{Axx} \sin \lambda \cos \lambda + I_{Azz} \cos^2 \lambda \quad (2.15)$$

$$I_{A\lambda x} = -m_A u_A z_A + I_{Axx} \sin \lambda + I_{Axx} \cos \lambda \quad (2.16)$$

$$I_{A\lambda z} = m_A u_A x_A + I_{Axx} \sin \lambda + I_{Axx} \cos \lambda \quad (2.17)$$

La distancia perpendicular entre el punto de contacto de la rueda delantera detrás del eje de dirección y la distancia entre ejes es:

$$\mu = \frac{c}{w} \cos \lambda \quad (2.18)$$

Los momentos angulares de ambas ruedas a lo largo del eje y , divididos por la velocidad de avance (o traslacional) y la suma de ambos, forman coeficientes girostáticos:

$$S_R = \frac{I_{Ryy}}{r_R}, \quad S_F = \frac{I_{Fyy}}{r_F}, \quad S_T = S_R + S_F \quad (2.19)$$

También, se define un elemento estático como:

$$S_A = m_A u_A + \mu m_T x_T \quad (2.20)$$

Ahora bien, los coeficientes de las ecuaciones linealizadas de movimiento. En este caso, los momentos de inercia de las masas son:

$$M_{\phi\phi} = I_{Txx} \quad M_{\phi\delta} = I_{A\lambda x} + \mu I_{Txx} \quad (2.21)$$

$$M_{\delta\phi} = M_{\phi\delta} \quad M_{\delta\delta} = I_{A\lambda\lambda} + 2\mu I_{A\lambda z} + \mu^2 I_{Tzz} \quad (2.22)$$

Dichos elementos forman la matriz M correspondiente a las masas:

$$M = \begin{bmatrix} M_{\phi\phi} & M_{\phi\delta} \\ M_{\delta\phi} & M_{\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Los elementos de rigidez dependientes de la gravedad son:

$$K_{0\phi\phi} = m_T z_T, \quad K_{0\phi\delta} = -S_A \quad (2.24)$$

$$K_{0\delta\phi} = K_{0\phi\delta}, \quad K_{0\delta\delta} = -S_A \sin \lambda \quad (2.25)$$

los cuales forman la matriz K_0 correspondiente a la matriz de rigidez:

$$K_0 = \begin{bmatrix} K_{0\phi\phi} & K_{0\phi\delta} \\ K_{0\delta\phi} & K_{0\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Los elementos de rigidez dependientes de la velocidad son:

$$K_{2\phi\phi} = 0, \quad K_{2\phi\delta} = \frac{S_T - m_T z_T}{w} \cos \lambda \quad (2.27)$$

$$K_{2\delta\phi} = 0, \quad K_{2\delta\delta} = \frac{S_A + S_F \sin \lambda}{w} \cos \lambda \quad (2.28)$$

los cuales forman la matriz K_2 correspondiente a la matriz de rigidez:

$$K_2 = \begin{bmatrix} K_{2\phi\phi} & K_{2\phi\delta} \\ K_{2\delta\phi} & K_{2\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Considerando que K_0 se multiplica por la gravedad g y K_2 por la velocidad al cuadrado v^2 , resulta que:

$$K = [gK_0 + v^2 K_2] \quad (2.30)$$

Por último, los elementos de amortiguamiento son:

$$C_{1\phi\phi} = 0, \quad C_{1\phi\delta} = \mu S_T + S_F \cos \lambda + \frac{I_{Tzz}}{w} \cos \lambda - \mu m_T z_T \quad (2.31)$$

$$C_{1\delta\phi} = -(\mu S_T + S_F \cos \lambda), \quad C_{1\delta\delta} = \frac{I_{A\lambda z}}{w} \cos \lambda + \mu(S_A + \frac{I_{Tzz}}{w} \cos \lambda) \quad (2.32)$$

los cuales forman la matriz C_1 :

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{1\phi\phi} & C_{1\phi\delta} \\ C_{1\delta\phi} & C_{1\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Considerando a C como:

$$C = v C_1 \quad (2.34)$$

2.2.4. Representación en espacio de estados

El modelo matemático del vehículo de dos ruedas surge a partir de ecuaciones diferenciales relacionadas directamente con las leyes físicas de movimiento, dando como resultado dos ecuaciones diferenciales: la primera se refiere a la inclinación del vehículo y la segunda a la dirección, combinadas dinámicamente de la forma:

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + \bar{K}q(t) = f(t) \quad (2.35)$$

Sustituyendo las ecuaciones equivalentes a C y \bar{K} (Eq. (2.34) y (2.30), respectivamente) tomando en cuenta la gravedad (g) y la velocidad traslacional ($v(t)$) se obtiene:

$$M\ddot{q}(t) + v(t)C_1\dot{q}(t) + [gK_0 + v^2K_2]q(t) = f(t) \quad (2.36)$$

donde $q(t) = [\phi(t) \ \delta(t)]^\top$ corresponde al vector de posiciones angulares del vehículo siendo $\phi(t)$ el ángulo de balanceo (ángulo entre el marco general y la vertical) y $\delta(t)$ el ángulo del manubrio (ángulo entre el manubrio y la perpendicular), con $f(t) = [T_\phi(t) \ T_\delta(t)]^\top$ representando el vector de fuerzas de entradas generalizadas.

En $f(t)$, $T_\phi(t)$ y $T_\delta(t)$ representan pares mecánicos aplicados al marco general y marco frontal, respectivamente. Los coeficientes matriciales de M , C_1 , K_0 y K_2 se obtienen a partir del desarrollo matemático descrito previamente, y a los parámetros y dimensiones considerados en el diseño del modelo CAD. De este modo, sustituyendo los valores presentados en la Tabla 2.1, M , C_1 , K_0 y K_2 se definen como sigue.

$$M = \begin{bmatrix} 1.0239 & 0.1602 \\ 0.1602 & 0.4594 \end{bmatrix} \quad K_0 = \begin{bmatrix} -3.6400 & -0.7059 \\ -0.7059 & -0.2414 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5.9226 \\ 0 & 1.1096 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5302 \\ -0.3796 & 0.8999 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Con el objetivo de representar el modelo matemático descrito en la Ec. (2.36) en espacio de estados, se adopta a $\phi(t)$, $\delta(t)$ y sus derivadas (o bien, velocidades angulares) como variables de estado, donde $x(t) = [\phi(t) \ \delta(t) \ \dot{\phi}(t) \ \dot{\delta}(t)]^\top$. De lo anterior resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(v(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

con:

$$A(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.5058 & 0.6422 - 5.7184(v(t))^2 & -0.1368v(t) & -0.2235v(t) \\ 0.3138 & 0.3015 - 0.4209(v(t))^2 & 0.8739v(t) & -1.8809v(t) \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0330 & -0.3603 \\ -0.3603 & 2.3023 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Señalar la dependencia del sistema en la velocidad traslacional $v(t)$, resultando en un sistema LPV. Adicionalmente, mencionar que estudios anteriores han tomado como fuerza de entrada generalizada a $u(t) = T_\delta(t)$ como par de dirección para estabilizar al vehículo, sin considerar $T_\phi(t)$ como entrada de fuerza generalizada.

En el presente trabajo y a diferencia de investigaciones anteriores, se consideran ambos pares como fuerza de entrada al sistema, definiendo $u(t)$:

$$u(t) = [T_\phi(t) \quad T_\delta(t)]^\top \quad (2.40)$$

concluyendo con el modelo matemático del sistema.

Nota: Por simplicidad, el argumento (t) será omitido en el resto de la descripción.

2.3. Validación del modelo matemático

Con el objetivo de validar el comportamiento del modelo matemático respecto a los analizados en la literatura, se realizó un análisis de los valores propios del modelo a partir de valores diferentes de velocidad traslacional.

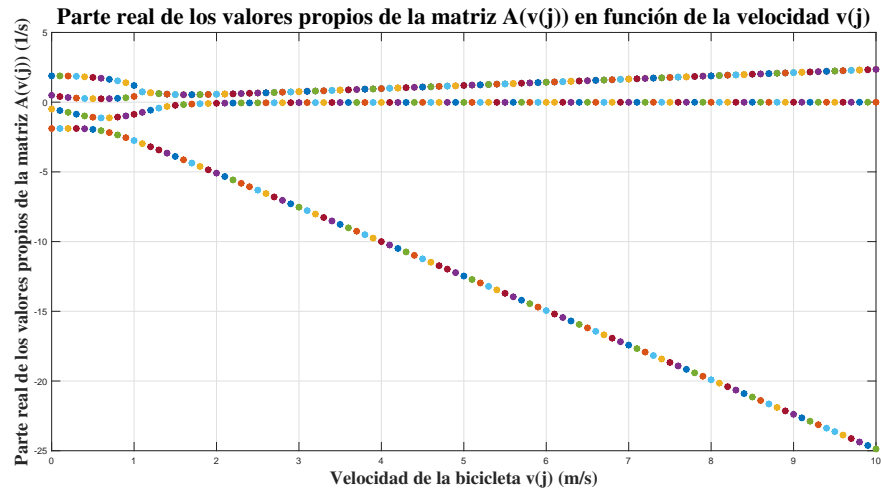


Fig. 2.4. Parte real de los valores propio de la matriz $A(v(j))$ del vehículo de dos ruedas.

Teniendo en cuenta que la velocidad traslacional es una característica importante que afecta directamente al vehículo de dos ruedas, la Fig. 2.4 presenta el comportamiento de la parte real de los valores propios de la matriz $A(v)$ a medida que la velocidad cambia de valor (considerando $v(j)$ con $v = x, y, z, \dots$). Nótese que el sistema es inestable para cada valor definido de velocidad traslacional, a partir de los valores positivos de los valores propios del sistema no forzado.

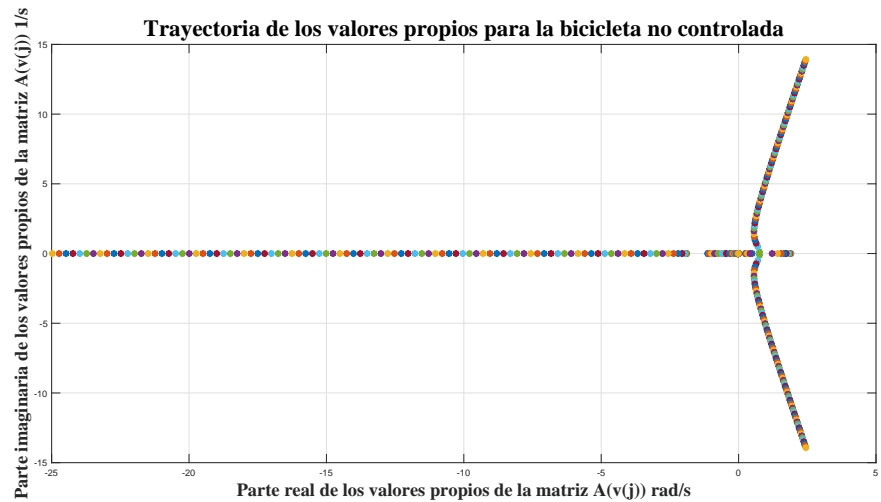


Fig. 2.5. Parte imaginaria de los valores propios de la matriz $A(v(j))$ del vehículo de dos ruedas.

Por otro lado, la Fig. 2.5 presenta la trayectoria de los valores propios respecto a los cambios de velocidad $v(j)$.

2.4. Modelo CAD en *MATLAB-Simulink-Simscape Multibody*

En la disciplina de control automático, *MATLAB-Simulink* es un software que se utiliza para el diseño de sistemas de control por medio de diagramas a bloque (Das, 2020). *Simscape* es una herramienta particular de *MATLAB-Simulink*, la cual permite crear modelos de sistemas físicos y desarrollar sistemas de control para analizar el comportamiento de dicho modelo en las primeras etapas de desarrollo de control, o incluso antes de implementar hardware (Pena et al., 2020).

El modelo CAD diseñado y parametrizado en *SolidWorks* fue importado a *MATLAB-Simulink* a través de la herramienta de *Simscape* con el objetivo de analizar el comportamiento del vehículo frente a los diferentes sistemas de control y condiciones que estos contemplan, todo esto por medio de simulaciones.

Para que el modelo CAD del vehículo de dos ruedas importado tuviera un comportamiento igual al de una bicicleta real (en otras palabras, inestable) resultó necesario configurar las articulaciones que permiten en movimiento entre los subsistemas que considera el vehículo.

En primer lugar, se consideró una articulación con el nombre de *Revolute* en cada una de las ruedas de vehículo (véase en la Fig. 2.6) con el objetivo de simular un movimiento de avance del vehículo. Para conseguir esto se configuró la articulación para recibir fuerza en forma de par y obtener, en consecuencia, el desplazamiento traslacional del vehículo.

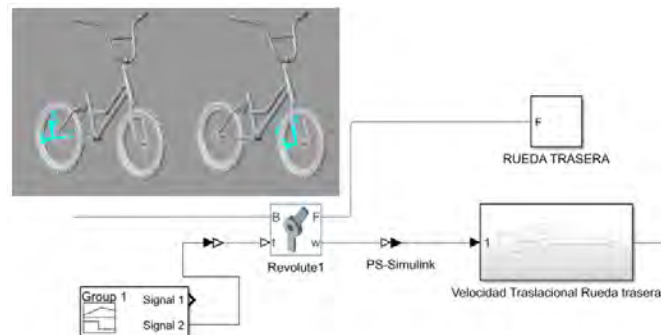


Fig. 2.6. Articulación de *Revolute* para la rueda delantera y trasera.

La articulación *Revolute* también ofrece una configuración de sensado, por lo que se seleccionó la opción de medir la velocidad de movimiento de ambas ruedas. Con esto se consigue la medición del parámetro variable considerado en el modelo matemático.

La segunda articulación es la que tiene efecto directo sobre el marco frontal (manubrio), la cual también se considera de tipo *Revolute* (véase en la Fig. 2.7). En este caso, y tomando en cuenta que una fuerza de entrada generalizada tiene efecto directo sobre la posición angular del manubrio, se configuró para recibir de igual forma un par mecánico.

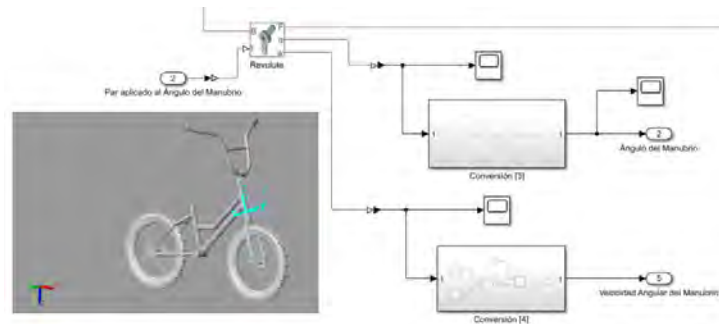


Fig. 2.7. Articulación de *Revolute* para el manubrio.

Las opciones de sensado consideradas para esta articulación fueron las de velocidad y posición, variables que se consideran en el modelo matemático del vehículo de dos ruedas.

La última articulación considerada en este caso es la que tiene efecto directo sobre el marco general (y hasta cierto punto sobre la estructura completa del vehículo), véase en la Fig. 2.8. Esta articulación tiene el nombre de *Gimbal*, el cual permite un movimiento completo sobre los ejes X , Y y Z . En este caso, se configuró para que solo tuviera un movimiento sobre el eje X (eje que permite cambios de posición angular sobre el eje vertical del vehículo).

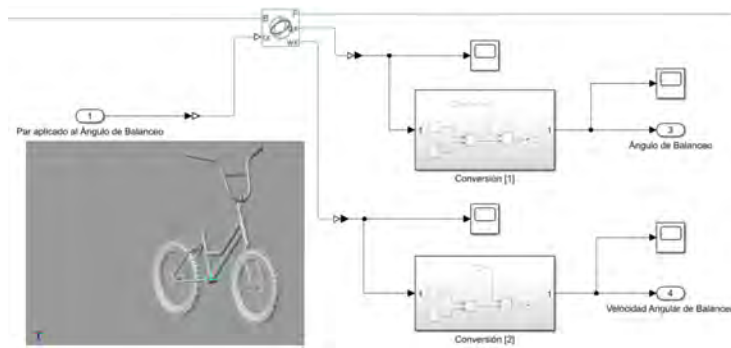


Fig. 2.8. Articulación de *Gimbal* aplicada al marco general.

La configuración de sensado, finalmente, consideró la velocidad y posición angular del marco general (o bien, la velocidad y posición angular de balanceo, que definen la dinámica del vehículo).

En la Fig. 2.9 se muestra el diagrama completo de las articulaciones consideradas para el modelo CAD del vehículo de dos ruedas simulado en *MATLAB-Simulink* a través del *Simscape*. La Fig. 2.10, por su parte, presenta la interfaz del *Simscape* en *MATLAB*, a partir de la cual es posible visualizar la dinámica del prototipo considerado.

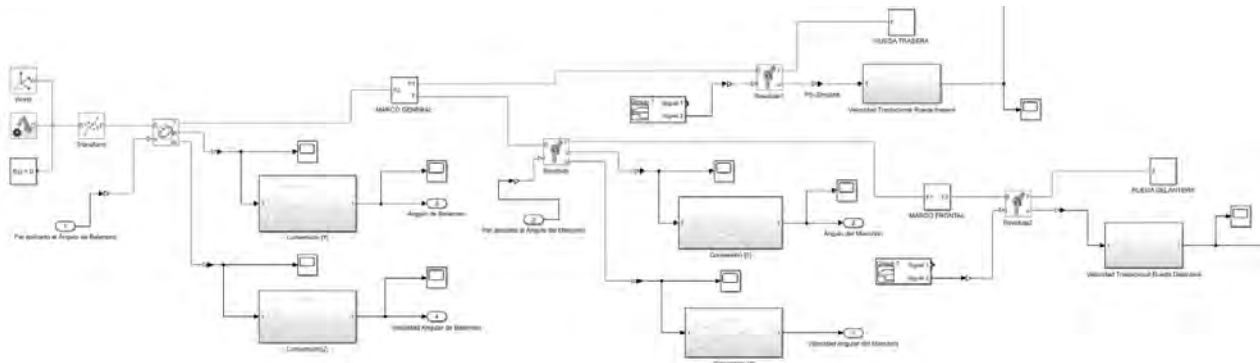


Fig. 2.9. Diagrama y configuración del vehículo importado a *MATLAB-Simulink*.

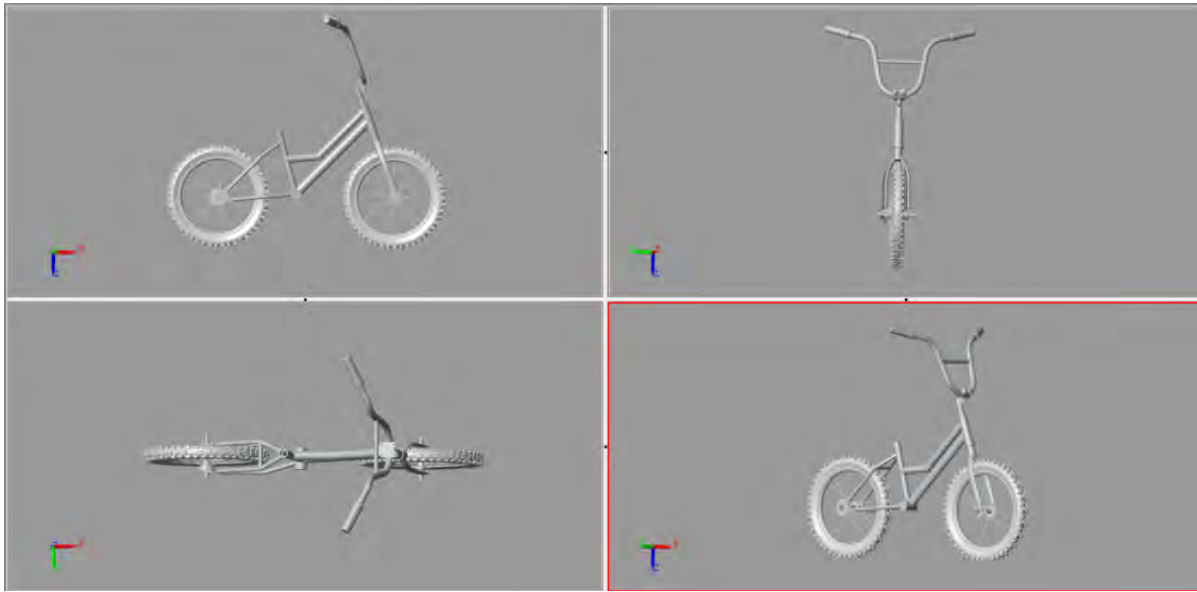


Fig. 2.10. Animación del modelo CAD del vehículo de dos ruedas en *MATLAB-Simulink*.

Para concluir, el modelo CAD importado a *MATLAB-Simulink* fue configurado a través de *Simscape Multibody* con el objetivo de desarrollar algoritmos de control que permitan analizar el comportamiento del vehículo y tener en cuenta las consideraciones generales para cada controlador. Las simulaciones realizadas se describen a continuación.

2.5. Simulaciones considerando al Sistema LTI

El diseño de los siguientes sistemas de control consideran una velocidad traslacional constante con un valor de $v = 1.271 \text{ m/s}$. Este valor de velocidad constante fue definido a partir de un análisis de comportamiento dinámico del vehículo frente a distintos valores, asegurando que el sistema sea inestable. Se menciona que cada sistema de control fue diseñado por el método de colocación de polos.

- **Método de colocación de polos**

Esta metodología determina el funcionamiento de un controlador por medio de la ubicación de polos en el plano complejo, mismos que son seleccionados de acuerdo a los criterios de estabilidad, frecuencia natural, amortiguamiento, etc., de un sistema (Briones Jorquera et al., 2020).

El entorno de *MATLAB* incluye un comando para diseñar controladores u observadores por medio de esta metodología: *place* es un comando que calcula las ganancias deseadas en función de los polos seleccionados por el usuario. En la siguiente ecuación se describe la sintaxis que considera dicho comando:

$$K = \text{place}(A, B, \text{poles})$$

donde A y B corresponden a la matriz de estados y entradas del sistema, respectivamente. Mientras que *poles* se define como el vector que contiene los polos definidos por el usuario de acuerdo al plano complejo.

A continuación, se enlistan las simulaciones realizadas orientadas a validar el modelo matemático descrito en este capítulo.

- **Simulación 1.** Vehículo de dos ruedas en lazo abierto.
- **Simulación 2.** Control por retroalimentación de estados aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas.
- **Simulación 3.** Control por retroalimentación de estados estimados aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas.
- **Simulación 4.** Control por retroalimentación de estados con acciones integrales aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas.
- **Simulación 5.** Control por retroalimentación de estados estimados con acciones integrales aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas.

2.5.1. Simulación 1. Vehículo de dos ruedas en lazo abierto

La presente prueba tiene como objetivo poner de manifiesto la inestabilidad del modelo CAD importado y simulado en *Simscape*. Como se mencionó anteriormente, la simulación de la bicicleta considera articulaciones y configuraciones que permiten un comportamiento semejante al de una bicicleta real.

Objetivo de la simulación: Analizar el comportamiento del sistema no forzado, es decir, considerando al vector de fuerzas de entrada $f(t) = 0$ en las articulaciones que afectan directamente

al ángulo de balanceo y al ángulo del manubrio.

Importante mencionar que para la simulación abordada las articulaciones fueron configuradas implementando límites de movimiento o pares, por ejemplo: límite con valor de 90° en el ángulo de balanceo (valor equivalente cuando el vehículo ya se encuentra caído o en el suelo), pares aplicados a cada rueda para simular movimiento equivalente a la velocidad traslacional, etc. Señalar finalmente que el movimiento del marco frontal, en este caso, no presenta límite en su movimiento.

Para el análisis de esta prueba se consideraron condiciones distintas de cero en cada posición angular, teniendo como hipótesis que, a consecuencia de estas y del movimiento o velocidad traslacional, el vehículo caerá después de cierto tiempo.

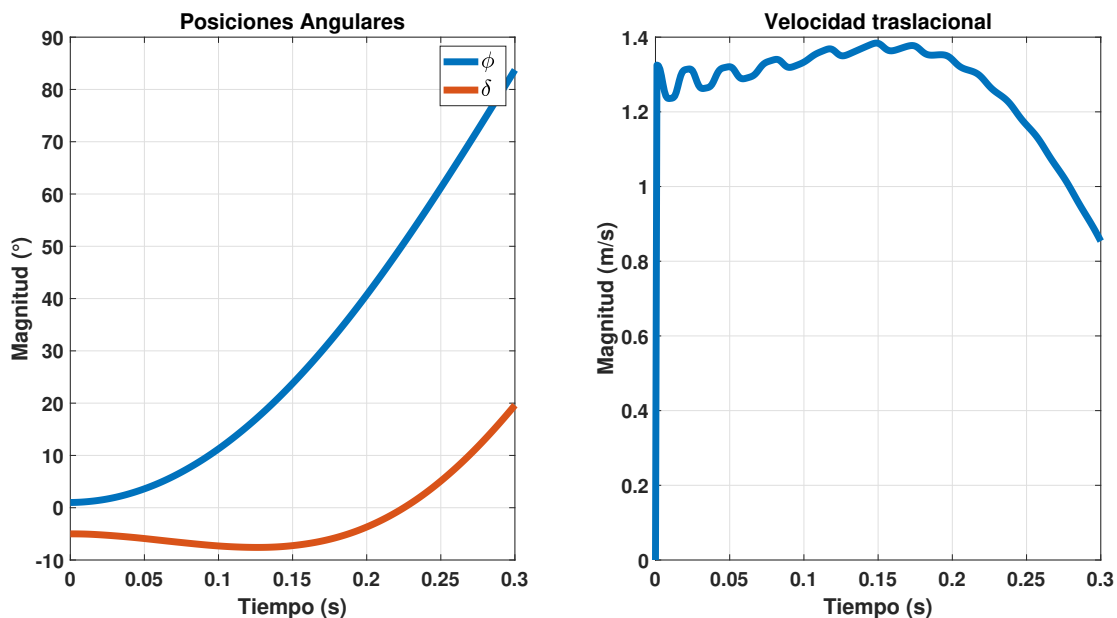


Fig. 2.11. Sistema en lazo abierto.

Como se observa en la Fig. 2.11, el tiempo en que el vehículo cayó fue de aproximadamente 0.3 segundos. El ángulo de balanceo se ve afectado por la velocidad y el cambio de posición del manubrio. A medida que el tiempo de simulación avanza, el vehículo comienza a caer tomando un valor de 85° aproximadamente en el ángulo de balanceo ϕ y 20° en el ángulo del manubrio δ .

Debido a los resultados, se concluye que el vehículo efectivamente tiene un movimiento similar al de uno real, en otras palabras, un comportamiento inestable.

2.5.2. Simulación 2. Control por retroalimentación de estados aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas

Objetivo de la simulación: Estabilizar al vehículo de dos ruedas en su posición vertical, considerando todos los estados del modelo matemático como medibles.

Para ello se considera una ley de control por retroalimentación de estados de la forma:

$$u(t) = -Kx(t) \tag{2.41}$$

donde K es el vector de ganancias calculado por medio del comando *place* de *MATLAB* y considerando los polos $P = [-2.5 \quad -2.6 \quad -2.4 \quad -2.3]$. Dado que la simulación del vehículo de dos ruedas a través del *Simscape* brinda todos los estados del sistema, la matriz C particularmente en este caso será considerada como una matriz identidad, dando lugar a $y(t) = x(t)$.

Con todo lo anterior, la dinámica en lazo cerrado del sistema se define como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= (A - BK)x(t) \end{aligned} \tag{2.42}$$

dando como resultado lo presentado en la Fig. 2.12. Señalar que el sistema de control considera una velocidad traslacional constante y, con el objetivo de ser congruentes con la teoría de los sistemas LTI (Sistema Lineal Invariante en el Tiempo), se consideró un interruptor en la simulación. Dicho interruptor aplica la ley de control 2.5 segundos después de iniciada la prueba, asegurando así la velocidad constante del vehículo.

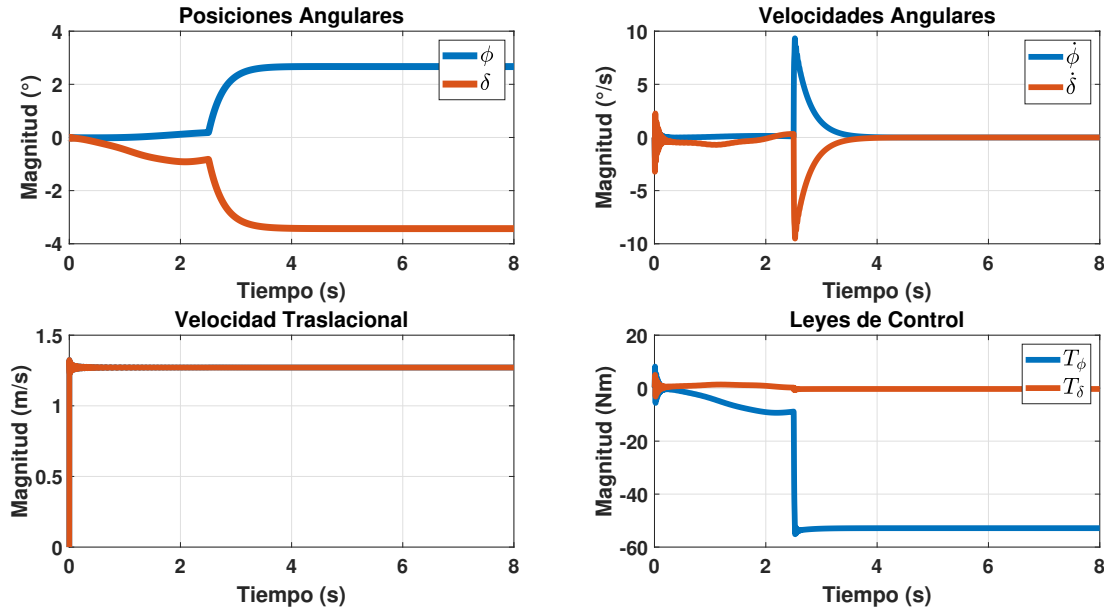


Fig. 2.12. Resultados de la *Simulación 2*.

Dados los resultados de la simulación, se valida que el vehículo de dos ruedas es estable si el sistema de control y el modelo matemático cuenta con todos los estados medidos.

2.5.3. Simulación 3. Control por retroalimentación de estados estimados aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas

Objetivo de la simulación: Estabilizar al vehículo de dos ruedas, generando una ley de control con el vector de estados estimados proveniente del observador, diseñado a partir del modelo matemático descrito anteriormente. El observador seleccionado es tipo Luenberger con la estructura:

$$\hat{\dot{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.43)$$

donde L es el vector de ganancias del observador calculadas a través de comando *place* de *MATLAB* contemplando los polos $P_o = [-529 \quad -575 \quad -483 \quad -529]$. Se consideran las matrices A y C declaradas en la Ec. (2.39), concluyendo que el observador trabaja a partir de dos estados reales: el ángulo de balanceo ϕ y el ángulo del manubrio δ .

Con todo lo anterior, la ley de control formulada para esta simulación se define como:

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \quad (2.44)$$

La ganancia K se determina utilizando el comando *place* de *MATLAB*, teniendo en cuenta los mismos polos que el controlador anterior. Inicialmente, se había considerado solamente uno de los estados reales (el ángulo del manubrio) como medible. Sin embargo, se encontró que era extremadamente difícil lograr una dinámica estable entre el controlador y el observador con esta configuración. Se llegó a la conclusión de que el modelo matemático no incorpora todas las características reales, como el viento, la fricción de las llantas, la superficie del suelo, entre otras. Intentar obtener esta dinámica limitando aún más la información sería complicado, por lo que se optó por considerar dos estados medibles.

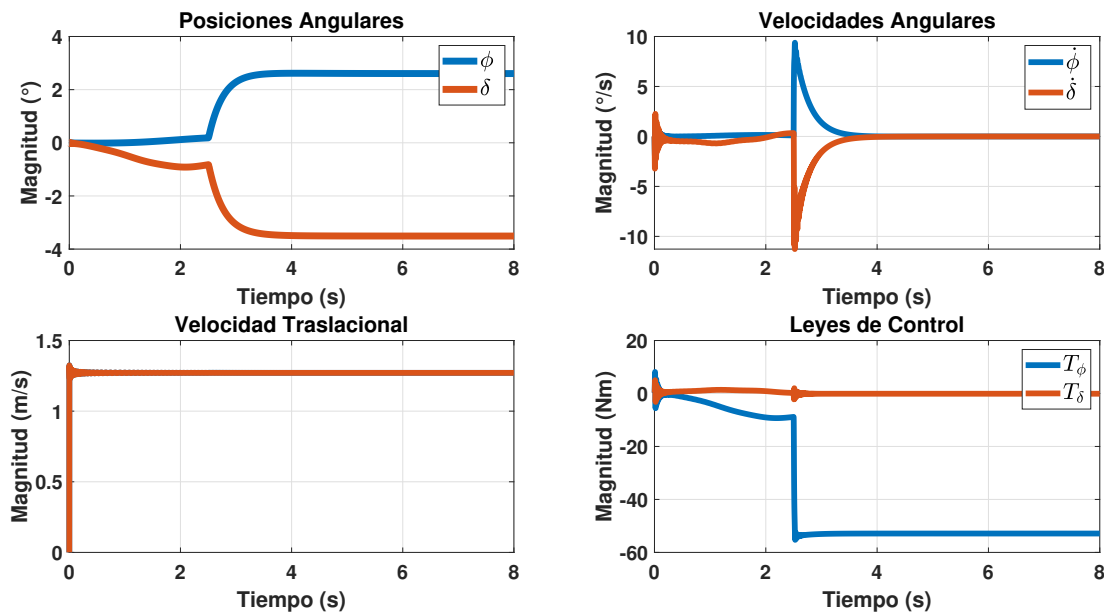


Fig. 2.13. Resultados de la *Simulación 3*.

Sintonizar el controlador con el observador resultó ser una tarea desafiante. Si el diseño consideraba una respuesta lenta, la ley de control no sería suficiente para devolver al vehículo de dos ruedas a su posición vertical. Por otro lado, si la respuesta era rápida, el observador generaba un sobretiro muy alto al principio, lo que provocaba que el vehículo cayera inmediatamente, impidiendo que la ley de control lo devolviera a su posición vertical.

2.5.4. Simulación 4. Control por retroalimentación de estados con acciones integrales aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas

Una acción integral tiene como principal tarea reducir a cero la diferencia entre una *referencia deseada* y *el valor de la variable real*, a través de un integrador que aporta a la ley de control.

Objetivo de la simulación: Estabilizar y regular el vehículo de dos ruedas para mantenerlo en posiciones angulares específicas.

El diseño de este sistema considera que todos los estados son medibles, lo cual es una característica compartida con la *Simulación 1*. Además, se incorpora en el diseño la integración de dos acciones integrales para programar las posiciones angulares deseadas.

Para este controlador se considera una ley de control por retroalimentación de estados más dos acciones integrales, definida de la forma:

$$u(t) = -Kx(t) - K_\phi \int e_\phi(t) dt - K_\delta \int e_\delta(t) dt \quad (2.45)$$

donde K es el vector de ganancias del controlador, K_ϕ es la ganancia asociada a la acción integral aplicada al ángulo de balanceo y K_δ la correspondiente a la acción integral aplicada al ángulo del manubrio. Asimismo, e_ϕ es el error entre ϕ_d (el ángulo de balanceo deseado), y ϕ_r (el ángulo de balanceo real).

$$e_\phi = \phi_d - \phi_r \quad (2.46)$$

De igual forma e_δ es el error entre δ_d (el ángulo del manubrio deseado), y δ_r (el ángulo del manubrio real).

$$e_\delta = \delta_d - \delta_r \quad (2.47)$$

K , K_ϕ y K_δ forma parte de un solo vector de ganancias calculado con el comando *place* de MATLAB contemplando los polos $P = [-1 \quad -1.04 \quad -0.96 \quad -0.92 \quad -1.68 \quad -1.64]$ buscando no tener oscilaciones en su respuesta y asegurar un tiempo de convergencia tal que los estados alcancen la referencia programada, considerando la matriz A y B como aumentadas, y la matriz C como

identidad de dimensiones compatibles.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.5058 & 0.6422 - 5.7184v^2 & -0.1368v & -0.2235v & 0 & 0 \\ 0.3138 & 0.3015 - 0.4209v^2 & 0.8739v & -1.8809v & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0330 & -0.3603 \\ -0.3603 & 2.3023 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

En la Fig. 2.14, se muestra el diagrama del controlador diseñado para estabilizar y regular el vehículo de dos ruedas considerando diferentes valores de referencia (o posiciones angulares deseadas) durante un período de tiempo.

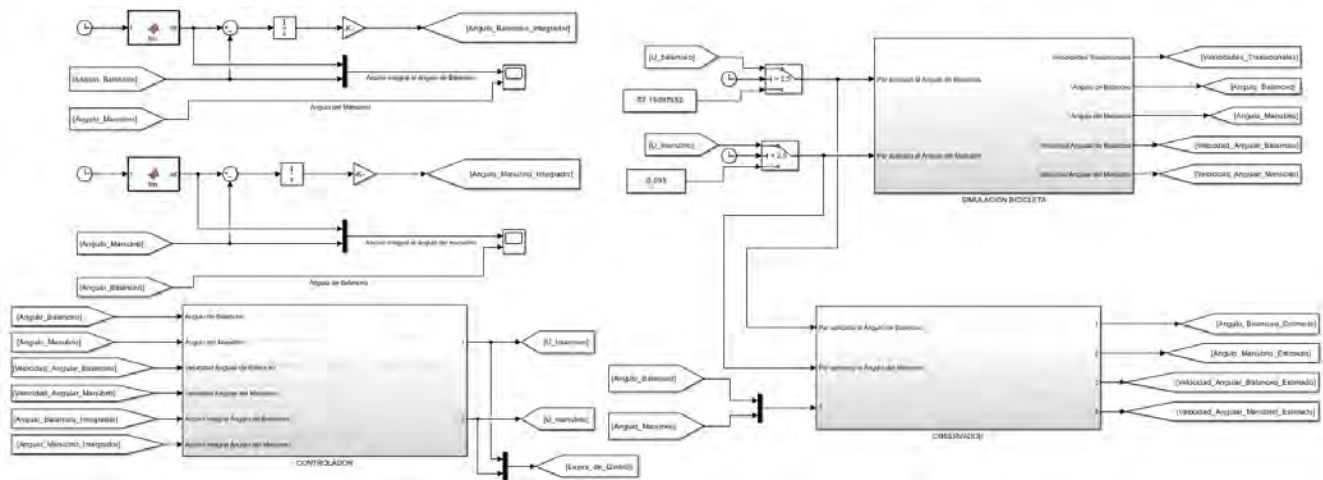


Fig. 2.14. Esquema de Control de la *Simulación 4*.

Para analizar el comportamiento dinámico del vehículo simulado en *Simscape* y el controlador, se programaron cambios de referencia (o posiciones angulares deseadas) de manera no simultánea. Esto se hizo con el objetivo de verificar el funcionamiento de las acciones integrales.

En la Fig. 2.15 se presentan los resultados obtenidos de esta simulación.

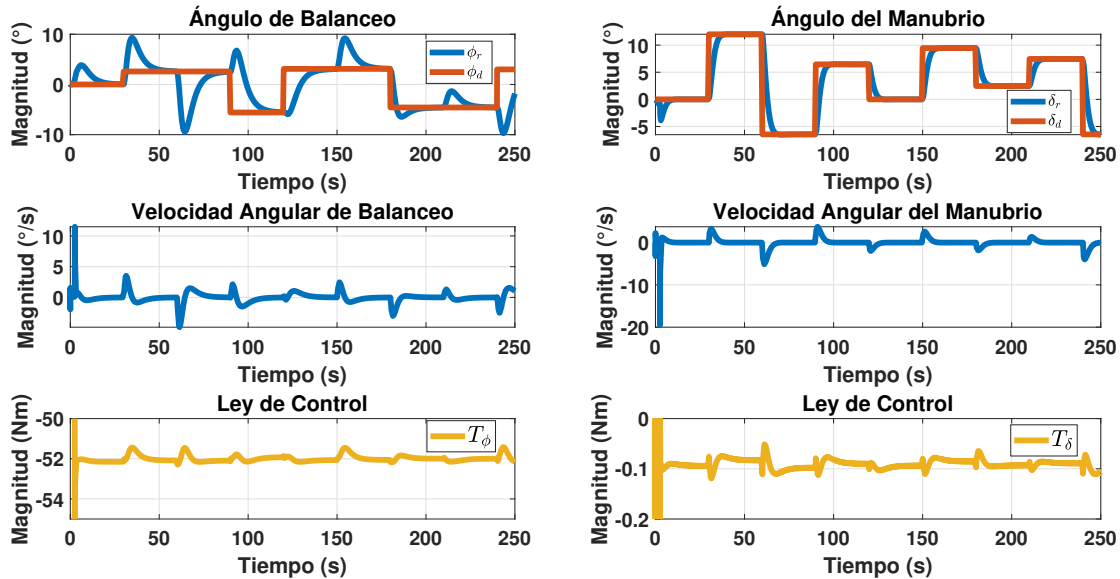


Fig. 2.15. Resultados de la *Simulación 4*.

A modo de ejemplo, se programó una referencia al ángulo de balanceo de 3° aproximadamente en $t = 30s$ y, al ángulo del manubrio, un cambio de posición de 12° a -6° en $t = 60s$. En este caso, la acción integral aplicada al ángulo del manubrio provoca que este ángulo siga la referencia cambiando su ubicación a la posición deseada.

Así mismo, (y comprobando la dinámica entre el controlador y la simulación del vehículo en *Simscape*) el ángulo de balanceo se ve afectado por el cambio de movimiento en el ángulo del manubrio, pero al mismo tiempo la acción integral aplicada a él y la posición angular deseada programada provocan que el ángulo regresen a la considerada inicialmente.

2.5.5. Simulación 5. Control por retroalimentación de estados estimados con acciones integrales aplicado al Modelo CAD del vehículo de dos ruedas

Objetivo de la simulación: Estabilizar y regular al vehículo de dos ruedas en posiciones angulares deseadas, validando el funcionamiento del observador mediante una ley de control que incorpora en su diseño todos los estados estimados generados por el propio observador y dos acciones integrales asociadas a cada posición angular.

Con esto, la ley de control se define como:

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + K_\phi \int e_\phi(t) dt + K_\delta \int e_\delta(t) dt \quad (2.49)$$

donde K , K_ϕ y K_δ forman parte del vector de ganancias calculado con el comando *place* de *MATLAB*, considerando los mismos polos y las matrices aumentadas declaradas en la *Simulación 5*.

En la Fig. 2.16, se muestra el esquema de control diseñado en *MATLAB-SIMULINK* considerado en esta simulación.

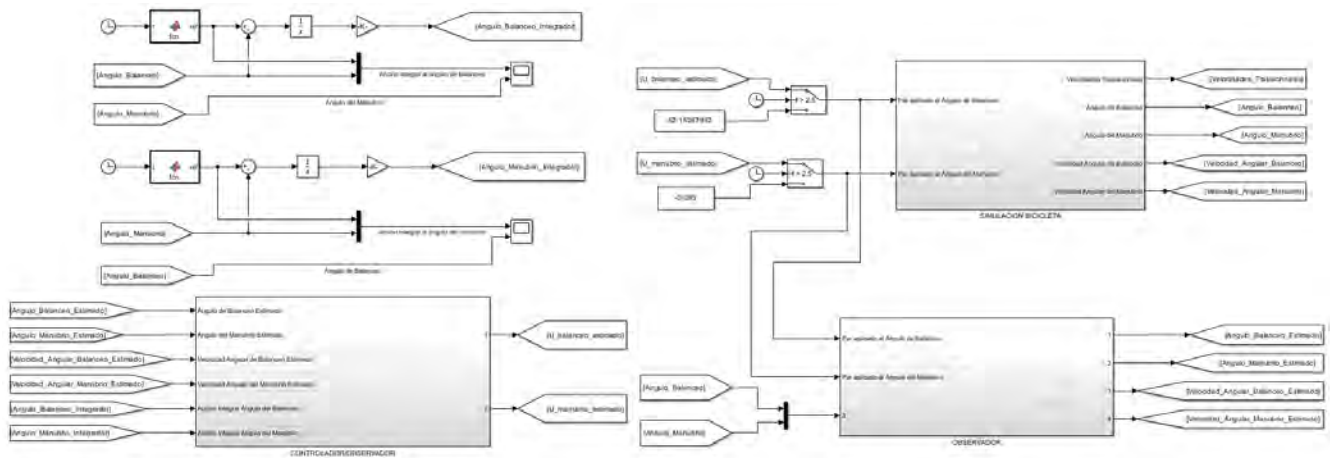


Fig. 2.16. Esquema de control de la *Simulación 5*.

En la Fig. 2.17, se observan los resultados del controlador diseñado, con los mismos cambios de referencia considerados para el controlador anterior. Se corrobora entonces el cumplimiento de los objetivos de control a partir de los estimados provenientes de un observador de Luenberger.

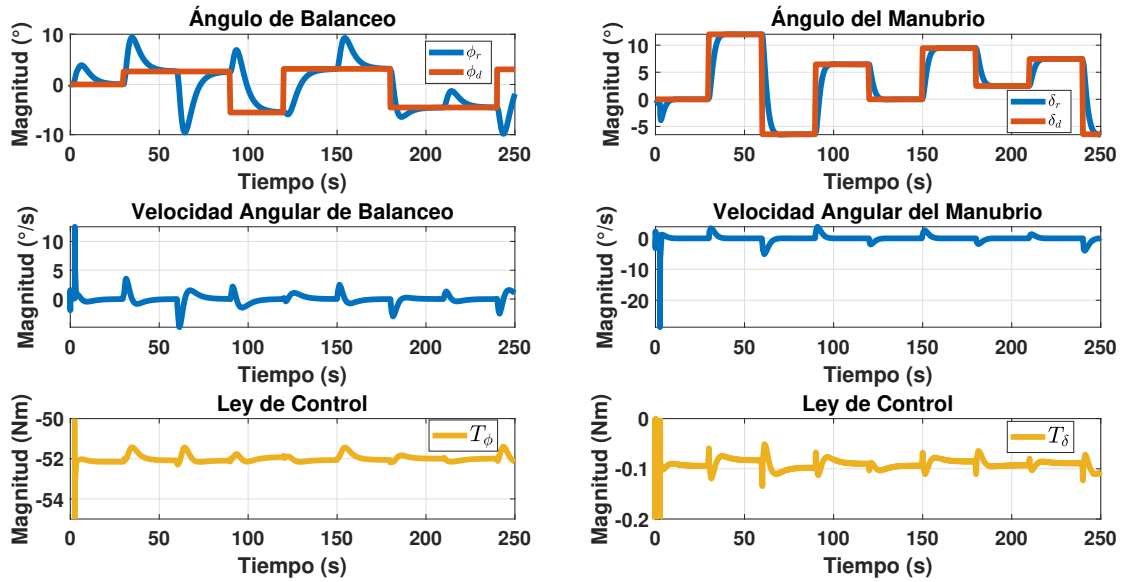


Fig. 2.17. Resultados de la *Simulación 5*.

Con la simulación se ha evaluado el desempeño del observador por medio de la ley de control (la cual se genera con los estados estimados) y la información contemplada para su diseño (ambas posiciones angulares).

2.6. Simulaciones considerando Ganancias Programadas

A diferencia de lo descrito anteriormente, las simulaciones presentadas a continuación consideran una velocidad traslacional *variable* con un rango de cambio de $v(t) = 3$ a 0 m/s. Es importante mencionar que, al igual que las simulaciones presentadas anteriormente, cada sistema de control implementado al modelo CAD se diseñó utilizando el método de colocación de polos.

Debido a que los sistemas de control ahora consideran una velocidad traslacional variable, la representación en espacio de estados del vehículo de dos ruedas la toma siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(v)x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.50}$$

con:

$$A(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.5058 & 0.6422 - 5.7184v^2 & -0.1368v & -0.2235v \\ 0.3138 & 0.3015 - 0.4209v^2 & 0.8739v & -1.8809v \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0330 & -0.3603 \\ -0.3603 & 2.3023 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde la matriz $A(v)$ cambiará de valor a medida que la velocidad presente variaciones con respecto al tiempo.

A continuación, se enlistan las simulaciones realizadas orientadas a validar el modelo matemático considerando Ganancias Programadas.

- **Simulación 6.** Control por retroalimentación de estados considerando Ganancias Programadas al modelo CAD del vehículo de dos ruedas.
- **Simulación 7.** Control por retroalimentación de estados estimados considerando Ganancias Programadas al modelo CAD del vehículo de dos ruedas.

2.6.1. Simulación 6. Control por retroalimentación de estados considerando Ganancias Programadas aplicadas al modelo CAD del vehículo de dos ruedas

Objetivo de la simulación: Estabilizar al vehículo de dos ruedas en su posición vertical, considerando una ley de control diseñada con a partir de todo el vector de estados medido.

$$u(t) = -K(v)x(t) \quad (2.52)$$

Como ya se definió anteriormente, la velocidad traslacional se define con un comportamiento decreciente, en este caso, tomando valores de $v(t)=2.551 \text{ m/s}$ a 0.325 m/s . En la Fig. 2.18 se muestra la velocidad traslacional decreciente considerada para el sistema dinámico, contemplando el cambio de velocidad en un tiempo de 18 segundos.

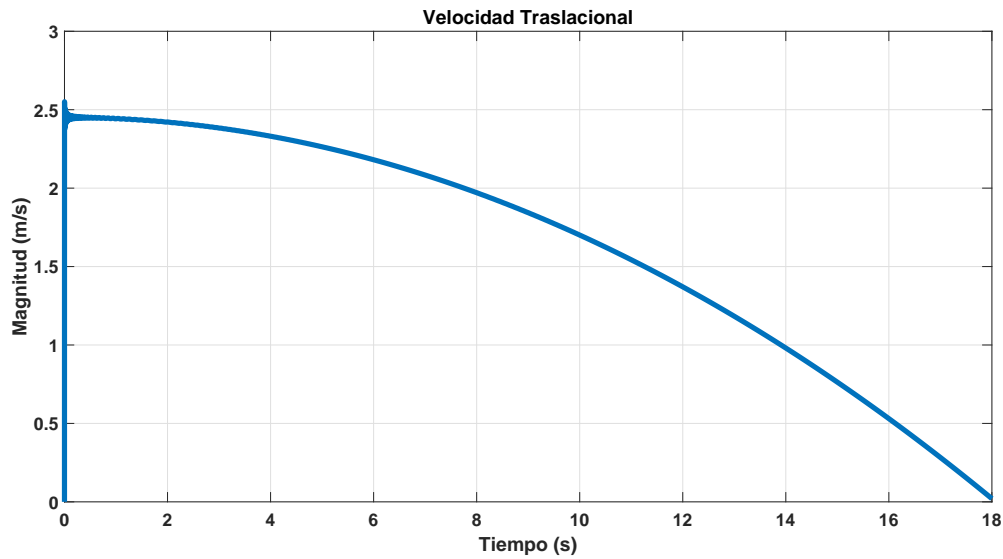


Fig. 2.18. Velocidad traslacional variable para la *Simulación 6*.

Retomando la Ec. (2.52), $K(v)$ es el vector de ganancias calculado por medio del comando *place* de *MATLAB* y considerando los polos $P = [-2.5 \quad -2.6 \quad -2.4 \quad -2.3]$, buscando no tener una respuesta oscilatoria en los resultados de la ley de control.

Dado que K es un vector cuyos coeficientes cambian de valor en función de v , el control con ganancias programadas considera *funciones* en cada elemento del vector, las cuales aproximan el comportamiento de cada ganancia ante el cambio de velocidad en función del tiempo. Por esta razón, la ganancia K ahora se programa en una función dependiente de la velocidad, la cual contiene las *funciones* de cada elemento que conforma dicho vector de ganancias.

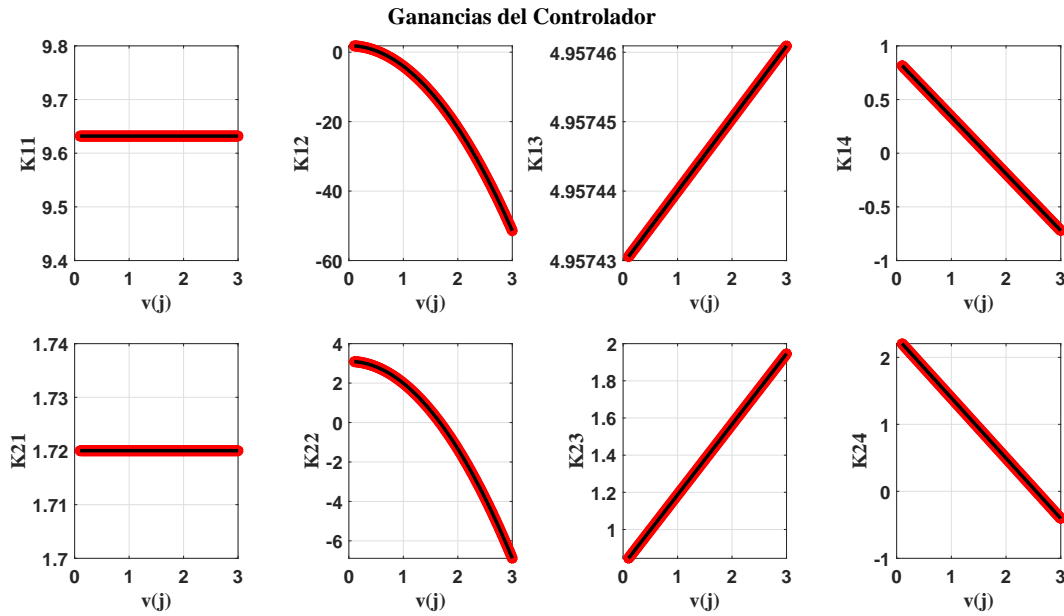


Fig. 2.19. Ganancias programadas del vector K .

Como se observa en la Fig. 2.19, las ganancias fueron calculadas considerando el rango de velocidad traslacional de 0 a 3 m/s. En este caso, la matriz $A(v)$ se transforma en $A(j)$ donde el término j es:

$$j = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 2.8, 2.9, 3\} \quad (2.53)$$

definiéndola como la discretización del rango establecido para $v(t)$, es decir, $A(j)$ representa a $A(v)$ para valor de j en:

$$0 \text{ m/s} \leq v(t) \leq 3 \text{ m/s} \quad (2.54)$$

Con todo lo anterior y retomando la Fig. 2.19, los valores discretizados (considerando la Ec. (2.53)) de cada ganancia a partir de j en el rango de velocidad establecido se representa por medio de *asteriscos* en color rojo. Debido a que la discretización considera cambios muy pequeños, estos valores se aprecian juntos, continuos, cuando en realidad no lo son. Por esta razón, se consideraron interpolaciones lineales para la aproximación a una función, cuya evaluación para la velocidad traslacional se presenta en color negro.

En la Ec. (2.55), se presentan las funciones producto de la interpolación lineal, cuyo valor se verá

afectado por la velocidad traslacional decreciente.

$$\begin{aligned}
 K11 &= 9.6319 \\
 K12 &= 5.9227(v^2) + 1.8735 \\
 K13 &= 4.9574 \\
 K14 &= 0.5302(v) + 0.8696 \\
 K21 &= 1.7201 \\
 K22 &= 1.1097(v^2) + 3.1023 \\
 K23 &= 0.3796(v) + 0.8070 \\
 K24 &= -0.8999(v) + 2.2947
 \end{aligned}
 \tag{2.55}$$

Así mismo, la etiqueta $K11$ (véase en la Fig. 2.19), hace referencia al elemento de K en su *fila* 1, *columna* 1, misma interpretación a lo contenido en la figura.

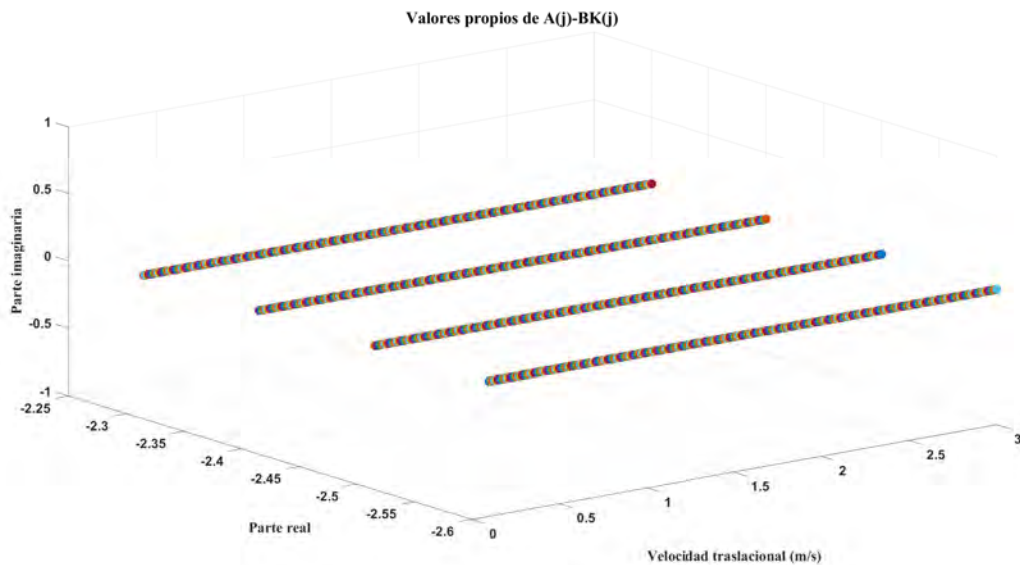


Fig. 2.20. Valores propios de $A(j) - BK(j)$ de la *Simulación 6*.

Es importante mencionar que al igual que el primer controlador diseñado en LTI la simulación del vehículo de dos ruedas a través del *Simscape* brinda todos los estados del sistema (véase en la Fig. 2.20, la matriz C particularmente en este caso será considerada como una matriz identidad, ya que se tienen todos los estados medibles, siendo $y = x$.

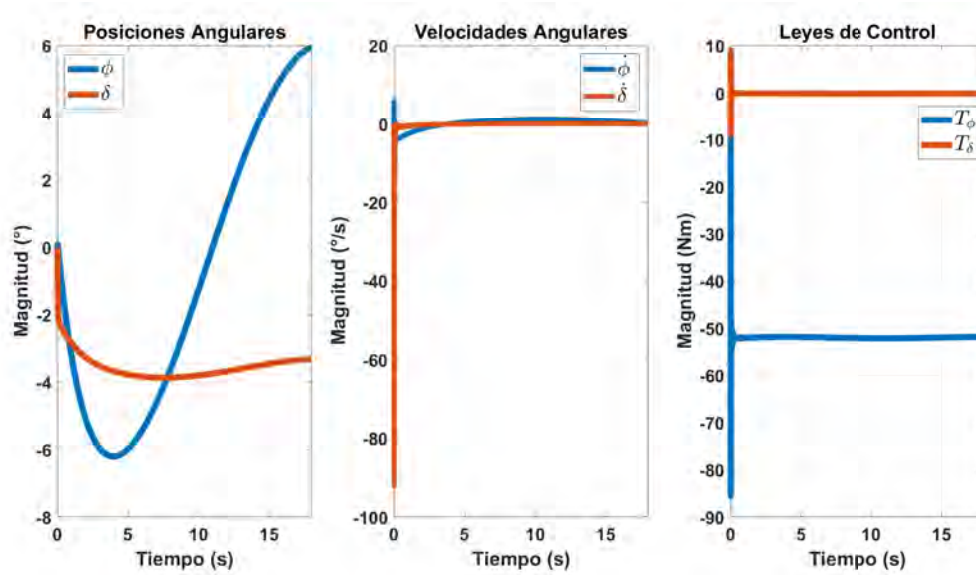


Fig. 2.21. Resultados de la *Simulación 6*

En la Fig. 2.21 se presentan los resultados del controlador por retroalimentación de estados considerando la velocidad traslacional variable (véase en la Fig. 2.18). En este caso, las posiciones angulares indican que el vehículo de dos ruedas se encuentra estable, o llegando a su punto de operación (ϕ con un valor de 6° y δ con -3° , aproximadamente).

Dado que el comportamiento de la velocidad traslacional presentado en la Fig. 2.18 define un valor de 0 m/s en $t = 18 \text{ s}$ es que ambas posiciones angulares no alcanzan su punto de operación (o estabilidad). Sin embargo, de acuerdo con la respuesta de las leyes de control, se asume que el comportamiento del vehículo se estabiliza, ya que sus valores no se desacotan.

Se llegó a esta conclusión a partir de los resultados en las velocidades angulares, ya que durante este tiempo de simulación ambas se encuentran acercándose a $0 \text{ }^\circ/\text{s}$. Lo anterior deriva en posiciones angulares cercanas a ser constantes en ϕ y δ . Así mismo, las leyes de control continúan manteniendo su valor para estabilizar al vehículo aun con la velocidad traslacional variable, con respecto a los resultados presentados anteriormente. Esto se debe a que las ganancias son quienes cambian de valor, siendo el objetivo de control el mismo, estabilizar al vehículo en su posición vertical.

2.6.2. Simulación 7. Control por retroalimentación de estados estimados considerando Ganancias Programadas aplicadas al modelo CAD del vehículo de dos ruedas

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es estabilizar y regular al vehículo de dos ruedas a partir de una referencia o posición angular deseada, considerando acciones integrales en el diseño de la ley de control.

Se considera el diseño de un observador tipo Luenberger con dos estados reales medibles, con la estructura:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(v)\hat{x}(t) + Bu + L(v)(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.56)$$

donde L es el vector de ganancias del observador calculado por medio del comando *place* de *MATLAB* con los polos $P_o = [-690 \quad -750 \quad -630 \quad -690]$. Dado que el vector $L(v)$ se compone de coeficientes cuyos valores cambian en función de v , se programaron funciones para cada coeficiente, aproximando su comportamiento particular ante el cambio de velocidad en función del tiempo.

Como se ve en la Fig. 2.22, las ganancias fueron calculadas considerando el mismo rango de velocidad traslacional de **0 a 3 m/s**.

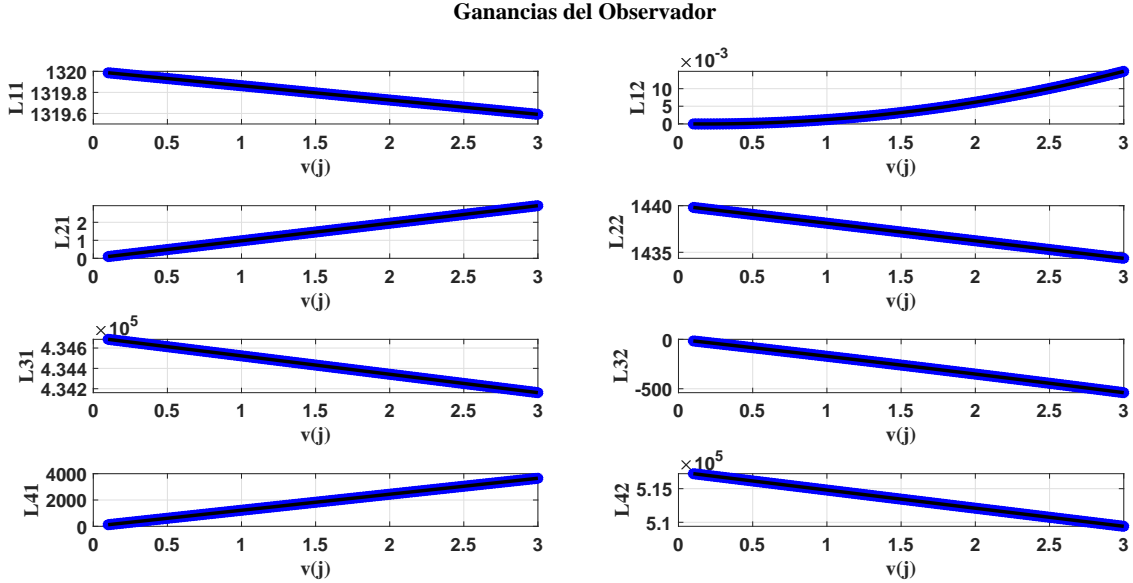


Fig. 2.22. Ganancias programadas del vector L .

En la Fig. 2.22 la etiqueta L_{11} hace referencia al elemento de L en su *fila 1, columna 1*, misma interpretación a lo contenido en la figura.

En la Ec. (2.57), se presentan las funciones producto de la interpolación lineal, cuyo valor se verá afectado por la velocidad traslacional decreciente.

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= -0.1000(v) + 1320 \\
 L_{21} &= 0.0005(v^2) + 0.9728(v) \\
 L_{31} &= -180(v) + (4.3470e + 05) \\
 L_{41} &= 0.5302(v) + 0.8696 \\
 L_{12} &= -0.0008e + 03(v^3) - 0.0016(v^2) - (1.2218e + 03)(v) + (0.0003e + 03) \\
 L_{22} &= 0.0019e + 03(v^2) - (0.0007e + 03) \\
 L_{32} &= 0.0066(v^3) - 4.0181(v^2) - 168.0766(v) + 0.6422 \\
 L_{42} &= -(0.0271e + 05)(v) + (5.1750e + 05)
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Dado que el cálculo de las ganancias del observador depende de las matrices $A(v)$ y C , al igual que el controlador anterior, la matriz $A(v)$ se transforma en $A(j)$ discretizando de la misma manera que en la Ec. (2.53) para el rango de velocidad establecido.

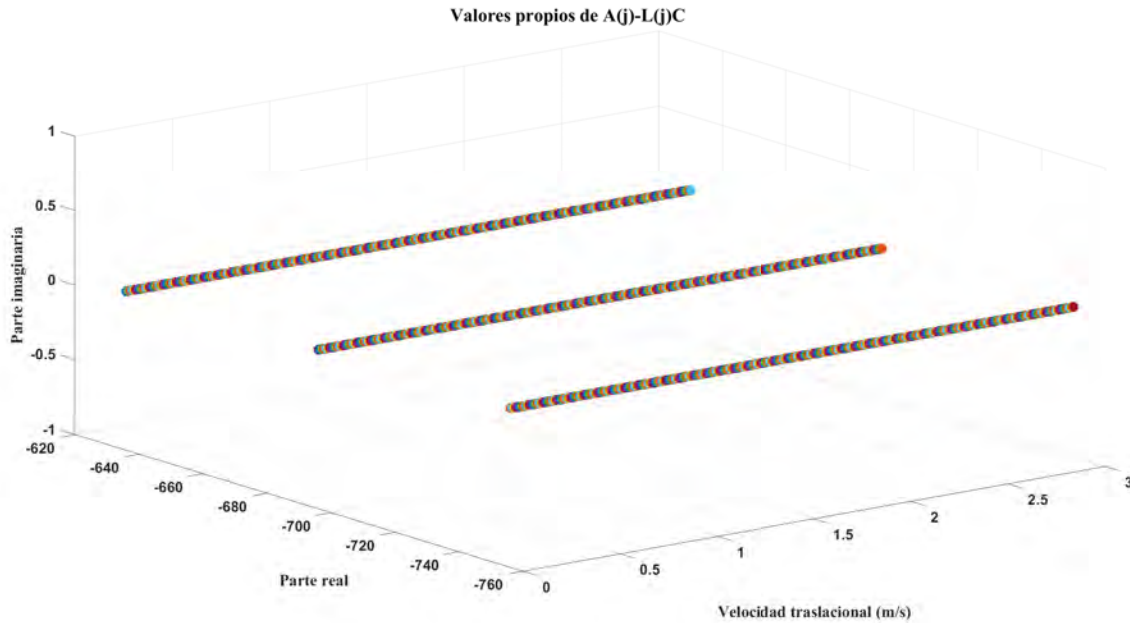


Fig. 2.23. Valores propios de $A(j) - L(j)C$ de la *Simulación 7*

En la Fig. 2.23, se presenta el comportamiento de los valores propios del observador en lazo cerrado. En este caso, la nueva matriz $A(j) - L(j)C$ tiene definido el mismo valor de polos utilizados para calcular la ganancia L a medida que la velocidad traslacional cambia de valor.

Con todo lo anterior, el controlador considera una ley de control por retroalimentación de estados estimados más dos acciones integrales de la forma:

$$u(t) = -K(v(t))\hat{x}(t) + K_\phi(v(t)) \int e_\phi(t) dt + K_\delta(v(t)) \int e_\delta(t) dt \quad (2.58)$$

Nota: Por simplicidad, el argumento (t) será omitido posteriormente.

donde $K(v)$ es el vector de ganancias del controlador, $K_\phi(v)$ es la ganancia correspondiente a la acción integral aplicada al ángulo de balanceo y $K_\delta(v)$ la ganancia correspondiente a la acción integral aplicada al ángulo del manubrio.

En este caso, se considera una velocidad traslacional decreciente con un cambio de $v(t)=2.897$ a 1.204 m/s en un tiempo de 14.5 segundos aproximadamente (véase en la Fig. 2.24).

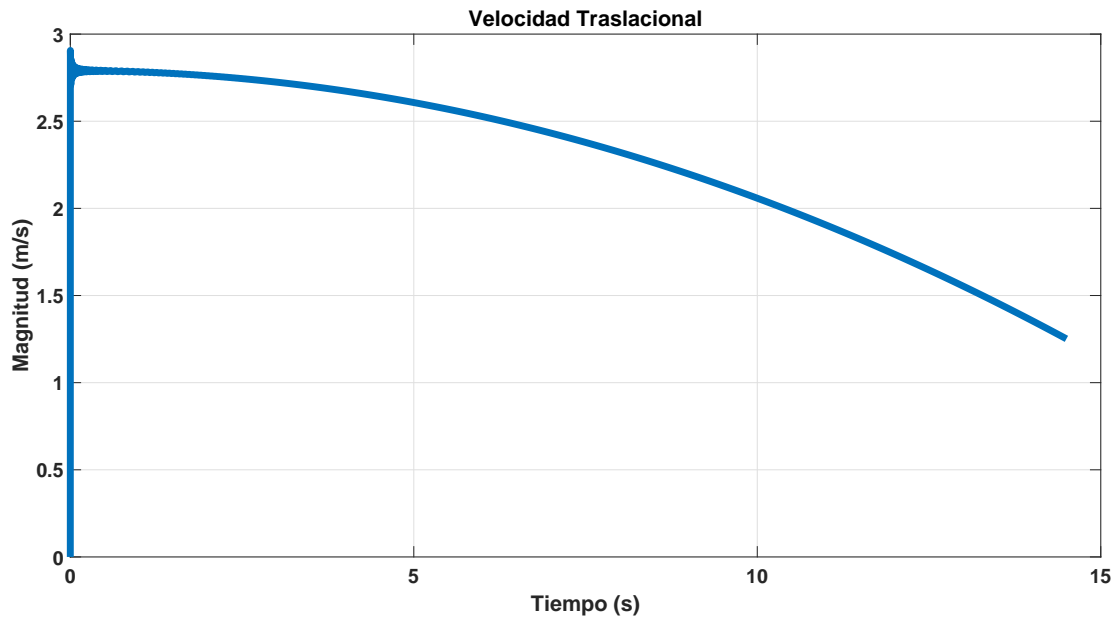


Fig. 2.24. Velocidad traslacional variable para la *Simulación 7*.

Así mismo, e_ϕ es el error entre ϕ_d (el ángulo de balanceo deseado), y ϕ_r (el ángulo de balanceo real).

$$e_\phi = \phi_d - \phi_r \quad (2.59)$$

De igual forma e_δ es el error entre δ_d (el ángulo del manubrio deseado), y δ_r (el ángulo del manubrio real).

$$e_\delta = \delta_d - \delta_r \quad (2.60)$$

Ahora bien, tanto $K(v)$, $K_\phi(v)$ y $K_\delta(v)$ forman parte de un solo vector de ganancias calculado con el comando *place* de *MATLAB* considerando los polos $P = [-1.9 \quad -2 \quad -2.4 \quad -2.3 \quad -2.5 \quad -2.1]$.

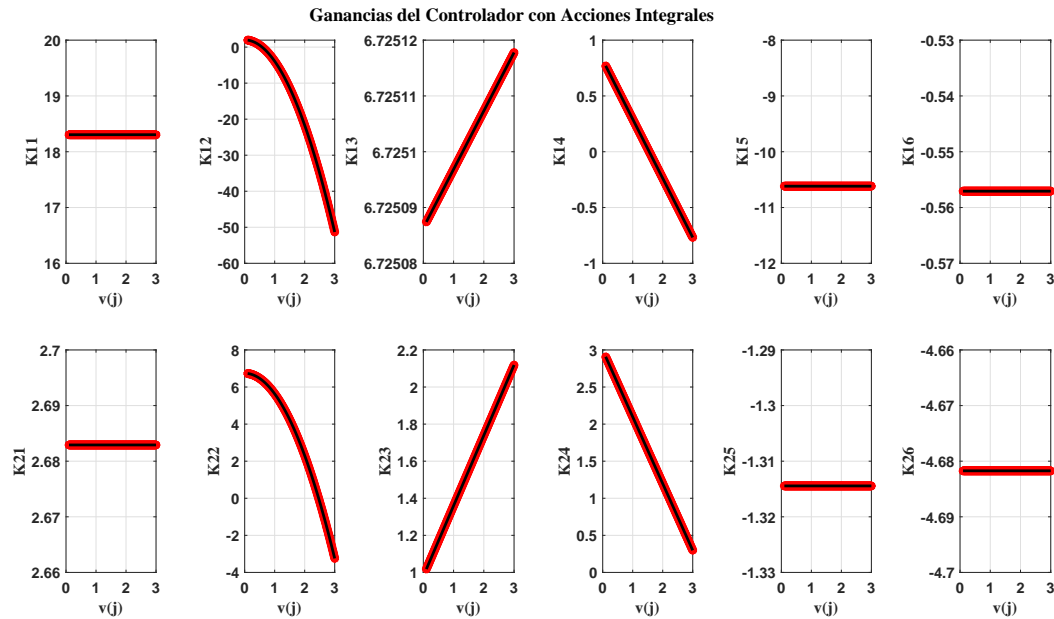


Fig. 2.25. Ganancias del Controlador.

En la Ec. (2.61), se presentan las funciones producto de la interpolación lineal, cuyo valor se verá afectado por la velocidad traslacional decreciente.

$$K_{11} = 18.3051$$

$$K_{12} = -5.9227(v^2) + 1.9899$$

$$K_{13} = 6.7251$$

$$K_{14} = 0.5302(v) + 0.8225$$

$$K_{15} = -10.6178$$

$$K_{16} = -0.5571$$

$$K_{21} = 2.6829$$

$$K_{22} = -1.1097(v^2) + 6.7412$$

$$K_{23} = 0.3796(v) + 0.9801$$

$$K_{24} = -0.8999(v) + 0.9801$$

$$K_{25} = -1.3144$$

$$K_{26} = -4.6817$$

(2.61)

En la Fig. 2.25 la etiqueta K_{11} hace referencia al elemento de K en su *fila* 1, *columna* 1, misma

interpretación a lo contenido en la figura.

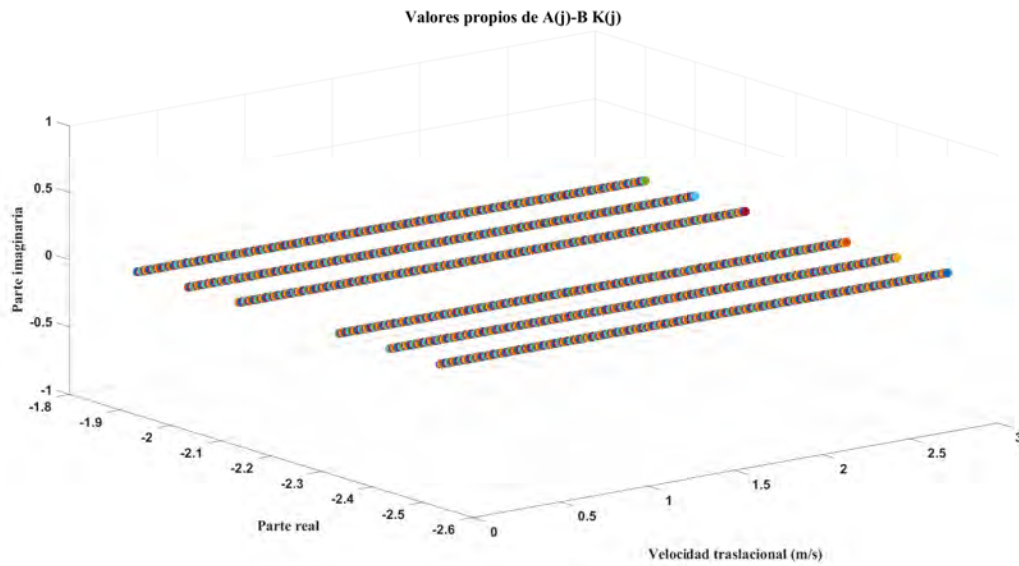


Fig. 2.26. Valores propios de $A(j) - BK(j)$ de la *Simulación 7*.

Al igual que el controlador anterior, se utiliza la misma idea de discretización de la Ec. (2.53) considerando el rango de velocidad ya definido, con la única diferencia de que el modelo matemático para este controlador es aumentado a consecuencia de las acciones integrales.

Como resulta en la Fig. 2.26, los valores propios del sistema en lazo cerrado conservan el mismo valor de los polos declarados para estabilizar al sistema. En este caso, se consideran 6 valores propios en función de v debido al modelo matemático aumentado para la aplicación de las acciones integrales.

Como se observa en la Fig. 2.25 tanto las ganancias del controlador y observador son declaradas como *funciones* dependientes de la velocidad traslacional programada en la simulación del vehículo importado a *Simscape*.

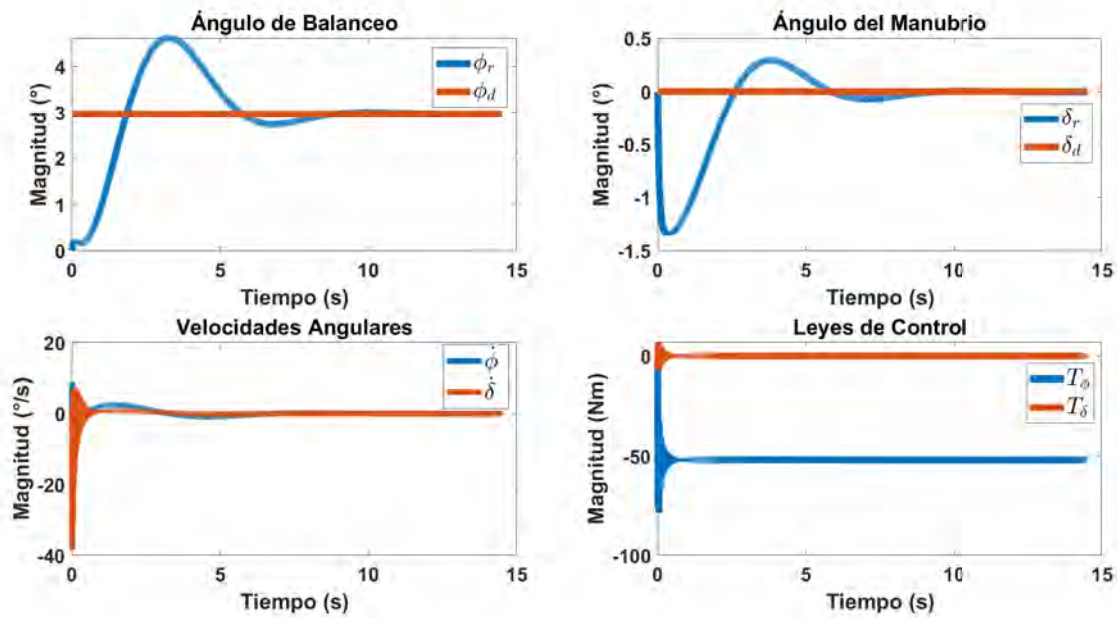


Fig. 2.27. Resultados de la *Simulación 7*.

Ahora bien, en la Fig. 2.27 se presentan los resultados de la simulación. El objetivo de agregar las acciones integrales es ayudar a la ganancia K y que el vehículo llegue a un valor deseado y se mantenga en él.

En este caso, ambas posiciones angulares llegan a la referencia deseada. Finalmente, señalar que las posiciones y velocidades angulares se manipulan a voluntad dentro del sistema dinámico, a partir de la consideración de acciones integrales en la ley de control.

2.7. Conclusiones

En este capítulo se presentó una parte del trabajo realizado a lo largo de la investigación. Se presentan las razones del desarrollo de un modelo CAD cuyo objetivo es brindar la información necesaria para el desarrollo de la aproximación del modelo matemático particular. Por medio de una revisión al estado del arte, se toma la decisión de considerar el modelo matemático completo en el enfoque es este trabajo de tesis, siendo esta una de las principales aportaciones.

Se presenta el desarrollo matemático del vehículo de dos ruedas y su representación en espacio

de estados. Posteriormente, se busca validar los resultados de este procedimiento comparando sus resultados con los analizados en la literatura.

Finalmente, se presentan diferentes simulaciones considerando sistemas LTI y Control por Ganancias Programadas aplicadas al modelo CAD importado a *MATLAB Simulink* por medio de *Simscape Multibody*.

Estos resultados validan el modelo matemático particular de la bicicleta seleccionada, además de cumplir su objetivo de control: Estabilizar y regular al vehículo de dos ruedas en posiciones angulares deseadas.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL PARA ESTABILIZAR AL VEHÍCULO DE DOS RUEDAS

El objetivo de este capítulo es presentar la metodología utilizada para el diseño de los sistemas de control implementados al vehículo de dos ruedas. Se describen las características y condiciones de cada uno de los diferentes sistemas de control, su objetivo y desarrollo analítico.

El capítulo se organiza de la siguiente manera:

En la sección 3.1 y 3.2 se presenta la descripción del caso de estudio, las generalidades y aspectos importantes a considerar en los sistemas de control.

En la sección 3.3 se describen la parametrización del vehículo de dos ruedas, las características del observador y las condiciones para la solución de la ecuación diferencial de ϕ . Con todo lo anterior, se describe la dinámica de acoplamiento de los tres elementos antes mencionados, a través de la construcción de un nuevo vector de estados considerando el hardware en el lazo.

En la sección 3.4 se presentan los elementos asociados a la instrumentación del vehículo de dos ruedas, así como las tarjetas y microcontroladores utilizados para la comunicación con el software de *LabVIEW*.

En la sección 3.5 se describen las características importantes del diseño de los sistemas de control. En este caso, se presentan *casos* que describen las condiciones consideradas según el objetivo de control.

El modelo matemático del vehículo de dos ruedas define su comportamiento dinámico como inestable dependiente de la velocidad traslacional $v(t)$, determinándolo así un sistema LPV. No obstante, el presente capítulo aborda el diseño de sistemas de control considerando dos enfoques: sistemas LTI (sistema lineal e invariante en el tiempo) y Sistemas LPV.

Es importante mencionar que cada uno de los sistemas de control descritos en el presente reporte validan la efectividad de considerar en su diseño una parte real del sistema (el marco frontal y la rueda delantera del vehículo de dos ruedas), un observador y el hardware en lazo, contemplado entre ellos una dinámica dependiente de cada elemento.

3.1. Formulación del problema

Retomando el modelo matemático del vehículo de dos ruedas bajo el marco de la representación LPV-Polinomial:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) &= C(\rho(t))x(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde el vector de estados está definido por $x(t) \in \mathbb{R}^n$, el vector de entradas por $u(t) \in \mathbb{R}^m$, el vector de salidas medidas por $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y el vector de parámetros variables $\rho(t) \in \mathbb{R}^k$. Todas las matrices son variables en el tiempo, debido a que $\rho(t)$ es el parámetro que cambia de valor con el tiempo.

Por otro lado, A y B son matrices conocidas definidas por el modelo matemático del vehículo y, en el caso de la matriz, C corresponde a los elementos medidos por la instrumentación implementada en el vehículo de dos ruedas descritos posteriormente.

Dadas las condiciones descritas en el modelo matemático y la limitada información generada por la instrumentación del vehículo de dos ruedas, se considera el diseño de un observador. Por tanto,

se debe verificar la condición de observabilidad: Prueba que permite determinar la posibilidad de estimar los estados no medibles del sistema a partir de las salidas disponibles. Esta condición se describe a continuación:

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA_j \\ \vdots \\ CA_j^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall_j = 1, \dots, k. \quad (3.2)$$

Su diseño asume que las matrices (A_j, C) , $\forall_j = 1, \dots, k$, son observables. Mientras que n es la dimensión del vector de estados del sistema.

Del mismo modo, es importante considerar la condición de controlabilidad de un sistema, ya que a partir de él los controladores diseñados logran los objetivos deseados (como la estabilización o el seguimiento de referencia).

Un sistema es controlable si, para cualquier estado inicial y final, existe una serie de entradas de control que lleva al sistema del estado inicial al estado final en un tiempo finito.

Esta condición se describe a continuación:

$$\text{rank} \left([B \ A_i B \ A_i^2 B \ \dots \ A_i^{n-1} B] \right) = n, \quad \forall_i = 1, \dots, k. \quad (3.3)$$

Su diseño asume que las matrices (A_i, B) , $\forall_i = 1, \dots, k$, son controlables. Mientras que n es la dimensión del vector de estados del sistema.

3.2. Aspectos importantes de los sistemas de control

El trabajo desarrollado y los objetivos del tema de tesis abordan tres características importantes:

1. La instrumentación de una bicicleta real a fin de aportar mediciones reales.
2. El diseño de un observador de estados con el objetivo de estimar aquellos estados no medidos.
3. La solución de la ecuación diferencial del balanceo con la información de los elementos antes mencionados. Esto también se considera Hardware en el lazo.

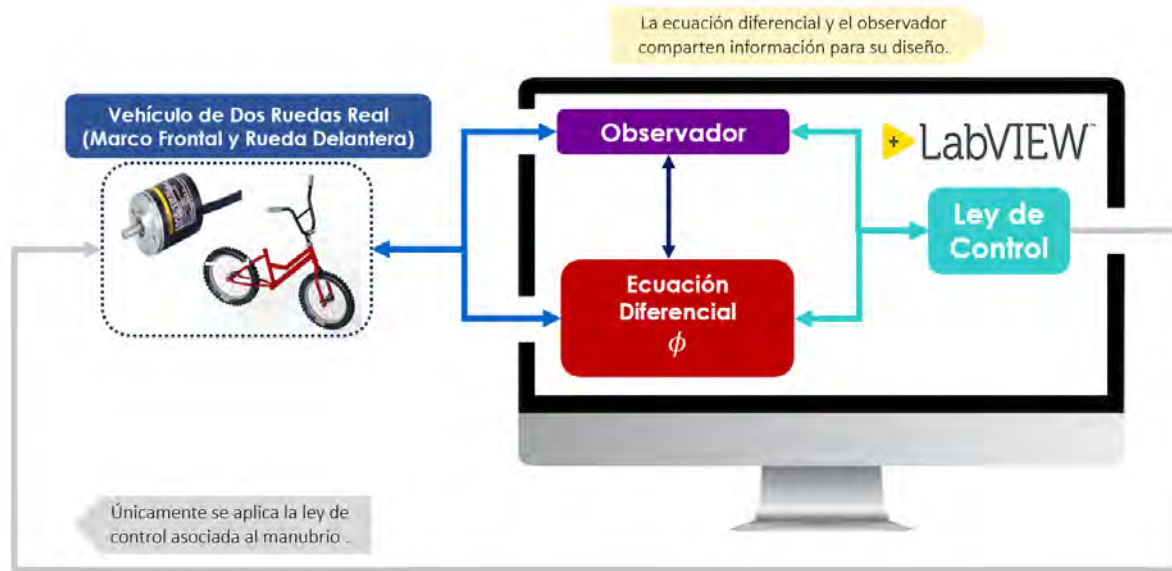


Fig. 3.1. Estructura general de un sistema de control.

En la Fig. 3.1, se presenta el acoplamiento dinámico entre el sistema real (bicicleta instrumentada), el observador y la ecuación diferencial que describe la dinámica del balanceo definida en la Ec. (3.5), descrito de manera general: la información del sistema real aporta al diseño del observador y a la solución de la ecuación diferencial del balanceo. Estos últimos comparten información entre sí para su diseño y la generación de las leyes de control consideradas en el vehículo de dos ruedas, de las cuales solo una se aplica en el sistema real.

3.3. Parametrización del vehículo de dos ruedas

Antes de presentar el desarrollo analítico de los sistemas de control, se presenta la parametrización de las matrices en función de los resultados del sistema real, el observador y la ecuación diferencial del balanceo (ϕ). Asimismo, se describe detalladamente el acoplamiento dinámico de la información producto de los tres elementos antes descritos para la generación de las leyes de control, siendo este uno de los objetivos principales del tema de tesis.

3.3.1. Sistema real instrumentado

El sistema real (el marco frontal y la rueda delantera) entregan únicamente un estado medido a través del encoder o sensor de posición angular del manubrio.

Tabla 3.1. Estado real.

Acrónimo	Significado
δ	Ángulo del Manubrio ($^{\circ}$)

3.3.2. Observador de estados

Dado que la instrumentación del vehículo no contempla todos los estados medidos que considera el modelo matemático, el diseño del sistema de control incluye un observador.

En este caso, se seleccionó el tipo Luenberger con la estructura:

$$\hat{\dot{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (3.4)$$

En cada sistema de control, el observador es diseñado a partir de dos estados: un estado medido (Tabla 3.1) y el otro derivado de la solución de la ecuación diferencial de ϕ (elemento descrito posteriormente).

Tabla 3.2. Estados generados por el observador.

Acrónimo	Significado
$\hat{\phi}$	Ángulo de Balanceo Estimado ($^{\circ}$)
$\hat{\delta}$	Ángulo del Manubrio Estimado ($^{\circ}$)
$\dot{\hat{\phi}}$	Velocidad Angular del Balanceo Estimada ($^{\circ}/s$)
$\dot{\hat{\delta}}$	Velocidad Angular del Manubrio Estimada ($^{\circ}/s$)

3.3.3. Ecuación Diferencial del Balanceo

El modelo matemático del vehículo de dos ruedas define a la ecuación diferencial de ϕ como:

$$\ddot{\phi} = 3.5058\phi + (0.6422 - 5.7184v^2)\delta - (0.1368v)\dot{\phi} - (0.2235v)\dot{\delta} + 1.0330T_{\phi} - 0.3603T_{\delta} \quad (3.5)$$

Su solución toma en cuenta dos estados: δ y $\hat{\delta}$ (en este caso, un estado real y otro estimado).

Tabla 3.3. Estados generados por la Ecuación Diferencial de ϕ .

Acrónimo	Significado
ϕ_e	Ángulo de Balanceo Ecuación ($^{\circ}$)
$\dot{\phi}_e$	Velocidad Angular de Balanceo Ecuación ($^{\circ}/s$)

Es importante mencionar que su diseño únicamente considera aquellos elementos asociados al manubrio debido a que la solución entrega los elementos restantes del vector de estados, es decir, los asociados al balanceo (véase en la Tabla 3.3).

3.3.4. Vector de estados para hardware en el lazo

Con el objetivo de manifestar el acoplamiento dinámico entre los tres elementos descritos anteriormente, el nuevo vector de estados (\bar{x}) para calcular las leyes de control considera los siguientes elementos:

Tabla 3.4. Vector de estados con hardware en el lazo.

Acrónimo	Significado
ϕ_e	Ángulo de Balanceo Ecuación ($^\circ$)
$\hat{\delta}$	Ángulo del Manubrio Estimado ($^\circ$)
$\dot{\phi}_e$	Velocidad Angular de Balanceo Ecuación ($^\circ/s$)
$\dot{\hat{\delta}}$	Velocidad Angular del Manubrio Estimado ($^\circ/s$)

Con esto, \bar{x} adopta la siguiente representación matricial: $\bar{x} = [\phi_e \quad \hat{\delta} \quad \dot{\phi}_e \quad \dot{\hat{\delta}}]^\top$, donde dos de sus estados se generan a partir del observador y el resto por la ecuación diferencial de ϕ .

En este caso el vector de ganancias K es multiplicado por el nuevo vector de estados \bar{x} , generando así las dos leyes de control consideradas en el modelo matemático.

Nota: \bar{x} será utilizado para generar las leyes de control de cada uno de los esquemas descritos en este capítulo.

De manera general, tanto parte del sistema real, el observador y la ecuación diferencial de ϕ interactúan dinámicamente de la siguiente manera: el sistema real entrega únicamente a δ , estado que alimenta al observador y a la ecuación diferencial ϕ .

Por otro lado, el observador genera todo el vector de estados estimados, de los cuales únicamente se consideran aquellos asociados al manubrio. Finalmente, la solución de la ecuación diferencial de ϕ contempla a δ y $\hat{\delta}$, generando así a ϕ_e y $\dot{\phi}_e$.

3.4. Instrumentación del vehículo de dos ruedas

Se aborda lo relacionado los componentes electrónicos, tarjetas o elementos de comunicación para comunicar los sensores y el actuador con los sistemas de control, y el software utilizado para el diseño de cada experimento realizado a lo largo del presente trabajo de investigación.

3.4.1. Estructura mecánica para el vehículo de dos ruedas

Dado que la propuesta para el diseño de los sistemas de control únicamente considera el marco frontal del vehículo de dos ruedas como grado de libertad, se diseñó y construyó una estructura a fin de ensamblarlo y que este quede suspendido, evitando que las ruedas tengan contacto con el suelo y que el marco general se mueva.



(a) Base principal diseñada en *SolidWorks*.



(b) Base principal construida.

Fig. 3.2. Base principal para el vehículo de dos ruedas.

La Fig. 3.2 presenta el ensamble entre la bicicleta y la base principal (diseñado en *SolidWorks* y construido) que estabiliza todo el vehículo dejando al marco frontal como único subsistema con movimiento: La Fig. 3.2a muestra el diseño modelado en el software de *SolidWorks*, y la Fig. 3.2b la base principal construida y ensamblada en el vehículo de dos ruedas.

3.4.1.1. Mecanismos para instrumentación

Las consideraciones de movimiento del vehículo de dos ruedas antes descritas conlleva el diseño de dos mecanismos importantes:

- *Mecanismo asociado al ángulo del manubrio δ :*

Su objetivo consiste en ubicar un sensor para medir la posición angular del marco frontal

(ángulo del manubrio) y la rueda delantera (véase en la Fig. 3.3).

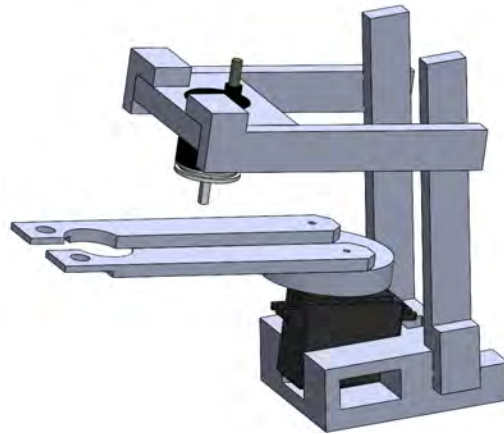


Fig. 3.3. Mecanismo para el sensor de posición.

- *Mecanismo asociado al par aplicado al ángulo del manubrio T_δ :*

Asociado a los mismos elementos que el anterior mecanismo, este contempla un actuador, el cual tiene como principal tarea manipular el marco frontal y a la rueda delantera a fin de dar dirección y estabilizar al vehículo (véase en la Fig. 3.4).

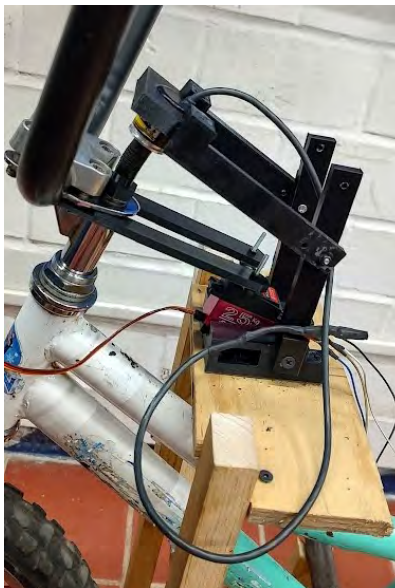


Fig. 3.4. Mecanismo para el actuador.

3.4.2. Componentes electrónicos

La instrumentación del vehículo de dos ruedas únicamente contempla aquellos elementos asociados a uno de los estados del modelo matemático, en este caso se considera como estado medible al ángulo del manubrio δ . Por lo que los elementos considerados para dicha instrumentación son los siguientes:

- **OMRON E6A2 – CWZ3E Rotary ENCODER (INCREMENTAL):**

Es un dispositivo electrónico utilizado para medir posiciones angulares de ejes rotatorios de manera precisa y confiable. Su eje genera pulsos eléctricos de acuerdo al ángulo de movimiento en donde se encuentre ensamblado (OMRON Corporation, sf). En la Tabla 3.5 se presentan las especificaciones importantes asociadas al sensor.

Tabla 3.5. Especificaciones Técnicas del encoder.

Especificación	Descripción
Voltaje de alimentación	5 V DC $\pm 5\%$
Salida	Canal <i>A</i> y <i>B</i> : Determinan la dirección de rotación o movimiento
Resolución	200 pulsos por revolución (PPR)
Frecuencia	100 kHz
Velocidad	600 revoluciones por minuto (rpm)

Este sensor es acoplado con el mecanismo asociado al ángulo del manubrio para entregar la posición angular de los subsistemas (el marco frontal y la rueda delantera) encargados de dar dirección al vehículo de dos ruedas.



Fig. 3.5. Sensor para medir la posición angular del manubrio δ .

- **Servomotor DS3225 MG:**

Es un servomotor de corriente continua que ofrece potencia y presión en múltiples aplicaciones industriales, robótica, etc. Su selección se basa en la capacidad de manipular altas cargas

con una precisión angular exacta en su eje giratorio y, su estructura interna, considera una caja de engranajes de metal capaz de aumentar el par de salida del dispositivo (Teknomovo, sf).

Tabla 3.6. Especificaciones Técnicas del Actuador.

Especificación	Descripción
Voltaje de alimentación	4.8V a 6.8V
Par	20 kg-cm
Ángulo de Rotación	180°
Tipo de Control	PWM (Modulación por ancho de pulso)

Este actuador es acoplado con el mecanismo asociado al par aplicado al manubrio, permitiendo el movimiento o manipulación del marco frontal y la rueda delantera, siendo este uno de los pares considerados en el modelo matemático.



Fig. 3.6. Actuador para manipular el marco frontal del vehículo.

■ **Fototransistor y Fotodiodo:**

Un fotodiodo es un elemento electrónico conversor de energía luminosa en corriente eléctrica. Algunas de sus aplicaciones son la detección de luz de otros sensores, detección óptica, radiación magnética, etc (Garrido et al., 2024).

Un fototransistor es un dispositivo electrónico utilizado para detectar luz infrarroja, transformándola en señales eléctricas. Su estructura considera 3 terminales: Emisor (E), Base (B) y Colector (C). En este caso, la corriente eléctrica entre el colector y el emisor es controlada a través de la luz incidente al fototransistor (Sánchez et al., 2022).

Tabla 3.7. Especificaciones Técnicas del Fototransistor y Fotodiodo.

Especificación	Fototransistor	Fotodiodo
Voltaje de Alimentación	3-15 V DC	5-15 V DC
Señal de Salida	Corriente proporcional a la intensidad de luz incidente.	Corriente o voltaje proporcional a la intensidad de luz.
Tipo de Dispositivo	Semiconductor de tres terminales (colector, base, emisor).	Semiconductor de dos terminales (ánodo y cátodo).

Ambos elementos son ensamblados en la rueda trasera, cuyo objetivo es detectar la presencia de elementos acoplados en los ejes de la rueda.



Fig. 3.7. Sensor para medir la velocidad traslacional v .

El fotodiodo emite una luz infrarroja, mientras que el fototransistor envía información al emisor de acuerdo con la luz incidente en dirección a él (en este caso la luz infrarroja).

Con esto, el fototransistor envía información cuando la luz se ve interrumpida al momento en que la interrumpen los objetos acoplados a los ejes de la rueda trasera. Al girar la llanta, el fototransistor envía en número de veces que la luz fue interrumpida durante un segundo. Con esto se obtiene la frecuencia y , aplicando la fórmula:

$$v = F \frac{2\pi R_w}{nP} \quad (3.6)$$

donde F corresponde a la frecuencia, R_w el radio de la rueda trasera y nP al número de platos o elementos ensamblados en la rueda (28), se obtiene la velocidad traslacional del vehículo.

Esta información se envía a un programa en Arduino que tiene como objetivo recibir la señal cada cierto periodo de tiempo, en este caso cada segundo considerando la frecuencia en ciclos por segundo.

3.4.3. Dispositivos para comunicación

Los componentes electrónicos descritos anteriormente se comunican a nivel software a través del programa *LabVIEW*, esto se logra con los dispositivos de comunicación presentados a continuación:

- **Microcontrolador Arduino NANO:**

Es una placa electrónica basada en un microcontrolador tipo ATmega328P. Su estructura considera 14 pines digitales (6 clasificados como salidas PWM) y 8 pines de entrada analógica. Puerto USB para comunicación y alimentación con la computadora y, I2C y SPI para comunicación con periféricos (Lamatenggo et al., 2020).

El lenguaje de programación de Arduino (en este caso enfocado a la aplicación en servomotores) es la modulación de ancho de pulso, o PWM, técnica para controlar dispositivos analógicos a través de salidas digitales.

El servomotor seleccionado se comunica a través del tipo de dato específico PWM, con ello resultó más simple enlazar este elemento con otro que recibiera el mismo tipo de información. En este caso, se seleccionó un microcontrolador Arduino tipo NANO para emitir y recibir información de movimiento.

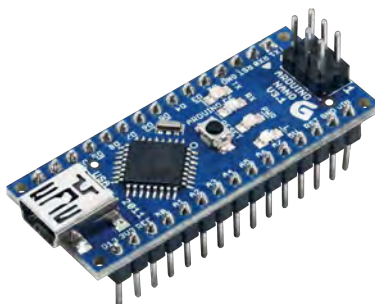


Fig. 3.8. Microcontrolador Arduino NANO.

- **Tarjeta de adquisición de datos NI myRIO:**

Es un dispositivo de *National Instruments*, cuya estructura considera 4 entradas analógicas ($\pm 10V$) y 10 entradas/salidas digitales. También cuenta con conexiones Ethernet, Wifi y

USB para conectividad con una computadora, siendo compatible con el software de *LabVIEW* (Wang et al., 2020).

La tarjeta myRIO es el elemento encargado de recibir la información tanto del sensor de posición angular como del microcontrolador Arduino (elemento encargado de comunicar al actuador), además de comunicar los elementos de la instrumentación con los sistemas de control diseñados en el software de *LabVIEW*.



Fig. 3.9. Tarjeta de adquisición de datos NI myRIO.

Es importante mencionar que la interfaz entre la tarjeta de adquisición de datos NI myRIO (véase en la Fig. 3.9) y el microcontrolador Arduino (véase en la Fig. 3.8) se da a través de una *comunicación serial*: configuración para enviar y recibir datos o información por medio de una conexión entre puertos específicos.

La comunicación dinámica entre ambas tarjetas se da de la siguiente manera:

La tarjeta de adquisición de datos NI myRIO envía al microcontrolador la magnitud y tiempo que este debe de mover al actuador, esto a través de los sistemas de control diseñados en el programa de *LabVIEW*. Por otro lado, el sensor de posición angular del manubrio (o encoder) recibe la posición angular acorde al movimiento que registre y la envía directamente a la tarjeta de adquisición de datos y a los sistemas de control.

Es relevante mencionar que ahora se consideran dos microcontroladores Arduino (uno para la comunicación del servo y otro para la velocidad traslacional). Se tomó esta decisión por el tema de acoplar los tiempos de emisión y recepción de datos. El Arduino asociado a la velocidad traslacional envía y recibe información cada segundo por el tema de la frecuencia, mientras que el Arduino asociado al servomotor envía y recibe información continuamente por la ley de control.

Con los mecanismos contruidos y ensamblados, los componentes electrónicos seleccionados y los elementos de comunicación entre los sistemas de control diseñados en el software de *LabVIEW* (el microcontrolador Arduino NANO y la tarjeta de adquisición de datos NI myRIO), se obtuvieron los resultados presentados posteriormente.

3.5. Diseño de sistemas de control para el vehículo de dos ruedas

Con todo lo anterior, en esta sección se presenta el diseño de los sistemas de control y sus diferencias para cada uno de los experimentos descritos posteriormente según sea el caso.

3.5.1. Caso A. Sistema de control con acción integral en el ángulo del manubrio

Objetivo: Presentar el desarrollo analítico de un primer controlador, considerando una ley de control para estabilizar el vehículo de dos ruedas y una acción integral para regular la posición angular del manubrio. Con esto se propone una ley de control de la forma:

$$u = -K(v(t))x - K_{\delta}(v(t)) \int e_{\delta}(t) dt \quad (3.7)$$

Nota: Por simplicidad, el argumento (t) será omitido en el resto de la descripción. Así mismo, se utilizará la variable x como vector de estados, a fin de generalizar el diseño de sistemas de control y ser congruentes con la teoría aplicada.

En la Ec. (3.7), $K(v)$ y $K_{\delta}(v)$ corresponden al vector de ganancias asociado a la retroalimentación de estados y la acción integral aplicada al ángulo del manubrio δ , respectivamente. Ambas ganancias

se definen matricialmente de la siguiente manera:

$$K(v) = \begin{bmatrix} K_{11}(v) & K_{12}(v) & K_{13}(v) & K_{14}(v) \\ K_{21}(v) & K_{22}(v) & K_{23}(v) & K_{24}(v) \end{bmatrix}, \quad K_{\delta}(v) = [K_{i_{\phi}}(v) \quad K_{i_{\delta}}(v)]^{\top} \quad (3.8)$$

Por otro lado, e_{δ} se define como el error entre la posición angular deseada del manubrio y el ángulo del manubrio, es decir:

$$e_{\delta} = \delta_d - \delta \quad (3.9)$$

Dado que el objetivo del controlador considera una acción integral, se define un estado adicional \dot{e}_{δ} como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\delta} &= r - y \\ \dot{e}_{\delta} &= r - Cx \end{aligned} \quad (3.10)$$

con $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $r = \delta_d$, con el objetivo de extender el vector de estados considerando la posición angular deseada y la real del vehículo de dos ruedas. Finalmente, la dinámica del sistema en lazo cerrado se define de la siguiente manera:

Considerando el sistema definido en la Ec. (2.36) y el estado adicional de la Ec. (3.10), se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(v) & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3.11)$$

Sustituyendo la Ec. (3.7) en (3.11)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(v) & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -BK(v) & -BK_{\delta}(v) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3.12)$$

Simplificando la Ec. (3.12), se tiene la dinámica en lazo cerrado del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(v) - BK(v) & -BK_{\delta}(v) \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3.13)$$

Únicamente existe un estado medido en el vehículo de dos ruedas instrumentado y los sistemas de control requieren que el vector de estados se encuentre disponible o medible, por lo que resulta necesario la inclusión de un observador de estados.

El objetivo de este observador se centra en su diseño, debido a que a través de él se pretende validar la implementación de hardware en el lazo (esto por medio de la solución de la ecuación diferencial de ϕ).

Se demostró que el observador ofrece mejores resultados cuando su diseño incorpora más información del modelo matemático. Con esto, se concluye que la información generada por la instrumentación del vehículo no es suficiente por sí sola. Por tanto, el diseño de este primer observador considera ambas posiciones angulares: un estado medido físicamente (ángulo del manubrio δ) y otro medido virtualmente generado por la ecuación diferencial de ϕ .

Cada sistema de control considera un observador tipo Luenberger definido como:

$$\hat{\dot{x}} = A(v)\hat{x} + Bu + L(v)(y - C\hat{x}) \quad (3.14)$$

donde $L(v)$ corresponde a la ganancia del observador. Con esto, $L(v)$ y C quedan definidas de la siguiente manera:

$$L(v) = \begin{bmatrix} L_{11}(v) & L_{12}(v) & L_{13}(v) & L_{14}(v) \\ L_{21}(v) & L_{22}(v) & L_{23}(v) & L_{24}(v) \end{bmatrix}^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

En la Tabla 3.8, se presentan los estados utilizados para el diseño de este observador, incluyendo un estado medido físicamente y otro medido de forma virtual. En la Ec. (3.15) se presentan ambos estados definidos matricialmente.

Tabla 3.8. Estados contemplados para el diseño del observador 1.

Acrónimo	Significado
ϕ_e	Ángulo de Balanceo Ecuación ($^\circ$)
δ	Ángulo del manubrio ($^\circ$)

Es importante aclarar que el observador diseñado generará todo el vector de estados estimados, definiéndose como uno de orden completo.

Por otro lado, la ecuación diferencial de ϕ representa aquellos elementos asociados al balanceo del vehículo de dos ruedas. Su estructura y solución se desarrolla con los estados relacionados con el

manubrio.

En la Tabla 3.9 se muestran los estados seleccionados para la solución de la ecuación diferencial de ϕ . Analizando la Ec. (3.5), la solución también considera ambas fuerzas de entrada generalizada contempladas en el modelo matemático.

Tabla 3.9. Estados contemplados para la solución de la ecuación diferencial de ϕ .

Acrónimo	Significado
δ	Ángulo del manubrio
$\dot{\delta}$	Velocidad Angular del Manubrio Estimado

Considerando las Ecs. (3.9) y (3.5.1), la dinámica del control basado en observador con una acción integral, se define de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_\delta \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(v) - BK(v) & -BK_\delta(v) & BK(v) \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(v) - L(v)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_\delta \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (3.16)$$

definiendo así la dinámica del sistema en lazo cerrado, considerando el error de estimación de estados asociado al observador.

3.5.2. Caso B. Sistema de control con acciones integrales en el ángulo de balanceo y manubrio

Objetivo: Presentar el desarrollo analítico del segundo controlador, considerando una ley de control para estabilizar al vehículo y dos acciones integrales para regular la posición angular del balanceo y manubrio. Con esto, se propone una ley de control de la forma:

$$u = -K(v(t))x - K_\phi(v(t)) \int e_\phi(t) dt - K_\delta(v(t)) \int e_\delta(t) dt \quad (3.17)$$

Nota: Por simplicidad, el argumento (t) será omitido en el resto de la descripción. Así mismo, se utilizará la variable x como vector de estados, a fin de generalizar el diseño de sistemas de control y ser congruentes con la teoría aplicada.

En la Ec. (3.17), $K(v)$, $K_\phi(v)$ y $K_\delta(v)$ corresponden al vector de ganancias asociado a la retroalimentación de estados y las acciones integrales aplicadas al ángulo de balanceo ϕ y del manubrio δ , respectivamente.

Del mismo modo, $K(v)$ y $K_\delta(v)$ se definen conforme a la Ec. (3.8), mientras que $K_\phi(v)$ toma la forma:

$$K_\phi(v) = \begin{bmatrix} K_{j_\phi}(v) \\ K_{j_\delta}(v) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Igualmente, e_ϕ se define como el error entre la posición angular deseada y el ángulo de balanceo generado por la solución de la ecuación diferencial, es decir:

$$e_\phi = \phi_d - \phi_e \quad (3.19)$$

Dado que el presente controlador persigue el mismo objetivo, se considera la inclusión de un estado adicional que contemple ambas acciones integrales, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}} &= r - y \\ \tilde{e} &= r - Cx \end{aligned} \quad (3.20)$$

A causa de ambas acciones integrales, C y r se reescriben como:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} \phi_d \\ \delta_d \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Con todo lo anterior, la dinámica del sistema en lazo cerrado queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(v) - BK(v) & -BK_\delta(v) \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3.22)$$

Por otro lado, el diseño del observador considera las mismas características descritas anteriormente.

En la Tabla 3.8 se presentan los estados seleccionados (*ambas posiciones angulares*) para su diseño, la Ec. (3.15) define la matriz C declarada en la Ec. (3.14) asociada al observador de estados considerado para este sistema de control.

Del mismo modo, la solución de la ecuación diferencial de ϕ considera las mismas condiciones y características descritas en el caso anterior: la Ec. (3.5) define la estructura de la ecuación diferencial de ϕ y la Tabla 3.9 se presentan los elementos considerados para su solución.

Con todo lo anterior, la dinámica en lazo cerrado basado en observador queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{e}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(v) - BK(v) & -BK_{\delta}(v) & BK(v) \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(v) - L(v)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{e} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (3.23)$$

3.5.3. Caso C. Sistema de control con acción integral en el ángulo del manubrio y una modificación en el observador

El observador diseñado en el Caso A considera mayor información por parte de los elementos definidos en la Tabla 3.8. Sin embargo, a nivel implementación resulta más accesible medir la velocidad angular del balanceo que su posición angular, con ello se tomó la decisión de evaluar condiciones distintas.

Objetivo: Validar la implementación de hardware en el lazo a través del diseño del observador. A diferencia del anterior, este considera una distinción crucial en la información utilizada para el diseño del observador: un estado medido físicamente y otro medido virtualmente generado por la ecuación diferencial de ϕ (velocidad angular de balanceo $\dot{\phi}_e$).

Tabla 3.10. Estados contemplados para el diseño del observador Caso C

Acrónimo	Significado
δ	Ángulo del manubrio ($^{\circ}$)
$\dot{\phi}_e$	Velocidad Angular de Balanceo Ecuación ($^{\circ}/s$)

En la Tabla 3.10 se presentan los elementos seleccionados para el diseño del observador. Retomando la Ec. (3.14), L se define como la ganancia asociada al observador, y el elemento C es determinado de la siguiente manera:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Este sistema de control considera como ley de control a la Ec. (3.7) cuyo objetivo es estabilizar en posición vertical al vehículo de dos ruedas y regular la posición angular del manubrio en referencias deseadas. Con esto, las condiciones y características dadas en el Caso **A** de las Ecs. (3.7)-(3.14) son iguales. Así mismo, la ecuación diferencial de ϕ y su solución contemplan los mismos elementos definidos en la Tabla 3.9 así como las características definidas anteriormente.

3.5.4. Caso D. Sistema de control con acciones integrales en el ángulo de balanceo y manubrio con modificación en el observador

Uno de los principales propósitos de agregar dos acciones integrales en el sistema de control, es programar *referencias angulares deseadas* en ambas posiciones y con ello validar el acoplamiento y comportamiento dinámico del sistema en lazo cerrado con el controlador diseñado. Del mismo modo, se pretende validar la efectividad de implementar hardware en el lazo a través del diseño del observador.

Objetivo: Estabilizar y regular la posición angular del balanceo y manubrio de un vehículo de dos ruedas instrumentado. En él, se consideran dos acciones integrales aplicadas que afecta cada posición angular del vehículo.

Con todo lo anterior, las características del controlador se definen en las Ecs. (3.17)-(3.19) (condiciones descritas en el Caso *B*), mientras que la información asociada a la ecuación diferencial de ϕ toma la misma configuración que en cada controlador descrito en este capítulo. Finalmente, el observador es diseñado con las condiciones descritas en el Caso *C*.

Tabla 3.11. Estados contemplados para el diseño del observador Caso **D**

Acrónimo	Significado
δ	Ángulo del manubrio ($^{\circ}$)
$\dot{\phi}_e$	Velocidad Angular de Balanceo Ecuación ($^{\circ}/s$)

En la Tabla 3.11 se presentan los elementos seleccionados para el diseño del observador. Retomando la Ec. (3.14), L se define como la ganancia asociada al observador, y el elemento C es determinada

de la siguiente manera:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

3.6. Conclusiones

En este capítulo se describen los aspectos importantes a considerar en el diseño de cada sistema de control. Se muestra de manera detallada la información de cada uno de los elementos que conforma un sistema de control: Parte real de sistema, un observador de estados y la solución de la ecuación diferencial de ϕ .

También, se muestran los elementos considerados para la instrumentación del vehículo de dos ruedas, además de la forma de comunicación entre la parte física-externa y a nivel software.

En este capítulo se presentan las características importantes en el diseño de cada sistema de control. Se describen cada uno de los elementos implicados en un esquema de control (una parte real, un observador y la solución de la ecuación diferencial de ϕ). Esto último se realiza para explicar el acoplamiento dinámico a través de la generación de un nuevo vector de estados considerando hardware en el lazo.

En este caso, se explica detalladamente las consideraciones de cada uno de los elementos contemplados en un sistema de control (elementos reales, estimados y virtuales).

CAPÍTULO 4

RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en cada experimento realizado, donde cada uno corresponde a un sistema de control diseñado con la teoría descrita en el capítulo 3 (esto depende del caso de cada controlador y observador según el objetivo de control) y aplicado al vehículo de dos ruedas instrumentado.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera:

En la sección 4.1 se presentan los resultados de los experimentales considerando al sistema lineal invariante en el tiempo. Con esto, se considera una velocidad traslacional constante, enfocando cada experimento al control de posiciones angulares del vehículo de dos ruedas, según sea el caso.

En la sección 4.2 se describen los resultados experimentales de los sistemas de control considerando Ganancias Programadas. En este caso, se consideran dos casos: una velocidad traslacional virtual programada en el software de *LabVIEW* y otra contemplando a la velocidad traslacional como una medición física a través de un sensor acoplado a la rueda trasera del vehículo de dos ruedas.

El modelo matemático del vehículo de dos ruedas define su comportamiento dinámico como inestable y dependiente de la velocidad traslacional v , determinándolo así un sistema LPV (Sistema lineal de parámetros variables). Sin embargo, el presente capítulo aborda el diseño de sistemas de control considerando dos enfoques: Sistemas LTI (sistema lineal invariante en el tiempo) y Sistemas

LPV.

Es importante mencionar que cada uno de los sistemas de control descritos en el presente reporte validan la efectividad de considerar en su diseño una parte real del sistema (el marco frontal y la rueda delantera del vehículo de dos ruedas), un observador y el hardware en lazo, contemplado entre ellos una dinámica dependiente de cada elemento.

4.1. Estabilización de un vehículo de dos ruedas considerando Sistemas LTI

El diseño de los siguientes sistemas de control contemplan una velocidad traslacional constante con un valor de $v = 1.271 \text{ m/s}$. Se menciona que cada sistema de control fue diseñado por el método de colocación de polos.

A continuación, se enlistan los experimentos implementados en el vehículo de dos ruedas instrumentado considerando al sistema LTI:

- **Experimento 1.** Estabilización con acción integral en el ángulo del manubrio.
- **Experimento 2.** Estabilización con acción integral en ángulo del balanceo y manubrio.
- **Experimento 3.** Estabilización con acción integral en el ángulo del manubrio con variante en el observador.
- **Experimento 4.** Estabilización con acción integral en ángulo del balanceo y manubrio con variante en el observador.

Nota: Dado que la condición del sistema se define como LTI, el término v será omitido durante esta sección.

4.1.1. Experimento 1. Estabilización con acción integral en el ángulo del manubrio

Objetivo del experimento: Estabilizar en posición vertical el vehículo de dos ruedas y regular la posición angular del manubrio por medio de referencias deseadas. Además, se pretende validar el

comportamiento dinámico entre una parte del sistema real, un observador y la ecuación diferencial de ϕ .

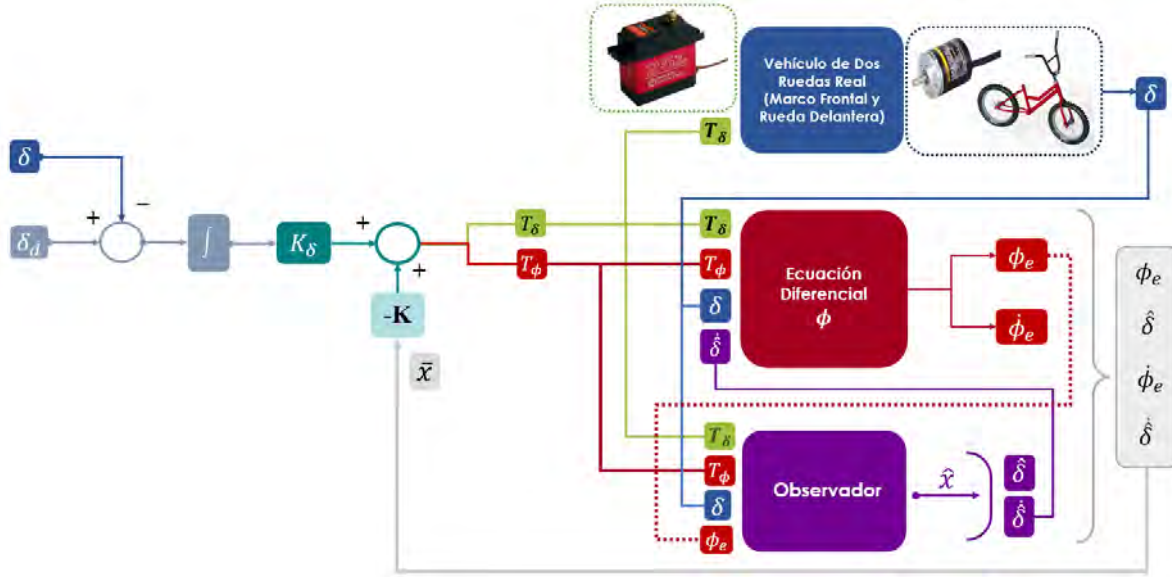


Fig. 4.1. Esquema del *Experimento 1*.

Configuración del experimento: El sistema de control diseñado para este experimento hace uso de la teoría descrita en el Caso A: Reescribiendo la ley de control definida en la Ec. (3.7), se tiene que:

$$u(t) = -Kx(t) - K_\delta \int e_\delta(t) dt \quad (4.1)$$

Nota: Por simplicidad, el argumento (t) será omitido en el resto de la descripción.

donde \bar{x} el vector de estados definido como $\bar{x} = [\phi_e \quad \hat{\delta} \quad \dot{\phi}_e \quad \dot{\hat{\delta}}]^\top$ y, K , K_δ y e_δ se definen en las Ecs. (3.8)-(3.9), respectivamente. Con esto, la ley de control se puede expandir de la siguiente manera:

$$T_\phi = -(K_{11}\phi_e + K_{12}\hat{\delta} + K_{13}\dot{\phi}_e + K_{14}\dot{\hat{\delta}}) - K_{i_\phi} \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.2)$$

$$T_\delta = -(K_{21}\phi_e + K_{22}\hat{\delta} + K_{23}\dot{\phi}_e + K_{24}\dot{\hat{\delta}}) - K_{i_\delta} \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.3)$$

En esta formulación, los elementos en color **rojo** son generados y aplicados virtualmente por la ecuación diferencial de ϕ , los elementos en **morado** son generados por el observador, y los elementos **azul** son los reales. K_{i_ϕ} y K_{i_δ} corresponden al vector de ganancias K_δ , matricialmente definido

como:

$$K_{\delta} = \begin{bmatrix} K_{i_{\phi}} \\ K_{i_{\delta}} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Mientras que, δ_d la posición angular deseada del manubrio. Esta lógica también se considera en lo contenido en la Fig. 4.1. Con esto se concluye que el diseño de este controlador considera en su dinámica ***una parte real, una estimada y hardware en el lazo.***

Los coeficientes matriciales del vector de ganancias K se calculan con el comando *place* de *MATLAB* contemplando los polos $P = [-1 \ -1.5 \ -2 \ -2.5 \ -3]$, buscando no tener oscilaciones en su respuesta y asegurar un tiempo de convergencia ideal tal que el estado alcance la referencia programada, teniendo como resultado:

$$K = \begin{bmatrix} 7.4737 & -7.7740 & 4.0928 & 0.1028 \\ 1.2681 & 3.3938 & 1.1051 & 1.5823 \end{bmatrix}, \quad K_{\delta} = [-0.4011 \ -2.6691]^T \quad (4.5)$$

De igual manera, considerando al observador cuya estructura se define en la Ec. (3.14), el vector de ganancias L se calcula con el comando *place* de *MATLAB*, teniendo en cuenta los polos $P_o = [-12.1 \ -12.2 \ -12.3 \ -12.4]$, dando como resultado:

$$L = \begin{bmatrix} 24.3301 & 1.1972 & 149.0399 & 25.5359 \\ -0.1688 & 22.1054 & -13.4340 & 96.5953 \end{bmatrix}^T \quad (4.6)$$

Se tuvieron en cuenta ciertas condiciones para el desarrollo de la simulación:

- Se utilizó el software de *LabVIEW* y la librería de *Control & Simulation* para el diseño y simulación del sistema de control a implementar.
- Se considera un paso de integración fijo de $h = 0.05$ con el propósito de sincronizar el tiempo de simulación del software con el tiempo real.
- La simulación considera *Runge-Kutta 1 (Euler)* como método de integración para el sistema de control y el modelo matemático en general.
- Finalmente, las condiciones iniciales para el sistema y el observador fueron $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

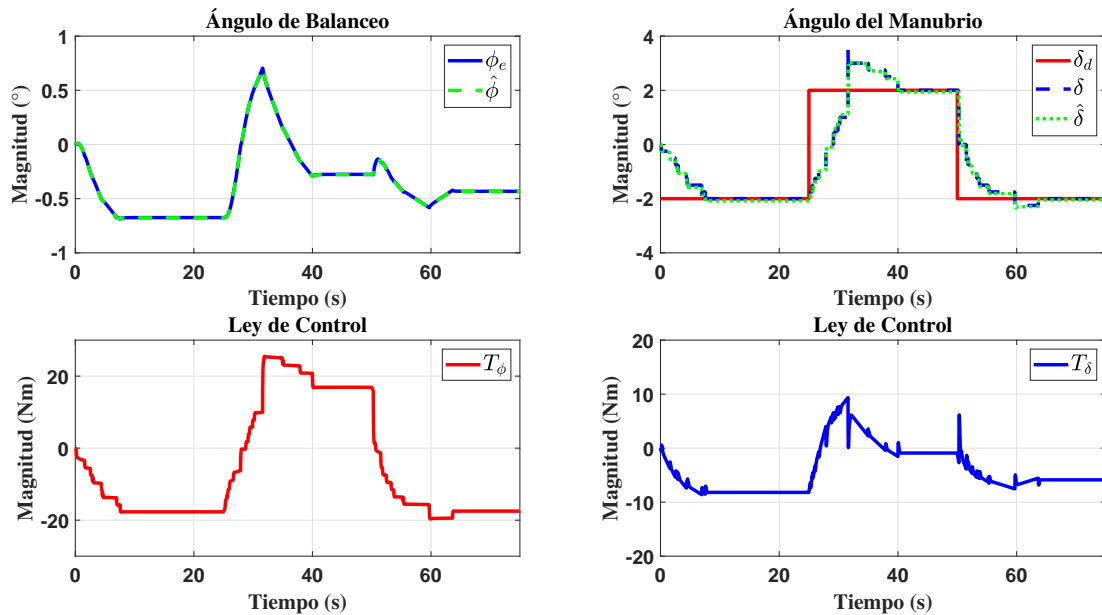


Fig. 4.2. Resultados del *Experimento 1*: Posiciones Angulares y Leyes de Control.

En la Fig. 4.2, se presentan los resultados del *Experimento 1*: La acción integral aplicada al ángulo del manubrio tiene programados cambios de referencia cada 25 segundos, en la gráfica se muestra que δ y $\hat{\delta}$ toman valores iguales a la posición angular deseada δ_d durante cierto tiempo de simulación.

En la Fig. 4.3, se muestra el resultado de la diferencia entre la posición angular deseada y δ durante el tiempo de simulación, validando el argumento antes mencionado.

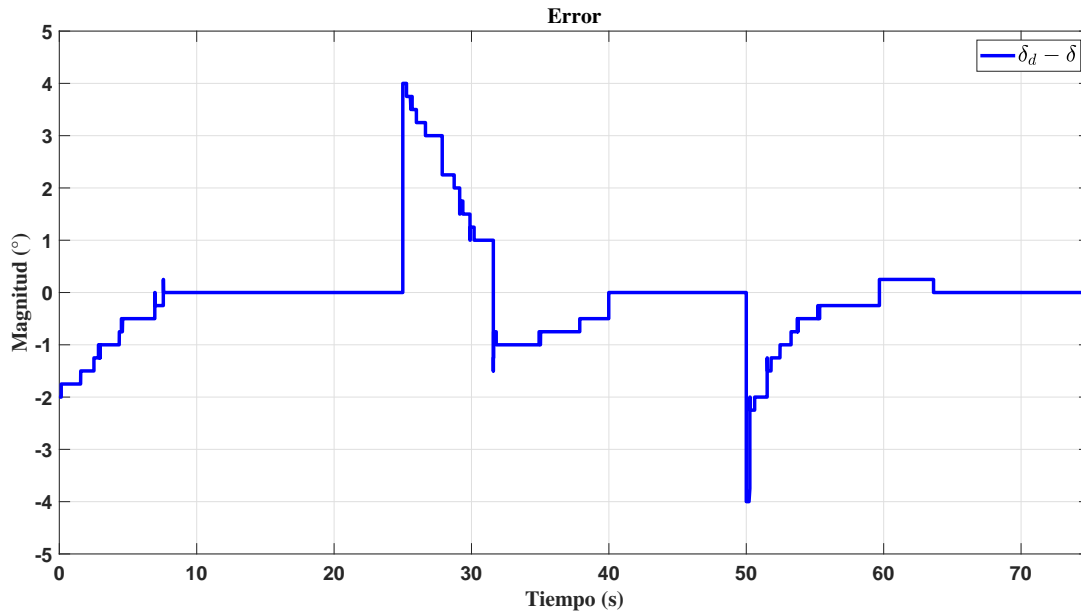


Fig. 4.3. Resultados del *Experimento 1*: Error entre δ_d y δ .

Retomando la Fig. 4.2, el ángulo de balanceo ϕ_e y $\hat{\phi}$ reportan un comportamiento idéntico durante el tiempo de simulación. En la gráfica se analiza que la posición angular deseada δ_d tiene un efecto sobre el comportamiento del ángulo de balanceo, sin embargo, su valor indica que el vehículo de dos ruedas es estable.

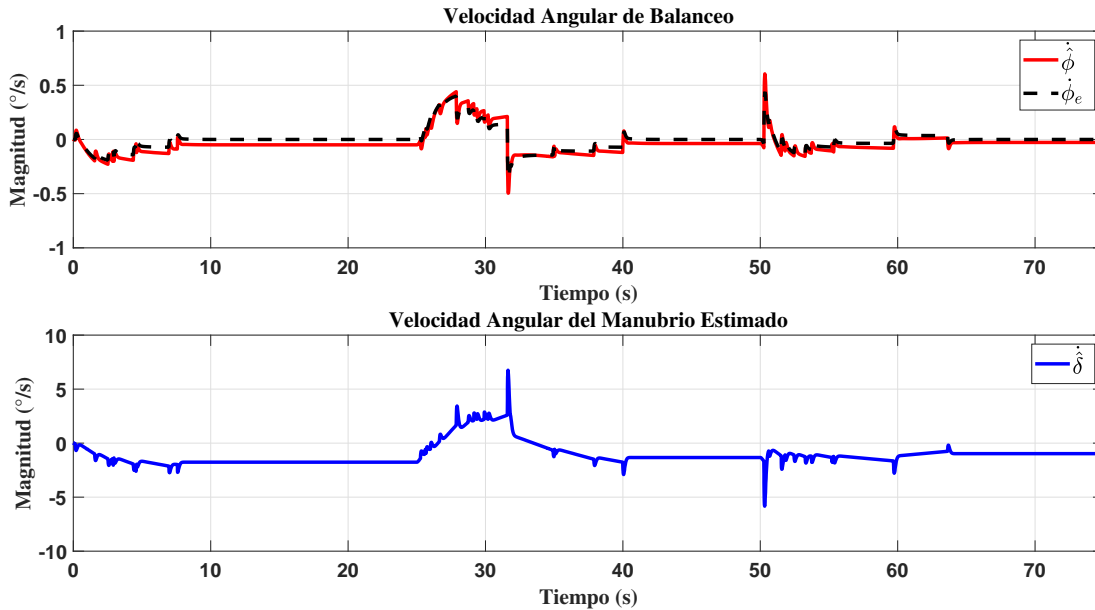


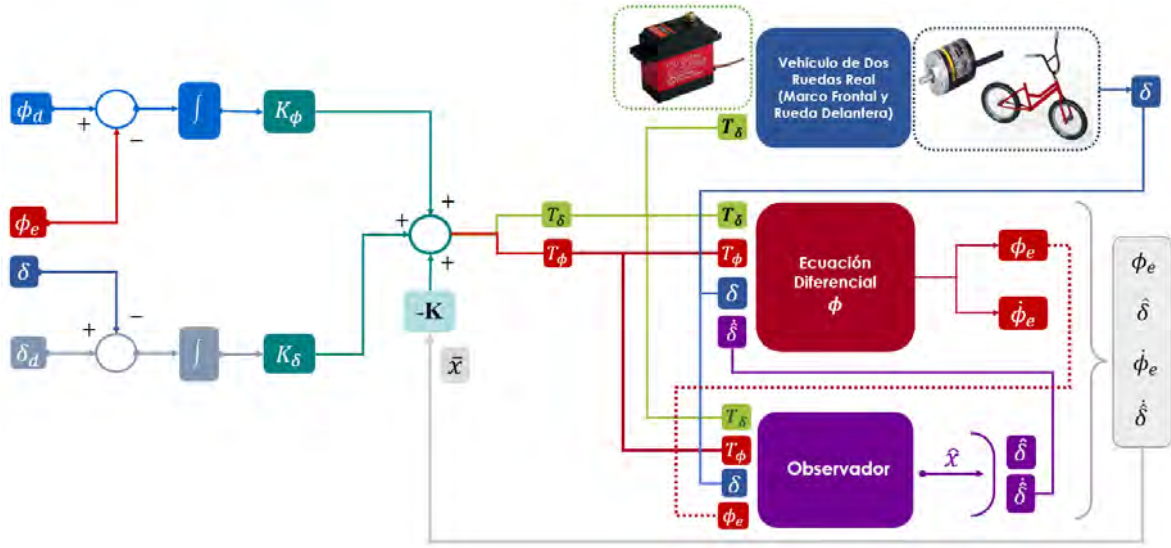
Fig. 4.4. Resultados del *Experimento 1*: Velocidades angulares.

Finalmente, en la Fig. 4.4 se presentan las velocidades angulares asociadas a cada posición angular descrita anteriormente. En este caso, el comportamiento y valor de cada estado generado por el observador y la ecuación diferencial de ϕ son iguales. Con esto, se valida la efectividad de implementar hardware en el lazo.

Con este experimento se ha evaluado el acoplamiento entre el sistema real, el observador y la solución de la ecuación diferencial de ϕ , verificando que el vehículo de dos ruedas se estabiliza y, que los estados estimados y los generados por la ecuación diferencial del balanceo son similares.

4.1.2. Experimento 2. Estabilización con acción integral en el ángulo de balanceo y manubrio

Objetivo del experimento: Estabilizar en posiciones angulares deseadas el ángulo de balanceo y manubrio a través de acciones integrales incorporadas en la ley de control diseñada para este sistema de control.


 Fig. 4.5. Esquema del *Experimento 2*.

Configuración del experimento: El sistema de control diseñado para este 2do experimento emplea la teoría descrita en el Caso B: Reescribiendo la ley de control definida en la Ec. (3.17), se tiene que:

$$u(t) = -K\bar{x}(t) - K_\phi \int e_\phi(t) dt - K_\delta \int e_\delta(t) dt \quad (4.7)$$

Nota: Por simplicidad, el argumento (t) será omitido en el resto de la descripción.

donde \bar{x} el vector de estados definido como $\bar{x} = [\phi_e \quad \hat{\delta} \quad \dot{\phi}_e \quad \dot{\hat{\delta}}]^\top$, mientras que las variables restantes se definen y describen en lo contenido en el Caso B descrito anteriormente. Teniendo esto en cuenta, la ley de control se expande de la siguiente forma:

$$T_\phi = -(K_{11}\phi_e + K_{12}\hat{\delta} + K_{13}\dot{\phi}_e + K_{14}\dot{\hat{\delta}}) - K_{j_\phi} \int (\phi_d - \phi_e) dt - K_{i_\phi} \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.8)$$

$$T_\delta = -(K_{21}\phi_e + K_{22}\hat{\delta} + K_{23}\dot{\phi}_e + K_{24}\dot{\hat{\delta}}) - K_{j_\delta} \int (\phi_d - \phi_e) dt - K_{i_\delta} \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.9)$$

De manera similar al *Experimento 1*, la formulación de la ley de control considera un acoplamiento dinámico entre los tres elementos importantes del experimento: los elementos en color **rojo** son generados y aplicados virtualmente por la ecuación diferencial de ϕ , los elementos en **morado** son generados por el observador, y los elementos **azul** son los reales. Esta lógica también se considera en lo contenido en la Fig. 4.5.

K_{j_ϕ} y K_{j_δ} corresponden al vector de ganancias de K_ϕ , mientras que K_{i_ϕ} y K_{i_δ} corresponden al vector de ganancias K_δ . Ambos vectores se definen de la siguiente manera:

$$K_\phi = \begin{bmatrix} K_{j_\phi} \\ K_{j_\delta} \end{bmatrix}, \quad K_\delta = \begin{bmatrix} K_{i_\phi} \\ K_{i_\delta} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Los coeficientes matriciales de cada vector de ganancias se calculan con el comando *place* de MATLAB, teniendo en cuenta los polos $P = [-2 \quad -2.5 \quad -3 \quad -3.5 \quad -4 \quad -4.5]$, buscando eliminar oscilaciones en su respuesta y asegurar un tiempo de convergencia ideal para cada posición angular deseada. Con esto, el vector de ganancias se define como:

$$K = \begin{bmatrix} 34.4607 & -9.1334 & 9.8666 & 0.0865 \\ 3.5163 & 11.8375 & 1.7160 & 3.2111 \end{bmatrix}, \quad K_\phi = \begin{bmatrix} -31.1290 \\ -1.7052 \end{bmatrix} \quad K_\delta = \begin{bmatrix} 3.1586 \\ -13.3285 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Y, dado que también es considerado el diseño de un observador, el vector de ganancias L de la Ec. (3.14) es calculado con el comando *place* de MATLAB con los siguientes polos $P_o = [-10.1 \quad -10.2 \quad -10.3 \quad -10.4]$, teniendo como resultado lo siguiente:

$$L = \begin{bmatrix} 20.3182 & 1.1921 & 104.6081 & 20.8660 \\ -0.1620 & 18.1174 & -12.4632 & 61.2673 \end{bmatrix}^\top \quad (4.12)$$

Se tuvieron en cuenta ciertas condiciones para el desarrollo de la simulación:

- Se utilizó el software de *LabVIEW* y la librería de *Control & Simulation* para el diseño y simulación del sistema de control a implementar.
- Se considera un paso de integración fijo de $h = 0.05$ con el propósito de sincronizar el tiempo de simulación del software con el tiempo real.
- La simulación considera *Runge-Kutta 1 (Euler)* como método de integración para el sistema de control y el modelo matemático en general.
- Finalmente, las condiciones iniciales para el sistema y el observador fueron $x(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^\top$

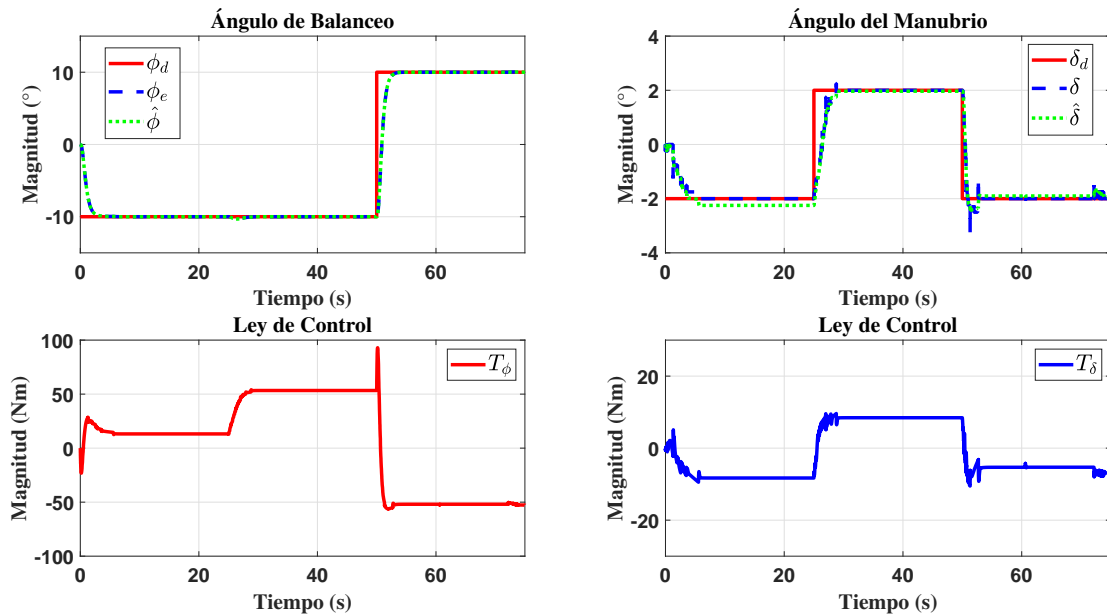


Fig. 4.6. Resultados del *Experimento 1*: Posiciones Angulares y Leyes de Control.

En la Fig. 4.6, se presentan los resultados asociados a las posiciones angulares, donde ambos consideran cambios de referencia en distinto tiempo: el ángulo del manubrio tiene programados cambios de $\pm 2^\circ$ cada 25 segundos de simulación. Mientras que el ángulo de balanceo únicamente tiene programado un cambio de referencia en $t = 50s$.

En las gráficas se observa que ambas posiciones angulares tienen efecto una con la otra, debido a que su comportamiento se ve afectado por los cambios de referencia. Así mismo, los estados generados por el observador y la ecuación diferencial de ϕ validan el funcionamiento del *experimento*, dado que su comportamiento y valor es igual.

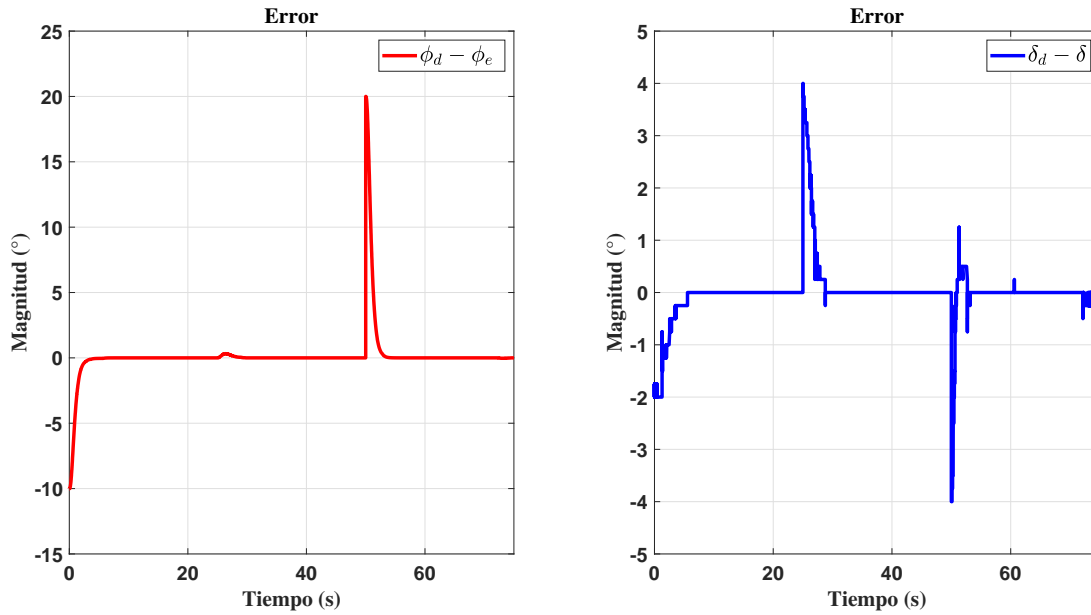


Fig. 4.7. Resultados del *Experimento 1*: Error entre $(\delta_d - \delta)$ y $(\phi_d - \phi_e)$.

En la Fig. 4.7 se presentan los resultados asociados a las acciones integrales, particularmente hablando de las diferencias entre las referencias deseadas y el estado medido o virtual.

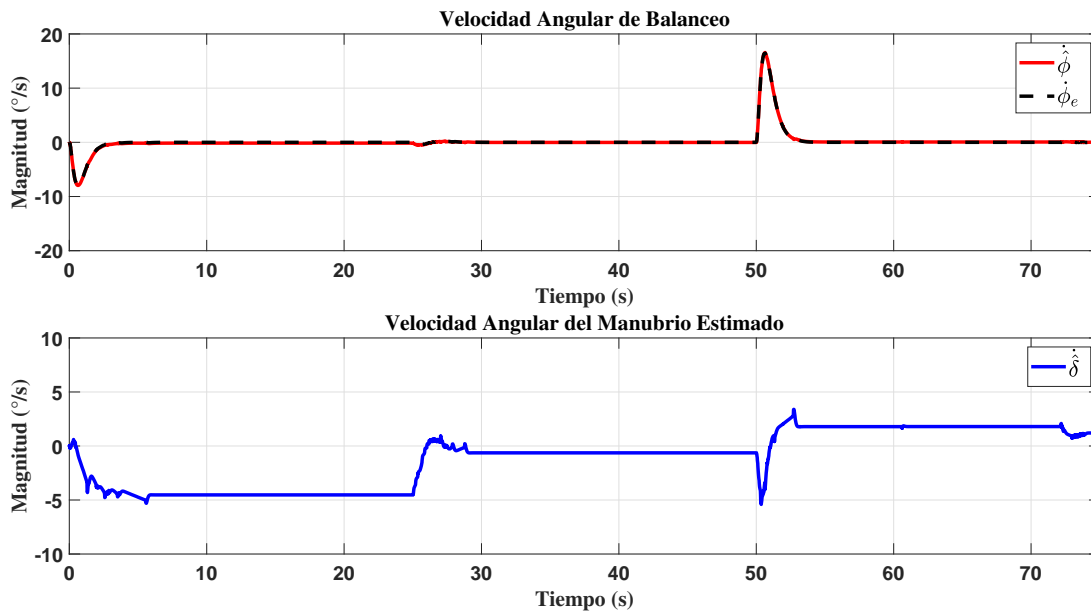


Fig. 4.8. Resultados del *Experimento 2*: Velocidades angulares.

Finalmente, en la Fig. 4.8 se muestran las velocidades angulares de cada posición angular y se realiza una comparación de cada estado estimado y generado por la ecuación diferencial de ϕ .

Con los resultados del experimento se ha evaluado el acoplamiento entre el sistema real, el observador y la solución de la ecuación diferencial de ϕ considerando la inclusión de dos acciones integrales en el sistema de control. Se verifica que las posiciones angulares convergen a la referencia, estabilizando y regulando al vehículo de dos ruedas en posiciones deseadas.

4.1.3. Experimento 3. Estabilización con acción integral en el ángulo del manubrio con variante en el observador

Objetivo del experimento: Estabilizar y regular las posiciones angulares del vehículo de dos ruedas en referencias deseadas programadas. Considerando el objetivo descrito en el Caso C, se pretende validar la implementación del hardware en el lazo, incluyendo una distinción crucial en la información utilizada para el diseño del observador. En este caso, en la Tabla 3.11 y en el esquema de control presentado en la Fig. 4.9 se definen los estados considerados para definir su diseño.

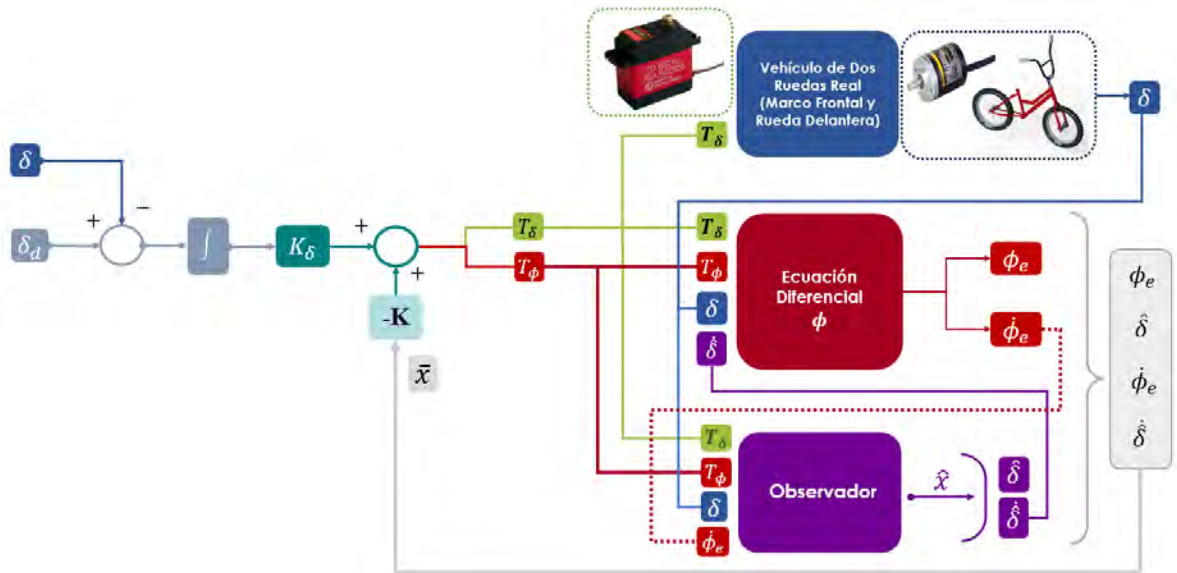


Fig. 4.9. Esquema del *Experimento 3*.

Configuración del experimento: El sistema de control diseñado e implementado en este experimento incluye la teoría y características descritas en el Caso C.

Considerando que el objetivo es similar al definido en el *Experimento 1*, se retoma la ley de control definida y su descripción de las Ec. (4.1)-(4.3).

Con esto, el cálculo de los coeficientes matriciales de los vectores de ganancias asociados a la retroalimentación de estados y la acción integral considerada en el ángulo del manubrio se realiza por medio del comando *place* de *MATLAB* seleccionando los polos $P = [-2 \quad -2.5 \quad -3 \quad -3.5 \quad -4]$, a fin de evitar oscilaciones en su respuesta y asegurar un tiempo de convergencia ideal tal que la el estado real alcance la posición angular deseada. Los resultados particulares dan como resultado:

$$K = \begin{bmatrix} 12.5936 & -5.8232 & 6.1417 & 0.5728 \\ 2.0794 & 10.2156 & 1.4346 & 2.9598 \end{bmatrix}, \quad K_\delta = \begin{bmatrix} -2.2791 \\ -10.7809 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Por otro lado, y a diferencia de los experimentos previamente descritos, se considera el diseño de un observador con información generada por la solución de la ecuación diferencial de ϕ . En este caso, se consideran dos estados: uno real (δ) y uno virtual ($\dot{\phi}_e$). Con esto, la matriz C considerada se define como:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Y, la inclusión del observador con la estructura definida en la Ec. (3.14), también considera al vector de ganancias L calculado con el comando *place* de *MATLAB* con los polos, $P_o = [-9.1 \quad -9.2 \quad -9.3 \quad -9.4]$ generando el siguiente resultado:

$$L = \begin{bmatrix} 7.2656 & 16.1209 & -7.7931 & 46.9912 \\ 25.4964 & 0.1643 & 18.3147 & 3.0694 \end{bmatrix}^\top \quad (4.15)$$

Se tomaron en cuenta las siguientes condiciones para el desarrollo de la simulación:

- Se utilizó el software de *LabVIEW* y la librería de *Control & Simulation* para el diseño y simulación del sistema de control a implementar.
- Se considera un paso de integración fijo de $h = 0.05$ con el propósito de sincronizar el tiempo de simulación del software con el tiempo real.
- La simulación considera *Runge-Kutta 1 (Euler)* como método de integración para el sistema de control y el modelo matemático en general.

- Finalmente, las condiciones iniciales para el sistema y el observador fueron $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

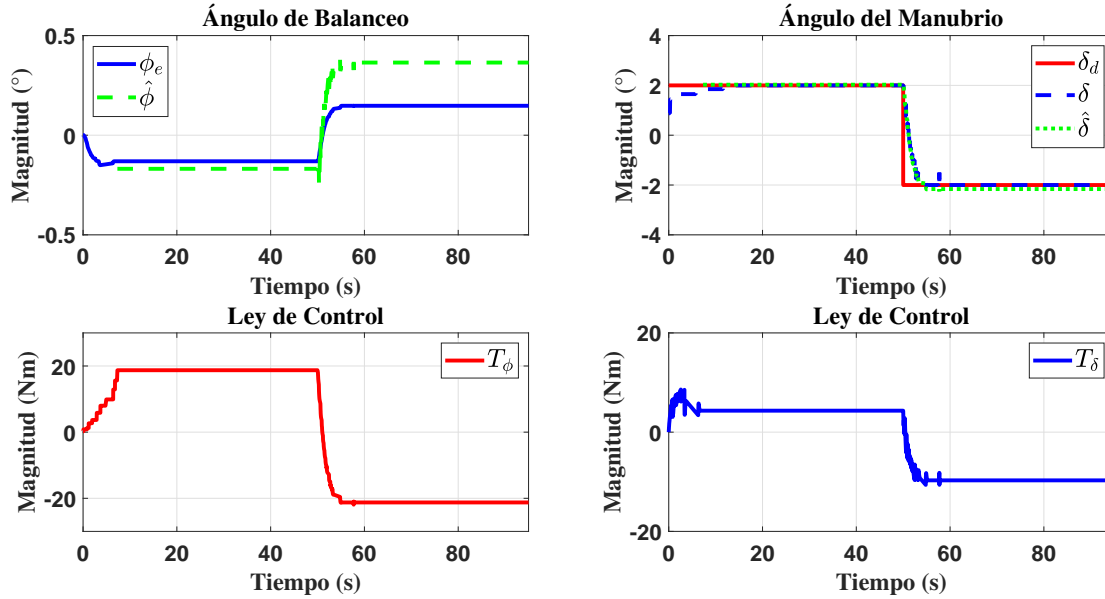


Fig. 4.10. Resultados del *Experimento 3*: Posiciones Angulares y Leyes de Control.

Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 4.10, en la cual se observa el correcto funcionamiento de la acción integral aplicada al ángulo del manubrio, ya que el estado converge a la referencia deseada. Mientras que, $\hat{\delta}$ también valida el funcionamiento del observador, debido a que su valor y comportamiento siguen al estado real y la referencia deseada.

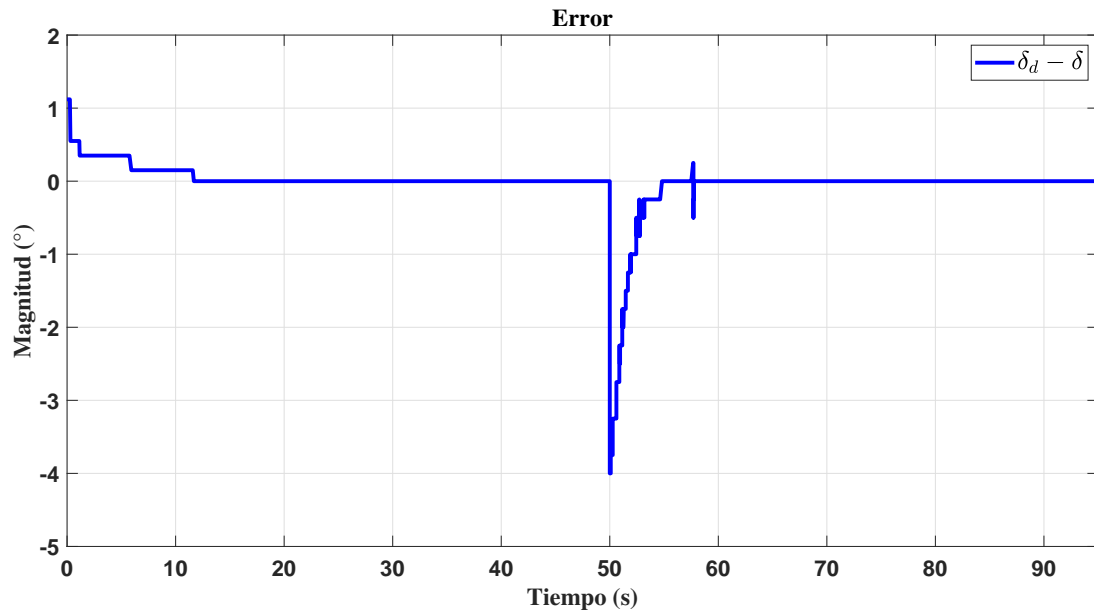


Fig. 4.11. Resultados del *Experimento 3*: Error entre $(\delta_d - \delta)$.

El efecto de la acción integral también se puede validar a través de lo presentado en la Fig. 4.11. Sus valores muestran que la diferencia entre ambos toma un valor 0 durante cierto tiempo de simulación.

Por otro lado, los resultados asociados al ángulo de balanceo presentados en la Fig. 4.10 verifican que el vehículo es estable cerca de su punto de operación, a pesar de la mínima diferencia entre el estado estimado y el virtual.

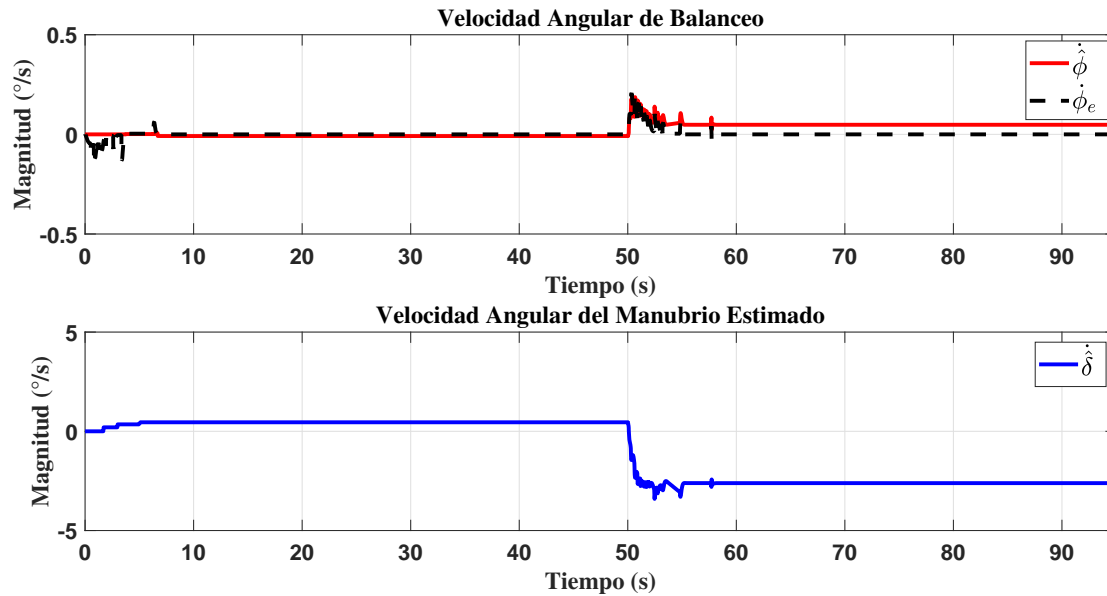


Fig. 4.12. Resultados del *Experimento 3*: Velocidades angulares.

Finalmente, en la Fig. 4.12 se muestran las velocidades angulares generadas por el observador y la ecuación diferencial de ϕ . Sus resultados validan el acoplamiento dinámico entre ambos elementos, ya que son similares.

Con este experimento se han evaluado las ventajas y/o posibilidades de implementar hardware en el lazo, ya que aun considerando una variante en el diseño del observador, el sistema de control continúa estabilizando al vehículo de dos ruedas en su posición vertical considerando posiciones angulares deseadas en el manubrio.

4.1.4. Experimento 4. Estabilización con acción integral en el ángulo de balanceo y manubrio con variante en el observador

Objetivo del experimento: Retomando el objetivo del experimento antes descrito, se considera la inclusión de otra acción integral aplicada en el ángulo de balanceo (ϕ_e) con el fin de manipular dicha posición angular en referencias deseadas.

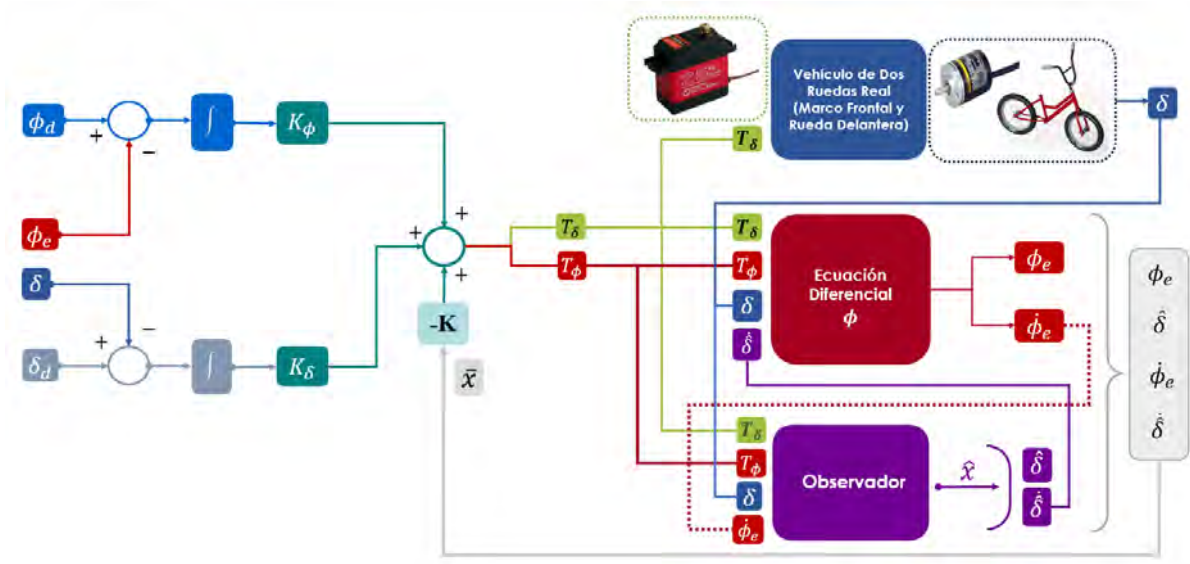


Fig. 4.13. Esquema del Experimento 4.

En la Fig. 4.13, se presenta el esquema de control asociado al presente experimento, donde claramente se muestran las acciones integrales aplicadas a las posiciones angulares y la dinámica de acoplamiento o conexión entre el sistema real, el observador y la ecuación diferencial de ϕ .

Configuración del experimento: El sistema de control diseñado emplea la teoría y características analizadas en el Caso *D* descrito anteriormente. Con esto, y lo definido por el esquema de control presentado en la Fig. 4.13, la ley de control aplicada en este experimento se describe en la Ec. (4.7), es decir:

$$T_\phi = -(K_{11}\phi_e + K_{12}\hat{\delta} + K_{13}\dot{\phi}_e + K_{14}\dot{\hat{\delta}}) - K_{j_\phi} \int (\phi_d - \phi_e) dt - K_{i_\phi} \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.16)$$

$$T_\delta = -(K_{21}\phi_e + K_{22}\hat{\delta} + K_{23}\dot{\phi}_e + K_{24}\dot{\hat{\delta}}) - K_{j_\delta} \int (\phi_d - \phi_e) dt - K_{i_\delta} \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.17)$$

Cada valor de coeficiente matricial K descrito en las Ecs. (4.16) y (4.17) se calcula por medio del comando *place* de *MATLAB* seleccionando los polos $P = [-2 \ -2.5 \ -3 \ -3.5 \ -4 \ -4.5]$, cuyo objetivo es evitar oscilaciones en su respuesta y asegurar un tiempo de convergencia ideal para ambos estados afectados por las acciones integrales. Las ganancias de este sistema de control se definen de la siguiente manera:

$$K = \begin{bmatrix} 34.4607 & -9.1334 & 9.8666 & 0.0865 \\ 3.5163 & 11.8375 & 1.7160 & 3.2111 \end{bmatrix}, \quad K_\phi = \begin{bmatrix} -31.1290 \\ -1.7052 \end{bmatrix} \quad K_\delta = \begin{bmatrix} 3.1586 \\ -13.3285 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

En cuanto al observador, su objetivo es idéntico al sistema de control descrito anteriormente, por lo que la matriz C se define de acuerdo a la Ec. (4.14). Mientras que la ganancia L se calcula con el comando *place* de *MATLAB* y con los polos $P_o = [-4 \quad -4.2 \quad -4.3 \quad -4.4]$, cuyos valores resultan en lo siguiente:

$$L = \begin{bmatrix} 0.9753 & 6.0247 & -8.2926 & 2.9827 \\ 6.1442 & 0.0383 & 8.3109 & 1.5613 \end{bmatrix}^T \quad (4.19)$$

Se tomaron en cuenta las siguientes condiciones para el desarrollo de la simulación:

- Se utilizó el software de *LabVIEW* y la librería de *Control & Simulation* para el diseño y simulación del sistema de control a implementar.
- Se considera un paso de integración fijo de $h = 0.05$ con el propósito de sincronizar el tiempo de simulación del software con el tiempo real.
- La simulación considera *Runge-Kutta 1 (Euler)* como método de integración para el sistema de control y el modelo matemático en general.
- Finalmente, las condiciones iniciales para el sistema y el observador fueron $x(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

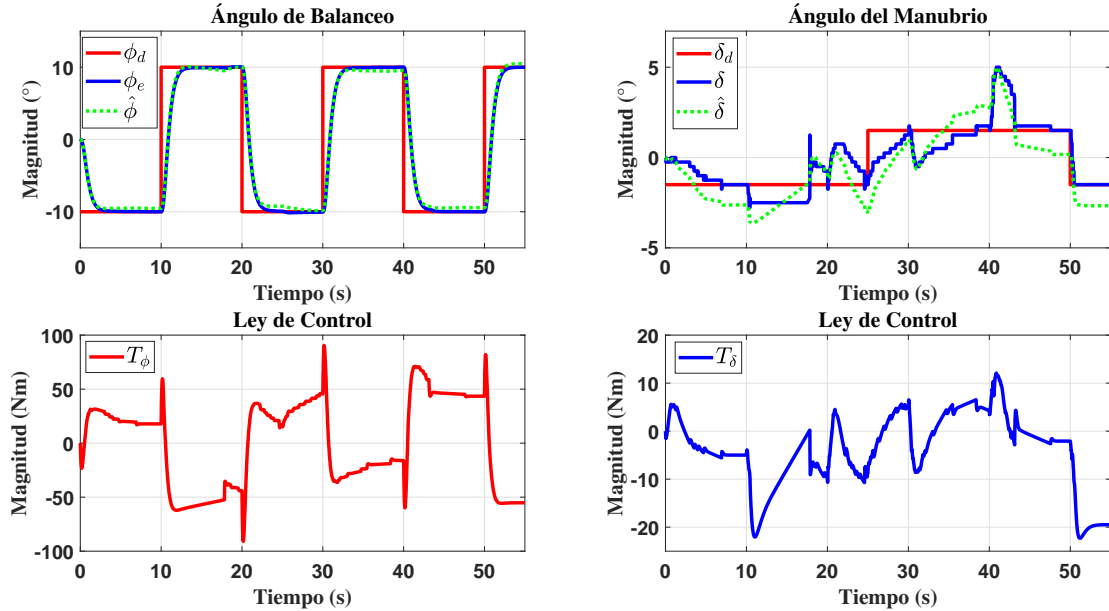


Fig. 4.14. Resultados del *Experimento 4*: Posiciones Angulares y Leyes de Control.

En la Fig. 4.14, se muestran las gráficas correspondientes a las posiciones angulares afectadas por las acciones integrales, en el cual se observa que cada estado converge a la referencia o posición angular deseada.

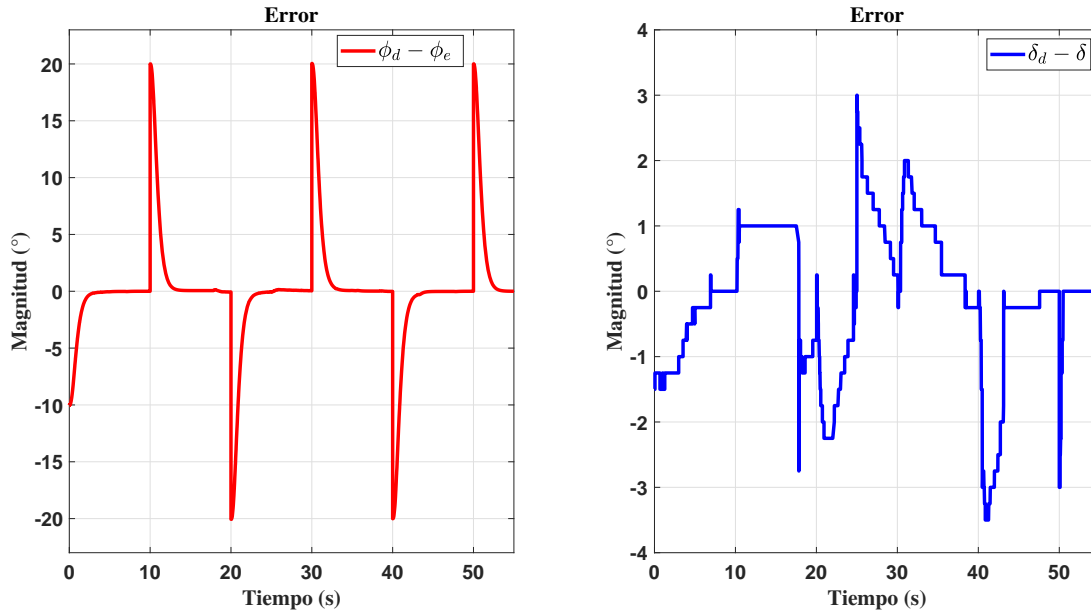


Fig. 4.15. Resultados del *Experimento 4*: Error entre $(\phi_d - \phi_e)$ y $(\delta_d - \delta)$.

En la Fig. 4.15, se puede observar el correcto funcionamiento de las acciones integrales, ya que el valor del error entre la referencia deseada y el estado toma un valor de 0 durante cierto tiempo de simulación.

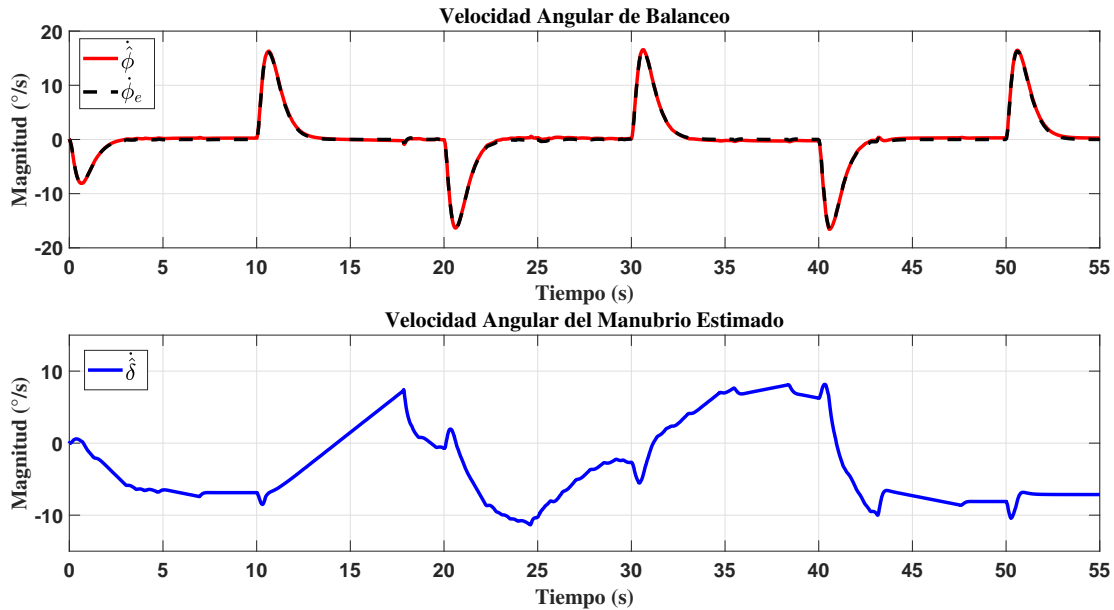


Fig. 4.16. Resultados del *Experimento 4*: Velocidades angulares.

Por otra parte, en la Fig. 4.16, se tienen los resultados de las velocidades angulares correspondientes a cada estado antes presentado. Se muestra el acoplamiento dinámico entre el observador y la ecuación diferencial de ϕ , dado que sus resultados son idénticos.

Con los resultados del experimento se ha evaluado que el desempeño del sistema de control considerando la inclusión de otra acción integral aplicada al balanceo. Se verifica la dinámica entre el comportamiento dinámico del sistema real y los resultados generados por el observador y la ecuación diferencial de ϕ .

4.2. Estabilización de un vehículo de dos ruedas considerando velocidad traslacional variable y Ganancias Programadas

El diseño de los siguientes experimentos consideran una velocidad traslacional *variable* con un rango de cambio de $v(t) = 3$ a 0 m/s. En este caso, se consideran dos enfoques importantes sobre la velocidad traslacional:

1. Una velocidad traslacional medida virtualmente, considerada también parte importante del hardware en el lazo.
2. Una velocidad traslacional medida físicamente por medio de dos sensores de posición implementados en la rueda trasera del vehículo de dos ruedas.

Debido a que los sistemas de control consideran la velocidad traslacional como variable, la representación en espacio de estados del vehículo de dos ruedas toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(v)x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{4.20}$$

con:

$$A(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.5058 & 0.6422 - 5.7184v^2 & -0.1368v & -0.2235v \\ 0.3138 & 0.3015 - 0.4209v^2 & 0.8739v & -1.8809v \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0330 & -0.3603 \\ -0.3603 & 2.3023 \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $A(v)$ cambiará de valor a medida que la velocidad presente variaciones respecto al tiempo.

A continuación, se enlistan los experimentos implementados en el vehículo de dos ruedas instrumentado considerando Ganancias Programadas (GP):

- **Experimento 5.** Estabilización con acción integral en el ángulo del manubrio y una velocidad traslacional decreciente por medio de GP.
- **Experimento 6.** Estabilización con acción integral en ángulo del balanceo y manubrio con una velocidad traslacional decreciente por medio de GP.
- **Experimento 7.** Estabilización con dos acciones integrales, una variante en el observador decreciente por medio de GP.
- **Experimento 8.** Estabilización con dos acciones integrales y una velocidad traslacional variable por medio de GP.

4.2.1. Experimento 5. Estabilización con acción integral en el ángulo del manubrio y una velocidad traslacional decreciente por medio de GP

Objetivo del experimento: Estabilizar en posición vertical al vehículo de dos ruedas y manipular el ángulo del manubrio por medio de posiciones angulares deseadas, esto considerando una acción integral. Además, se pretende validar la implementación de hardware en el lazo a partir de la consideración de la velocidad traslacional variable como una medición virtual.

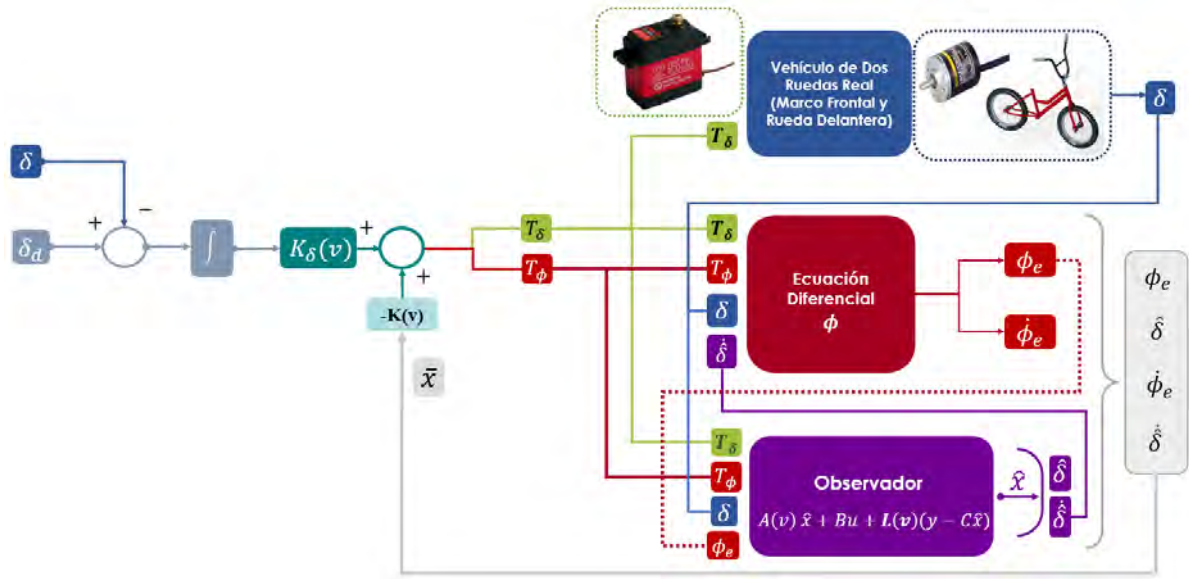


Fig. 4.17. Esquema del *Experimento 5*.

El diseño de este sistema de control considera las mismas condiciones en el sistema real, el observador y la ecuación diferencial de ϕ descritas en el *Experimento 1* (véase en la Fig. 4.17).

Con esto, las leyes de control definidas en las Ecs. (4.2) y (4.3) se reescriben de la siguiente manera:

$$T_\phi = -(K_{11}(v)\phi_e + K_{12}(v)\hat{\delta} + K_{13}(v)\hat{\dot{\phi}}_e + K_{14}(v)\hat{\dot{\delta}}) - K_{i_\phi}(v) \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.22)$$

$$T_\delta = -(K_{21}(v)\phi_e + K_{22}(v)\hat{\delta} + K_{23}(v)\hat{\dot{\phi}}_e + K_{24}(v)\hat{\dot{\delta}}) - K_{i_\delta}(v) \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.23)$$

Además de lo ya definido, se reafirma que el diseño del sistema de control incorpora tanto parte real como una estimada en su dinámica, junto con el hardware en el lazo.

Como ya se definió anteriormente, la velocidad traslacional es considerada una medición virtual, cuya programación la define como decreciente, en este caso, tomando valores de $v(t)=1.5 \text{ m/s}$ a 0.1 m/s . En la Fig. 4.18, se presenta la velocidad traslacional considerada para el presente experimento, contemplando el cambio de velocidad en tiempo de simulación de 35 segundos.

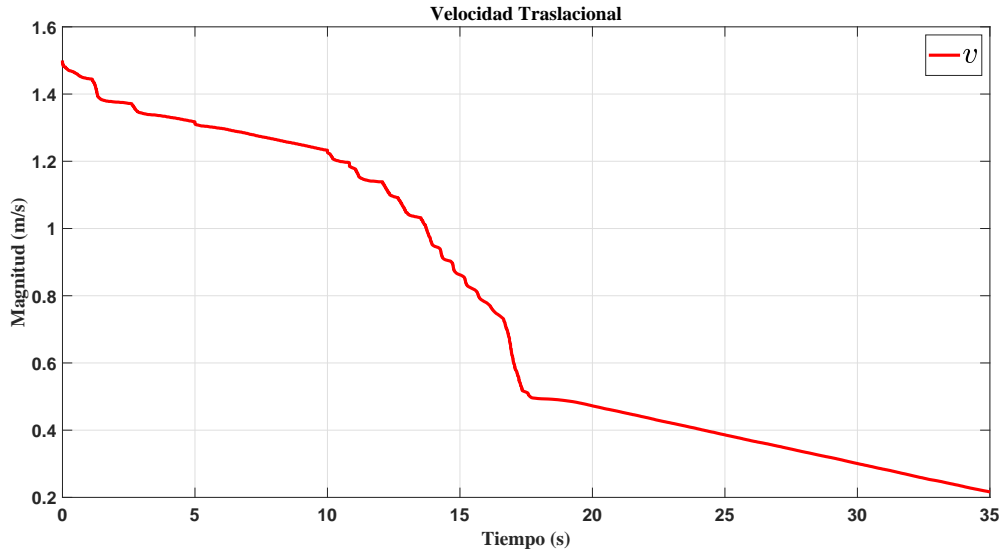


Fig. 4.18. Velocidad traslacional en el *Experimento 5*.

Retomando la Ec. (4.2) y (4.3), el valor de cada ganancia en ambas leyes de control se calcula por medio del comando *place* de *MATLAB* con los polos $P = [-2 \quad -2.5 \quad -3 \quad -3.5 \quad -4]$, buscando no tener una respuesta oscilatoria que afecte al actuador.

Cada coeficiente perteneciente al vector de ganancias definidas en ambas leyes de control se considera dependiente de la velocidad traslacional y, dado que esta última decrece, se programaron funciones para cada ganancia discretizando el valor de la velocidad traslacional en un rango de 0 a 3 m/s., las cuales son calculadas de la siguiente manera:

Una vez definido el rango y discretizado el valor de la velocidad, en el software de *MATLAB* se calculan las ganancias correspondientes a cada valor de velocidad discretizado con el comando *place*. Es decir, si el valor discretizado define 300 valores de j dentro del rango de velocidad definido, el comando *place* a través de los polos seleccionados según sea el caso, calculará 300 ganancias correspondientes a cada valor discretizado en cada coeficiente matricial.

Una vez teniendo las ganancias de cada coeficiente, se procede a hacer una interpolación lineal y obtener una función que aproxime el comportamiento de cada ganancia en función de v . Así, cada vez que se evalúe esta función, dará como resultado la ganancia correspondiente a dicha velocidad.

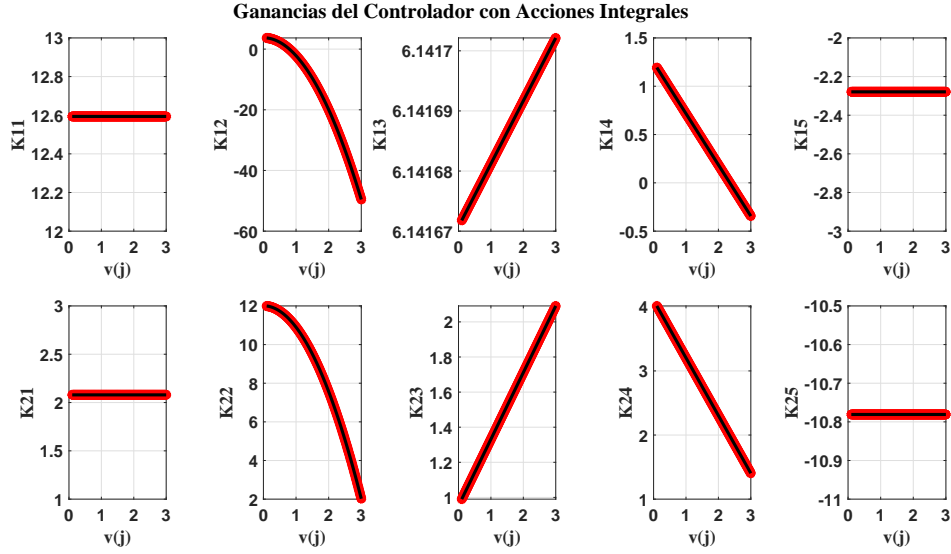


Fig. 4.19. Ganancias programadas del vector $K(v)$ del *Experimento 5*.

Como se observa en la Fig. 4.19, las ganancias fueron calculadas considerando el rango de velocidad traslacional de 0 a 3 m/s . En este caso, y como ya se describió anteriormente, la matriz $A(v)$ se transforma en $A(j)$ donde el término j es:

$$j = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 2.8, 2.9, 3\} \quad (4.24)$$

definiéndola como la discretización del rango establecido para $v(t)$, es decir, $A(j)$ representa a $A(v)$ para valor de j en:

$$0 \text{ m/s} \leq v(t) \leq 3 \text{ m/s} \quad (4.25)$$

Con lo antes mencionado y considerando la Fig. 4.19, los valores discretizados (definidos en la Ec. (4.24)) de cada ganancia a partir de j en el rango de velocidad establecido se representa por medio de *asteriscos* en color rojo. Debido a que la discretización considera cambios muy pequeños, estos valores se aprecian juntos y continuos, cuando en realidad no lo son. Por esta razón, se consideraron interpolaciones lineales para la aproximación a una función cuya evaluación para la velocidad traslacional se presenta en color negro.

En la Ec. (4.26), se presentan las funciones del vector de ganancias de controlador producto de la interpolación lineal, cuyo valor se verá afectado por la velocidad traslacional decreciente.

$$\begin{aligned}
 K11 &= 12.6936 \\
 K12 &= -5.9227(v^2) + 3.7446 \\
 K13 &= 6.1417 \\
 K14 &= -0.5302(v) + 1.2467 \\
 K15 &= -2.2791 \\
 K21 &= 2.0794 \\
 K22 &= -1.1097(v^2) + 12.0083 \\
 K23 &= 0.3796(v) + 0.9521 \\
 K24 &= -0.8999(v) + 4.1037 \\
 K25 &= -10.7809
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Del mismo modo, es importante aclarar que, la etiqueta $K11$ hace referencia al elemento del vector K en su *fila 1, columna 1*, misma interpretación a lo contenido en la Fig. 4.19.

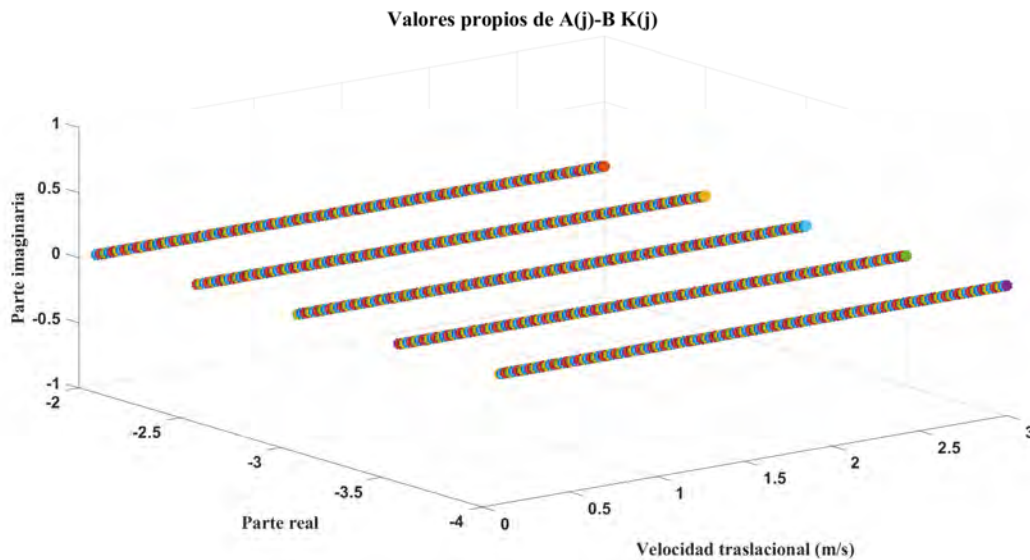


Fig. 4.20. Valores propios de $A(j) - BK(j)$ del *Experimento 5*.

En la Fig. 4.20, se muestra la localización y comportamiento de los valores propios del sistema en lazo cerrado, verificando que a medida que la velocidad cambia, estos mantienen su valor de

acuerdo a los polos definidos.

De acuerdo con el esquema de control presentado en la Fig. 4.17, se considera el diseño de un observador tipo Luenberger con la estructura:

$$\hat{\dot{x}}(t) = A(v)\hat{x}(t) + Bu(t) + L(v)(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (4.27)$$

Donde $L(v)$ es el vector de ganancias del observador calculado por medio del comando *place* de MATLAB con los polos $P_o = [-12.1 \ -12.2 \ -12.3 \ -12.4]$. Dado que el vector $L(v)$ se compone de coeficientes cuyos valores cambian en función de v , se programaron funciones para cada coeficiente, aproximando su comportamiento particular ante el cambio de velocidad en función del tiempo. Como se ve en la Fig. 4.21, las ganancias fueron calculadas considerando el mismo rango de velocidad traslacional de **0 a 3 m/s**.

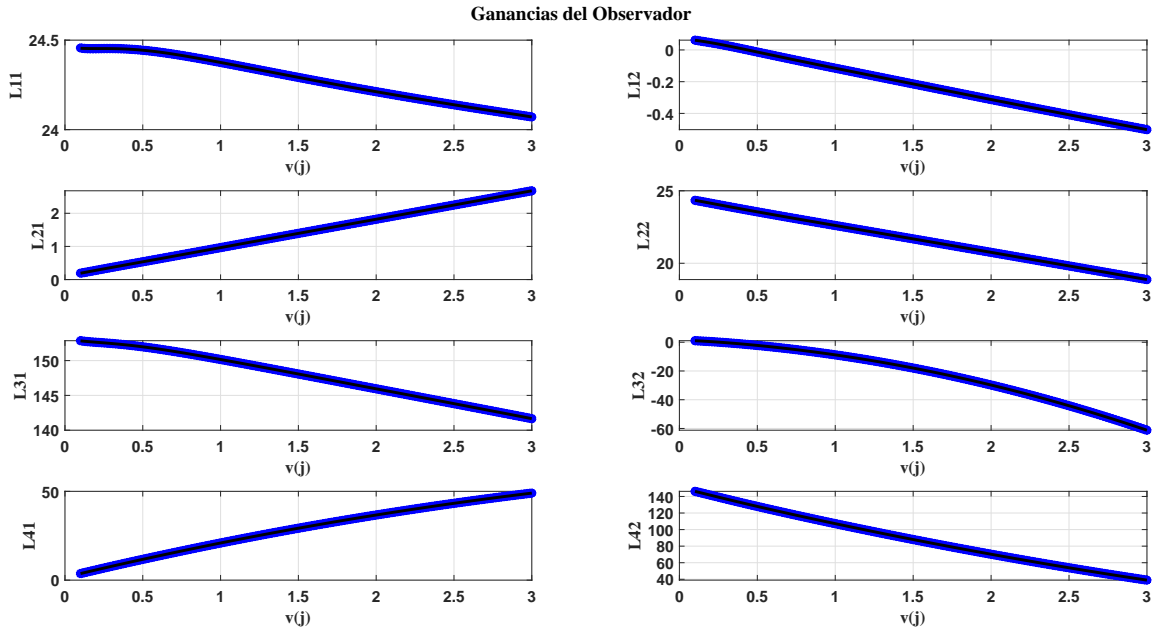


Fig. 4.21. Ganancias programadas del vector $L(v)$ del *Experimento 5*.

En las Ecs. (4.28)-(4.35), se presentan las funciones del vector de ganancias de controlador producto de la interpolación lineal, cuyo valor se verá afectado por la velocidad traslacional decreciente.

$$\begin{aligned} L11 = & 0.0042(v^9) + 0.0631(v^8) - 0.4016(v^7) + 1.4193(v^6) - 3.0319(v^5) + 3.9781(v^4) \\ & - 3.0577(v^3) + 1.1400(v^2) - 0.1950v + 24.4653 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}
 L21 = & 0.0001(v^9) + 0.0092(v^8) - 0.0478(v^7) + 0.1216(v^6) - 0.1360(v^5) - 0.0197(v^4) \\
 & + 0.2071(v^3) - 0.1946(v^2) + 0.9244v + 0.1009
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
 L31 = & -0.0514(v^9) + 0.7682(v^8) - 4.8929(v^7) + 17.2928(v^6) - 36.9448(v^5) + 48.4727(v^4) \\
 & - 37.2394(v^3) + 13.6853(v^2) - 4.0646v + 153.1327
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
 L41 = & -0.0074(v^9) + 0.0946(v^8) - 0.4810(v^7) + 1.1835(v^6) - 1.2087(v^5) - 0.4666(v^4) \\
 & + 2.2847(v^3) - 3.7683(v^2) + 21.7247v + 1.5521
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
 L12 = & -0.0001(v^9) + 0.0003(v^8) + 0.0071(v^7) - 0.0669(v^6) + 0.2594(v^5) - 0.5489(v^4) \\
 & + 0.6668(v^3) - 0.4478(v^2) - 0.0556v + 0.0407
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
 L22 = & 0.0042(v^9) + 0.0631(v^8) - 0.4016(v^7) - 1.4193(v^6) + 3.0319(v^5) - 3.9781(v^4) \\
 & + 3.0577(v^3) - 1.1400(v^2) - 1.8226v + 24.5347
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
 L32 = & -0.0012(v^9) + 0.0039(v^8) + 0.0867(v^7) - 0.8094(v^6) + 3.1321(v^5) - 6.6106(v^4) \\
 & + 8.0117(v^3) - 10.6500(v^2) - 3.4537v + 1.5048
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
 L42 = & 0.0505(v^9) - 0.7540(v^8) + 4.7936(v^7) - 16.8959(v^6) + 35.9477(v^5) - 46.8338(v^4) \\
 & + 35.5132(v^3) - 9.9119(v^2) - 45.5343v + 150.7922
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Es importante señalar que cada una de las funciones se definen como polinomios de 9° orden, buscando minimizar el error entre lo medido y los resultados generados por el observador. Este resultado se obtuvo a través de múltiples pruebas realizadas con el prototipo instrumentado.

En la Fig. 4.21 la etiqueta $L11$ hace referencia al elemento de L en su *fila 1, columna 1*, misma interpretación a lo contenido en la figura.

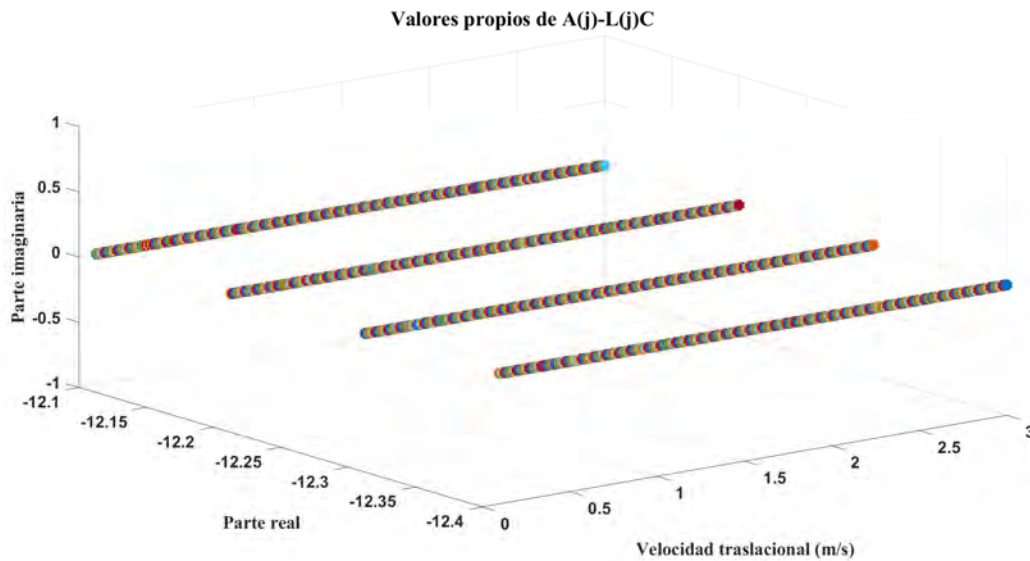


Fig. 4.22. Valores propios de $A(j) - L(j)C$ del *Experimento 5*.

Dado que el cálculo de las ganancias del observador depende de las matrices $A(v)$ y C , la matriz $A(v)$ se transforma en $A(j)$ discretizando de la misma manera que en la Ec. (4.24) para el rango de velocidad establecido.

En la Fig. 4.22, se presenta el comportamiento de los valores propios del observador en lazo cerrado. En este caso, la nueva matriz $A(j) - L(j)C$ tiene definido el mismo valor de polos utilizados para calcular la ganancia $L(v)$ a medida que la velocidad traslacional cambia de valor. Se tomaron en cuenta las siguientes condiciones para el desarrollo de la simulación:

- Se utilizó el software de *LabVIEW* y la librería de *Control & Simulation* para el diseño y simulación del sistema de control a implementar.
- Se considera un paso de integración fijo de $h = 0.05$ con el propósito de sincronizar el tiempo de simulación del software con el tiempo real.
- La simulación considera *Runge-Kutta 1 (Euler)* como método de integración para el sistema de control y el modelo matemático en general.
- Finalmente, las condiciones iniciales para el sistema y el observador fueron $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

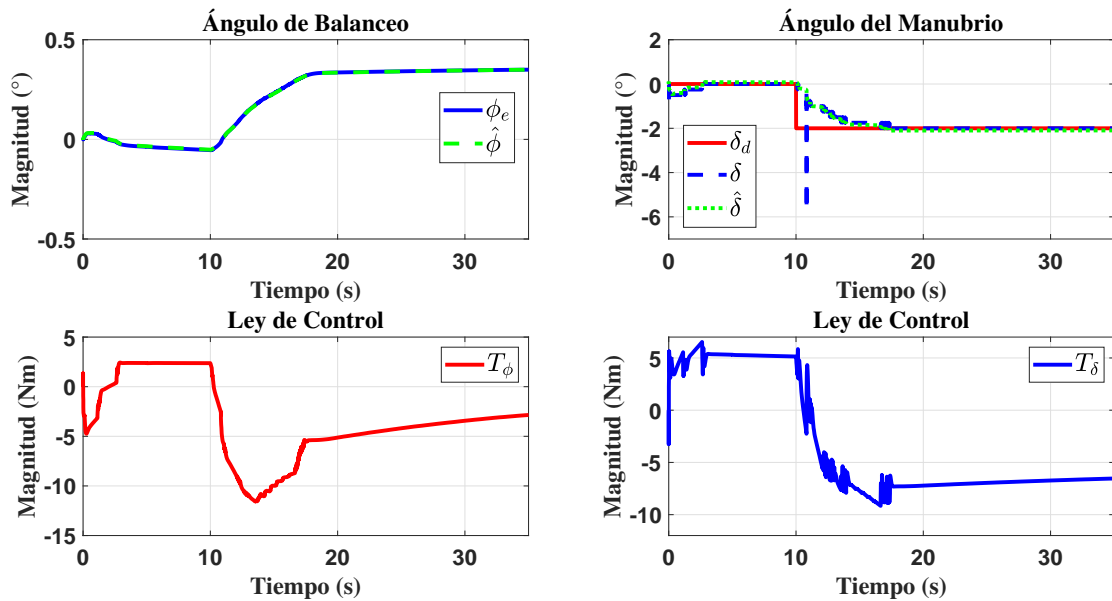


Fig. 4.23. Resultados del *Experimento 5*: Posiciones Angulares y Leyes de Control.

En la Fig. 4.23, se muestran las gráficas relacionadas con las posiciones angulares y las leyes de control, en la cual se verifica que δ (estado afectado por la acción integral) converge a la referencia deseada durante cierto tiempo de simulación. Así mismo, los resultados asociados al ángulo de balanceo presentan una mínima variación en su respuesta a consecuencia del cambio de referencia programado en δ . Sin embargo, su valor se muestra cerca del punto de operación 0° .

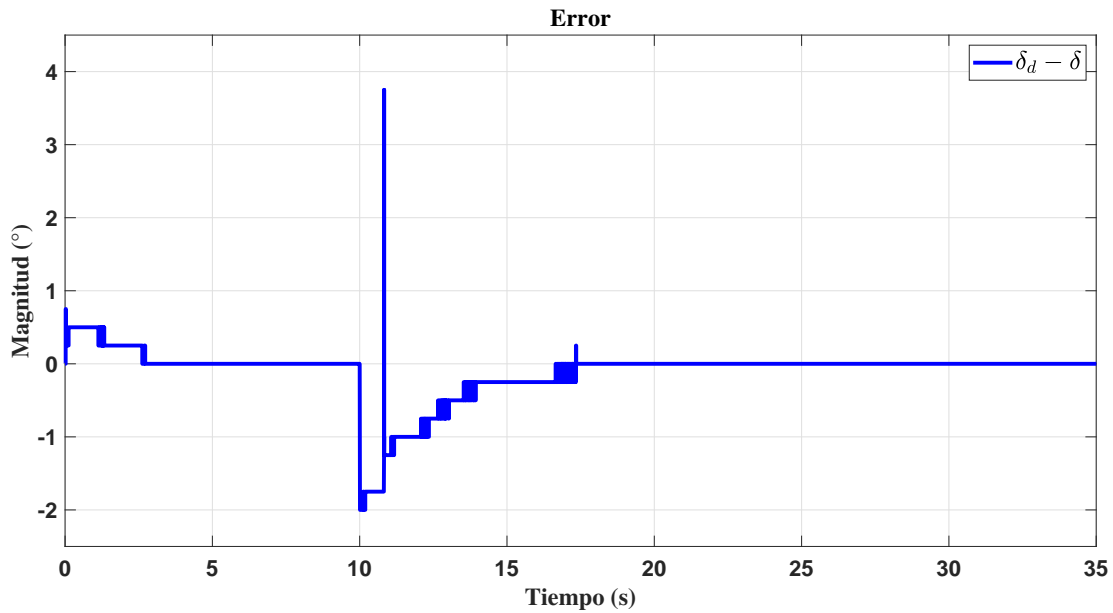


Fig. 4.24. Resultados del *Experimento 5*: Error entre $(\delta_d - \delta)$.

Por otro lado, en la Fig. 4.24 se observa la diferencia entre la posición deseada δ_d y δ , tomando valores de 0 y concluyendo que el estado converge al valor deseado.

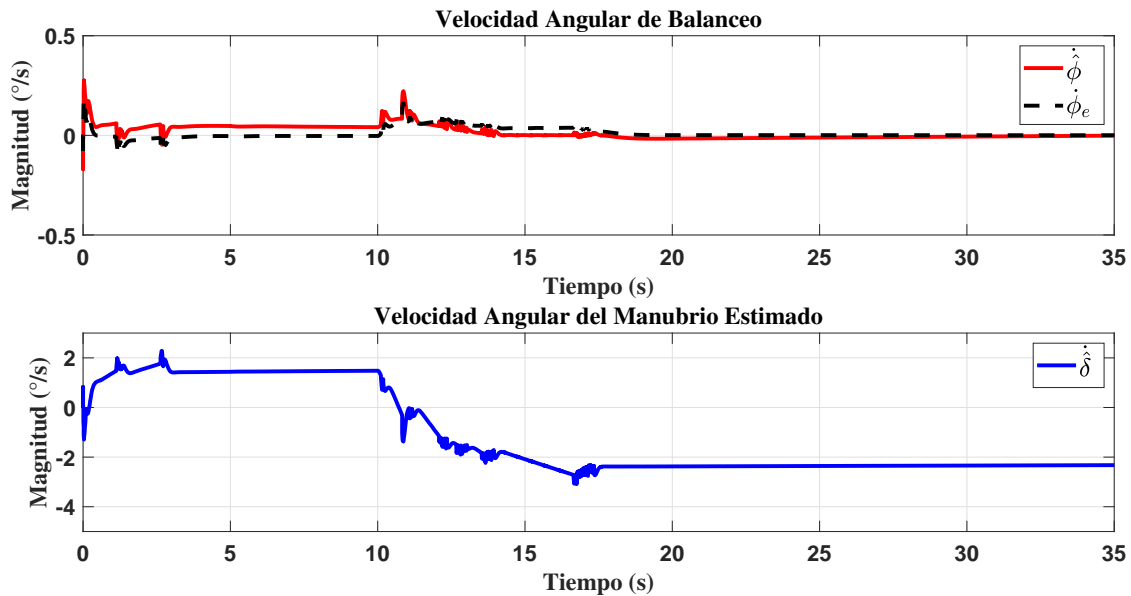


Fig. 4.25. Resultados del *Experimento 5*: Velocidades angulares.

Finalmente, en la Fig. 4.25 se presentan las variaciones en las velocidades angulares asociadas a los estados antes descritos. En este caso, se presenta una mínima diferencia entre el estado estimado y el generado por la ecuación diferencial de ϕ . Sin embargo, el valor resultante de cada estado indica que son similares.

Con este experimento se ha evaluado el desempeño del acoplamiento del sistema de control (considerando al sistema real, un observador y la solución de la ecuación diferencial de ϕ) frente a una velocidad traslacional con comportamiento decreciente. Los resultados muestran que el vehículo es estable, aun considerando posiciones angulares deseadas en el manubrio.

4.2.2. Experimento 6. Estabilización con acción integral en el ángulo de balanceo y manubrio con una velocidad traslacional decreciente por medio de GP

Objetivo del experimento: Estabilizar y regular las posiciones angulares de un vehículo de dos ruedas, considerando dos acciones integrales y referencias deseadas.

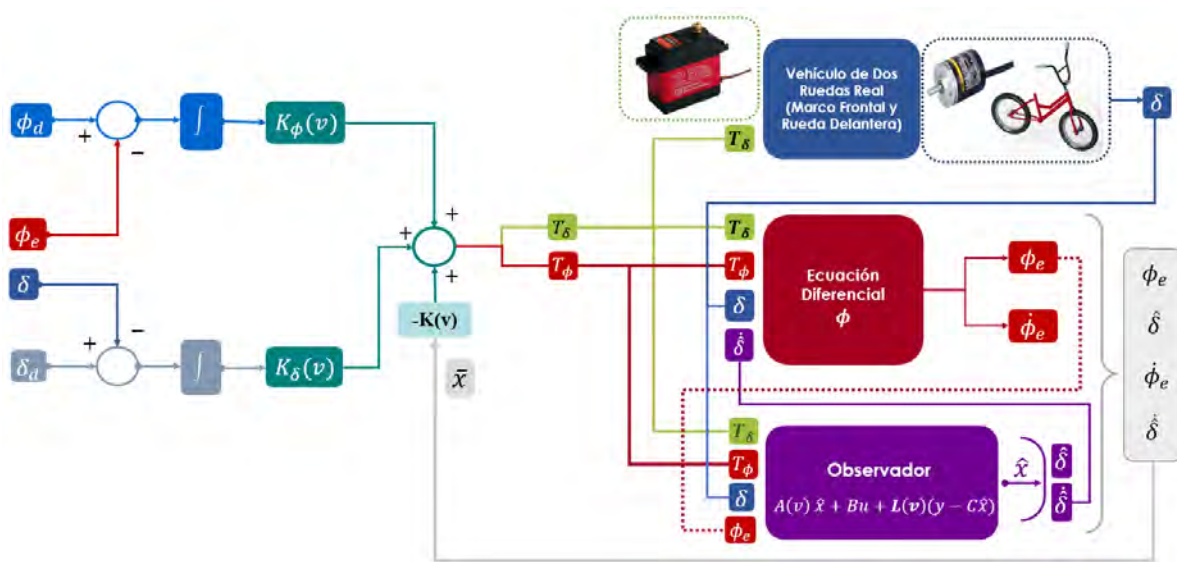


Fig. 4.26. Esquema del Experimento 6.

El enlace entre la parte real del sistema, el observador y la ecuación diferencial de ϕ contempla las mismas características definidas en el caso B y el Experimento 2. Con esto, las leyes de control

definidas en las Ecs. (4.8) y (4.9) se reescriben de la siguiente manera:

$$T_\phi = -(K_{11}(v)\phi_e + K_{12}(v)\hat{\delta} + K_{13}(v)\dot{\phi}_e + K_{14}(v)\dot{\hat{\delta}}) - K_{j_\phi}(v) \int (\delta_d - \delta) dt - K_{i_\phi}(v) \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.36)$$

$$T_\delta = -(K_{21}(v)\phi_e + K_{22}(v)\hat{\delta} + K_{23}(v)\dot{\phi}_e + K_{24}(v)\dot{\hat{\delta}}) - K_{j_\delta}(v) \int (\phi_d - \phi_e) dt - K_{i_\delta}(v) \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.37)$$

donde los elementos en color **rojo** son generados y aplicados virtualmente por la ecuación diferencial de ϕ , los elementos en **morado** son generados por el observador, y los elementos **azul** son los reales. Mientras que el resto de los elementos asociados al vector de ganancias corresponden a las acciones integrales de cada posición angular. Con esto se concluye que el diseño de este controlador considera en su dinámica *una parte real, una estimada y hardware en el lazo*.

Simplificando la Ec. (4.36) y (4.37), se tiene que:

$$u(t) = -K(v(t))\bar{x} + K_\phi(v(t)) \int (\phi_d - \phi_e)(t) dt + K_\delta(v(t)) \int (\delta_d - \delta)(t) dt \quad (4.38)$$

Nota: Por simplicidad, el argumento (t) será omitido en el resto de la descripción.

donde \bar{x} es el vector de estados definido como $\bar{x} = [\phi_e \quad \hat{\delta} \quad \dot{\phi}_e \quad \dot{\hat{\delta}}]^\top$, mientras que $K(v)$, $K_\phi(v)$ y $K_\delta(v)$ forman parte de un solo vector de ganancias calculado con el comando *place* de *MATLAB* considerando los polos $P = [-1.9 \quad -2 \quad -2.4 \quad -2.3 \quad -2.5 \quad -2.1]$.

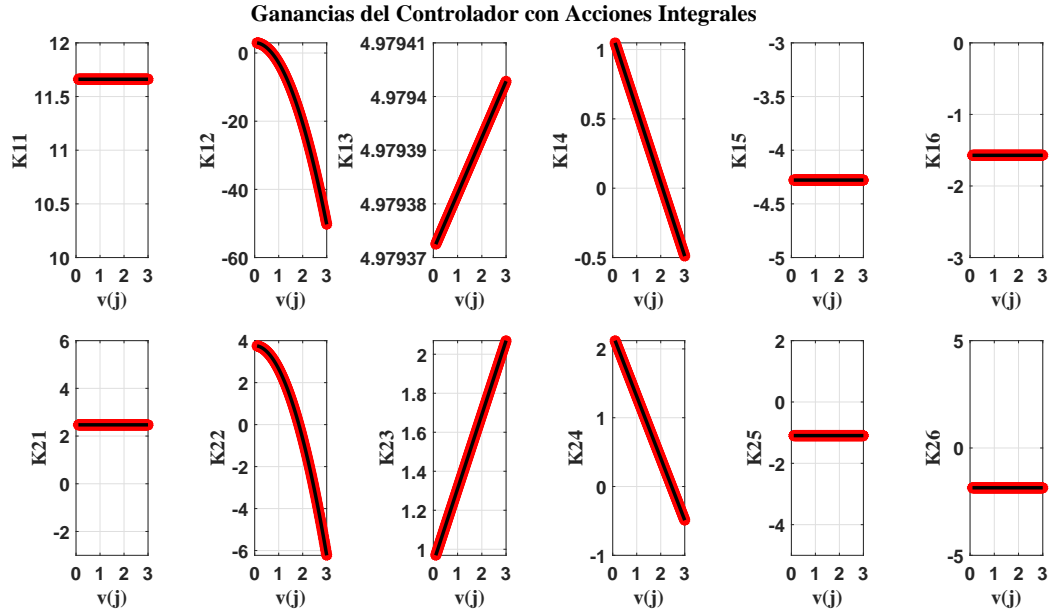


Fig. 4.27. Ganancias programadas del vector K del *Experimento 6*.

En la Fig. 4.27, se presentan las ganancias del controlador calculadas utilizando la misma metodología descrita en el *Experimento 5*. De igual forma, la etiqueta K_{11} hace referencia al elemento de K en su *fila 1, columna 1*, misma interpretación a lo contenido en la figura.

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= 11.6611 \\
 K_{12} &= -5.9227(v^2) + 3.0406 \\
 K_{13} &= 4.9794 \\
 K_{14} &= -0.5302(v) + 1.1010 \\
 K_{15} &= -4.2784 \\
 K_{16} &= -1.8532 \\
 K_{21} &= 2.4711 \\
 K_{22} &= -1.1097(v^2) + 3.7603 \\
 K_{23} &= 0.3796(v) + 0.9310 \\
 K_{24} &= -0.8999(v) + 2.2101 \\
 K_{25} &= -1.0963 \\
 K_{26} &= -1.8532
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

En la Ec. (4.39), se presentan las funciones del vector de ganancias de controlador producto de la interpolación lineal, cuyo valor se verá afectado por la velocidad traslacional decreciente.

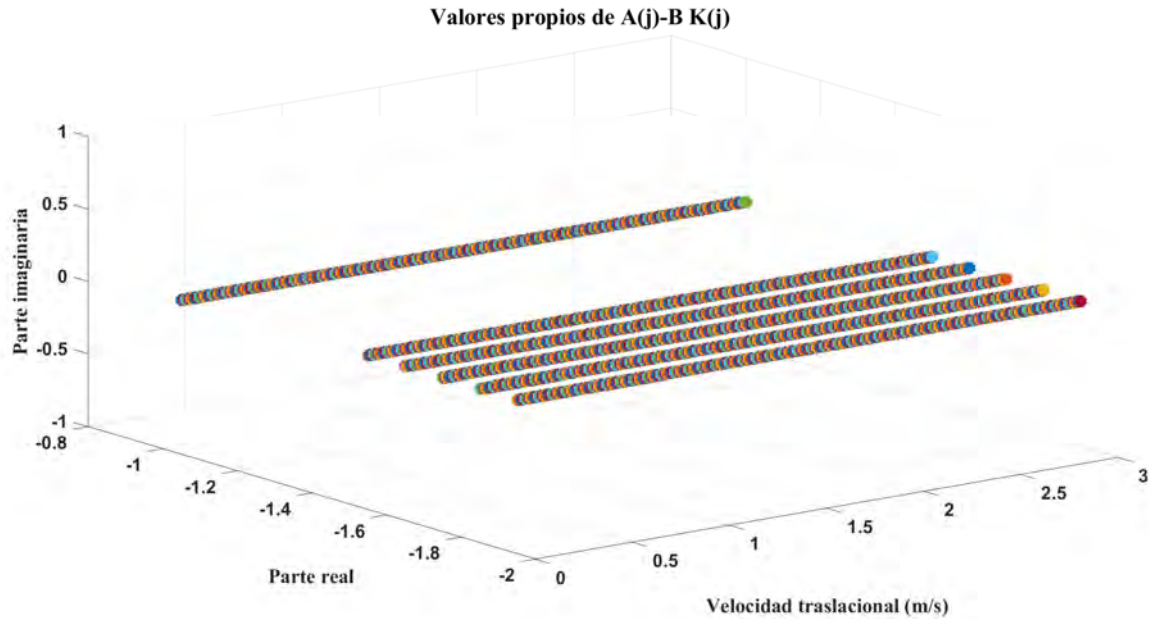


Fig. 4.28. Valores propios de $A(j) - BK(j)$ del *Experimento 6*.

Al igual que el controlador anterior, se utiliza la misma idea de discretización de la Ec. (4.24) considerando el rango definido en la Ec. (4.25). Como se puede observar en la Fig. 4.28, los valores propios del sistema en lazo cerrado conservan el mismo valor que los definidos para estabilizar al sistema. En este caso, se consideran 6 valores propios en función de v dada la aplicación de las acciones integrales.

Por otro lado, el observador (estructura definida en la Ec. (4.27)) considera el mismo valor de polos declarados en el Sistema de control anterior, concluyendo que las **ganancias asociadas al vector** $L(v)$ y **los valores propios** toman el mismo valor y comportamiento que los presentados en la Fig. 4.21 y 4.20, respectivamente.

Ahora bien, la velocidad traslacional considerada es decreciente, en este caso tomando valores de $v(t)=1.5 \text{ m/s}$ a 0.3 m/s . En la Fig. 4.29 se muestra la velocidad traslacional programada para este sistema de control.

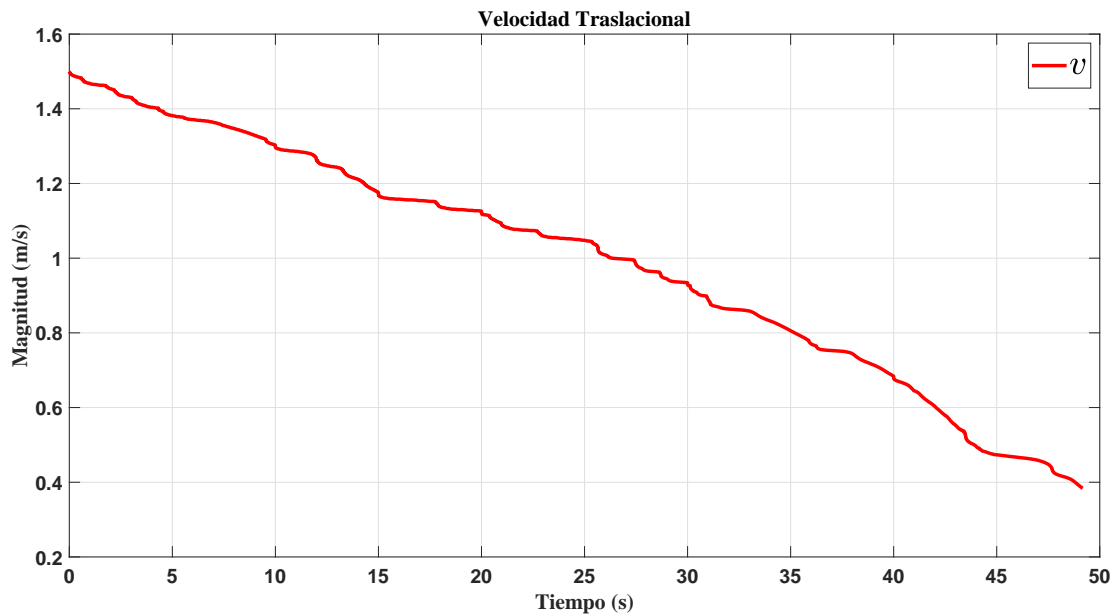


Fig. 4.29. Velocidad traslacional en el *Experimento 6*.

Se tomaron en cuenta las siguientes condiciones para el desarrollo de la simulación:

- Se utilizó el software de *LabVIEW* y la librería de *Control & Simulation* para el diseño y simulación del sistema de control a implementar.
- Se considera un paso de integración fijo de $h = 0.05$ con el propósito de sincronizar el tiempo de simulación del software con el tiempo real.
- La simulación considera *Runge-Kutta 1 (Euler)* como método de integración para el sistema de control y el modelo matemático en general.
- Finalmente, las condiciones iniciales para el sistema y el observador fueron $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

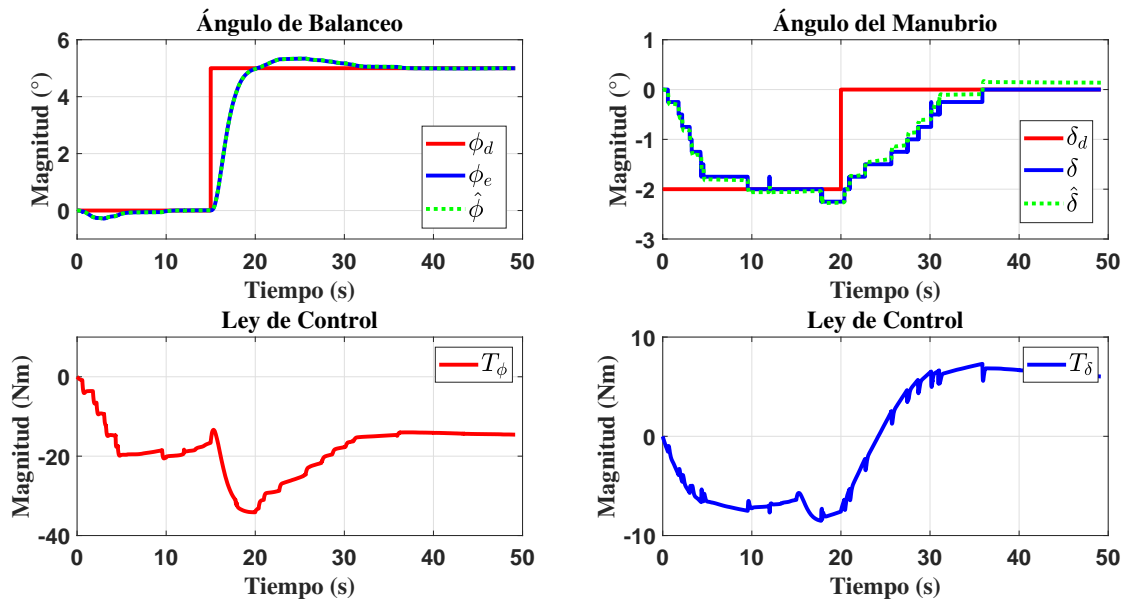


Fig. 4.30. Resultados del *Experimento 6*: Posiciones Angulares y Leyes de Control.

En la Fig. 4.30 se muestran las posiciones angulares y su respuesta respecto a los cambios de referencia programados en las acciones integrales. En este caso, ambos estados convergen a las referencias deseadas después de cierto tiempo de simulación. Así mismo, se verifica que los estados estimados y los virtuales (o bien, los generados por la ecuación diferencial de ϕ) son iguales. Por lo que se concluye que el acoplamiento dinámico y la sintonización tanto del controlador y observador funcionan correctamente.

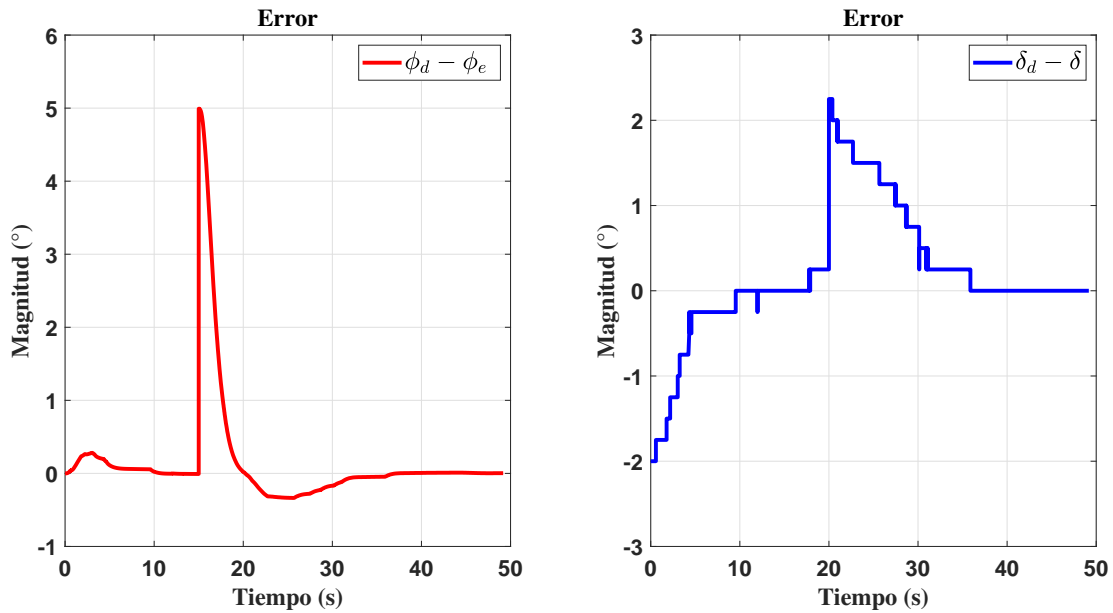


Fig. 4.31. Resultados del *Experimento 6*: Error entre $(\delta_d - \delta)$ y $(\phi_d - \phi_e)$.

Con el objetivo de validar el funcionamiento de las acciones integrales, en la Fig. 4.31 se muestra el error en cada posición angular. En este caso se analiza que durante cierto tiempo de simulación, el resultado toma un valor de 0, lo cual indica que el estado ha alcanzado la referencia o posición angular deseada.

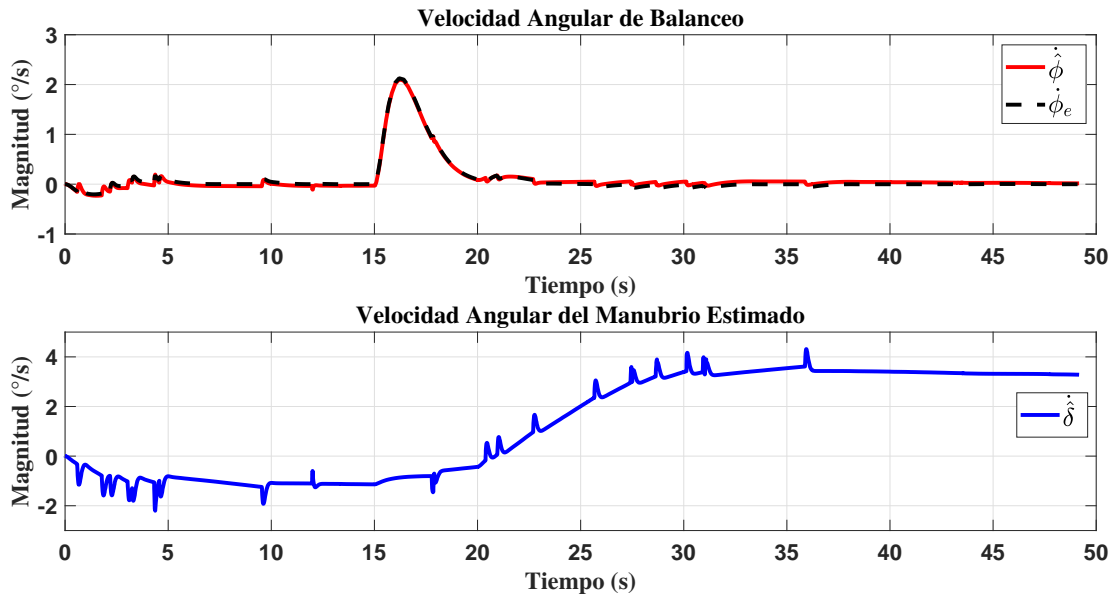


Fig. 4.32. Resultados del *Experimento 6*: Velocidades angulares.

Finalmente, en la Fig. 4.32 se presentan las velocidades angulares de cada posición angular. En las gráficas se valida que lo estimado y lo virtual son similares, por lo que se valida el funcionamiento del observador y la solución de la ecuación diferencial de ϕ , y del experimento en general.

4.2.3. Experimento 7. Estabilización con dos acciones integrales, una variante en el observador, velocidad traslacional decreciente por medio de GP

Objetivo del experimento: Estabilizar y regular las posiciones angulares del vehículo de dos ruedas a partir de referencias deseadas. Así mismo, se busca validar la implementación de hardware en el lazo a partir de la solución de la ecuación diferencial de ϕ y su consideración en el diseño del observador.

El experimento descrito previamente particulariza el diseño del observador considerando dos posiciones angulares, pero, a nivel implementación, medir el ángulo del balanceo del vehículo resulta una tarea complicada, por lo que se tomó la decisión de validar un experimento considerando la velocidad angular del balanceo.

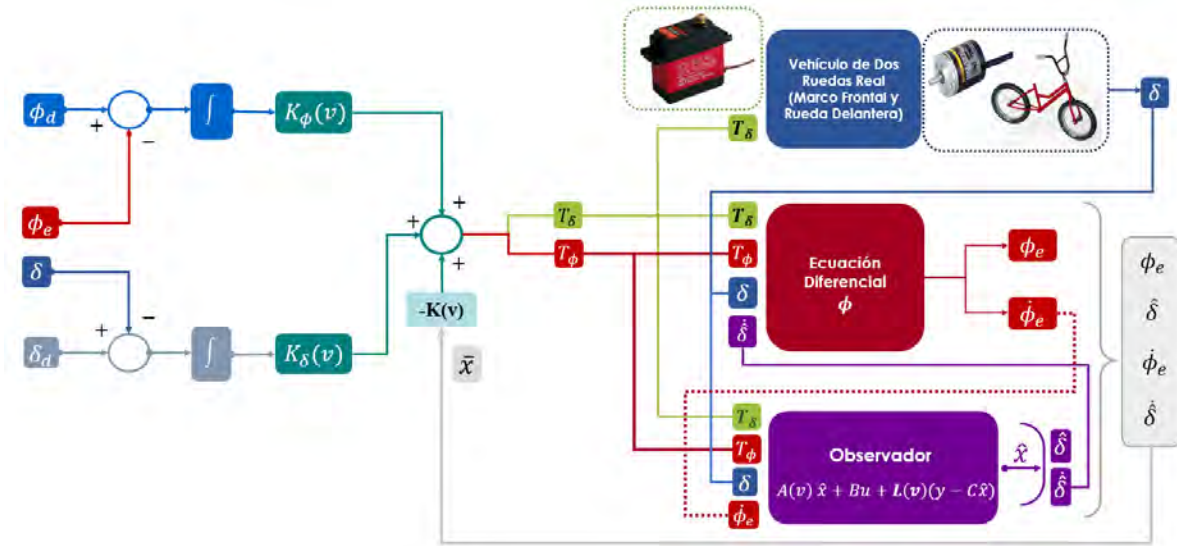


Fig. 4.33. Esquema del *Experimento 7*.

El diseño de este sistema de control considera las mismas condiciones en el sistema real, el observador y la ecuación diferencial de ϕ descritas en el *Experimento 4*. Y, dado que se consideran ambas acciones integrales en el esquema de control presentado en la Fig. 4.33, las leyes de control se definen igual que en las Ecs. (4.36)-(4.38). Y, de igual manera, este controlador considera los polos definidos en el experimento anterior.

Por lo que, la Fig. 4.19 muestra las ganancias del vector $K(v)$, mientras que en la Fig. 4.20 presenta el valor y comportamiento de los valores propios del sistema en lazo cerrado.

Por otro lado, el diseño del observador (estructura definida en la Ec. (4.27)) considera un vector de ganancias $L(v)$, cuyos valores son calculados por medio del comando *place* de MATLAB contemplando los polos $P_o = [-10 \quad -10.2 \quad -10.3 \quad -10.4]$. Cada coeficiente se calcula de la misma manera descrita en los controladores anteriores.

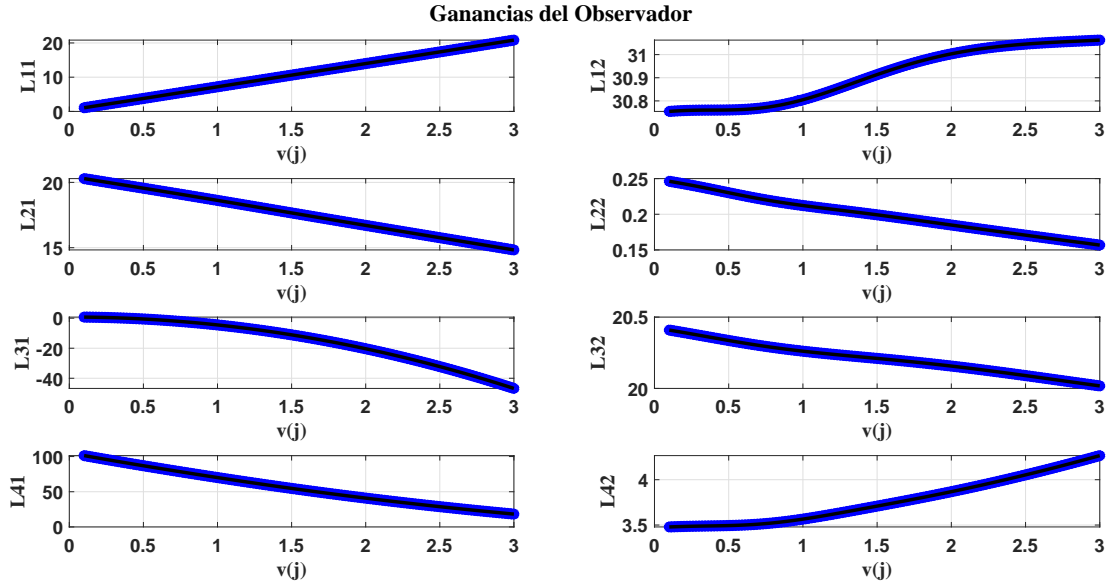


Fig. 4.34. Ganancias programadas del vector $L(v)$ del *Experimento 7*.

En la Fig. 4.34 la etiqueta $L11$ hace referencia al elemento de L en su *fila 1, columna 1*, misma interpretación a lo contenido en la figura.

En las Ecs. (4.40)-(4.47), se presentan las funciones del vector de ganancias de controlador producto de la interpolación lineal, cuyo valor se verá afectado por la velocidad traslacional decreciente.

$$L11 = -0.0030(v^9) + 0.0434(v^8) - 0.2626(v^7) + 0.8416(v^6) - 1.5146(v^5) + 1.5084(v^4) - 0.8067(v^3) + 0.2741(v^2) + 6.7154v + 0.4012 \quad (4.40)$$

$$L21 = 0.0007(v^9) - 0.0106(v^8) + 0.0700(v^7) - 0.2490(v^6) + 0.4997(v^5) - 0.5280(v^4) + 0.2210(v^3) - 0.0100(v^2) - 1.8464v + 20.4739 \quad (4.41)$$

$$L31 = -0.0010(v^9) + 0.0144(v^8) - 0.0904(v^7) + 0.3040(v^6) - 0.5848(v^5) + 0.6360(v^4) - 0.3692(v^3) + 5.1812(v^2) + 0.0072v + 0.7796 \quad (4.42)$$

$$L41 = 0.0072(v^9) - 0.1105(v^8) + 0.7037(v^7) - 2.3886(v^6) + 4.5109(v^5) - 4.3554(v^4) + 1.4575(v^3) + 3.2160(v^2) + 37.9915v + 105.1026 \quad (4.43)$$

$$L12 = -0.0023(v^9) + 0.0370(v^8) - 0.2464(v^7) + 0.8827(v^6) - 1.7956(v^5) + 1.9687(v^4) - 0.9444(v^3) + 0.1105(v^2) + 0.0452v + 30.7498 \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}
 L22 = & -0.0008(v^9) + 0.0120(v^8) - 0.0736(v^7) + 0.2431(v^6) - 0.4620(v^5) + 0.4971(v^4) \\
 & - 0.2737(v^3) + 0.0624(v^2) - 0.0423v + 0.2501
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
 L32 = & -0.0007(v^9) + 0.0106(v^8) - 0.0700(v^7) + 0.2490(v^6) - 0.4997(v^5) + 0.5280(v^4) \\
 & - 0.2210(v^3) + 0.0100(v^2) - 0.1713v + 20.4261
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
 L42 = & -0.0074(v^9) + 0.1069(v^8) - 0.6443(v^7) + 2.0815(v^6) - 3.8412(v^5) + 3.9481(v^4) \\
 & - 1.9834(v^3) + 0.4101(v^2) + 0.0205v + 3.4746
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Cada función se define como un polinomio de 9° orden, buscando minimizar el error entre lo medido y los resultados generados por el observador. Este resultado se obtuvo a través de múltiples pruebas realizadas con el prototipo instrumentado.

Dado que el cálculo de las ganancias del observador depende de las matrices $A(v)$ y C , la matriz $A(v)$ se transforma en $A(j)$ discretizando de la misma manera que en la Ec. (4.24) para el rango de velocidad establecido.

En la Fig. 4.35 se presenta el comportamiento de los valores propios del observador en lazo cerrado. En este caso, la nueva matriz $A(j) - L(j)C$ tiene definido el mismo valor de polos utilizados para calcular la ganancia $L(v)$ a medida que la velocidad traslacional cambia de valor.

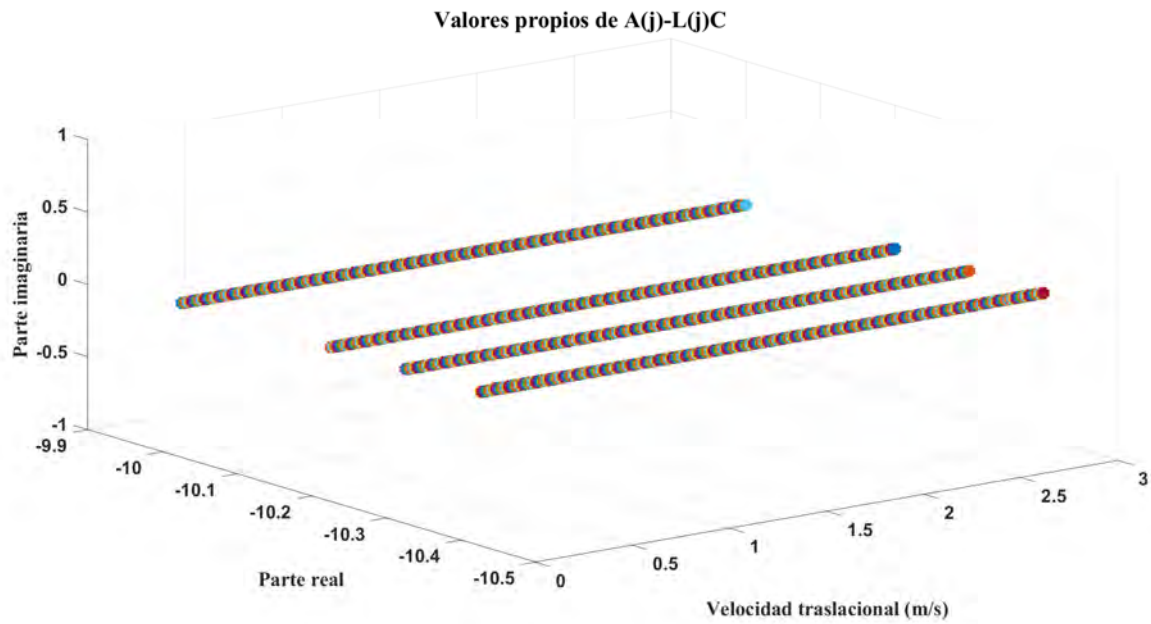


Fig. 4.35. Valores propios de $A(j) - L(j)C$ del *Experimento 7*.

Ahora bien, la velocidad traslacional considerada en este controlador considera un rango de cambio de $v(t)=1.5$ a 0.1 m/s.

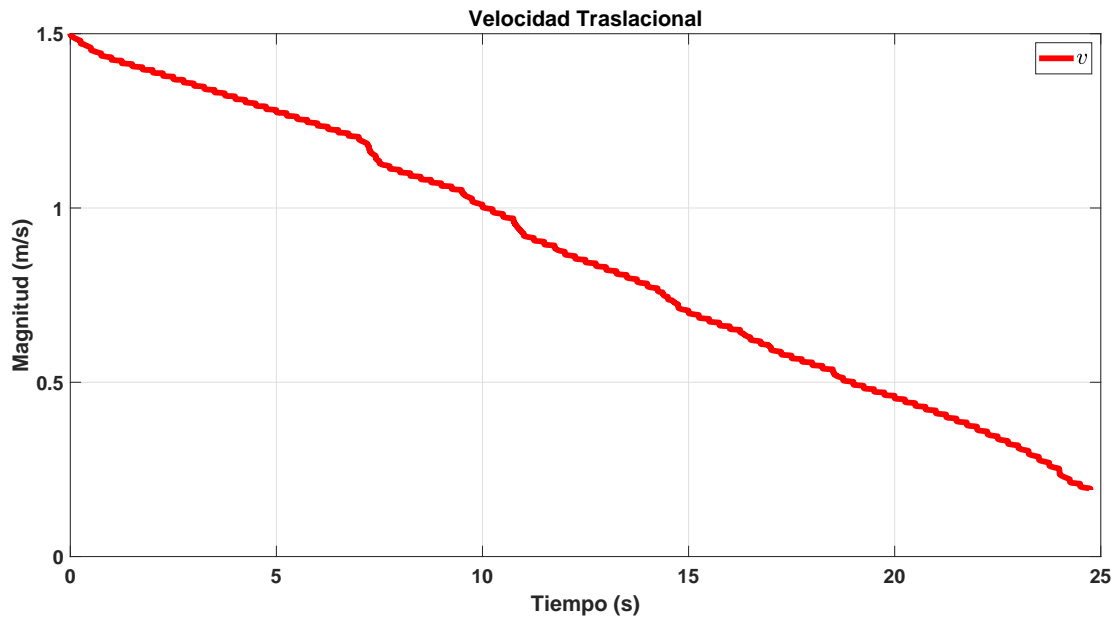


Fig. 4.36. Velocidad traslacional en el *Experimento 7*.

Se tomaron en cuenta las siguientes condiciones para el desarrollo de la simulación:

- Se utilizó el software de *LabVIEW* y la librería de *Control & Simulation* para el diseño y simulación del sistema de control a implementar.
- Se considera un paso de integración fijo de $h = 0.05$ con el propósito de sincronizar el tiempo de simulación del software con el tiempo real.
- La simulación considera *Runge-Kutta 1 (Euler)* como método de integración para el sistema de control y el modelo matemático en general.
- Finalmente, las condiciones iniciales para el sistema y el observador fueron $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

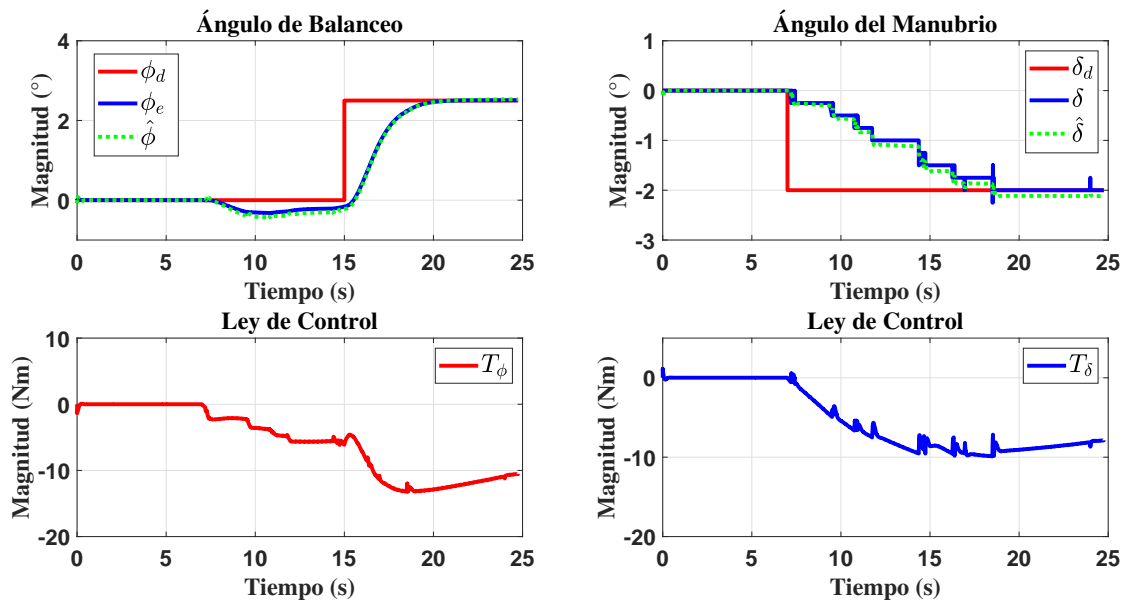


Fig. 4.37. Resultados del *Experimento 7*: Posiciones Angulares y Leyes de Control.

En la Fig. 4.37, se observan las gráficas de las posiciones angulares afectadas por las acciones integrales. En este caso, se presentan los estados estimados y los generados por la ecuación diferencial de ϕ , cuyos resultados se ven afectados entre sí debido al acoplamiento dinámico que enlaza los tres elementos presentados en la Fig. 4.33.

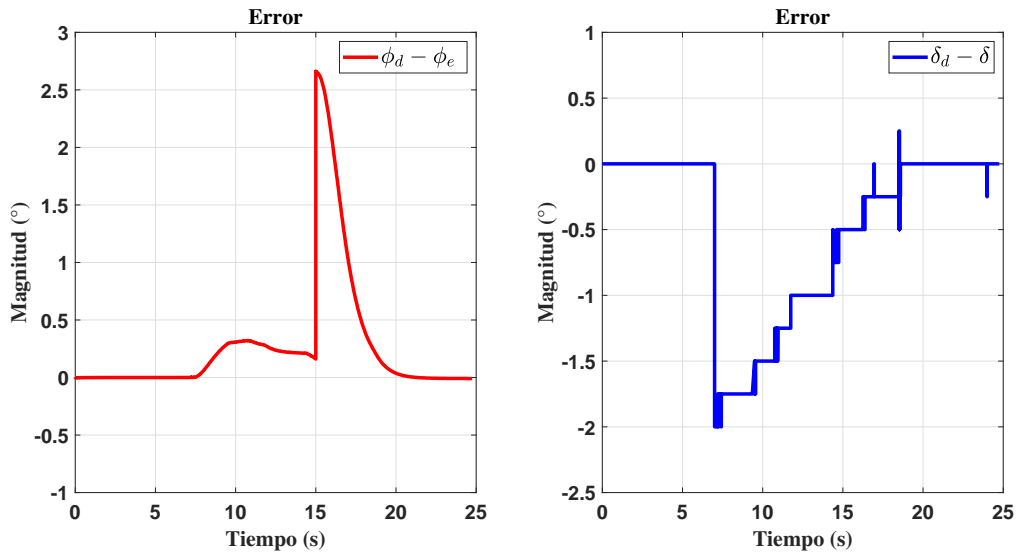


Fig. 4.38. Resultados del *Experimento 7*: Error entre $(\delta_d - \delta)$ y $(\phi_d - \phi_e)$.

Así mismo, se verifica que los estados afectados por las acciones integrales convergen a la referencia deseada durante cierto tiempo de simulación (véase en la Fig. 4.37). Esto se puede confirmar con lo presentado en la Fig. 4.38.

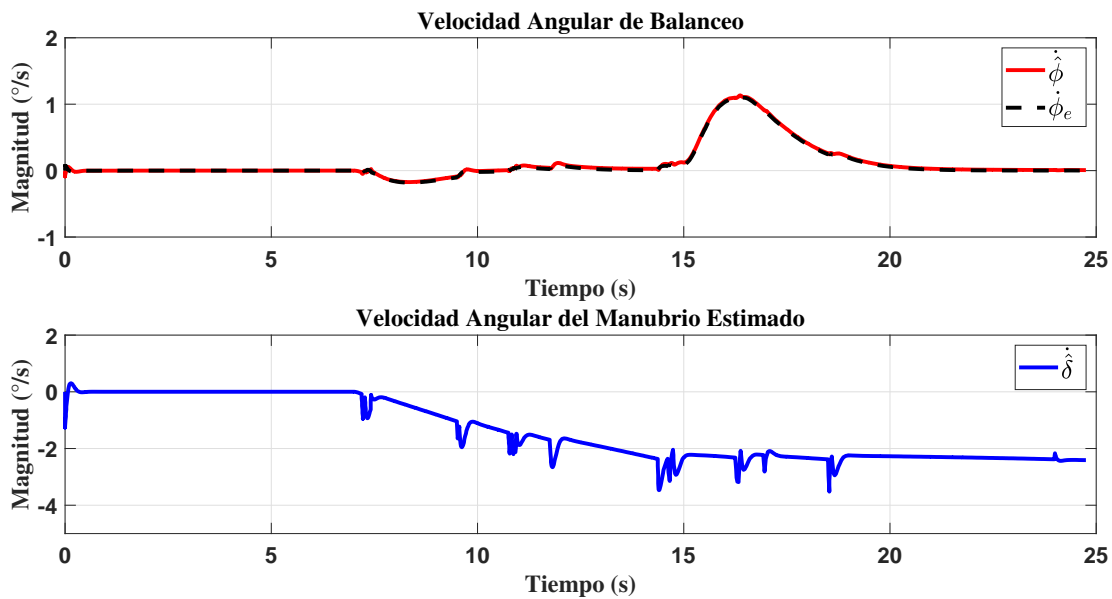


Fig. 4.39. Resultados del *Experimento 7*: Velocidades angulares.

Finalmente, en la Fig. 4.39 se presentan los resultados asociados a las velocidades angulares, ob-

servando que lo generado por el observador y la ecuación diferencial de ϕ es idéntico, validando así la comunicación y sintonización del controlador y observador aplicado al sistema real.

Con este experimento se valida el diseño del sistema de control, ya que ambas posiciones angulares se encuentran dinámicamente acopladas, dado que los cambios de referencia tienen efecto en sus respuestas. Sin embargo, las acciones integrales provocan que los estados converjan a la referencia deseada y que el vehículo se estabilice.

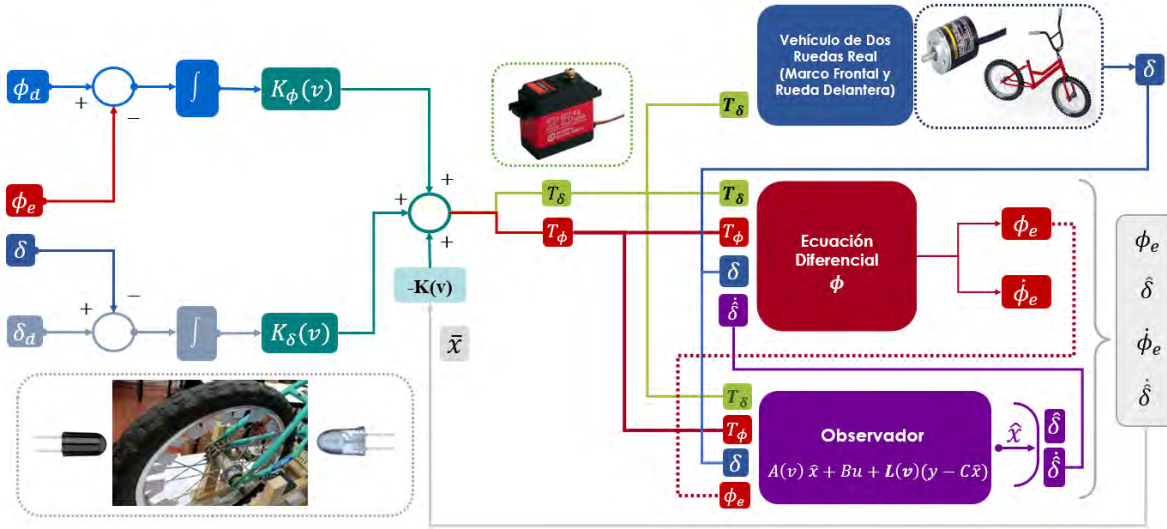
4.2.4. Experimento 8. Estabilización con dos acciones integrales y una velocidad traslacional variable por medio de GP

Objetivo del experimento: Demostrar el correcto funcionamiento del acoplamiento dinámico entre el observador, la ecuación diferencial de ϕ y el sistema real.

Los experimentos antes descritos contemplan en su diseño a la velocidad traslacional como una medición *virtual*. El presente experimento considera una variante importante en la instrumentación del vehículo de dos ruedas, con el objetivo de validar la implementación de hardware en lazo a partir de los resultados.

En este caso, la instrumentación del vehículo de dos ruedas incluye a la velocidad traslacional como una medición física/real en sus elementos. Esto se logra a través de dos sensores: Un fototransistor y un led infrarrojo.

Con todo lo anterior, en la Fig. 4.40 se presenta el esquema de control aplicado a este último experimento. También, se observan los elementos asociados a la instrumentación del vehículo de dos ruedas.


 Fig. 4.40. Esquema del *Experimento 8*.

Reescribiendo las leyes de control definidas anteriormente, se tiene que:

$$T_\phi = -(K_{11}(v)\phi_e + K_{12}(v)\hat{\delta} + K_{13}(v)\hat{\phi}_e + K_{14}(v)\dot{\hat{\delta}}) - K_{j_\phi}(v) \int (\delta_d - \delta) dt - K_{i_\phi}(v) \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.48)$$

$$T_\delta = -(K_{21}(v)\phi_e + K_{22}(v)\hat{\delta} + K_{23}(v)\hat{\phi}_e + K_{24}(v)\dot{\hat{\delta}}) - K_{j_\delta}(v) \int (\phi_d - \phi_e) dt - K_{i_\delta}(v) \int (\delta_d - \delta) dt \quad (4.49)$$

donde los elementos en color **rojo** son generados y aplicados virtualmente por la ecuación diferencial de ϕ , los elementos en **morado** son generados por el observador, y los elementos **azul** son los reales. Con esto se concluye que el diseño de este controlador considera en su dinámica **una parte real, una estimada y hardware en el lazo**.

Simplificando la Ec. (4.48) y (4.49), se tiene que:

$$u(t) = -K(v(t))\bar{x}(t) + K_\phi(v(t)) \int (\phi_d - \phi_e)(t) dt + K_\delta(v(t)) \int (\delta_d - \delta)(t) dt \quad (4.50)$$

Nota: Por simplicidad, el argumento (t) será omitido en el resto de la descripción.

donde \bar{x} es el vector de estados definido como $\bar{x} = [\phi_e \quad \hat{\delta} \quad \hat{\phi}_e \quad \dot{\hat{\delta}}]^\top$, mientras que $K(v)$, $K_\phi(v)$ y $K_\delta(v)$ forman parte de un solo vector de ganancias calculado con el comando *place* de *MATLAB* y, considerando los polos definidos en el *Experimento 6*. Por lo que las ganancias y el comportamiento

de los valores propios de $A(j) - BK(j)$ se muestran en la Fig. 4.27 y 4.28.

Del mismo modo, el vector de ganancias asociado al observador se calcula por medio del comando *place* de *MATLAB*, donde los polos seleccionados corresponden a los definidos en el *Experimento 1*, por lo que su valor y el comportamiento de los valores propios $A(j) - L(j)C$ se observan en la Fig. 4.19 y 4.20, respectivamente.

Ahora bien, la velocidad traslacional considerada en este experimento no se define como decreciente. Su comportamiento se debe al movimiento o manipulación de la rueda trasera (subsistema instrumentado para medir la velocidad traslacional).

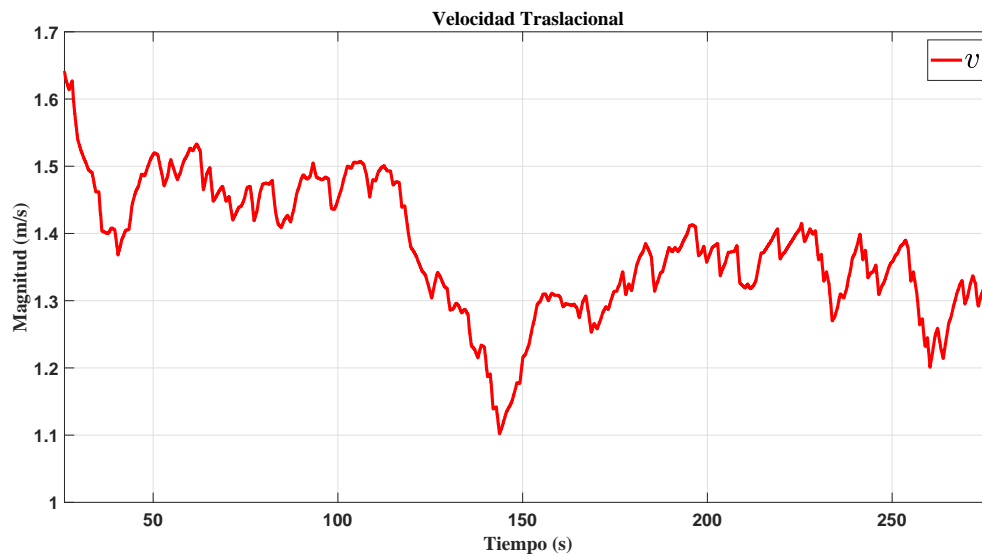


Fig. 4.41. Velocidad traslacional en el *Experimento 8*.

Se tomaron en cuenta las siguientes condiciones para el desarrollo de la simulación:

- Se utilizó el software de *LabVIEW* y la librería de *Control & Simulation* para el diseño y simulación del sistema de control a implementar.
- Se considera un paso de integración fijo de $h = 0.05$ con el propósito de sincronizar el tiempo de simulación del software con el tiempo real.
- La simulación considera *Runge-Kutta 1 (Euler)* como método de integración para el sistema de control y el modelo matemático en general.

- Finalmente, las condiciones iniciales para el sistema y el observador fueron $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

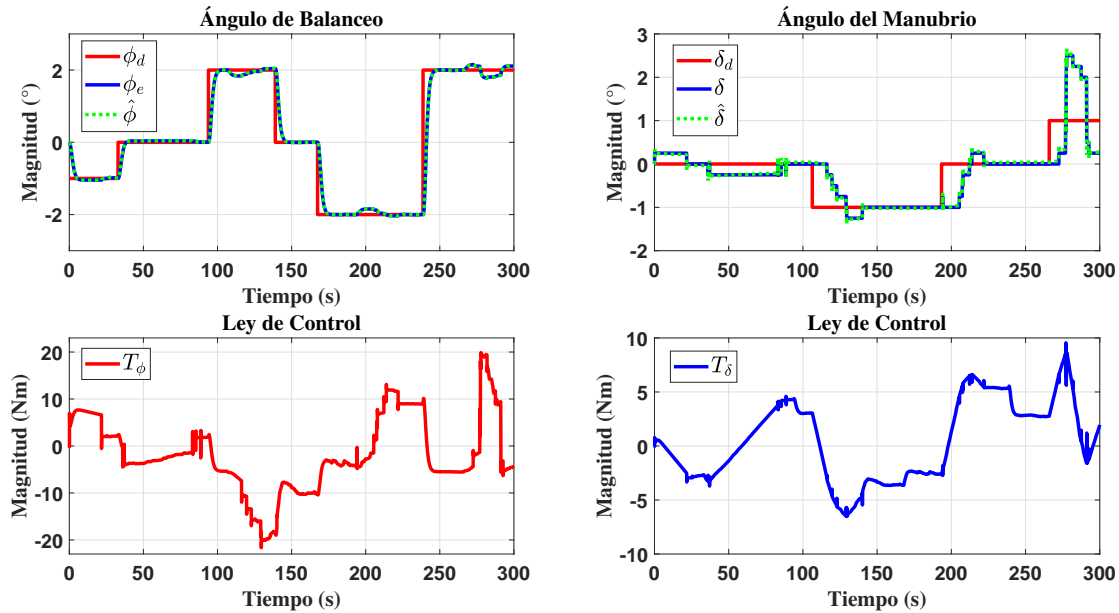


Fig. 4.42. Resultados del *Experimento 8*: Posiciones Angulares y Leyes de Control.

En la Fig. 4.42, se presentan los resultados de las posiciones angulares del vehículo de dos ruedas. Se observa como cada estado estimado y producto de la ecuación diferencial de ϕ converge a la referencia o posición angular deseada. También, su comportamiento se encuentra dinámicamente enlazado, ya que los cambios de referencia programados tienen efecto en la respuesta de cada posición.

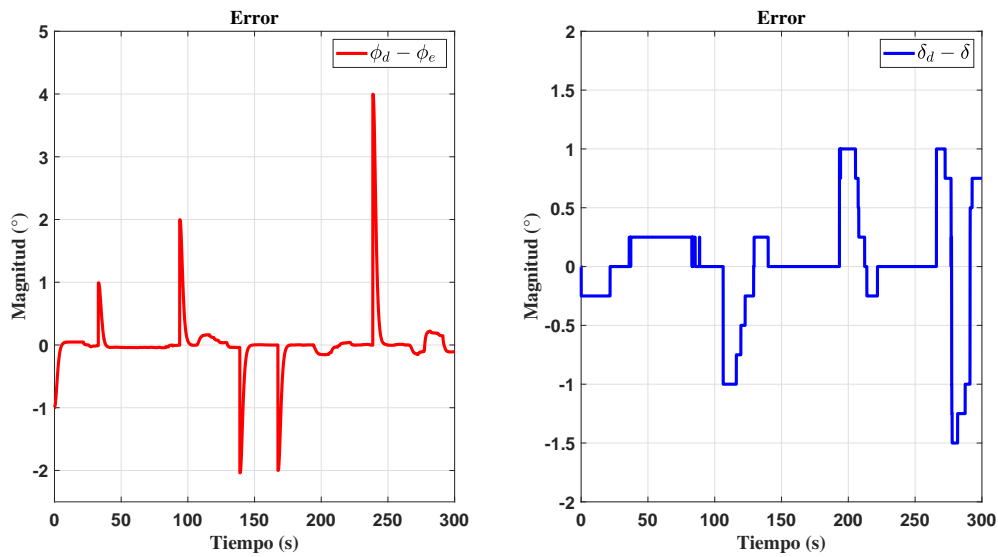


Fig. 4.43. Resultados del *Experimento 8*: Error entre $(\delta_d - \delta)$ y $(\phi_d - \phi_e)$.

En la Fig. 4.43, se muestran las gráficas de los errores asociados a los cambios de referencia en cada posición angular. Su resultado valida el funcionamiento y efecto de la acción integral aplicada individualmente, ya que durante cierto tiempo de simulación su valor es igual a 0.

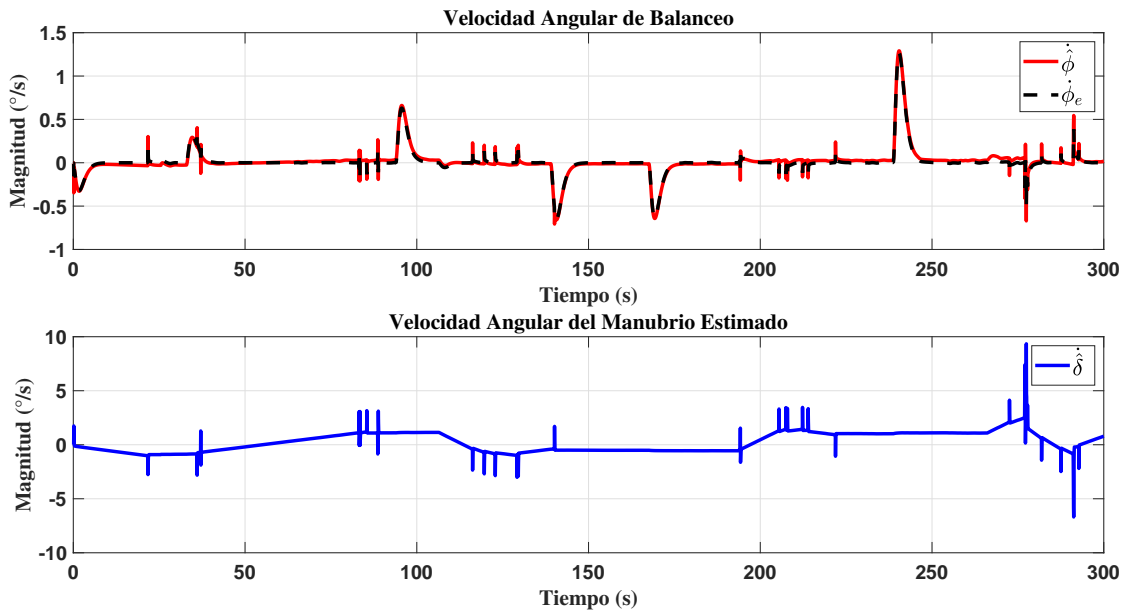


Fig. 4.44. Resultados del *Experimento 8*: Velocidades angulares.

Al igual que los experimentos antes descritos, el comportamiento de las velocidades angulares generadas por el observador y la ecuación diferencial de ϕ es idéntico (véase en la Fig. 4.41). Con lo que se concluye que el acoplamiento dinámico entre los tres elementos es ideal para el objetivo de control enfocado en este experimento.

Los resultados de este experimento validan el desempeño del sistema de control, dado que la velocidad traslacional medida presenta un comportamiento distinto a los experimentos anteriores. Sin embargo, el acoplamiento dinámico y la sintonización entre el controlador y el observador cumplen con el objetivo de estabilizar al vehículo de dos ruedas, manipulando ambas posiciones angulares en referencias deseadas.

4.3. Conclusiones

En cada sección se describen sistemas de control implementados en el vehículo de dos ruedas instrumentado, cuyo diseño se aborda con las consideraciones descritas en el capítulo 3.

Cada uno de los sistemas de control persiguen un objetivo similar; sin embargo, cada diseño tiene particularidades y condiciones importantes que, al ser aplicados a un prototipo real, conlleva tener un enfoque más completo de comportamiento y consideraciones para diseño de controladores posteriores.

Así mismo, por medio del acoplamiento dinámico de cada sistema de control (hablando de la parte real del sistema, el observador y la solución de ecuación diferencial de ϕ) se comprueba que es posible perseguir distintos objetivos, condiciones o escenarios en una planta virtual y considerando hardware en el lazo.

Los resultados obtenidos han evaluado el desempeño de cada sistema de control implementado para estabilizar y regular las posiciones angulares del vehículo de dos ruedas en referencias deseadas.

5.1. Conclusiones generales

Las conclusiones que se obtienen con los resultados del tema de investigación son los siguientes:

El desarrollo del tema de tesis consideró la selección de un vehículo de dos ruedas diferente al prototipo trabajado en el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (TecNM/CENIDET). La ventaja de esta consideración es contar con un prototipo a menor escala, ideal para la implementación de diferentes algoritmos de control bajo distintos enfoques y escenarios.

Se desarrolló el modelo CAD del vehículo de dos ruedas seleccionado a fin de obtener información particular de su estructura física necesaria para el análisis del modelo matemático. En este caso, se utilizó el software de *SolidWorks* para diseñar y parametrizar el modelo CAD a partir de referencias reales tomadas de la bicicleta seleccionada.

En este trabajo de tesis, se realizó la aproximación del modelo matemático del vehículo de dos ruedas a instrumentar, además de validarlo por medio de simulaciones. El objetivo de esta consideración es diferenciar lo realizado respecto a investigaciones anteriores, además de contemplar ambos pares como fuerza de entrada generalizada para estabilizar al vehículo de dos ruedas.

Se importó y configuró el modelo CAD del vehículo en *Simscape* (herramienta de *MATLAB*-

SIMULINK), a fin de validar su comportamiento dinámico a través de sistemas de control considerando la teoría de sistemas LTI y LPV. La principal ventaja de esta actividad fue obtener un conocimiento previo del comportamiento del vehículo y diseño de controlador previo a implementación.

Se seleccionaron los componentes electrónicos, microcontroladores y tarjetas de adquisición de datos para instrumentar el vehículo de dos ruedas. Estos elementos también fueron configurados en el software de *LABVIEW* para crear la interfaz de comunicación entre los sistemas de control y la información emitida y recibida por los sensores y el actuador.

Finalmente, se diseñaron distintos sistemas de control enfocados en el acoplamiento entre una parte real del sistema, un observador y la solución de la ecuación diferencial de ϕ . Además, se comprueba la efectividad de implementar hardware en el lazo por medio del diseño del observador, ya que su diseño depende de la información generada por la ecuación diferencial de ϕ .

Cada uno de los sistemas de control o experimentos implementados en el vehículo de dos ruedas consideró dos enfoques: Sistemas LTI y Sistemas LPV.

5.2. Ventajas y limitaciones

En este trabajo de investigación se presentan las siguientes ventajas:

- Se desarrolla la aproximación del modelo matemático particular de la bicicleta instrumentada, a fin de analizar e implementar cada sistema de control de manera real.
- Se instrumenta un vehículo de dos ruedas real, a fin de obtener información que dependa únicamente de su estructura y comportamiento dinámico.
- Se diseña un observador para estimar aquellos estados no instrumentados en el vehículo de dos ruedas.
- Se desarrolla la solución de la ecuación diferencial que describe la dinámica del balanceo, con información real y estimada.

- Se propone y valida el acoplamiento dinámico entre el sistema real (vehículo instrumentado), un observador y la ecuación diferencial del balanceo, con el objetivo de diseñar sistemas de control que estabilicen en posición vertical al vehículo de dos ruedas.

Este trabajo de investigación presenta las siguientes limitaciones:

- Movimiento limitado en el mecanismo para manipular el manubrio de la bicicleta instrumentada.
- Rango de velocidad traslacional limitado en los resultados experimentales considerando Ganancias Programadas.

5.3. Originalidad

Anteriormente, se han realizado investigaciones en torno a este caso de estudio utilizando distintas metodologías para los objetivos particulares de cada trabajo. Sin embargo, este trabajo considera las siguientes aportaciones que definen la diferencia de lo ya trabajado.

Se desarrolló la aproximación del modelo matemático particular del vehículo de dos ruedas a instrumentar, prototipo en donde fueron probados cada uno de los experimentos descritos previamente.

A diferencia de trabajos anteriores, se consideran ambos pares como fuerzas de entrada generalizada para el diseño de los sistemas de control. En otras palabras, este trabajo considera el modelo matemático completo del vehículo de dos ruedas.

Este trabajo de tesis considera la implementación de hardware en el lazo como parte del sistema de control que estabiliza en posición vertical al vehículo de dos ruedas. Este enfoque brinda una amplia gama de herramientas para el diseño de sistemas de control, ya que permite someter al sistema bajo distintos escenarios y observar los resultados sin la necesidad de afectar el prototipo.

5.4. Trabajos futuros

Se propone como trabajos futuros:

A partir del prototipo instrumentado, diseñar algoritmos de control utilizando distintos enfoques: Control tolerante a fallas, Control predictivo, Modelos Takagi-Sugeno, etc. La implementación de hardware en el lazo permite tener un enfoque real sobre los resultados de cada algoritmo de control.

Se puede rediseñar cada mecanismo implementado en el prototipo, a fin de permitir al actuador manipular al manubrio con mayor rango de movimiento. También se puede considerar la implementación de un motor en la rueda trasera para regular la velocidad traslacional en distintos valores y, con esto, diseñar otro sistema de control con un enfoque más robusto.

5.5. Artículos escritos

- Se escribió un primer artículo reportando el diseño y configuración del modelo CAD importado a Simscape, además de validar la utilización de softwares especializados para el análisis dinámico de prototipos, mismo que fue sometido a la *Revista Ingeniería Investigación y Tecnología* (revista indizada al padrón de Conahcyt de Revistas Científicas).
- El segundo artículo reporta los sistemas de control diseñados en Simscape para controlar el modelo CAD del vehículo considerando al Sistema LTI y LPV, el cual fue sometido a la *RIIIT Revista Internacional de Investigación e Innovación Tecnológica* (revista indizada al padrón de Conahcyt de Revistas Científicas).
- Se realizó y presentó un poster en el *II Congreso Internacional de Tecnología y Ciencia Aplicada (CITCA)* desarrollado en el TecNM/CENIDET del 22 al 24 de mayo de 2024. En él, se reportan parte de los resultados obtenidos a lo largo del desarrollo del tema de tesis.
- Se escribió y sometió un artículo en el *Congreso Nacional de Control Automático (CNCA 2024)*, reportando los sistemas de control implementados en el vehículo de dos ruedas considerando al sistema LTI. Dicho congreso se realizará en el mes de octubre de 2024.

5.6. Actividades complementarias

- Se impartió una conferencia titulada *Integración de Software especializado para el diseño y análisis de prototipos ingenieriles* en el Centro Universitario del Sur en las V Jornadas Académicas de la División de Ciencias Exactas, Naturales y Tecnológicas, celebradas del 11 al 15 de septiembre de 2023.
- Se impartió una ponencia en el Congreso Internacional Estrategia y Conocimiento para la Investigación (ECI 2023) titulado *Estabilización y regulación de un vehículo de dos ruedas sin conductor mediante técnicas de control automático*, el día 9 de noviembre de 2023.
- Se participó en la Feria de la Ciencia y la Tecnología 2023, impartiendo un taller de programación el día 7 de noviembre de 2023.

REFERENCIAS

- Ahmadi, K., Asadi, D., Merheb, A., Nabavi-Chashmi, S.-Y., and Tutsoy, O. (2023). Active fault-tolerant control of quadrotor uavs with nonlinear observer-based sliding mode control validated through hardware in the loop experiments. *Control Engineering Practice*, 137:105557.
- Begines Gavira, F. J. (2022). Parametrización de un sistema de control para la estabilidad lateral de la bicicleta. *Universidad de Sevilla, Departamento de Ingeniería Mecánica y Fabricación*.
- Bravo, D. and Rengifo, C. (2020). Estudio de la dinámica y control de una bicicleta robótica. *Revista Mexicana de Física. E, Publicación de Enseñanza, Historia y Filosofía de la Sociedad Mexicana de Física*, 17:62.
- Briat, C. (2014). Linear parameter-varying and time-delay systems. *Analysis, observation, filtering & control*, 3:5–7.
- Briones Jorquera, A. et al. (2020). Tuning generalized predictive pi controllers for process control applications.
- Brizuela, J., Astorga, C., Zavala, A., and Canales, F. (2016). Instrumentation of a bicycle without driver for experimental testing of automatic control. *IEEE Latin America Transactions*, 14(8):3540–3546.
- Brizuela-Mendoza, J. A., Astorga-Zaragoza, C. M., Zavala-Río, A., Canales-Abarca, F., and Martínez-García, M. (2017). Gain-scheduled linear quadratic regulator applied to the stabilization of a riderless bicycle. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 231(8):669–682.
- Brizuela Mendoza, J. A., Zaragoza, A., Zavala Río, A., and Canales Abarca, F. (2016). Control tolerante a fallas activo: Estimación y acomodación de fallas en sensores aplicado al modelo lpv de una bicicleta sin conductor. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 13(2):174–185.

- Cerone, V., Andreo, D., Larsson, M., and Regruto, D. (2010). Stabilization of a riderless bicycle [applications of control]. *IEEE Control Systems Magazine*, 30(5):23–32.
- Das, S. (2020). *Modeling and simulation of mechatronic systems using Simscape*. Morgan & Claypool Publishers.
- Garrido, R. R., Rincón, A. C., and Vera, J. (2024). Pirheliómetro basado en fibra óptica y fotodiodosemiconductor. In *Conectando la academia y la industria: Libro de actas OPTOEL 2023*, page 38. Editorial Universidad de Sevilla.
- González, J. G., Zaragoza, C. A., Mendoza, J. B., Estrada, F. L., and Lozano, L. P. (2016). Estabilización de un vehículo de dos ruedas sin conductor mediante el enfoque LPV. *AMCA Congreso Nacional de Control Automático*.
- Guo, J., Luo, Y., and Li, K. (2019). Robust gain-scheduling automatic steering control of unmanned ground vehicles under velocity-varying motion. *Vehicle System Dynamics*, 57(4):595–616.
- Herrera, G. S., Guevara, A. R., and Guzman, L. E. S. (2021). Controlador pi2 para las velocidades de un robot agrícola evaluado usando hardware en el lazo (HIL). *Ingenierías USBMed*, 12(2):41–48.
- Jones, D. E. (1970). The stability of the bicycle. *Physics today*, 23(4):34–40.
- Jones, D. E. H. (2006). From the archives: The stability of the bicycle. *Physics Today*, 59(9):51–56.
- Lamatenggo, M., Wiranto, I., and Ridwan, W. (2020). Perancangan balancing robot beroda dua dengan metode pengendali pid berbasis arduino nano. *Jambura Journal of Electrical and Electronics Engineering*, 2(2):39–43.
- Manson, S., Khatib, A. R., Cai, N., and Rajan, S. S. (2021). Advantages of real-time closed-loop simulation. In *2021 IEEE IAS Petroleum and Chemical Industry Technical Conference (PCIC)*, pages 47–56. IEEE.
- Meijaard, J. P., Papadopoulos, J. M., Ruina, A., and Schwab, A. L. (2007). Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review. *Proceedings of the Royal society A: mathematical, physical and engineering sciences*, 463(2084):1955–1982.
- Mihalič, F., Truntič, M., and Hren, A. (2022). Hardware-in-the-loop simulations: A historical overview of engineering challenges. *Electronics*, 11(15):2462.
- Moore, J., Hubbard, M., and Hess, R. A. (2016). An optimal handling bicycle. In *Proceedings of the 2016 Bicycle and Motorcycle Dynamics Conference (Sept. 2016), Figshare*.
- OMRON Corporation (s.f.). *E6A2-CWZ3E Rotary Encoder (Incremental)*.
- Pena, P., Garcia, M., and Tekes, A. (2020). Modeling of compliant mechanisms in matlab simscape. In *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, volume 84553, page V07BT07A020. American Society of Mechanical Engineers.

-
- Rugh, W. J. (1990). Analytical framework for gain scheduling. In *1990 American Control Conference*, pages 1688–1694. IEEE.
- Rugh, W. J. and Shamma, J. S. (2000). Research on gain scheduling. *Automatica*, 36(10):1401–1425.
- Ríos Ruiz, C. (2016). Estabilización y control de velocidad de una bicicleta mediante el enfoque takagi-sugeno. *Tecnológico Nacional de México*.
- Sánchez, L. G., Civera, J. I., Pinatti, C. A. O., Lladró, R. C., and Miró, N. L. (2022). Trabajo final de electrónica digital. control remoto de vehículo robotizado. In *Libro de actas TAAE 2022 XV Congreso de Tecnología, Aprendizaje y Enseñanza de la Electrónica: Livro de procedimentos TAAE 2022 XV Conferência em Tecnologia, Aprendizagem e Ensino da Eletrônica= Proceedings book TAAE 2022 XV International Conference of Technology, Learning and Teaching of Electronics*, page 19. Escuela Universitaria Politécnica de Teruel.
- Schwab, A. and Meijaard, J. (2013a). A review on bicycle dynamics and rider control. *Vehicle System Dynamics*, 51.
- Schwab, A. L. and Meijaard, J. P. (2013b). A review on bicycle dynamics and rider control. *Vehicle System Dynamics*, 51(7):1059–1090.
- Schwab, A. L., Meijaard, J. P., and Papadopoulos, J. M. (2005). Benchmark results on the linearized equations of motion of an uncontrolled bicycle. *Journal of mechanical science and technology*, 19(1):292–304.
- Sename, O. (2021). Review on lpv approaches for suspension systems. *Electronics*, 10(17):2120.
- Teknomovo (s.f.). Servomotor DS3225 180° 25kg-cm. <https://teknomovo.com.mx/producto/servomotor-ds3225-180-25kg-cm/>.
- Wang, H., He, S., Yu, J., Wang, L., and Liu, T. (2020). Research and implementation of vehicle target detection and information recognition technology based on ni myrio. *Sensors*, 20(6):1765.
- Whipple, F. J. (1899). The stability of the motion of a bicycle. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 30(120):312–348.
- Yang, B., Guo, L., and Ye, J. (2020). Real-time simulation of electric vehicle powertrain: hardware-in-the-loop (HIL) testbed for cyber-physical security. In *2020 IEEE Transportation Electrification Conference & Expo (ITEC)*.
- Yuan, H., Dai, H., Wei, X., and Ming, P. (2020). Model-based observers for internal states estimation and control of proton exchange membrane fuel cell system: A review. *Journal of Power Sources*, 468:228376.
-